– Momentos de uma Variável Aleatória

$X \equiv$ variável aleatória discreta

Contradomínio $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$

Definição: A **média amostral** de X em N experimentos é dada por

$$\bar{X}_N = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_N}{N}$$

onde $X_i \in \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ é o valor assumido por X no i-ésimo experimento

Definição: Quando $N \to \infty$, $\bar{X}_N$ se chama o **valor esperado** de X, e **deve tender** a

$$\frac{(p_1 N)x_1 + (p_2 N)x_2 + \ldots + (p_m N)x_m}{N}$$

onde $p_i = P_r[X = x_i]$

$\Rightarrow$ **Valor esperado**, ou **média**, de X:

$$E[X] \equiv \mu = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i x_i & \text{(para variáveis discretas)} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx & \text{(para variáveis contínuas)} \end{cases}$$

Obs.: se o Σ ou a $\int$ convergem absolutamente

Da mesma forma, para funções de variáveis aleatórias:

Valor esperado de $\phi(x)$:

$$E[\phi(x)] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} p_i \phi(x_i) & \text{(caso discreto)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x)\, dx & \text{(caso contínuo)} \end{cases}$$

Caso particular: funções lineares

$$\phi(x) = aX + b \implies E[\phi(x)] = a E[x] + b$$

Caso particular: potências

$$\phi(x) = X^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$E[X^k]$ se chama o k-ésimo momento da variável X

Momentos: $$E[X^k] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i^k p_i & \text{(caso discreto)} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx & \text{(caso contínuo)} \end{cases}$$

1º momento ≡ valor esperado ≡ média de $X = E[X]$

2º momento: $E[X^2]$

etc.

* Se duas variáveis aleatórias têm momentos iguais em todas as ordens, elas têm a mesma distribuição de probabilidade

– MOMENTOS EM TORNO DA MÉDIA:

$$E[(X-E[X])^k] \equiv E[(X-\mu)^k]$$ (k-ésimo momento de X em torno da sua média)

1º momento em torno da média: $E[(X-\mu)] = \mu - \mu = 0$

2º momento em torno da média: VARIÂNCIA de X

$$VAR[X] \equiv \sigma^2 = E[(X-E[X])^2]$$
$$= E[X^2 - 2XE[X] + E^2[X]]$$
$$\therefore \sigma^2 = E[X^2] - E^2[X]$$
$$\therefore \sigma = \sqrt{VAR[X]} \equiv \text{desvio padrão de } X$$

– VARIÂNCIA DE UMA FUNÇÃO LINEAR:

$$\phi(x) = aX + b \equiv U$$

$$\Rightarrow VAR[\phi(x)] = E[(U-\mu_U)^2] = E[(aX+b-a\mu-b)^2] = E[a^2(X-\mu)^2] =$$
$$= a^2 E[(X-\mu)^2] = a^2\sigma^2$$

$$\therefore VAR[aX+b] = a^2 VAR[X]$$

* $U = aX+b$ e X diferem apenas em origem e escala, mas são essencialmente a mesma variável aleatória. Para eliminar os efeitos de origem e escala, definimos variáveis aleatórias padronizadas

Se X tem média μ e variância σ^2, $X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$ tem média 0 e variância 1

$X^* \equiv$ V.A. padronizada

– AS DESIGUALDADES DE MARKOV E CHEBYSHEV:

* EM GERAL, A MÉDIA E A VARIÂNCIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA NÃO FORNECEM INFORMAÇÃO SUFICIENTE PARA DETERMINAR A SUA FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO OU DENSIDADE.

MAS ELAS PODEM FORNECER LIMITES PARA CERTAS PROBABILIDADES

e.g., SEJA X UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA DE MÉDIA μ E VARIÂNCIA σ^2, TAL QUE A SUA FUNÇÃO DENSIDADE $f(x)$ SE ANULE PARA $x < 0$.

SEJA t UM NÚMERO POSITIVO, $0 < t < \infty$

PELA DESIGUALDADE DE MARKOV:

$$P_r[X \geq t] \leq \frac{E[X]}{t} = \frac{\mu}{t}$$

PELA DESIGUALDADE DE CHEBYSHEV:

$$P_r[|X - \mu| \geq t] \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

OBS.: i) AS DESIGUALDADES DE MARKOV E CHEBYSHEV SÃO LIMITES MUITO GROSSEIROS, MAS TÊM VALIDADE GERAL: APLICAM-SE A TODAS AS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS PARA AS QUAIS O PRIMEIRO E O SEGUNDO MOMENTO EXISTEM

ii) A DESIGUALDADE DE CHEBYSHEV É USADA PARA DEMONSTRAR A LEI DOS GRANDES NÚMEROS: A MÉDIA ARITMÉTICA DE MEDIDAS INDEPENDENTES DA MESMA VARIÁVEL ALEATÓRIA TEM GRANDE PROBABILIDADE DE SE APROXIMAR DO VALOR ESPERADO DA VARIÁVEL ALEATÓRIA, QUANDO O NÚMERO DE MEDIDAS É GRANDE. ELA VALE MESMO QUANDO $f(x) \neq 0$ PARA $x < 0$.

– Função Geradora de Probabilidade:

Seja X uma V.A. DISCRETA, de contradomínio INTEIRO

Seja z um número real

Definição: Função Geradora de Probabilidade de X

$$\psi_X(z) = E[z^X] = \sum_i z^i p_i$$

onde p_i é a densidade de probabilidade de X

* $\psi_X(z)$ permite calcular os momentos de X a partir do cômputo de um único somatório

e.g., $$\psi'_X(z) \equiv \frac{d}{dz}\psi_X(z) = \sum_i i z^{i-1} p_i$$

$$\therefore \quad \psi'_X(1) = \sum_i i p_i = E[X]$$

$$\psi''_X(z) \equiv \frac{d^2}{dz^2}\psi_X(z) = \sum_i i(i-1) z^{i-2} p_i$$

$$\therefore \psi''_X(1) = \sum_i i(i-1) p_i$$

$$\therefore \psi''_X(1) + \psi'_X(1) = \sum_i i^2 p_i = E[X^2]$$

ETC.

- FUNÇÃO CARACTERÍSTICA:

SEJA X UMA V.A. CONTÍNUA

SEJA w UM NÚMERO REAL

DEFINIÇÃO: FUNÇÃO CARACTERÍSTICA DE X

$$\psi_X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{jwx} dx \equiv F(-w)$$

ONDE $f(x)$ É A FUNÇÃO DENSIDADE DE x

E $F(w)$ É A TRANSFORMADA DE FOURIER DE $f(x)$

* $\psi_X(w)$ PERMITE OBTER OS MOMENTOS DE X UTILIZANDO-SE TABELAS DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

e.g., $\psi_X'(w) \equiv \frac{d}{dw}\psi_X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} jx f(x) e^{jwx} dx$

$$\therefore \psi_X'(0) = j\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = jE[X]$$

$$\therefore E[X] = \frac{1}{j}\frac{d}{dw}\psi_X \Big|_{w=0}$$

DA MESMA FORMA,

$$E[X^2] = \frac{1}{j^2}\frac{d^2}{dw^2}\psi_X \Big|_{w=0}$$

ETC.

- DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE ESPECIAIS

1. FUNÇÃO DENSIDADE DE BERNOULLI:

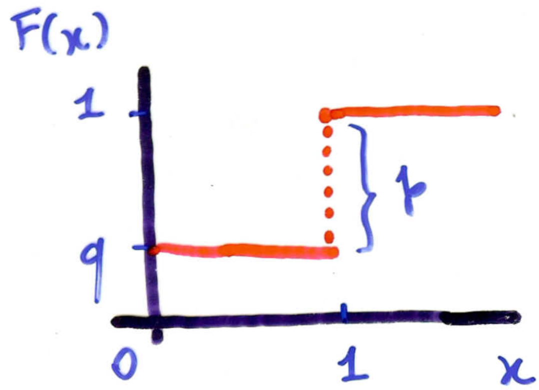
⇒ VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA DE CONTRADOMÍNIO $\{0,1\}$

FUNÇÃO DENSIDADE:

$$\Pr[X=0]=q$$
$$\Pr[X=1]=p \qquad p+q=1$$

FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ q, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$



(e.g., LANÇAMENTO DE UMA MOEDA

$X=1$ (CARA)

$X=0$ (COROA)

MOEDA HONESTA: $p=q=\frac{1}{2}$)

- VALOR ESPERADO E VARIÂNCIA:

$$E[X]=\sum_i p_i x_i = 0.q + 1.p = p$$

$$E[X^2]=\sum_i p_i x_i^2 = 0^2.q + 1^2.p = p$$

$$\therefore\ \sigma^2 = \mathrm{Var}[X] = E[X^2]-E^2[X] = p-p^2 = p(1-p) = pq$$

$$\begin{cases} \mu = p \\ \sigma^2 = pq \end{cases}$$

2. FUNÇÃO DENSIDADE BINOMIAL:

=> SEQÜÊNCIA DE EXPERIMENTOS DE BERNOULLI

i.e., SEQÜÊNCIA DE EVENTOS INDEPENDENTES, CADA UM COM PROBABILIDADE p DE OCORRER, E $q = 1 - p$ DE NÃO OCORRER

e.g., SEQÜÊNCIA DE LANÇAMENTOS DE UMA MOEDA

SEQÜÊNCIA DE ESCOLHA DE PEÇAS QUE PODEM SER BOAS OU COM DEFEITO

* DADO UM NÚMERO DE EXPERIMENTOS DE BERNOULLI, ESTAMOS INTERESSADOS EM

$X \equiv$ NÚMERO DE VEZES QUE O EVENTO OCORRE NA SEQÜÊNCIA

e.g., NÚMERO DE PEÇAS DEFEITUOSAS NUM CONJUNTO DE n PEÇAS TESTADAS

=> X É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA DE CONTRADOMÍNIO $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$

* A VARIÁVEL X PODE SER ESCRITA COMO

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

ONDE $X_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ É UMA V.A. QUE DENOTA A OCORRÊNCIA OU NÃO DO EVENTO DE INTERESSE

=> OS X_i TÊM FUNÇÃO DENSIDADE DE BERNOULLI

- VALOR ESPERADO E VARIÂNCIA:

USANDO A INDEPENDÊNCIA DOS X_i, PODEMOS MOSTRAR QUE

$$E[X] = \sum_i E[X_i] = np \ , \ Var[X] = \sum_i Var[X_i] = npq$$

– FUNÇÃO GERADORA DE PROBABILIDADES:

TAMBÉM USANDO A INDEPENDÊNCIA DOS X_i:

$$\psi_X(z) = E[z^X] = E[z^{X_1+X_2+\dots+X_n}] = E[z^{X_1} \cdot z^{X_2} \cdots z^{X_n}]$$

$$= E[z^{X_1}]E[z^{X_2}]\cdots E[z^{X_n}]$$

MAS,

$$E[z^{X_i}] \equiv \psi_{X_i}(z) = z^0 q + z^1 p = q + zp$$

$$\therefore \psi_X(z) = (q+zp)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} z^j \quad (1)$$

MAS, POR DEFINIÇÃO

$$\psi_X(z) = \sum_{j=0}^{n} z^j p_j \quad (2)$$

ONDE $p_j = P_R[X=j]$ É A FUNÇÃO DENSIDADE DE X

COMPARANDO (1) E (2):

$$p_j = \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \equiv \text{FUNÇÃO DENSIDADE BINOMIAL}$$

$\Rightarrow$ DÁ A PROBABILIDADE DE j 'SUCESSOS' EM n TENTATIVAS INDEPENDENTES (TENTATIVAS DE BERNOULLI) DE UM EXPERIMENTO CUJA PROBABILIDADE DE SUCESSO, EM CADA TENTATIVA, É p.

OBS.: QUANDO n É GRANDE, A DENSIDADE BINOMIAL PODE SER APROXIMADA PELA DENSIDADE NORMAL COM $\mu = np$ E $\sigma = \sqrt{npq}$

OBS.: FUNÇÃO DENSIDADE HIPERGEOMÉTRICA

⇒ AMOSTRAGEM SEM REPOSIÇÃO

$$h(k; n, K, N) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

⇒ PROBABILIDADE DE ENCONTRAR k PEÇAS DEFEITUOSAS NUMA AMOSTRA ALEATÓRIA DE n PEÇAS ESCOLHIDAS, SEM REPOSIÇÃO, DE UM CONJUNTO DE N PEÇAS, DAS QUAIS K SÃO DEFEITUOSAS.

