– Processos Estocásticos

⇒ Experimentos aleatórios cujo resultado é uma sequência ou série de valores

⇒ Observações são efetuadas ao longo de um intervalo de tempo

e.g., Comportamento do preço de uma ação na bolsa

Emissão de fótons por uma amostra radioativa

⇒ Sinais cujo comportamento tem elementos não-determinísticos

e.g., Sinal $X_t(s) = 10 \operatorname{sen}(2\pi t + \theta(s))$

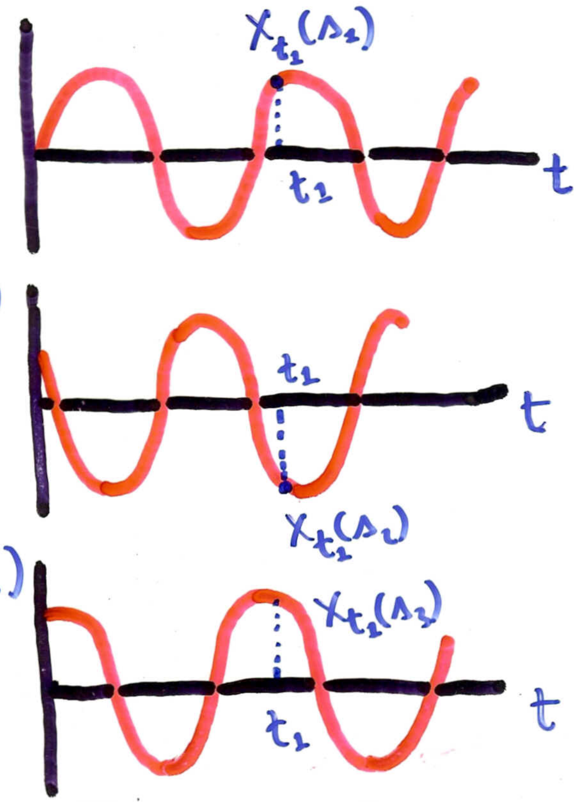
onde $\theta(s) \equiv$ variável aleatória uniformemente distribuída entre 0 e 2π.

$s \equiv$ ponto amostral do expto. aleatório

$\theta(s_1) \rightarrow X_t(s_1)$

$\theta(s_2) \rightarrow X_t(s_2)$

$\theta(s_3) \rightarrow X_t(s_3)$



Conjunto ('ensemble') de possíveis realizações do processo estocástico

* Para um instante dado, t_1, os valores $X_{t_1}(s_i)$ são amostras da variável aleatória X_{t_1}

⇒ O processo estocástico é o conjunto de variáveis aleatórias

$$X_t = \{X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}, \dots\}$$

* O conjunto $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots\}$ é o conjunto de parâmetros do processo.
  - Se T é discreto ⇒ processo de 'tempo' discreto
  - Se T é contínuo ⇒ processo de 'tempo' contínuo

* O contradomínio das variáveis aleatórias X_t é o espaço de estados do processo, S.
  - Se S é discreto ⇒ processo de estados discretos (cadeias)
  - Se S é contínuo ⇒ processo de estados contínuos

Cada valor em S é chamado um estado

* Cada possível conjunto de estados $\{X_t, t \in T\}$ constitui uma realização do processo estocástico

* O conjunto de possíveis realizações se chama de 'ensemble' do processo.

- DENSIDADES E DISTRIBUIÇÕES DE UM PROCESSO ESTOCÁSTICO

SEJA X_t UM PROCESSO ESTOCÁSTICO

$\Rightarrow X_t$ É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA, PARA CADA t DADO

* DEFINIMOS A FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DE 1ª ORDEM DO PROCESSO COMO

$$F(x;t) = P_R[X_t \leq x]$$

- PARA PROCESSOS DE ESTADOS CONTÍNUOS:

DEFINIMOS A FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE 1ª ORDEM COMO

$$f(x;t) = \frac{\partial F(x;t)}{\partial x}$$

- PARA PROCESSOS DE ESTADOS DISCRETOS, DEFINIMOS

$$f(x;t) = P_R[X_t = x]$$

* DEFINIMOS A FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DE ORDEM n DO PROCESSO COMO

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P_R[X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \ldots, X_{t_n} \leq x_n]$$

- PARA PROCESSOS DE ESTADOS CONTÍNUOS:

FUNÇÃO DENSIDADE DE ORDEM n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$$

- PARA PROCESSOS DE ESTADOS DISCRETOS, DEFINIMOS

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P_R[X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2, \ldots, X_{t_n} = x_n]$$

OBSERVAÇÕES

i) ESPECIFICAR UM PROCESSO ESTOCÁSTICO IMPLICA EM OBTER A SUA DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA, F, EM TODAS AS ORDENS (ISTO SE CHAMA DAR A 'ESTRUTURA DO PROCESSO')

$\Rightarrow$ IMPRATICÁVEL NO CASO GERAL, MAS, EM MUITOS CASOS IMPORTANTES, O CONHECIMENTO DAS DISTRIBUIÇÕES DE 1ª E 2ª ORDEM É SUFICIENTE

e.g., PROCESSOS DE MARKOV

ii) MOMENTOS E COVARIÂNCIAS:

1º MOMENTO: $\mu(t) \equiv E[X_t] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;t)\,dx$ (CASO CONTÍNUO)

2ºs MOMENTOS:

- FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO:

$$R(t_1,t_2) \equiv E[X_{t_1} \cdot X_{t_2}] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1 dx_2$$

- FUNÇÃO DE AUTOCOVARIÂNCIA:

$$C(t_1,t_2) \equiv E[\{X_{t_1}-\mu(t_1)\}\{X_{t_2}-\mu(t_2)\}]$$

PODE-SE MOSTRAR QUE $C(t_1,t_2) = R(t_1,t_2) - \mu(t_1)\mu(t_2)$

- VARIÂNCIA:

$$Var[X_t] \equiv C(t,t) = E[\{X_t-\mu(t)\}^2]$$

- COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO:

$$\rho(t_1,t_2) = \frac{C(t_1,t_2)}{\sqrt{C(t_1,t_1)\cdot C(t_2,t_2)}} \equiv \frac{C(t_1,t_2)}{\sqrt{(Var\,X_{t_1})(Var\,X_{t_2})}}$$

CLASSIFICAÇÃO DOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

i) PROCESSO ESTRITAMENTE ESTACIONÁRIO

$\Rightarrow$ AS FUNÇÕES DISTRIBUIÇÃO QUE O DESCREVEM SÃO INVARIANTES SOB TRANSLAÇÃO TEMPORAL

$$F(x_1,\ldots,x_n;t_1+h,\ldots,t_n+h) = F(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n)$$

i.e., AS PROBABILIDADES CONJUNTAS DEPENDEM APENAS DOS INTERVALOS ENTRE AS OBSERVAÇÕES, NÃO DA ORIGEM DA SEQUÊNCIA DE OBSERVAÇÕES

ii) PROCESSO ESTACIONÁRIO NO SENTIDO LATO

$\Rightarrow$ RELAXA-SE A DEFINIÇÃO DE ESTACIONARIEDADE ESTRITA, EXIGINDO-SE APENAS QUE A FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO PARA DOIS INSTANTES QUAISQUER DEPENDA APENAS DO INTERVALO DE TEMPO ENTRE ESSES INSTANTES

i.e., $R(t_1,t_2) \equiv E[X_{t_1} \cdot X_{t_2}] = R(\tau)$

ONDE $\tau = |t_2 - t_1|$

EM GERAL TAMBÉM ASSUME-SE QUE O PRIMEIRO MOMENTO SEJA INDEPENDENTE DO TEMPO

i.e., $\mu(t) \equiv E[X_t] = \mu$ (CONSTANTE)

$\forall t, \ -\infty < t < \infty$

iii) PROCESSO ERGÓDICO

⇒ UMA ÚNICA REALIZAÇÃO OFERECE INFORMAÇÃO SUFICIENTE SOBRE O PROCESSO

i.e., CONTÉM TODAS AS POSSÍVEIS VARIAÇÕES ESTATÍSTICAS DO PROCESSO

⇒ NÃO SE OBTÉM MAIS INFORMAÇÃO OBSERVANDO TODO O 'ENSEMBLE' DE REALIZAÇÕES

e.g., PROCESSO ERGÓDICO NA MÉDIA

⇒ A MÉDIA TEMPORAL OBTIDA NUMA ÚNICA REALIZAÇÃO É IGUAL À MÉDIA ESTATÍSTICA, OBTIDA NO 'ENSEMBLE'

i.e., SEJA UM PROCESSO ESTACIONÁRIO NO SENTIDO LATO (WSS ≡ 'WIDE SENSE STATIONARY')

DEFINIMOS A MÉDIA TEMPORAL DE UMA REALIZAÇÃO X_t, COMO

$$\eta_T = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X_t\,dt \quad , \text{NO INTERVALO } [-T,T]$$

⇒ η_T É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA QUE DEPENDE DA REALIZAÇÃO X_t CONSIDERADA.

