* PROBABILIDADE:

PROBABILIDADE DE UM EVENTO A: $P_R[A]$

$\equiv$ MEDIDA DA CHANCE DE A OCORRER

- PROBABILIDADE COMO FREQÜÊNCIA RELATIVA:

=> SEQÜÊNCIA DE REPETIÇÕES DO EXPTO., SOB IDÊNTICAS CONDIÇÕES

$f_n \equiv$ NÚMERO DE OCORRÊNCIAS DE A NAS PRIMEIRAS n REPETIÇÕES

$\frac{f_n}{n} \equiv$ FRAÇÃO DOS EXPTOS. EM QUE A OCORRE NAS PRIMEIRAS n REPETIÇÕES

QUANDO n CRESCE, ESTA FRAÇÃO TENDE A SE ESTABILIZAR:

$$P_R[A] \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{f_n}{n}$$

MAS, EM GERAL, A DETERMINAÇÃO DE PROBABILIDADES DESTA FORMA É IMPOSSÍVEL

=> DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA DA PROBABILIDADE

NÃO SE CONSIDERA A FORMA COMO AS PROBABILIDADES SÃO OBTIDAS, MAS SE ASSUME QUE ESTAS DEVEM SATISFAZER CERTOS AXIOMAS

- AXIOMAS DA PROBABILIDADE:

PARA SE ASSOCIAR PROBABILIDADES A EVENTOS, DE FORMA CONSISTENTE COM

$$P_R[A] = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n}{n}$$

CERTAS CONDIÇÕES SÃO NECESSÁRIAS:

i) COMO $0 \leq f_n/n \leq 1$, $\forall n$, ENTÃO

$$0 \leq P_R[A] \leq 1, \forall A$$

ii) PARA O <u>EVENTO</u> <u>CERTO</u>, $A = S$, $f_n = n$, E

$$P_R[S] = 1$$

iii) PARA EVENTOS A E B <u>MUTUAMENTE</u> <u>EXCLUSIVOS</u>, i.e., $A \cap B = \phi$,

$$f_n(A) + f_n(B) = f_n(A \cup B)$$

ENTÃO, $P_R[A \cup B] = P_R[A] + P_R[B]$

⇒ AXIOMAS: i) $0 \leq P_R[A] \leq 1$

ii) $P_R[S] = 1$; S = ESPAÇO AMOSTRAL

iii) $P_R[\bigcup_i A_i] = \sum_i P_R[A_i]$

SE $A_i \cap A_j = \phi$, $\forall i, j$

<u>SISTEMA DE PROBABILIDADE</u> = EXPTO. ALEATÓRIO + ESPAÇO AMOSTRAL + EVENTOS + PROBABILIDADES

- PROPRIEDADES DA PROBABILIDADE:

A PARTIR DOS AXIOMAS:

i) $P_R[\bar{A}] = 1 - P_R[A]$, $\forall A$

ii) $P_R[\phi] = 0$ ($\phi \equiv$ EVENTO IMPOSSÍVEL)

iii) SE A_1 E A_2 NÃO SÃO NECESSARIAMENTE MUTUAMENTE EXCLUSIVOS:

$$P_R[A_1 \cup A_2] = P_R[A_1] + P_R[A_2] - P_R[A_1 \cap A_2]$$

GENERALIZANDO:

$$P_R\left[\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right] = \sum_{i} P_R[A_i] - \sum_{i<j} P_R[A_i \cap A_j] + \dots +$$

$$+ (-1)^{k+1} P_R[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k]$$

(ONDE AS SOMAS SUCESSIVAS SÃO SOBRE EVENTOS, PARES DE EVENTOS, TRIPLAS DE EVENTOS, ETC.)

- ESPAÇOS AMOSTRAIS DISCRETOS:

=> QUALQUER EVENTO CONSISTE DE UMA COLEÇÃO DE PONTOS AMOSTRAIS (EVENTOS ELEMENTARES).

