- VARIÁVEIS ALEATÓRIAS:

É CONVENIENTE TRABALHARMOS COM ESPAÇOS AMOSTRAIS CONSISTINDO APENAS DE ELEMENTOS NUMÉRICOS

i.e., COM NÚMEROS ASSOCIADOS AOS EVENTOS

DEFINIÇÃO: UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA É UMA FUNÇÃO QUE, A CADA PONTO AMOSTRAL NO ESPAÇO S, ASSOCIA UM NÚMERO.

e.g., ASSOCIAMOS OS VALORES $X(\text{CARA}) = 0$, $X(\text{COROA}) = 1$, AOS RESULTADOS DO LANÇAMENTO DE UMA MOEDA

ESCOLHEMOS UMA PESSOA ALEATORIAMENTE, E MEDIMOS A SUA ALTURA: $X(\text{JOÃO}) = 1{,}80\ m$

OBSERVAÇÕES:

i) O TERMO VARIÁVEL NÃO CORRESPONDE AO SENTIDO MATEMÁTICO USUAL; É MANTIDO POR TRADIÇÃO

ii) O ESPAÇO AMOSTRAL É O DOMÍNIO DA V.A.
O CONJUNTO DE VALORES DE X É O CONTRADOMÍNIO DA V.A.
(ESTE PASSA A SER O NOVO ESPAÇO AMOSTRAL DO EXPTO.)

iii) NÃO EXISTE REGRA PARA ASSOCIAR VARIÁVEIS ALEATÓRIAS AOS PONTOS AMOSTRAIS

iv) O MAPEAMENTO DA V.A. NÃO PRECISA SER BIUNÍVOCO.
PODE HAVER MAIS DE UM PONTO NO DOMÍNIO PARA UM ÚNICO PONTO NO CONTRADOMÍNIO

- EVENTOS DEFINIDOS POR V.A.'S :

$S \equiv$ ESPAÇO AMOSTRAL

$X \equiv$ VARIÁVEL ALEATÓRIA

$x \equiv$ NÚMERO REAL DADO

$\Rightarrow$ EVENTO $A_x = \{ s : X(s) = x \}$

(NOTAÇÃO DE CLARKE & DISNEY : $A_x = [X = x]$)

O EVENTO A_x TERÁ UMA PROBABILIDADE ASSOCIADA

$$P_R[A_x]$$

(NOTAÇÃO DE C&D : $P_R[X = x]$)

e.g., $S = \{ s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 \}$

COM $P_R[s_i] = p_i$, $\sum_i p_i = 1$

V.A. : $X(s_1) = X(s_3) = 0$

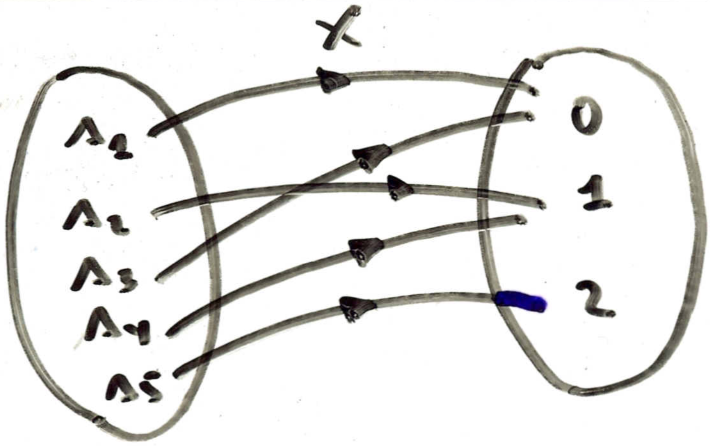
$X(s_2) = X(s_4) = 1$

$X(s_5) = 2$

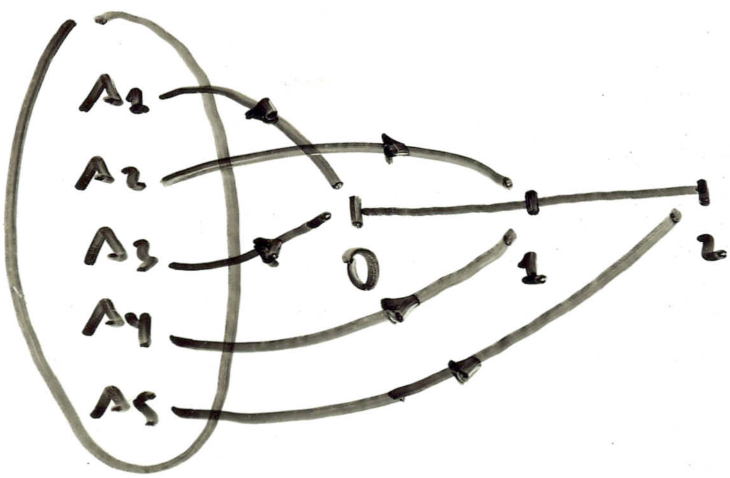
$\Rightarrow A_0 = \{ s : X(s) = 0 \} = \{ s_1, s_3 \} \equiv [X = 0]$

$A_1 = \{ s : X(s) = 1 \} = \{ s_2, s_4 \} \equiv [X = 1]$

$A_2 = \{ s : X(s) = 2 \} = \{ s_5 \} \equiv [X = 2]$



OU



- PROBABILIDADES: $P_R[X=0] = p_1 + p_3$

$$P_R[X=1] = p_2 + p_4$$

$$P_R[X=2] = p_5$$

⇒ A DISTRIBUIÇÃO DAS PROBABILIDADES NO ESPAÇO AMOSTRAL ORIGINAL E NO ESPAÇO DA V.A. NÃO É A MESMA.

e.g., SE $p_i = \frac{1}{5}$, $\forall i$ ⇒ EQÜIPROBABILIDADE EM S

MAS, $P_R[X=0] = P_R[X=1] = \frac{2}{5} \neq P_R[X=2] = \frac{1}{5}$

⇒ NÃO HÁ MAIS EQÜIPROBABILIDADE

MAS, CLARO QUE $P_R[X=0] + P_R[X=1] + P_R[X=2] = 1$

- FUNÇÕES DISTRIBUIÇÃO:

ASSIM COMO $[X=x]$, PODEM-SE DEFINIR OUTROS EVENTOS EM TERMOS DA V.A.

e.g., $[a < X < b] = \{\lambda : a < X(\lambda) < b\}$

COM PROBABILIDADE $P_R[a < X < b]$

OU $[X \leq x] = \{\lambda : X(\lambda) \leq x\}$

- DEFINIÇÃO: DADO O EVENTO $[X \leq x] = \{\lambda : X(\lambda) \leq x\}$, A PROBABILIDADE $P_R[X \leq x]$ É UMA FUNÇÃO DE x, CHAMADA <u>FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO</u> OU <u>FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO CUMULATIVA</u>

$$F_X(x) \equiv F(x) = P_R[X \leq x] \quad , -\infty < x < \infty$$

DOMÍNIO: NÚMEROS REAIS

CONTRADOMÍNIO: ENTRE 0 E 1

* A MAIOR PARTE DAS INFORMAÇÕES RELEVANTES SOBRE UM SISTEMA DE PROBABILIDADE, NO QUE CONCERNE A VARIÁVEL ALEATÓRIA X, É DADA POR $F_X(x)$.

- PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO:

A) $0 \leq F(x) \leq 1$, para $-\infty < x < \infty$

B) Se $x_1 \leq x_2$, $F(x_1) \leq F(x_2)$

$\Rightarrow F(x)$ é uma função <u>não-decrescente</u> de x.

C) $\lim_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1$

e

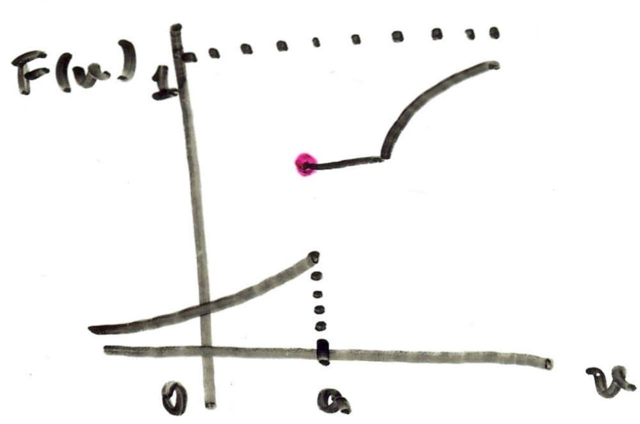
$\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$

D) $\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

$\Rightarrow F(x)$ é contínua à direita

* em geral, $F(x)$ não é contínua à esquerda, apresenta <u>saltos</u>

* Se um salto ocorre em x_0, então $F(x_0)$ é <u>sempre</u> o valor <u>superior</u>



OBSERVAÇÕES:

i) QUALQUER FUNÇÃO SATISFAZENDO AS PROPRIEDADES ACIMA É FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE <u>ALGUMA</u> V.A.

ii) PODE-SE FAZER UMA ANALOGIA ENTRE A DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE E UMA DISTRIBUIÇÃO DE MASSA SOBRE A RETA REAL:

MASSA TOTAL DE 1 UNIDADE DISTRIBUÍDA SOBRE A RETA

$\Rightarrow$ PROBABILIDADE ASSOCIADA A QUALQUER SUBCONJUNTO DA RETA É IGUAL À MASSA DO SUBCONJUNTO

$\Rightarrow$ $F(u)$ É A MASSA DA PARTE DA RETA À ESQUERDA DE u (INCLUINDO u)

iii) PROBABILIDADES DA FORMA $P_r[a < X \leq b]$ OU $P_r[X > a]$ PODEM SER OBTIDAS A PARTIR DE $F(u)$

e.g., A) COMO $[X \leq a] \cup [X > a] = S$

$$P_r[X > a] = 1 - P_r[X \leq a] = 1 - F(a)$$

B) COMO $[X \leq a] \cup [a < X \leq b] = [X \leq b]$

$$P_r[a < X \leq b] = F(b) - F(a)$$

- VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS:

UMA V.A. DISCRETA É AQUELA CUJOS VALORES ADMISSÍVEIS SÃO DISCRETOS

⇒ A SUA FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO VARIA EM SALTOS

e.g., FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

$$F(x) = \sum_{j \leq x} \binom{n}{j} p^j q^{n-j}$$

COM $0 \leq p \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$, $p+q=1$

n INTEIRO POSITIVO

j INTEIRO NÃO-NEGATIVO

$x \geq 0$ (JÁ QUE $x \geq j$)

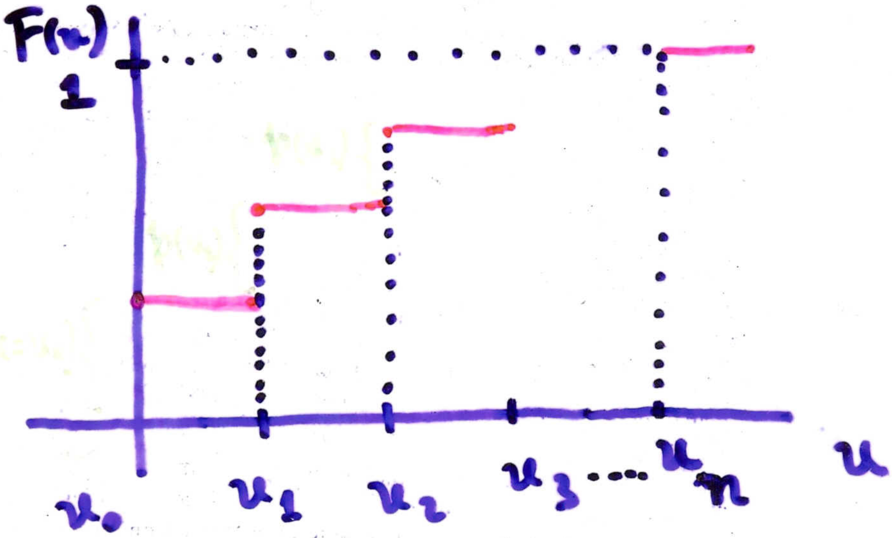
⇒ CONTRIBUIÇÕES NÃO-NULAS PARA $F(x)$ OCORREM APENAS EM UM CONJUNTO DISCRETO DE PONTOS, INTEIROS OU NÃO: $x_0, x_1, x_2, \ldots$

- ESTAS CONTRIBUIÇÕES NÃO-NULAS ESTÃO ASSOCIADAS À FUNÇÃO <u>DENSIDADE DE PROBABILIDADE</u> DA VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA.

- FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE:

$$p(x) = P_r[X = x] \qquad \text{(V.A. DISCRETA)}$$

⇒ $p(x)$ ASSUME VALORES NÃO-NULOS APENAS NOS PONTOS DE DESCONTINUIDADE DE $F(x)$: $x_0, x_1, x_2, \ldots$



$$\therefore \; p(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) \; ; \; p(x) = 0 \text{ se } x \neq x_i$$

⇒ RELAÇÃO ENTRE $p(x)$ E $F(x)$:

PARA UM x QUALQUER:

$$F(x) = P_r[X \leq x] = P_r[X = x_i, \forall x_i \leq x] =$$

$$= \sum_{x_i \leq x} P_r[X = x_i]$$

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P_r[X = x_i]$$, ONDE OS x_i SÃO OS PONTOS DE DESCONTINUIDADE DE $F(x)$

- PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DENSIDADE:

i) $p(x)=0$, se $x \neq x_i$, onde x_i é um ponto de descontinuidade de $F(x)$

ii) $0 \leq p(x_i) \leq 1$, $\forall x_i$

iii) $\sum_i p(x_i) = \sum_i P_R[X=x_i] = 1$

- OBSERVAÇÕES:

i) $p(x)$ determina completamente a probabilidade de eventos da forma

$[X \leq a], [X \geq a], [a \leq X \leq b]$, etc.

ii) O uso de $p(x)$ ou de $F(x)$ para determinar a probabilidade de eventos depende apenas da maior facilidade de uma ou outra.

iii) Pode-se fazer uma analogia entre a densidade de probabilidade e uma densidade de massa sobre a reta real.

$\Rightarrow$ Massa total de 1 unidade

Distribuição discreta: massas pontuais nos pontos x_i: $p(x_i)$

- Variáveis Aleatórias Contínuas:

Uma V.A. contínua é aquela cuja função distribuição é contínua

$\Rightarrow$ Daí resulta que $P_R[X=x]=0, \forall x$

Pois,

$$P_R[X=x] = \lim_{h \to 0} P_R[x-h < X \leq x] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[F(x) - F(x-h)\right] = 0$$

(pela continuidade de $F(x)$)

- Função Densidade de Probabilidade:

A definição $p(x) = P_R[X=x]$ não se aplica para variáveis aleatórias contínuas

$\Rightarrow$ Redefinimos a função densidade, neste caso, generalizando a relação

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i) \quad \text{(caso discreto)}$$

para

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \text{(caso contínuo)}$$

$\therefore$ $f(x) = \dfrac{d}{dx} F(x)$ (função densidade para V.A. contínua)

- PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DENSIDADE CONTÍNUA:

i) $f(x)=0$, SE x NÃO PERTENCE AO CONTRADOMÍNIO DA VARIÁVEL X

ii) $f(x) \geq 0$, $\forall x$, JÁ QUE $F(x)$ É NÃO-DECRESCENTE

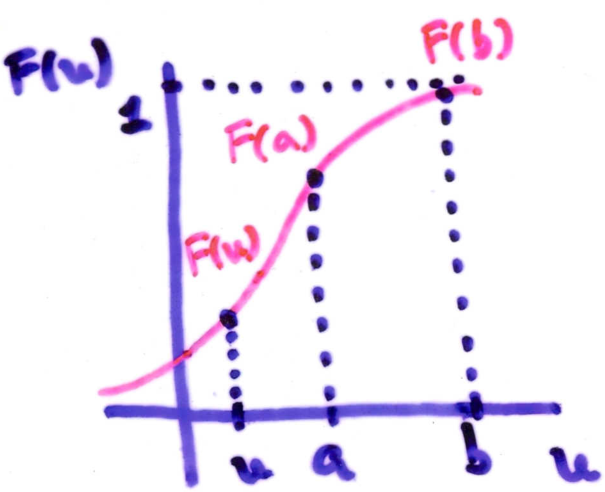
iii) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1$$

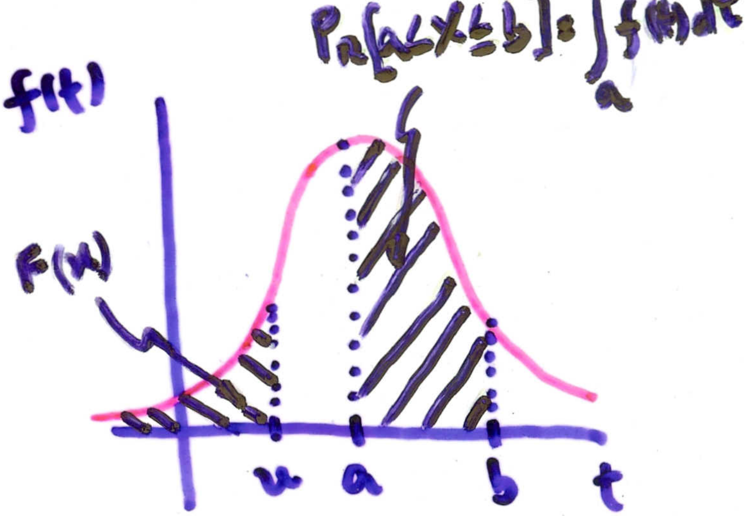
OBSERVAÇÕES:

i) A ANALOGIA COM UMA DISTRIBUIÇÃO DE MASSA NO EIXO REAL TAMBÉM SE APLICA:

$f(x) \equiv$ MASSA POR UNIDADE DE COMPRIMENTO (DENSIDADE DE MASSA)

ii) EXPERIMENTOS REAIS NÃO PRODUZEM VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS, MAS ESTAS PODEM SER USADAS COMO APROXIMAÇÃO





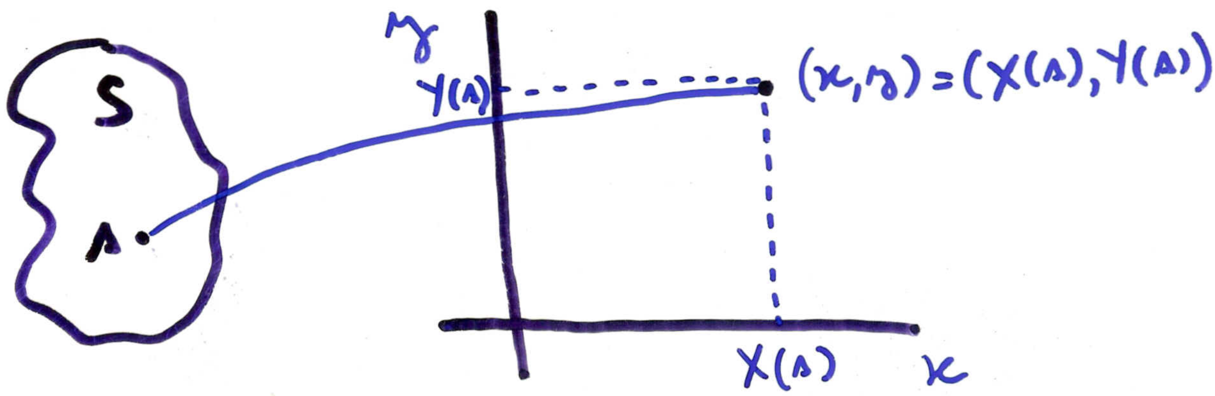
– CONJUNTOS E SEQUÊNCIAS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

PARES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS:

X, Y DUAS V.A. DEFINIDAS NO MESMO ESPAÇO AMOSTRAL, S
CONTRADOMÍNIOS EM $\mathbb{R}$

⇒ CADA PONTO AMOSTRAL $\lambda \in S$ DEFINE UM PAR DE NÚMEROS REAIS, $x = X(\lambda)$ E $y = Y(\lambda)$

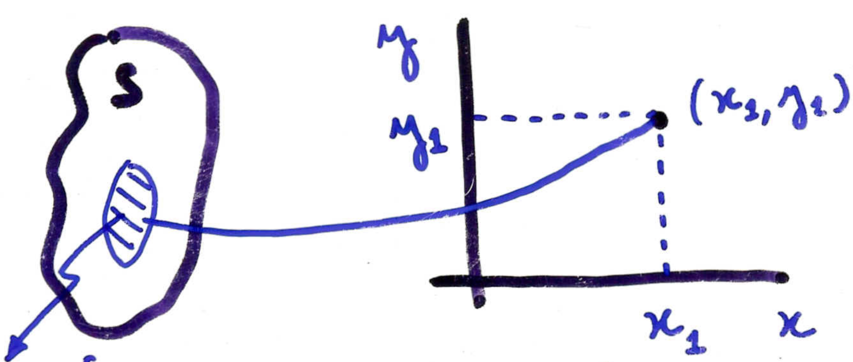
⇒ O PAR (X, Y) PODE SER CONSIDERADO UMA FUNÇÃO QUE ASSOCIA UM PONTO λ DO ESPAÇO AMOSTRAL A UM PONTO (x, y) NO PLANO REAL



⇒ PODEMOS CONSTRUIR CORRESPONDÊNCIAS ENTRE CERTOS EVENTOS (SUBCONJUNTOS DE S) E CERTAS REGIÕES NO PLANO (x, y)

e.g., i) EVENTO $A = [X = x_1 \text{ e } Y = y_1] \equiv \{\lambda : X(\lambda) = x_1 \text{ e } Y(\lambda) = y_1\}$

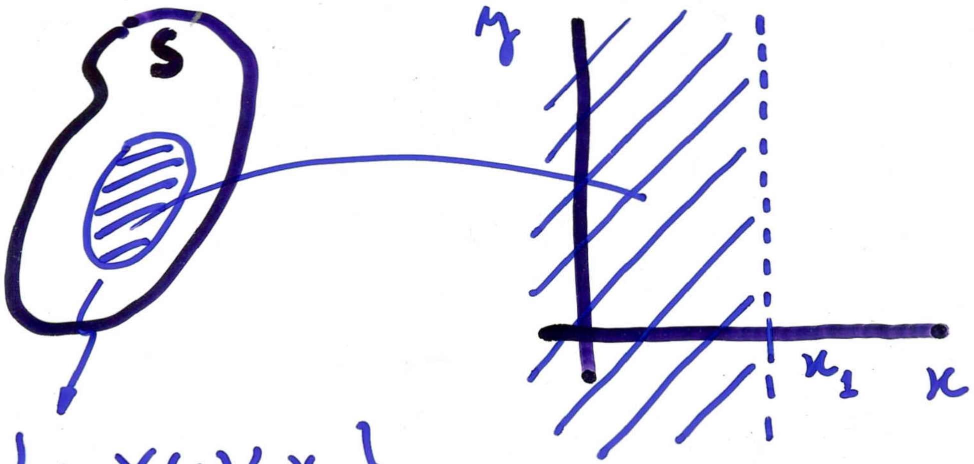
⇒ PONTO NO PLANO REAL



$A = \{\lambda : X(\lambda) = x_1, Y(\lambda) = y_1\}$

ii) EVENTO $B = [X \leq x_1] \equiv \{s : X(s) \leq x_1\}$

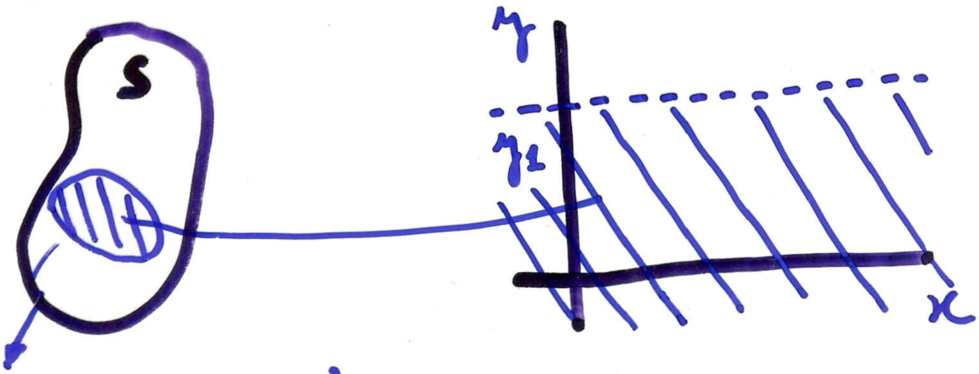
$\Rightarrow$ REGIÃO À ESQUERDA DA LINHA $x = x_1$



$B = \{s : X(s) \leq x_1\}$

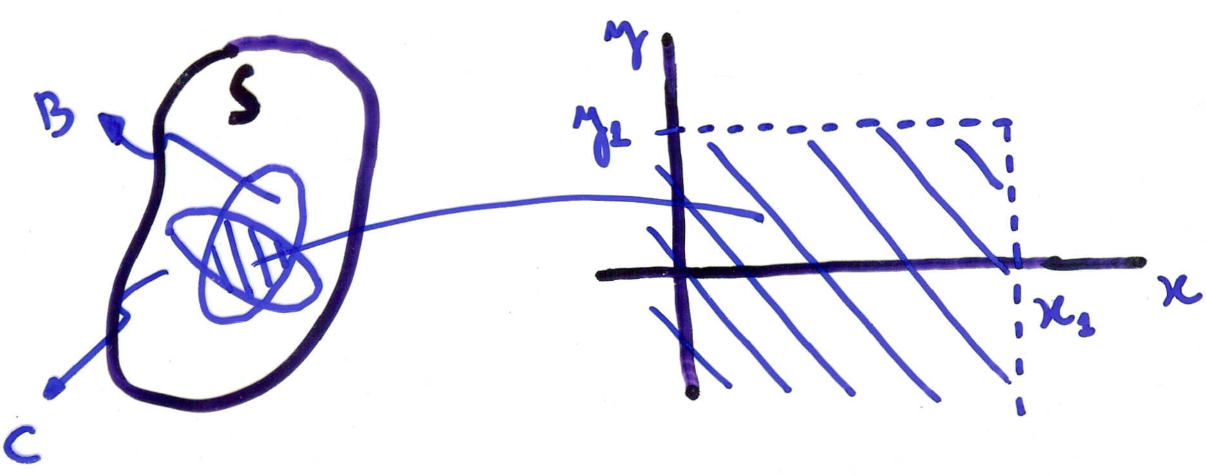
iii) EVENTO $C = [Y \leq y_1] \equiv \{s : Y(s) \leq y_1\}$

$\Rightarrow$ REGIÃO ABAIXO DA LINHA $y = y_1$



$C = \{s : Y(s) \leq y_1\}$

iv) EVENTO $D = [X \leq x_1 \text{ e } Y \leq y_1] = [X \leq x_1] \cap [Y \leq y_1] = B \cap C$



- FUNÇÕES DISTRIBUIÇÃO

TODOS OS EVENTOS DEFINIDOS EM TERMOS DE X E Y, COMO ACIMA, TÊM PROBABILIDADES ASSOCIADAS.

EM PARTICULAR,

$$F_X(x) = P_R[X \leq x] \equiv \text{FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DA VARIÁVEL ALEATÓRIA } X$$

$$F_Y(y) = P_R[Y \leq y] \equiv \text{FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DA VARIÁVEL ALEATÓRIA } Y$$

$$F_{XY}(x,y) \equiv F(x,y) = P_R[X \leq x \text{ E } Y \leq y] \equiv \text{FUNÇÃO } \underline{\text{DISTRIBUIÇÃO}}\ \underline{\text{CONJUNTA}} \text{ DE } X \text{ E } Y$$

- PROPRIEDADES DAS FUNÇÕES DE DISTRIBUIÇÃO CONJUNTAS:

i) $0 \leq F(x,y) \leq 1$, $-\infty < x, y < \infty$

* RESULTA DO FATO DE QUE $F(x,y)$ É UMA PROBABILIDADE

ii) SE $x_1 \leq x_2$ E $y_1 \leq y_2$, $F(x_1,y_1) \leq F(x_2,y_2)$

* RESULTA DE QUE $[X \leq x_1 \text{ E } Y \leq y_1] \subset [X \leq x_2 \text{ E } Y \leq y_2]$

iii) $\lim\limits_{x \to a+} F(x,y) = F(a,y)$ E $\lim\limits_{y \to b+} F(x,y) = F(x,b)$

(CONTINUIDADE À DIREITA)

iv) $\lim_{x\to\infty,\, y\to\infty} F(x,y) \equiv F(\infty,\infty) = 1$

$\lim_{x\to -\infty} F(x,y) \equiv F(-\infty, y) = 0$

$\lim_{y\to -\infty} F(x,y) \equiv F(x,-\infty) = 0$

* O EVENTO $[X \leq x$ E $Y \leq y]$ TENDE AO EVENTO <u>CERTO</u>, QUANDO $x \to \infty, y \to \infty$, E AO EVENTO <u>IMPOSSÍVEL</u>, QUANDO $x \to -\infty$ OU $y \to -\infty$

V) QUAISQUER QUE SEJAM $a \leq b$ E $c \leq d$,

$$F(a,c) - F(a,d) - F(b,c) + F(b,d) \geq 0$$

* RESULTA DO FATO DE QUE

$$F(a,c) - F(a,d) - F(b,c) + F(b,d) = P_r[a < X \leq b \text{ e } c < Y \leq d]$$

OBSERVAÇÕES: A) A EXPRESSÃO ACIMA PERMITE DETERMINAR A PROBABILIDADE DE EVENTOS DA FORMA GERAL

$$R = [a < X \leq b \text{ e } c < Y \leq d]$$

A PARTIR DA FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA.

CASOS PARTICULARES:

$$P_r[a < X \leq b \text{ e } Y \leq y_2] = F(b, y_2) - F(a, y_2)$$

$$P_r[X \leq x_2 \text{ e } c < Y \leq d] = F(x_2, d) - F(x_2, c)$$

B) AS CINCO PROPRIEDADES ACIMA SÃO NECESSÁRIAS E SUFICIENTES PARA QUE UMA FUNÇÃO $F(x,y)$ SEJA UMA DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA

Vi) $F(x,\infty) = F_X(x)$ e $F(\infty,y) = F_Y(y)$

* Resulta de que, para $y \to \infty$, $[X \le x$ e $Y \le y]$ tende a $[X \le x$ e $Y \le \infty] \equiv [X \le x]$, já que $Y \le \infty$ é sempre satisfeita (e similarmente para $x \to \infty$)

$\Rightarrow$ Funções distribuição individuais de X ou Y podem ser obtidas da sua função distribuição conjunta.

Quando obtidas desta forma, $F_X(x)$ ou $F_Y(y)$ são chamadas distribuições marginais

- Variáveis aleatórias independentes

Definição: As variáveis aleatórias X e Y são independentes se os eventos $[X \le x]$ e $[Y \le y]$ forem independentes para todo x e y

$$\Rightarrow P_r[X \le x \text{ e } Y \le y] = P_r[X \le x]\,P_r[Y \le y], \quad \forall x, y$$

$$\text{ou} \quad F(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y), \quad \forall x, y$$

OBS.: i) Pode-se mostrar que, se $F_{XY}(x,y) = u(x)\,v(y)$, onde u e v são funções de uma única variável, então X e Y são variáveis aleatórias independentes.

ii) Se X e Y são independentes, todo evento $[a < X \le b]$ é independente de todo evento $[c < Y \le d]$:

$$P_r[a < X \le b \text{ e } c < Y \le d] = P_r[a < X \le b]\,P_r[c < Y \le d]$$