SE O PROCESSO X_t É ERGÓDICO NA MÉDIA

$$\lim_{T\to\infty} \eta_T = \mu$$

ONDE $\mu = E[X_t]$

SINOPSE

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

1. PROCESSOS DE TEMPO DISCRETO OU DE TEMPO CONTÍNUO

2. PROCESSOS DE ESTADOS DISCRETOS OU DE ESTADOS CONTÍNUOS

3. MOMENTOS E COVARIÂNCIAS

   - MÉDIA, VARIÂNCIA, AUTOCORRELAÇÃO, AUTOCOVARIÂNCIA, COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO

4. CLASSIFICAÇÃO DOS PROCESSOS

   - ESTRITAMENTE ESTACIONÁRIOS, ESTACIONÁRIOS NO SENTIDO LATO, ERGÓDICOS

5. EXEMPLOS DE PROCESSOS

   i) SEQUÊNCIAS INDEPENDENTES (RENOVAÇÃO ≡ i.i.d.)

   ii) SEQUÊNCIAS MARKOVIANAS (*)

   iii) PASSEIOS ALEATÓRIOS

   iv) PROCESSOS DE SOMA

   - EXTENSÕES: AUTO-REGRESSIVOS, MÉDIA MÓVEL, ARMA

   v) PROCESSO DE POISSON (*)

   ⇒ MARKOVIANO DE TEMPO CONTÍNUO, ESTADOS DISCRETOS

   - MODELA NÚMERO DE CHAMADAS EM UM SISTEMA TELEFÔNICO

   - RELACIONADO AO PROCESSO EXPONENCIAL NEGATIVO, QUE MODELA O TEMPO ENTRE LIGAÇÕES SUCESSIVAS

(*) MAIS IMPORTANTES NA DISCIPLINA

- EXEMPLOS DE PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

i) SEQÜÊNCIAS INDEPENDENTES

SEJA $X_0, X_1, X_2, \dots$ UM PROCESSO ESTOCÁSTICO COM CONJUNTO TEMPORAL $T = \{0, 1, 2, \dots\}$

SE $P_r[X_n = x_n \mid X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}] = P_r[X_n = x_n]$ $\forall n$

TEM-SE UMA SEQÜÊNCIA DE VARIÁVEIS INDEPENDENTES

$\Rightarrow P_r[X_n = x_n] = p_{X_n}(x_n)$ DEFINE O PROCESSO

SE $p_{X_n}(x) = p(x)$, $\forall n$

TEM-SE UMA SEQÜÊNCIA INDEPENDENTE IDENTICAMENTE DISTRIBUÍDA (PROCESSO i.i.d.)

* UMA SEQÜÊNCIA DE VARIÁVEIS i.i.d. SE CHAMA UM PROCESSO ESTOCÁSTICO DE RENOVAÇÃO

ii) SEQÜÊNCIAS MARKOVIANAS DE 2 ESTADOS

SE $P_r[X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}] = P_r[X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}]$

$\forall n$

$\Rightarrow$ SEQÜÊNCIA COM DEPENDÊNCIA MARKOVIANA

NO CASO ESTACIONÁRIO: $P_r[X_n = j \mid X_{n-1} = i] = P_r[X_1 = j \mid X_0 = i] = p_{ij}$

p_{ij} = PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO EM 1 PASSO

COM $\sum_j p_{ij} = 1$, $\forall i$

e.g., PROCESSO DE 2 ESTADOS

ESTADOS POSSÍVEIS: $i=0$ (FRACASSO)