=> COMO PONTOS AMOSTRAIS NÃO TÊM INTERSEÇÃO, A PROBABILIDADE DE QUALQUER EVENTO É OBTIDA PELA SOMA DAS PROBABS. DOS SEUS PONTOS AMOSTRAIS (AXIOMA iii)

=> SE O ESPAÇO AMOSTRAL É <u>FINITO</u> COM N PONTOS AMOSTRAIS, PODE HAVER <u>EQÜIPROBABILIDADE</u>:

$$P_R[A_1] = P_R[A_2] = \dots = P_R[A_N] = \frac{1}{N}$$

- MÉTODOS DE CONTAGEM

A) PERMUTAÇÃO:

⇒ CONJUNTO DE OBJETOS ARRANJADOS EM CERTA ORDEM

e.g., ABC ≠ BCA

DADOS n OBJETOS, DE QUANTAS FORMAS SE PODE ESCOLHER k DELES, SEM REPETIÇÕES, QUANDO A ORDEM É RELEVANTE?

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

OBS.: i) $P(n,k)$ TAMBÉM É CONHECIDA COMO O NÚMERO DE ARRANJOS DE n OBJETOS, TOMADOS k A k.

ii) SE $n = k$: NÚMERO TOTAL DE PERMUTAÇÕES DE k OBJETOS: $P(k,k) = k!$

iii) SE REPETIÇÕES DE UM MESMO OBJETO SÃO PERMITIDAS:

n^k PERMUTAÇÕES

e.g., OBJETOS A, B, C

NÚMERO DE PERMUTAÇÕES 2 A 2: $\frac{3!}{1!} = 6$

AB, BA, AC, CA, BC, CB

NÚMERO DE PERMUTAÇÕES 2 A 2 COM REPETIÇÃO: $3^2 = 9$

AB, BA, AC, CA, BC, CB, AA, BB, CC

B) COMBINAÇÃO:

=> CONJUNTO DE OBJETOS, INDEPENDENTE DA ORDEM

ABC = BCA

DADOS n OBJETOS, DE QUANTAS FORMAS SE PODE ESCOLHER k DELES, SEM REPETIÇÃO, QUANDO A ORDEM É IRRELEVANTE?

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \equiv \binom{n}{k}$$

OBS.: i) BINÔMIO DE NEWTON:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

ii) $P(n,k) = C(n,k)\,k!$

- AMOSTRAGEM COM REPOSIÇÃO E SEM REPOSIÇÃO:

* AMOSTRAGEM COM REPOSIÇÃO OU EM UMA POPULAÇÃO MUITO GRANDE

=> A AMOSTRAGEM NÃO REDUZ A POPULAÇÃO
=> AS AMOSTRAGENS SÃO MUTUAMENTE INDEPENDENTES
=> DISTRIBUIÇÃO <u>BINOMIAL</u>

e.g., ESCOLHER k PEÇAS DEFEITUOSAS EM n, QUANDO p É A PROBABILIDADE DE DEFEITO

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

* AMOSTRAGEM SEM REPOSIÇÃO EM UMA POPULAÇÃO FINITA

=> CADA AMOSTRAGEM REDUZ A POPULAÇÃO
=> AS AMOSTRAGENS NÃO SÃO MUTUAMENTE INDEPENDENTES
=> DISTRIBUIÇÃO <u>HIPERGEOMÉTRICA</u>

$$\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

N = TOTAL DE PEÇAS

K = TOTAL DE PEÇAS DEFEITUOSAS

$\therefore\ p = \frac{K}{N}$ = PROB. DE DEFEITO

QUANDO $N \to \infty$, A DIST. HIPERGEOMÉTRICA TENDE PARA A DIST. BINOMIAL

- PROBABILIDADE CONDICIONAL:

=> EVENTOS CUJAS OCORRÊNCIAS ESTÃO INTERLIGADAS.
A OCORRÊNCIA DE UM DELES AFETA A PROBABILIDADE DE OCORRÊNCIA DO OUTRO.

e.g., EXPTO: ESCOLHER ALEATORIAMENTE UMA PALAVRA NUM DICIONÁRIO

EVENTO A: A LETRA u APARECE NA PALAVRA

EVENTO B: A LETRA q APARECE NA PALAVRA

=> SE SABEMOS QUE B OCORRE, A NOSSA ESTIMATIVA DA PROBABILIDADE DE OCORRÊNCIA DE A É ALTERADA

DEFINIÇÃO: PROBABILIDADE CONDICIONAL DE A DADO B
(i.e., PROB. CONDICIONAL DE OCORRER A, DADO QUE SABEMOS QUE B OCORRE)

$$P_R[A|B] = \frac{P_R[A \cap B]}{P_R[B]}, \quad \text{com } P_R[B] \neq 0$$

=> $P_R[A|B]$ É A PROBABILIDADE DE $A \cap B$ RELATIVAMENTE À PROBABILIDADE DE B.

EVENTOS INDEPENDENTES:

$$P_R[A|B] = P_R[A] \therefore P_R[A \cap B] = P_R[A]\,P_R[B]$$

=> OCORRÊNCIA DE B NÃO AFETA A PROBABILIDADE DE A

- PROBABILIDADE CONDICIONAL PARA n EVENTOS:

$$P_R[A_n | A_1, A_2, \dots, A_{n-1}] = \frac{P_R[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n]}{P_R[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}]}$$

$$\therefore P_R[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] = \underbrace{P_R[A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]}_{\substack{\| \\ P_R[A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}] P_R[A_{n-1} | A_1, \dots, A_{n-2}]}} P_R[A_n | A_1, \dots, A_{n-1}]$$

(PROB. CONJUNTA DE $A_1, A_2, \dots, A_n$)

$$\underbrace{P_R[A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}]}_{\text{ETC...}}$$

$$\therefore P_R[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] = P_R[A_1] P_R[A_2 | A_1] P_R[A_3 | A_1 \cap A_2] \dots$$
$$\dots P_R[A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}]$$

- INDEPENDÊNCIA DE n EVENTOS:

$A_1, A_2, \dots, A_n$ SÃO INDEPENDENTES SE

$$P_R[A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n] = P_R[A_1] P_R[A_2] \dots P_R[A_n]$$

E SE UMA EXPRESSÃO SIMILAR VALE PARA QUALQUER SUBCONJUNTO DOS EVENTOS

- INDEPENDÊNCIA 2 A 2:

$$\Rightarrow P_R[A_i \cap A_j] = P_R[A_i] P_R[A_j] \quad \forall i, j$$

OBS.: NÃO GARANTE QUE TODO O CONJUNTO DE EVENTOS SEJA INDEPENDENTE.

EXEMPLOS:

i) EXPTO: LANÇAMENTO DE 2 MOEDAS

EVENTOS: A: MOEDA 1 É CARA

B: MOEDA 2 É CARA

C: AS 2 MOEDAS SÃO IGUAIS

1ª MOEDA	2ª MOEDA
K	K
K	C
C	K
C	C

ESPAÇO AMOSTRAL

$$P_R[A] = \frac{1}{2}, \quad P_R[B] = \frac{1}{2}, \quad P_R[C] = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} P_R[B|A] &= P_R[B] = \frac{1}{2} \\ P_R[C|A] &= P_R[C|B] = P_R[C] = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A, B \text{ e } C \text{ SÃO INDEPS. DOIS A DOIS}$$