3. Função Densidade Geométrica:

⇒ Sequência de experimentos de Bernoulli

Probabilidade de sucesso: p

Probabilidade de falha: $q = 1 - p$

* Estamos interessados no número de experimentos até a primeira falha

⇒ Variável aleatória Y de contradomínio $\{1, 2, 3, \dots\}$

- Função densidade:

$$p_i \equiv P_r[Y=i] = p^{i-1} q \quad (i-1 \text{ sucessos seguidos da falha})$$

- Função geradora de probabilidades:

$$\psi(z) = E[z^Y] = \sum_{i=1}^{\infty} z^i p_i = \sum_{i=1}^{\infty} z^i p^{i-1} q = zq \sum_{i=1}^{\infty} (pz)^{i-1}$$

$$= \frac{zq}{1 - zp} \quad \text{(usando a soma dos termos da série geométrica)}$$

- Média e variância:

$$\mu \equiv \psi'(1) = \frac{1}{q} \equiv E[X]$$

$$\sigma^2 = \psi''(1) + \psi'(1) - (\psi'(1))^2 = \frac{p}{q^2}$$

$$\equiv E[X^2] - E^2[X]$$

4. FUNÇÃO DENSIDADE DE POISSON:

⇒ VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA X DE CONTRADOMÍNIO $\{0,1,2,\dots\}$

E FUNÇÃO DENSIDADE

$$p_i \equiv P_R[X=i] = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}$$

$\lambda \equiv$ PARÂMETRO POSITIVO $\equiv$ 'INTENSIDADE' DO PROCESSO

e.g., DECAIMENTO RADIOATIVO:

PROBABILIDADE DE EMISSÃO DE n FÓTONS NUM TEMPO t:

$$P_R[X=n] = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \quad , n=0,1,2\dots$$

⇒ PROCESSO DE POISSON COM INTENSIDADE PROPORCIONAL AO TEMPO

* ISTO SE OBTÉM CONSIDERANDO QUE A PROBABILIDADE DE EMISSÃO DE UM ÚNICO FÓTON NUM TEMPO PEQUENO É PROPORCIONAL AO TEMPO, E QUE A PROBABILIDADE DE EMISSÃO DE MAIS DE UM FÓTON É DESPREZÍVEL

OBS.: i) A FUNÇÃO DENSIDADE DE POISSON PODE SER USADA COMO APROXIMAÇÃO PARA A DENSIDADE BINOMIAL, NO CASO DE n GRANDE E p PEQUENO, COM $np=\lambda$ MANTIDO CONSTANTE.

ii) A DENSIDADE DE POISSON PODE SER APROXIMADA PELA DENSIDADE NORMAL COM $\mu=\lambda$ E $\sigma=\sqrt{\lambda}$, QUANDO n É GRANDE.

- FUNÇÃO GERADORA DE PROBABILIDADES:

$$\psi(z) = E[z^x] = \sum_{i=0}^{\infty} z^i p_i = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z\lambda)^i}{i!}$$

$$= e^{-\lambda(1-z)}$$

- MÉDIA E VARIÂNCIA:

$$\mu \equiv E[x] = \psi'(1) = \lambda$$

$$\sigma^2 \equiv E[x^2] - E^2[x] = \psi''(1) + \psi'(1) - (\psi'(1))^2 = \lambda$$

$\Rightarrow$ MÉDIA = VARIÂNCIA = λ (INTENSIDADE)

OBS.: A DENSIDADE DE POISSON É UMA FUNÇÃO DENSIDADE VÁLIDA:

i) $0 \leq p_i \leq 1$

ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} p_i = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$

5. FUNÇÃO DENSIDADE UNIFORME:

* CASO DISCRETO:

$\Rightarrow$ VARIÁVEL ALEATÓRIA X, DE CONTRADOMÍNIO FINITO $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

E EQUIPROVÁVEL

FUNÇÃO DENSIDADE: $$p(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{N}, & \text{se } x_i \text{ está no contradomínio} \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$$

OBSERVAÇÃO: SE O CONTRADOMÍNIO É INFINITO, A DENSIDADE UNIFORME NÃO ESTÁ DEFINIDA.

* CASO CONTÍNUO:

$\Rightarrow$ VARIÁVEL ALEATÓRIA X, DE CONTRADOMÍNIO FINITO, $a \leq x \leq b$,

E FUNÇÃO DENSIDADE

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{se } x > b \end{cases}$$

OBSERVAÇÕES: i) UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA UNIFORME DE CONTRADOMÍNIO INFINITO TAMBÉM NÃO EXISTE NO CASO CONTÍNUO

ii) A EXPRESSÃO 'ESCOLHER UM NÚMERO ALEATORIAMENTE', NUM CERTO CONJUNTO OU INTERVALO, SIGNIFICA ESCOLHER UMA AMOSTRA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA UNIFORME

6. FUNÇÃO DENSIDADE DE CAUCHY:

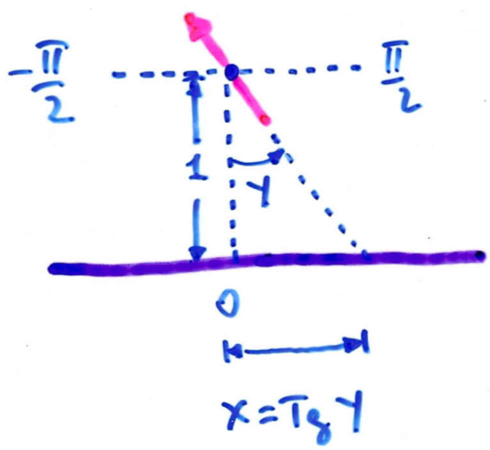
* SEJA Y UMA VARIÁVEL UNIFORME CONTÍNUA, DE CONTRADOMÍNIO

$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

* SEJA X UMA OUTRA VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA, DE CONTRADOMÍNIO $-\infty < x < \infty$, RELACIONADA A Y POR $X = Tg\,Y$

GRAFICAMENTE:



FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE X:

$$F(x) = P_R[X \leq x] = P_R[Tg\,Y \leq x] = P_R[Y \leq ArcTg\,x] = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{ArcTg\,x} f(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[ArcTg\,x + \frac{\pi}{2}\right]$$

$\Rightarrow$ FUNÇÃO DENSIDADE: $f(x) = F'(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)} \quad , \; -\infty < x < \infty$
DE CAUCHY

OBSERVAÇÃO: PARA ESTA DISTRIBUIÇÃO, O VALOR ESPERADO, $E[X]$, NÃO ESTÁ DEFINIDO, JÁ QUE

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,dx \to \infty$$

7. FUNÇÃO DENSIDADE EXPONENCIAL NEGATIVA:

⇒ VARIÁVEL ALEATÓRIA CONTÍNUA, DE CONTRADOMÍNIO $0 \leq x < \infty$

- FUNÇÃO DENSIDADE:

$$f(x) = \begin{cases} a\,e^{-ax} , & 0 \leq x < \infty \\ 0 , & x < 0 \end{cases}$$

$a \equiv$ CONSTANTE POSITIVA

⇒ FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 1 - e^{-ax} , & 0 \leq x < \infty \\ 0 , & x < 0 \end{cases}$$

- MÉDIA E VARIÂNCIA:

$$\mu \equiv E[X] = \int_0^{\infty} x\,a\,e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$$

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 a\,e^{-ax}\,dx = \frac{2}{a^2}$$

$$\therefore \quad Var[X] = \frac{2}{a^2} - \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}$$

– PROPRIEDADE DO 'ESQUECIMENTO'

SEJA X O TEMPO DE VIDA DE UM CERTO EQUIPAMENTO

$\Rightarrow$ X É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA DE CONTRADOMÍNIO $0 \leq x < \infty$

* PODEMOS DEFINIR UMA OUTRA VARIÁVEL ALEATÓRIA, $X' = X - s$, PARA REPRESENTAR O TEMPO DE VIDA DO EQUIPAMENTO ALÉM DO TEMPO s, ONDE s É UMA CONSTANTE.

* A PROBABILIDADE DE DURAÇÃO DO EQUIPAMENTO ALÉM DO TEMPO s É DADA PELA DISTRIBUIÇÃO CONDICIONAL

$$G(x) = P_r[X' \leq x \mid X > s]$$

$$= P_r[X - s \leq x \mid X > s] = P_r[X \leq x + s \mid X > s] =$$

$$= \frac{P_r[X \leq x+s, X > s]}{P_r[X > s]}$$

$$= \frac{P_r[s < X \leq x+s]}{P_r[X > s]} = \frac{\int_s^{x+s} f(t)dt}{\int_s^{\infty} f(t)dt} =$$

$$= 1 - e^{-ax} \equiv F(x)$$

$\Rightarrow$ A PROBABILIDADE DO TEMPO DE VIDA DO EQUIPAMENTO INDEPENDE DO TEMPO QUE ELE JÁ VIVEU

$\Rightarrow$ A FALHA DE UM TAL EQUIPAMENTO SE DEVE A UM DEFEITO SÚBITO, E NÃO A UMA DETERIORAÇÃO GRADUAL

* A EXP. NEGATIVA É A ÚNICA DENSIDADE CONTÍNUA COM ESTA PROPRIEDADE

OBSERVAÇÃO: A DENSIDADE EXPONENCIAL NEGATIVA PODE SER OBTIDA COMO CASO PARTICULAR DA FUNÇÃO DENSIDADE DE ERLANG OU DA FUNÇÃO DENSIDADE GAMA.

* FUNÇÃO DENSIDADE DE ERLANG COM r FASES:

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} \quad , x>0, \lambda>0, r=1,2,\ldots$$

$\Rightarrow$ FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO:

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x} \quad , x \geq 0, \lambda>0, r=1,2,\ldots$$

$\Rightarrow$ A DENSIDADE EXPONENCIAL NEGATIVA É CASO PARTICULAR PARA $r=1$

* FUNÇÃO DENSIDADE GAMA:

$\Rightarrow$ EXTENSÃO DA DENSIDADE DE ERLANG, QUANDO r PODE ASSUMIR VALORES NÃO INTEIROS

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$$

ONDE $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \, , \alpha > 0$ (FUNÇÃO GAMA)

OBSERVAÇÕES: i) $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \therefore \Gamma(n) = (n-1)!$ PARA n INTEIRO

ii) A DENSIDADE χ-QUADRADO É UM CASO PARTICULAR DA GAMA, PARA $\lambda = \frac{1}{2}$ E $\alpha = \frac{n}{2}$, n INTEIRO POSITIVO

- Teorema do Limite Central

* Seja S_n a soma de n variáveis aleatórias **i.i.d.**

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

Se $E[X_i] = \mu$ e $Var[X_i] = \sigma^2$, $\forall i$

onde μ e σ^2 são valores **finitos**

$\Rightarrow E[S_n] = n\mu$, $Var[S_n] = n\sigma^2$

* Assim, a variável aleatória

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \equiv \frac{(\bar{X}_n - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}$$

$\bar{X}_n \equiv$ média amostral de X

tem média zero e variância unitária

* O **Teorema do Limite Central** afirma que

$$\lim_{n \to \infty} P_r[Z_n \leq z] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$\Rightarrow$ Quando n se torna grande, a função distribuição de Z_n se aproxima da distribuição **normal**

$\Rightarrow$ O teorema do limite central explica por que a variável aleatória normal aparece em tantas aplicações:

* Muitos fenômenos macroscópicos resultam da adição de numerosos processos microscópicos,

e.g., consumo de eletricidade

erros num experimento físico

* OBSERVAÇÃO: O TEOREMA DO LIMITE CENTRAL VALE AINDA QUANDO AS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS X_i SÃO INDEPENDENTES MAS NÃO IDENTICAMENTE DISTRIBUÍDAS.

NESTE CASO,

$$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mu_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}}$$