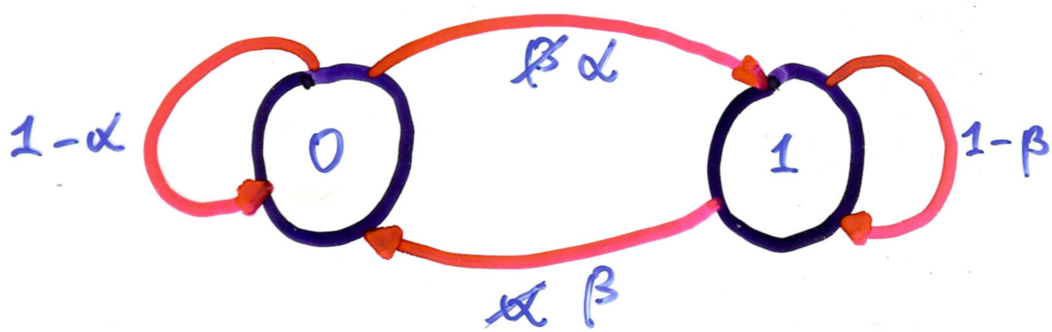
$i=1$ (SUCESSO)

$\Rightarrow$ 4 PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO:

$$p_{00},\ p_{01},\ p_{10},\ p_{11}$$

COM $p_{00}+p_{01}=p_{10}+p_{11}=1$

DIAGRAMA DE TRANSIÇÕES:



$\alpha \equiv p_{01}$

$1-\alpha \equiv p_{00}$

$\beta \equiv p_{10}$

$1-\beta \equiv p_{11}$

* PARA ANALISAR O PROCESSO, PRECISAMOS OBTER AS PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO EM <u>n PASSOS</u> ($n=2,3,\dots$)

$$p_{ij}^{(n)} = \underbrace{P_R[X_n=j \mid X_0=i] \equiv P_R[X_{k+n}=j \mid X_k=i]}_{\text{ASSUMIMOS ESTACIONARIEDADE}}, \quad i,j=0,1$$

COM

$$p_{i0}^{(n)} + p_{i1}^{(n)} = 1, \quad \forall\, i,n$$

VEREMOS SOLUÇÃO GERAL PARA O CASO DE <u>n</u> <u>ESTADOS</u>

iii) PASSEIOS ALEATÓRIOS ('RANDOM WALKS')

⇒ CASO ESPECIAL DOS PROCESSOS DE SOMA

SEJA $X_1, X_2, \ldots$, UMA SEQÜÊNCIA DE VARIÁVEIS INDEPENDENTES

COM $X_i = \begin{cases} +1, \text{ COM PROBABILIDADE } p \\ -1, \text{ COM PROBABILIDADE } q \end{cases}$ $\quad p + q = 1$

DEFINIMOS $Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad , n = 1, 2, \ldots$

⇒ SE OS X_i REPRESENTAM PASSOS UNITÁRIOS, Y_n REPRESENTA A POSIÇÃO DEPOIS DE n PASSOS

DAÍ O NOME PASSEIO ALEATÓRIO

⇒ A SEQÜÊNCIA $\{Y_1, Y_2, \ldots\}$ É UM PROCESSO MARKOVIANO DE CONTRADOMÍNIO $[-n, n]$ (CADA Y_n)

COMO A PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO EM UM PASSO É CONSTANTE ⇒ PROCESSO ESTACIONÁRIO

* PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO EM 1 PASSO:

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{SE } j = i+1 \\ q, & \text{SE } j = i-1 \\ 0, & \text{CASO CONTRÁRIO} \end{cases}$$

* PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO EM n PASSOS:

$$p_{ij}^{(n)} = P_R\left[Y_n = j \mid Y_0 = i\right] \quad \text{(PROCESSO ESTACIONÁRIO)}$$

EM n PASSOS, SEJAM

$d \equiv$ NÚMERO DE PASSOS PARA A DIREITA

$e \equiv$ NÚMERO DE PASSOS PARA A ESQUERDA

COM $d + e = n$ E $j - i = d - e = d - (n-d)$

$$\therefore\ d = \frac{n+j-i}{2}$$

$\Rightarrow$ A PROBABILIDADE DE IR DE i A j DANDO d PASSOS PARA A DIREITA E e PASSOS PARA A ESQUERDA É

$$p^d q^e = p^d q^{n-d}$$

COM O d DADO COMO ACIMA.