MAS,

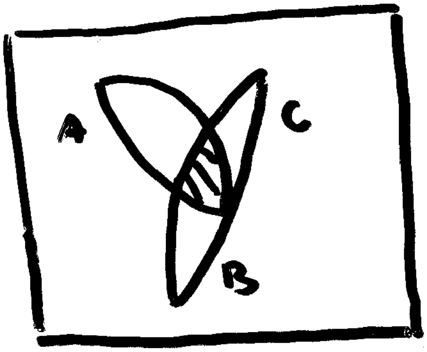
$$P_R[A \cap B \cap C] = \frac{1}{4} \quad \left(= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\right)$$

$$\therefore P_R[A \cap B \cap C] \neq P_R[A]\, P_R[B]\, P_R[C] = \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow$ A, B e C <u>NÃO SÃO</u> INDEPENDENTES

ii) $P_R[A] = P_R[B] = P_R[C] = \frac{1}{5}$

$$P_R[A \cap B] = P_R[A \cap C] = P_R[B \cap C] = P_R[A \cap B \cap C] = p$$



$A \cap B \equiv A \cap C \equiv B \cap C \equiv$
$\equiv A \cap B \cap C$

A) SE $p = \frac{1}{25}$: EVENTOS INDEPS. DOIS A DOIS, MAS NÃO INDEPENDENTES

POIS $P_R[A \cap B] = P_R[A] P_R[B] = 1/25$, ETC.

MAS $P_R[A \cap B \cap C] \neq P_R[A] P_R[B] P_R[C] = \frac{1}{125}$

B) SE $p = \frac{1}{125}$: $P_R[A \cap B \cap C] = P_R[A] P_R[B] P_R[C]$

MAS OS EVENTOS NÃO SÃO INDEPS. 2 A 2

POIS $P_R[A \cap B] \neq P_R[A] P_R[B]$, ETC.

$\Rightarrow$ OS TRÊS EVENTOS <u>NÃO SÃO</u> INDEPENDENTES

RESUMO

- ESPAÇOS AMOSTRAIS
- REVISÃO DE CONJUNTOS
- PROBABILIDADE COMO FREQUÊNCIA RELATIVA
- AXIOMAS DA PROBABILIDADE

  EVENTOS <u>MUTUAMENTE</u> <u>EXCLUSIVOS</u>: $P_R[A \cup B] = P_R[A] + P_R[B]$
- PROPRIEDADES DA PROBABILIDADE
- MÉTODOS DE CONTAGEM: PERMUTAÇÃO E COMBINAÇÃO
- PROBABILIDADE <u>CONDICIONAL</u>: $\dfrac{P_R[A \cap B]}{P_R[B]} = P_R[A|B]$
- PROBABILIDADE <u>CONJUNTA</u>: $P_R[A \cap B] = P_R[A|B]\,P_R[B]$
- EVENTOS <u>INDEPENDENTES</u>:

$$P_R[A \cap B] = P_R[A]\,P_R[B]$$

$$P_R[A|B] = P_R[A]$$

RESUMO

- AMOSTRAGEM COM REPOSIÇÃO E SEM REPOSIÇÃO

'DISTRIBUIÇÃO' BINOMIAL: $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $q = 1 - p$

'DISTRIBUIÇÃO' HIPERGEOMÉTRICA: $\dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

- PROBABILIDADE CONDICIONAL PARA EVENTOS EXAUSTIVOS

⇒ REGRA DE BAYES: $P_r[B_j|A_i] = \dfrac{P_r[B_j]\,P_r[A_i|B_j]}{P_r[A_i]}$

$$P_r[A_i] = \sum_j P_r[B_j]\,P_r[A_i|B_j]$$

- MATRIZ DE PROBABILIDADES CONJUNTAS E MARGINAIS

$P_r[A_i \cap B_j] \equiv$ PROB. CONJUNTA DE A_i E B_j

$P_r[A_i] = \sum_j P_r[A_i \cap B_j] \equiv$ PROB. MARGINAL DE A_i

$P_r[B_j] = \sum_i P_r[A_i \cap B_j] \equiv$ PROB. MARGINAL DE B_j