- FUNÇÕES DENSIDADE DISCRETAS:

SEJAM X E Y VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

$\Rightarrow$ O PAR (X,Y) TEM DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA DISCRETA

DEFINE-SE A FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE CONJUNTA DE X E Y COMO

$$p(x_i, y_j) = Pr[X = x_i \text{ e } Y = y_j]$$

ONDE $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ É O CONTRADOMÍNIO DE X

$\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ É O CONTRADOMÍNIO DE Y

PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DENSIDADE CONJUNTA DISCRETA:

i) $0 \leq p(x_i, y_j) \leq 1 \quad , \forall x_i, y_j$

ii) $\displaystyle\sum_{x_i, y_j} p(x_i, y_j) = 1$

iii) $\displaystyle F(x,y) = \sum_{\substack{x_i \leq x \\ y_j \leq y}} p(x_i, y_j)$

iv) $\left.\begin{aligned} p(x_i) &\equiv Pr[X = x_i] = \sum_{y_j} p(x_i, y_j) \\ q(y_j) &\equiv Pr[Y = y_j] = \sum_{x_i} p(x_i, y_j) \end{aligned}\right\}$ FUNÇÕES DENSIDADE MARGINAIS

v) $p(x_i, y_j) = p(x_i)\, q(y_j)$ SE E SÓ SE X E Y SÃO INDEPENDENTES

- FUNÇÕES DENSIDADE CONTÍNUAS:

Para X e Y variáveis contínuas, $Pr[X=x, Y=y] = 0$

=> Definimos a função <u>densidade de probabilidade conjunta</u> como

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x,y)$$

ou

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\, dt\, ds$$

Propriedades da função densidade conjunta contínua:

i) $f(x,y) \geq 0 \quad , \forall x,y$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy\, dx = 1$

iii) $$\left.\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \equiv F_X'(x) \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx \equiv F_Y'(y) \end{aligned}\right\}$$ Funções densidade <u>marginais</u>

iv) $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ se e só se X e Y são independentes

v) $Pr[a < X \leq b, c < Y \leq d] = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dy\, dx$

$$\equiv F(a,c) - F(a,d) - F(b,c) + F(b,d)$$

- FUNÇÃO DENSIDADE NORMAL BIVARIADA:

⇒ GENERALIZAÇÃO DA DENSIDADE NORMAL (UNIVARIADA)

⇒ X, Y VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS COM CONTRADOMÍNIOS $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, E FUNÇÃO DENSIDADE CONJUNTA

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right]\right\}$$

ONDE σ_x E σ_y SÃO OS DESVIOS-PADRÕES DE X E Y ($\sigma_x > 0$, $\sigma_y > 0$)

μ_x E μ_y SÃO AS MÉDIAS DE X E Y

ρ É O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO ENTRE X E Y ($-1 \leq \rho \leq 1$)

PROPRIEDADES: i) AS DENSIDADES MARGINAIS $f_X(x)$ E $f_Y(y)$ SÃO NORMAIS

e.g., $$f_X(x) = \frac{e^{-(x-\mu_x)^2/2\sigma_x^2}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}$$

ii) X E Y SÃO INDEPENDENTES, SE E SÓ SE $\rho = 0$

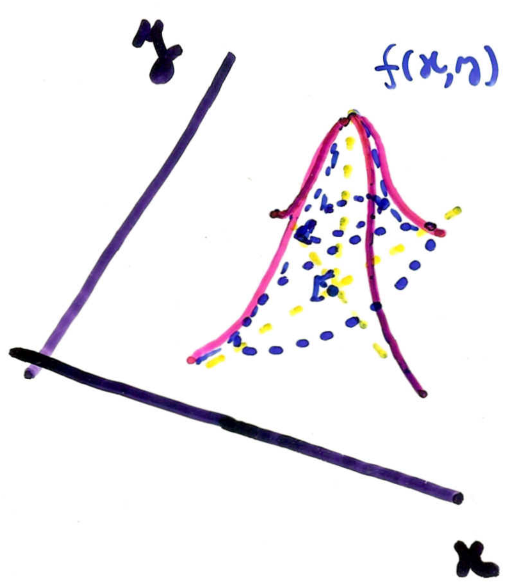
iii) $$f(x,y) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{x}-\tilde{\mu})^T K^{-1}(\tilde{x}-\tilde{\mu})\right\}}{2\pi\,|K|^{1/2}}$$

ONDE $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_x \\ \mu_y \end{pmatrix}$