COMO $0 \leq d \leq n$, TEMOS $0 \leq \frac{n+j-i}{2} \leq n$

* PARA UM CERTO d, O NÚMERO DE MANEIRAS EM QUE ESSES PASSOS PODEM SER EFETUADOS NO TOTAL DE n MOVIMENTOS É $\binom{n}{d}$

$\Rightarrow$ PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO

$$p_{ij}^{(n)} = \binom{n}{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}}, \quad \text{SE } 0 \leq \frac{n+j-i}{2} \leq n$$

E $p_{ij}^{(n)} = 0$, CASO CONTRÁRIO

iv) PROCESSOS DE SOMA

MUITOS PROCESSOS ESTOCÁSTICOS IMPORTANTES SÃO OBTIDOS COMO A SOMA DE UMA SEQUÊNCIA DE VARIÁVEIS i.i.d.

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \qquad n = 1, 2, \dots$$

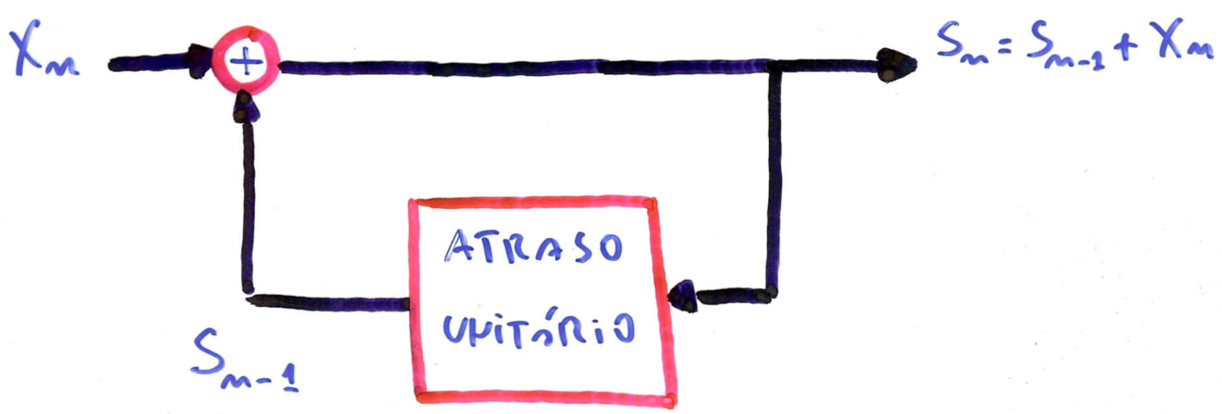
ONDE OS X_i SÃO VARIÁVEIS i.i.d.

ASSIM,

$$S_n = S_{n-1} + X_n \quad , \text{com } S_0 = 0$$

$\Rightarrow$ S_n É UM PROCESSO MARKOVIANO, POIS DEPENDE DO 'PASSADO' APENAS ATRAVÉS DE S_{n-1}

* CÁLCULO RECURSIVO DE S_n



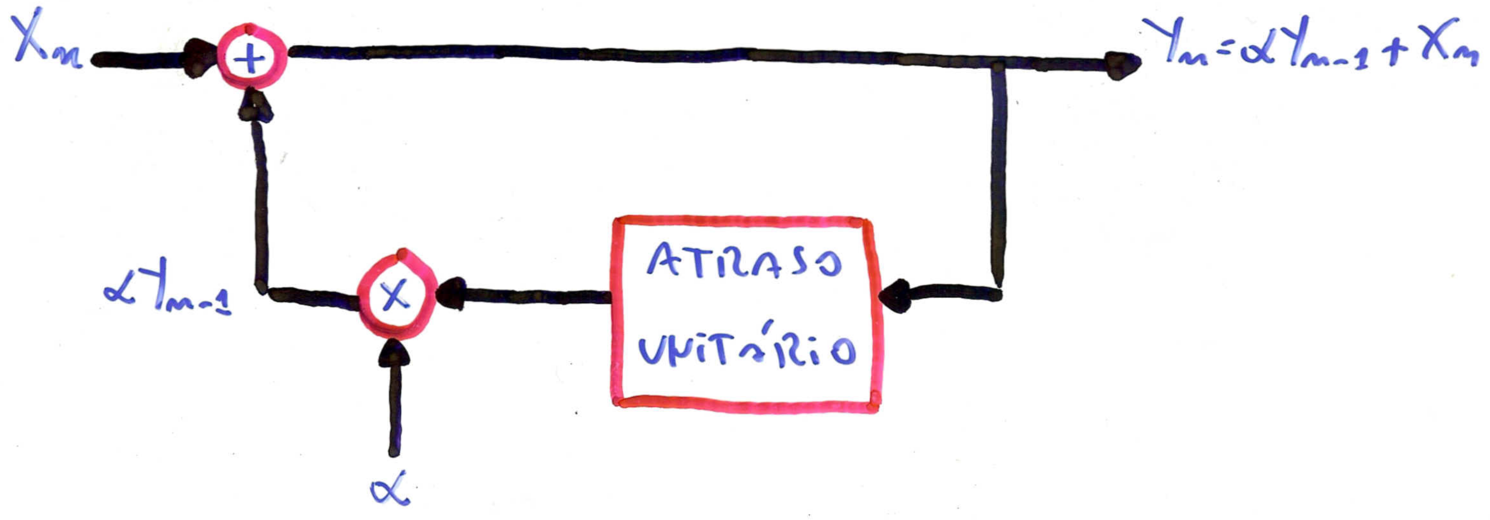
OBSERVAÇÕES:

i) O 'RANDOM WALK' É UM EXEMPLO DE PROCESSO DE SOMA

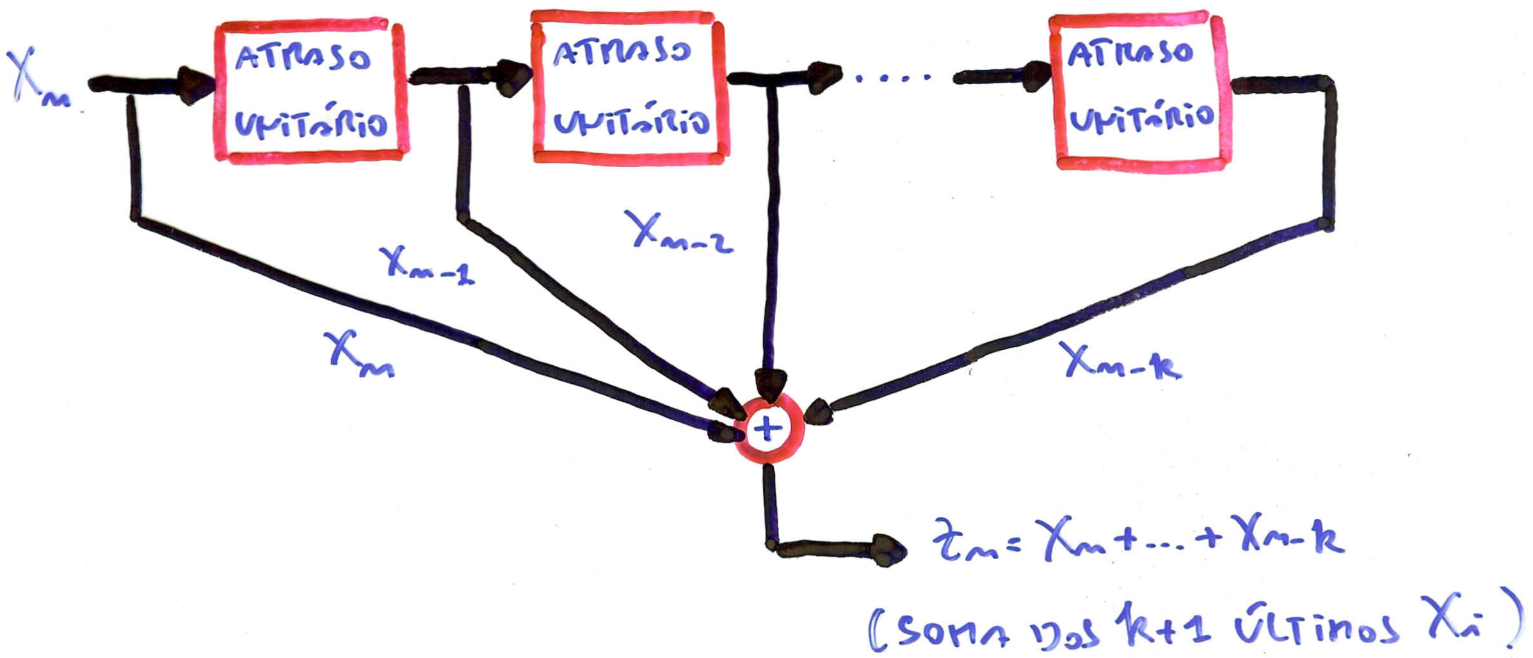
ii) O PROCESSO DE SOMA PODE SER GENERALIZADO DE DIVERSAS FORMAS:

- PROCESSO AUTO-REGRESSIVO
- PROCESSO DE MÉDIA MÓVEL
- PROCESSO AUTO-REGRESSIVO DE MÉDIA MÓVEL

- PROCESSO AUTO-REGRESSIVO DE 1ª ORDEM:



- PROCESSO DE MÉDIA MÓVEL:



- PROCESSO AUTO-REGRESSIVO DE MÉDIA MÓVEL:
(ARMA)

$$Y_n = -\sum_{i=1}^{q} \alpha_i Y_{n-i} + \sum_{j=0}^{p} \beta_j X_{n-j}$$

AUTO-REGRESSIVO GERAL: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_p = 0 \therefore Y_n = -\sum_{i=1}^{q} \alpha_i Y_{n-i} + \beta_0 X_n$

MÉDIA MÓVEL GERAL: $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_q = 0 \therefore Y_n = \sum_{i=0}^{p} \beta_i X_{n-i}$

V) PROCESSO DE POISSON

⇒ PROCESSO ESTOCÁSTICO MARKOVIANO DE TEMPO CONTÍNUO

e.g., $X_t \equiv$ NÚMERO DE CHAMADAS TELEFÔNICAS RECEBIDAS NUM CERTO HORÁRIO DO DIA

* PROPRIEDADES:

A) O NÚMERO DE CHAMADAS DEPENDE APENAS DO INTERVALO DE TEMPO CONSIDERADO. QUANTO MAIOR O INTERVALO, MAIOR O NÚMERO DE CHAMADAS
⇒ MARKOVIANIDADE

B) A PROBABILIDADE DE DUAS OU MAIS CHAMADAS SEREM RECEBIDAS NUM INTERVALO DE TEMPO PEQUENO É DESPREZÍVEL EM COMPARAÇÃO COM A DE UMA CHAMADA

C) O NÚMERO DE CHAMADAS EM UM DADO INTERVALO NÃO AFETA O NÚMERO EM OUTRO INTERVALO

⇒ X_t TEM DENSIDADE DE PROBABILIDADE DE POISSON

$$P_r[X_t = n] \equiv p_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

(PROBABILIDADE DE RECEBIMENTO DE n CHAMADAS NUM INTERVALO DE TEMPO t)

* VALOR MÉDIO DE X_t: λt

⇒ $\lambda \equiv$ NÚMERO MÉDIO DE CHAMADAS POR UNIDADE DE TEMPO

$X_t \equiv$ PROCESSO ESTOCÁSTICO DE TEMPO CONTÍNUO E CONTRADOMÍNIO INTEIRO

* PROCESSO DE POISSON

OBSERVAÇÕES:

i) COMO $P_r[X_t = j \mid X_{t-\tau} = i, X_{t-2\tau}, \ldots, X_0] = P_r[(j-i)$ CHAMADAS EM $\tau]$

$$= P_r[X_t = j \mid X_{t-\tau} = i] \equiv p_{(j-i)}(\tau)$$

$\Rightarrow$ O PROCESSO DE POISSON É MARKOVIANO

ii) O EVENTO 'NENHUMA CHAMADA NOS PRIMEIROS t MINUTOS' EQUIVALE AO EVENTO 'A PRIMEIRA CHAMADA OCORREU APÓS t MINUTOS'

$$\Rightarrow P_r[T > t] = p_0(t) \equiv e^{-\lambda t}$$

ONDE $T \equiv$ VARIÁVEL ALEATÓRIA QUE DENOTA O TEMPO ATÉ A PRIMEIRA CHAMADA

DAÍ,

$$P_r[T \leq t] = 1 - e^{-\lambda t} \therefore f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

i.e., A VARIÁVEL T TEM DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL NEGATIVA

* COMO O NÚMERO DE CHAMADAS NUM DADO INTERVALO É INDEPENDENTE DO NÚMERO NOS DEMAIS INTERVALOS, O INTERVALO DE TEMPO ENTRE CHAMADAS CONSECUTIVAS TEM DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL NEGATIVA

$\Rightarrow$ SEQUÊNCIA DE TEMPOS ENTRE CHAMADAS SUCESSIVAS É i.i.d. COM DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL