vi) PROCESSO NORMAL OU GAUSSIANO

⇒ FUNÇÃO DENSIDADE DE ORDEM n É GAUSSIANA

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\tilde{x}-\bar{\mu})^T K^{-1}(\tilde{x}-\bar{\mu})\right\}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |K|^{1/2}}$$

$K \equiv$ MATRIZ DE COVARIÂNCIAS

$$K_{ij} = E\left[(X_{t_i}-\mu(t_i))(X_{t_j}-\mu(t_j))\right] \equiv C(t_i, t_j)$$

$C(t_i, t_j) \equiv$ AUTOCOVARIÂNCIA

$$C(t_i, t_j) = R(t_i, t_j) - \mu(t_i)\mu(t_j)$$

$R(t_i, t_j) \equiv$ AUTOCORRELAÇÃO

$$R(t_i, t_j) \equiv E\left[X_{t_i} \cdot X_{t_j}\right]$$

$\tilde{\mu} \equiv$ VETOR DAS MÉDIAS

$$\bar{\mu} = (\mu(t_1), \dots, \mu(t_n))^T$$

PARA O PROCESSO NORMAL, CONHECIDAS A SUA TRAJETÓRIA MÉDIA, $\mu(t)$, E A SUA FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO, $R(t, t')$, PODEMOS OBTER A SUA DENSIDADE DE ORDEM n, $\forall n$.

⇒ O PROCESSO É PERFEITAMENTE CARACTERIZADO POR SUA MÉDIA E SUA FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO

VIII) PROCESSO DE WIENER

* MOTIVAÇÃO: LIMITE CONTÍNUO DE UM RANDOM WALK

SEMI-RETA $[0,\infty]$ DIVIDIDA EM INTERVALOS DE DURAÇÃO Δt

- ASSUMIMOS UM PROCESSO ESTOCÁSTICO QUE PERMANECE CONSTANTE EM CADA INTERVALO $[k\Delta t, (k+1)\Delta t]$:

$$X(t) = X(k\Delta t), \quad \forall t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t)$$

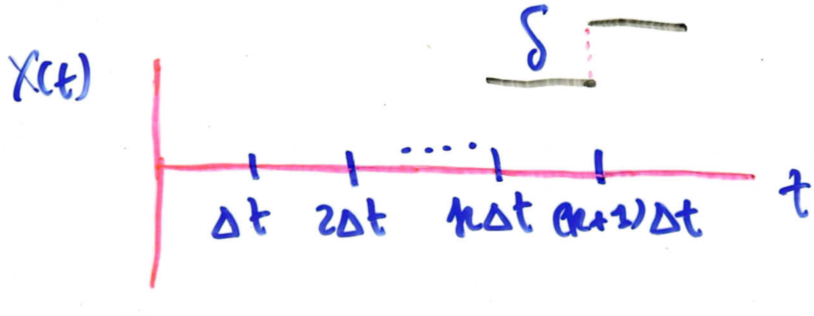
- EM $t = (k+1)\Delta t$ HÁ UM SALTO:

$$X((k+1)\Delta t) = X(k\Delta t) + B_k$$

ONDE

$$B_k = \begin{cases} \delta, & \text{COM PROBABILIDADE } 1/2 \\ -\delta, & \text{COM PROBABILIDADE } 1/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $X(t)$ É UMA CAMINHADA ALEATÓRIA



PODEMOS ESCREVER

$$X(t) \equiv X(g(t)\Delta t) = \sum_{k=1}^{g(t)} B_k$$

ONDE $\quad g(t) = \mathrm{Int}\left(\frac{t}{\Delta t}\right), \ \forall t > 0$

$\Rightarrow$ $g(t)$ É O MAIOR INTEIRO POSITIVO IGUAL OU INFERIOR A $\frac{t}{\Delta t}$

– VALOR ESPERADO E VARIÂNCIA:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E\left[\sum_{n=1}^{g(t)} B_n\right] = \sum_{n=1}^{g(t)} E[B_n]$$

COMO $E[B_n] = \delta \frac{1}{2} - \delta \frac{1}{2} = 0, \ \forall n$

OBTEMOS

$$\mu_X(t) = 0$$

$$\sigma_X^2(t) = Var[X(t)] = Var\left[\sum_{n=1}^{g(t)} B_n\right] = \sum_{n=1}^{g(t)} Var[B_n]$$

(PORQUE OS SALTOS B_n SÃO ASSUMIDOS INDEPENDENTES)

COMO

$$Var[B_n] = E[(B_n - 0)^2] = E[B_n^2] =$$

$$= \delta^2 \frac{1}{2} + \delta^2 \frac{1}{2} = \delta^2$$

OBTEMOS

$$\sigma_X^2(t) = g(t)\delta^2$$

$\Rightarrow$ COMO $g(t) = \mathrm{Int}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)$ CRESCE LINEARMENTE COM t, A VARIÂNCIA DO RANDOM WALK CRESCE COM t, ENQUANTO A MÉDIA PERMANECE ZERO.

$\Rightarrow$ A TRAJETÓRIA DE $X(t)$ SE AFASTA, EM AMBOS OS SENTIDOS, DO EIXO HORIZONTAL.

* O RANDOM WALK TEM INCREMENTOS INDEPENDENTES

e.g., CONSIDEREMOS

$$X(t_2)-X(t_1) \equiv \sum_{n=g(t_1)+1}^{g(t_2)} B_n$$

E

$$X(t_4)-X(t_3) \equiv \sum_{n=g(t_3)+1}^{g(t_4)} B_n \qquad t_1 < t_2 < t_3 < t_4$$

COMO

$$g(t_1) < g(t_2) < g(t_3) < g(t_4)$$

E OS B_n SÃO INDEPENDENTES,

$X(t_4)-X(t_3)$ É INDEPENDENTE DE

$X(t_2)-X(t_1)$

$\Rightarrow$ O MESMO VALE PARA QUAISQUER INTERVALOS DE TEMPO NÃO SUPERPOSTOS.

* O RANDOM WALK É UM PROCESSO MARKOVIANO

$$\Pr[X(t_{m+1}) \leq x \mid X(t_m), \ldots, X(t_1)] = \Pr[X(t_{m+1}) \leq x \mid X(t_m)]$$

PARA $t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m < t_{m+1}$

ISTO DECORRE DE

$$X(t_{m+1}) = X(t_m) + \sum_{k=g(t_m)+1}^{g(t_{m+1})} B_n$$

- PROCESSO DE WIENER:

VAMOS ASSUMIR QUE O SALTO δ SEJA PROPORCIONAL À RAIZ QUADRADA DO INTERVALO Δt: $\delta = \sqrt{\Delta t}$

COMO $\sigma_x^2(t) = g(t)\,\delta^2$

TEMOS $\sigma_x^2(t) = g(t)\,\Delta t$

E NO LIMITE $\Delta t \to 0$ (TEMPO CONTÍNUO), COMO $g(t) \sim \Delta t$:

$$\sigma_x^2(t) = t$$

TAMBÉM: COMO, PARA $\Delta t \to 0$, $X(t)$ TORNA-SE A SOMA DE UM GRANDE NÚMERO DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES

$\Rightarrow$ PELO TEOREMA DO LIMITE CENTRAL, $X(t)$ CONVERGE PARA UM PROCESSO GAUSSIANO

PORTANTO: NO LIMITE DE TEMPO CONTÍNUO, O RANDOM WALK COM PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO $p = q = 1/2$, E SALTO $\delta = \sqrt{\Delta t}$ TENDE A UM PROCESSO ESTOCÁSTICO GAUSSIANO COM MÉDIA ZERO, VARIÂNCIA $\sigma_x^2(t) = t$, E INCREMENTOS INDEPENDENTES.

ESTE É O PROCESSO DE WIENER PADRÃO.

OU

PROCESSO DO MOVIMENTO BROWNIANO

DEFINIÇÃO: $W(t)$ É UM PROCESSO DE WIENER PADRÃO, SE

i) $W(0) = 0$

ii) $W(t)$ TEM INCREMENTOS ESTACIONÁRIOS E INDEPENDENTES

i.e., $\forall\, t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

$W(t_4) - W(t_3)$ E $W(t_2) - W(t_1)$

SÃO INDEPENDENTES

iii) O INCREMENTO

$$z(t) = W(t) - W(s)\ ,\quad t > s$$

É NORMALMENTE DISTRIBUÍDO COMO

$$N(0, t-s)$$

i.e., $\sigma_z^2(t) = t - s$

$\mu_z(t) = 0$

PROPRIEDADES: i) $E[W(t)] = 0$

ii) $Var[W(t)] = t$

iii) $\dfrac{W(t)}{t} \xrightarrow{t\to\infty} 0$ (PELA LEI DOS GRANDES NÚMEROS)

iv) $W(t)$ NÃO É DIFERENCIÁVEL

(DECORRE DE $\Delta W(t) = W(t+\Delta t) - W(t) \sim \sqrt{\Delta t}$)

V) AUTOCORRELAÇÃO:

$$R_W(t_1,t_2) \equiv E[W(t_1)W(t_2)] = \min(t_1,t_2)$$

VI) PROPRIEDADE DE MARTINGALE:

$$E[W(t_n)\,|\,W(t_{n-1}), W(t_{n-2}), \ldots, W(t_1)] = W(t_{n-1})$$

$$\forall\ t_1 < t_2 < \ldots < t_n$$

OBS.: MARTINGALE: SEQUÊNCIA DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS TAIS QUE, EM CADA INSTANTE NUMA REALIZAÇÃO DA SEQUÊNCIA, O PRÓXIMO VALOR ESPERADO É IGUAL AO VALOR PRESENTE, MESMO À LUZ DOS RESULTADOS ANTERIORES OBSERVADOS.

MARTINGALES SÃO UM MODELO PARA JOGOS JUSTOS, POIS EXCLUEM A POSSIBILIDADE DE ESTRATÉGIAS VENCEDORAS BASEADAS NA HISTÓRIA ANTERIOR DO JOGO.

- GENERALIZAÇÃO DO PROCESSO DE WIENER:

DEFINIÇÃO: $W(t)$ É UM PROCESSO DE WIENER COM COEFICIENTE DE ARRASTE μ, SE

i) $W(0) = 0$

ii) $W(t)$ TEM INCREMENTOS ESTACIONÁRIOS INDEPENDENTES

iii) $W(t)$ É NORMALMENTE DISTRIBUÍDO COM μt POR MÉDIA:

$$f_W(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2t}}$$