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \rho\,\sigma_x\sigma_y \\ \rho\,\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$$ (MATRIZ DE COVARIÂNCIAS)

$|K| = \det K$ $\qquad$ $T \Rightarrow$ TRANSPOSIÇÃO

$K^{-1} \equiv$ INVERSA DE K



$\Rightarrow$ AS INTERSEÇÕES COM OS PLANOS $f(x,y) =$ CONSTANTE SÃO ELIPSES CUJOS EIXOS MAIORES FAZEM O ÂNGULO

$$\theta = \frac{1}{2}\,\text{ArcTg}\left(\frac{2\rho\,\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2-\sigma_y^2}\right)$$

COM O EIXO x

- DENSIDADES E DISTRIBUIÇÕES CONDICIONAIS:

- FUNÇÃO DENSIDADE CONDICIONAL:

* CASO DISCRETO:

DEFINIMOS,

$$p(y_j|x_i) \equiv P_r[Y=y_j|X=x_i] = \frac{P_r[X=x_i, Y=y_j]}{P_r[X=x_i]}$$

$$\therefore \ p(y_j|x_i) = \frac{p(x_i,y_j)}{p_X(x_i)} \qquad (p_X(x_i) \neq 0)$$

$\equiv$ FUNÇÃO DENSIDADE CONDICIONAL DE Y, DADO QUE $X = x_i$

$\Rightarrow$ y_j É VARIÁVEL E x_i É ASSUMIDO FIXO

* CASO CONTÍNUO:

DEFINIMOS $\displaystyle f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ $\qquad (f_X(x) \neq 0)$

OBSERVAÇÕES: i) SE X E Y SÃO VARIÁVEIS INDEPENDENTES,

$$p(y_j|x_i) = \frac{\cancel{p_X(x_i)}\, p_Y(y_j)}{\cancel{p_X(x_i)}} = p_Y(y_j)$$

E DO MESMO MODO, $f(y|x) = f_Y(y)$

ii) $\displaystyle \sum_j p(y_j|x_i) = 1$, $\displaystyle \int_{-\infty}^{\infty} f(y|x)\,dy = 1$

– FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO CONDICIONAL:

*** CASO DISCRETO:**

DEFINIMOS $F(y|x_i) = \sum_{y_j < y} p(y_j|x_i) \equiv P_r[Y \leq y | X = x_i]$

$\equiv$ FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO CONDICIONAL DE Y, DADO $X = x_i$

*** CASO CONTÍNUO:**

DEFINIMOS $F(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f(y'|x)\, dy' \equiv P_r[Y \leq y | X = x]$

$$\therefore\ f(y|x) = \frac{\partial}{\partial y} F(y|x)$$

OBSERVAÇÕES:

i) NO CASO DISCRETO: $F(y|x_i) \equiv P_r[Y \leq y | X = x_i] = \dfrac{P_r[Y \leq y, X = x_i]}{P_r[X = x_i]}$

NO CASO CONTÍNUO: $F(y|x) \equiv P_r[Y \leq y | X = x] =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{P_r[Y \leq y,\ x \leq X \leq x+h]}{P_r[x \leq X \leq x+h]}$$

ii) PODEM-SE DEFINIR OUTRAS DENSIDADES E DISTRIBUIÇÕES CONDICIONAIS.

e.g., $F_Y(y|B)$ OU $F_{ZY}(z, y|B)$

ONDE B É UM EVENTO QUALQUER

$$F_Y(y|B) = P_R[Y \leq y|B] = \frac{P_R[Y \leq y, B]}{P_R[B]}$$

SE $B = [X \leq x]$,

$$F_Y(y|X \leq x) = \frac{P_R[Y \leq y, X \leq x]}{P_R[X \leq x]}$$

$\equiv$ FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO CONDICIONAL DE Y, DADO QUE $X \leq x$

DA MESMA FORMA,

$$F_{ZY}(z, y|B) = P_R[Z \leq z, Y \leq y|B] = \frac{P_R[Z \leq z, Y \leq y, B]}{P_R[B]}$$

$\equiv$ FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA DE Z E Y, DADO O EVENTO B

iii) O TEOREMA DE BAYES VALE PARA AS DENSIDADE CONDICIONAIS

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{e} \quad f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

PROVA: RESOLVENDO PARA $f(x,y)$:

$$f(x,y) = f(x|y) f_Y(y) = f(y|x) f_X(x)$$

E USANDO $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$:

$$f(x|y) = f(y|x) f_X(x) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) f_X(x)\,dx$$

DE FORMA SEMELHANTE, OBTEMOS

$$F_X(x \mid Y \leq y) = \frac{F_X(x)\, F_Y(y \mid X \leq x)}{F_Y(y)}$$

MAS, EM GERAL, NÃO EXISTE UMA REGRA DE BAYES PARA FUNÇÕES DENSIDADE OU DISTRIBUIÇÃO CONDICIONAIS ARBITRÁRIAS

e.g., PARA $F_Y(y \mid x)$

E/OU PARA $F_X(x \mid y)$

- MUITAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

⇒ OS RESULTADOS ANTERIORES PODEM SER ESTENDIDOS PARA O CASO DE MAIS DE DUAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DEFINIDAS SOBRE O MESMO ESPAÇO AMOSTRAL

SEJAM $X_1, X_2, \dots, X_m$ VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

DEFINIMOS: FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m) = P_R[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_m \leq x_m]$$

* CASO DISCRETO (ASSUMINDO CONTRADOMÍNIO INTEIRO):

DEFINIMOS: - FUNÇÃO DENSIDADE CONJUNTA

$$p(i_1, i_2, \dots, i_m) = P_R[X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_m = i_m]$$

- DENSIDADES MARGINAIS DE UMA OU MAIS VARIÁVEIS

$$p_{X_m}(i_m) \equiv P_R[X_m = i_m] = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_{m-1}} p(i_1, i_2, \dots, i_m)$$

(DE 1 V.A.)

- DENSIDADES CONDICIONAIS

$$p(i_m | i_1, \dots, i_{m-1}) = P_R[X_m = i_m | X_1 = i_1, \dots, X_{m-1} = i_{m-1}]$$

$$= \frac{p(i_1, i_2, \dots, i_m)}{p_{X_1 \dots X_{m-1}}(i_1, \dots, i_{m-1})}$$

⇒ $X_1, X_2, \dots, X_m$ SÃO MUTUAMENTE INDEPENDENTES SE

$$p(i_1, i_2, \dots, i_m) = p_{X_1}(i_1)\, p_{X_2}(i_2) \dots p_{X_m}(i_m)$$

$$\forall\, i_1, i_2, \dots, i_m$$

* CASO CONTÍNUO:

DEFINIMOS: - FUNÇÃO DENSIDADE CONJUNTA

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{\partial^n F(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}$$

$$\Rightarrow P_r[a_1 \leq X_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq X_n \leq b_n] = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$$

- DENSIDADES MARGINAIS DE UMA OU MAIS VARIÁVEIS

$$f_{X_n}(x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 \ldots dx_{n-1} \quad \text{(DE 1 V.A.)}$$

$$f_{X_1 \ldots X_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_n \quad \text{(DE } n-1 \text{ VARIÁVEIS)}$$

- DENSIDADES CONDICIONAIS

$$f(x_n|x_1,\ldots,x_{n-1}) = \frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{f_{X_1 \ldots X_{n-1}}(x_1,\ldots,x_{n-1})}$$

$\Rightarrow X_1, X_2, \ldots, X_n$ SÃO MUTUAMENTE INDEPENDENTES SE

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

$$\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

$$\Rightarrow f(x_n|x_1,\ldots,x_{n-1}) = f_{X_n}(x_n)$$

– FUNÇÃO DENSIDADE NORMAL MULTIVARIADA:

⇒ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS COM CONTRADOMÍNIO $[-\infty, \infty]$ E FUNÇÃO DENSIDADE CONJUNTA

$$f_{X_1 X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{\tilde{X}}(\tilde{x}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{x}-\tilde{\mu})^T K^{-1}(\tilde{x}-\tilde{\mu})\right\}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |K|^{1/2}}$$

ONDE

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 & \cdots & \rho_{1n}\sigma_1\sigma_n \\ \rho_{21}\sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \cdots & \rho_{2n}\sigma_2\sigma_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}\sigma_n\sigma_1 & \rho_{n2}\sigma_n\sigma_2 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$ (MATRIZ DE COVARIÂNCIAS)

$\rho_{ij} = \rho_{ji}$ (MATRIZ SIMÉTRICA)

K^{-1} ≡ INVERSA DE K

$|K| = \det K$

T ⇒ TRANSPOSIÇÃO

- SEQÜÊNCIAS ALEATÓRIAS

=> O EXPERIMENTO ALEATÓRIO RESULTA NUMA SEQÜÊNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

$$\{X_i : i = 1, 2, 3, \dots\}$$

e.g., EVOLUÇÃO TEMPORAL DO VALOR DE UMA AÇÃO

TOMOGRAFIA SPET (=> DECAIMENTO RADIOATIVO)

* UMA SEQÜÊNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DEFINIDAS SOBRE O MESMO ESPAÇO AMOSTRAL CONSTITUI UM PROCESSO ALEATÓRIO (OU ESTOCÁSTICO) DE PARÂMETRO DISCRETO.

COMO EM MUITOS CASOS ESTES PROCESSOS DESCREVEM A VARIAÇÃO TEMPORAL DE SISTEMAS QUE EVOLVEM DE FORMA ALEATÓRIA, ELES TAMBÉM SÃO CHAMADOS PROCESSOS DE TEMPO DISCRETO.

O CONTRADOMÍNIO DAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DOS PROCESSOS DE PARÂMETRO DISCRETO PODE SER DISCRETO OU CONTÍNUO

e.g., PROCESSO ALEATÓRIO DE TEMPO DISCRETO E CONTRADOMÍNIO DISCRETO

$$\{X_j : j = 1, 2, 3, \dots\}, \quad X_j \in \mathbb{Z} \text{ (INTEIRO)}, \forall j$$

QUANDO $X_j = k$, DIZ-SE QUE 'O SISTEMA ESTÁ NO ESTADO k NO TEMPO j'

PARA DESCREVER O 'SISTEMA' NECESSITAMOS DE INFORMAÇÕES COMO

$$p(i_1, i_2, \ldots, i_n) = P_r[X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_n = i_n]$$

(FUNÇÃO DENSIDADE CONJUNTA PARA n INSTANTES)

OU

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P_r[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n]$$

(FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA PARA n INSTANTES)

e.g., PARA UM DADO n, OU PARA TODOS n, OU PARA $n \to \infty$, ETC.

NO CASO GERAL:

$$P_r[X_1 = i_1, X_2 = i_2, \ldots, X_n = i_n] = P_r[X_1 = i_1]\, P_r[X_2 = i_2 | X_1 = i_1] \ldots$$

$$\ldots\, P_r[X_n = i_n | X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}]$$

i.e., $p(i_1, i_2, \ldots, i_n) = p_{X_1}(i_1)\, p_{X_2}(i_2|i_1)\, p_{X_3}(i_3|i_1, i_2) \ldots p_{X_n}(i_n|i_1, \ldots, i_{n-1})$

$\Rightarrow$ O CÔMPUTO DA DENSIDADE p_{X_1} E DE TODAS AS DENSIDADES CONDICIONAIS É MUITO DIFÍCIL, A NÃO SER SOB CERTAS SIMPLIFICAÇÕES QUE SÃO POSSÍVEIS EM MUITOS CASOS PRÁTICOS

SIMPLIFICAÇÕES MAIS IMPORTANTES

- SEQÜÊNCIAS DE VARIÁVEIS MUTUAMENTE INDEPENDENTES
- SEQÜÊNCIAS DE VARIÁVEIS COM DEPENDÊNCIA MARKOVIANA (PROCESSOS DE MARKOV)

- SEQUÊNCIAS DE VARIÁVEIS INDEPENDENTES:

⇒ QUALQUER SUBCONJUNTO DAS VARIÁVEIS É MUTUAMENTE INDEPENDENTE

$$p_{X_m}(i_m \mid i_1, \ldots, i_{m-1}) = p_{X_m}(i_m), \quad \forall m$$

$$\therefore \quad p(i_1, i_2, \ldots, i_m) = p_{X_1}(i_1)\, p_{X_2}(i_2) \cdots p_{X_m}(i_m)$$

⇒ SÓ SE PRECISA DAS DENSIDADES INDIVIDUAIS, PARA CALCULAR AS PROBABILIDADES CONJUNTAS

SE, ALÉM DE INDEPENDENTES, TODAS AS VARIÁVEIS TÊM A MESMA DENSIDADE

i.e., $p_{X_j}(i) = p(i), \ \forall j$

⇒ A SEQUÊNCIA É DITA INDEPENDENTE E IDENTICAMENTE DISTRIBUÍDA (i.i.d.)

NESTE CASO,

$$p(i_1, i_2, \ldots, i_m) = p(i_1)\, p(i_2) \cdots p(i_m)$$

e.g., SEQUÊNCIA DE LANÇAMENTOS DE UMA MOEDA HONESTA

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_m\}, \text{ ONDE } X_k = \begin{cases} 1 & \text{(CARA)} \\ 0 & \text{(COROA)} \end{cases}$$

$$p_{X_k}(i_k) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & i_k = 0 \\ \frac{1}{2}, & i_k = 1 \end{cases} \quad \forall k \quad \Rightarrow \text{ SEQUÊNCIA i.i.d.}$$

e.g., CAMINHADA ALEATÓRIA ('RANDOM WALK')

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}, \text{ ONDE } X_k = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

$$p_{X_k}(i_k) = \begin{cases} p, & i_k = 1 \\ q, & i_k = -1 \end{cases} \quad \forall k \quad (p+q=1)$$

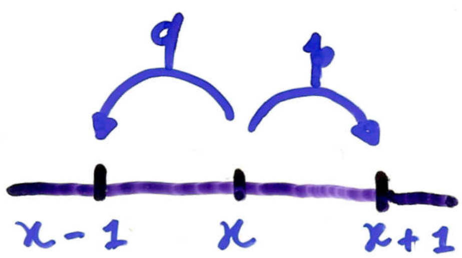
$\Rightarrow$ SEQÜÊNCIA i.i.d.

A FUNÇÃO DENSIDADE CONJUNTA PODE SER EXPRESSA COMO

$$p(i_1, i_2, \ldots, i_n) = p^m q^{n-m}$$

ONDE m É O NÚMERO DE $+1$ QUE APARECE EM $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$

$\Rightarrow$ MODELO DO MOVIMENTO BROWNIANO:



$i_k \equiv$ MOVIMENTO DA PARTÍCULA NO INSTANTE k

$+1 \equiv$ PARA A DIREITA

$-1 \equiv$ PARA A ESQUERDA

$$\sum_{k=1}^{n} i_k \equiv \text{POSIÇÃO DA PARTÍCULA NO INSTANTE } n$$

- SEQUÊNCIAS COM DEPENDÊNCIA MARKOVIANA:

=> A DENSIDADE CONDICIONAL $p_{X_m}(i_m|i_1,\ldots,i_{m-1})$ SÓ DEPENDE DOS VALORES DE i_m E i_{m-1}:

$$p_{X_m}(i_m|i_1,\ldots,i_{m-1}) = p_{X_m}(i_m|i_{m-1}) \equiv \text{PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO}$$

=> PARA PREVER O ESTADO DO SISTEMA NO INSTANTE m, É SUFICIENTE SABER O SEU ESTADO NO INSTANTE IMEDIATAMENTE ANTERIOR, $m-1$, E NÃO A MANEIRA COMO O SISTEMA CHEGOU AO SEU ESTADO EM $m-1$ (CADEIA DE ESTADOS)

'NUM PROCESSO DE MARKOV, O CONHECIMENTO DO PRESENTE TORNA O FUTURO INDEPENDENTE DO PASSADO'

=> $$p(i_1,i_2,\ldots,i_m) = p_{X_1}(i_1)\, p_{X_2}(i_2|i_1)\, p_{X_3}(i_3|i_2)\ldots p_{X_m}(i_m|i_{m-1})$$

* SE O PROCESSO É ESTACIONÁRIO, A PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO NÃO DEPENDE DO TEMPO

$$p_{X_m}(j|i) = p(j|i) = p_{ij} \quad , \forall m$$

=> $$p(i_1,i_2,\ldots,i_m) = p_{X_1}(i_1) \cdot p_{i_1 i_2}\, p_{i_2 i_3} \cdots p_{i_{m-1} i_m}$$

A DENSIDADE CONJUNTA SÓ DEPENDE DA DENSIDADE NO INSTANTE INICIAL E DAS PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO.

e.g., NÚMERO DE CARAS NOS PRIMEIROS n LANÇAMENTOS DE UMA MOEDA HONESTA

SEQUÊNCIA $\{X_1, X_2, \ldots\}$ NÃO É INDEPENDENTE:

$X_n \equiv$ NÚMERO DE CARAS NOS PRIMEIROS n LANÇAMENTOS

$\Rightarrow$ DEPENDE DE X_{n-1}

MAS A DEPENDÊNCIA É MARKOVIANA:

X_n SÓ DEPENDE DE X_{n-1}

i.e.,

$$p(i_n | i_1, \ldots, i_{n-1} = k) = p(i_n | i_{n-1} = k) = \begin{cases} 1/2, & \text{SE } i_n = k \text{ OU } i_n = k+1 \\ 0, & \text{SE NÃO} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO INDEPENDENTE DO TEMPO

$\Rightarrow$ PROCESSO ESTACIONÁRIO