- CONTINUIDADE, DIFERENCIAÇÃO E INTEGRAÇÃO ESTOCÁSTICA:

i) CONTINUIDADE ESTOCÁSTICA:

UM PROCESSO ESTOCÁSTICO $X(t)$ É DITO 'CONTÍNUO NA MÉDIA QUADRÁTICA' (MQ-CONTÍNUO), SE

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E\left\{[X(t+\varepsilon)-X(t)]^2\right\}=0$$

- $X(t)$ É MQ-CONTÍNUO SE E SÓ SE A SUA FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO, $R_X(t,s)$ É CONTÍNUA

- SE $X(t)$ É MQ-CONTÍNUO, A SUA MÉDIA É CONTÍNUA

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mu_X(t+\varepsilon)=\mu_X(t) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} E[X(t+\varepsilon)]=E\left[\lim_{\varepsilon \to 0} X(t+\varepsilon)\right] \quad (1)$$

ii) DIFERENCIAÇÃO ESTOCÁSTICA:

$X(t)$ É DITO MQ-DIFERENCIÁVEL COM DERIVADA-MQ $X'(t)$, SE

$$\lim_{\varepsilon \to 0} E\left\{\left[\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}-X'(t)\right]^2\right\}=0$$

- A DERIVADA-MQ DE $X(t)$ EXISTE, SE E SÓ SE $\dfrac{\partial^2 R_X(t,s)}{\partial t \partial s}$ EXISTE

- A MÉDIA E A AUTOCORRELAÇÃO DE $X'(t)$ SATISFAZEM

$$E[X'(t)]=\frac{d}{dt}E[X(t)]=\mu_X'(t) \quad (2)$$

$$R_{X'}(t,s)=\frac{\partial^2 R_X(t,s)}{\partial t \partial s}$$

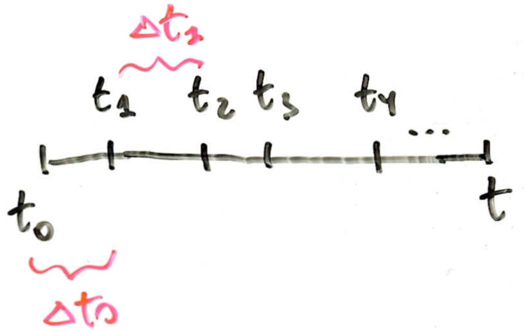
iii) INTEGRAÇÃO ESTOCÁSTICA

X(t) é dito MQ-INTEGRÁVEL, com integral $Y(t)=\int_{t_0}^{t} X(\alpha)\,d\alpha$, se

$$\lim_{\Delta t_i \to 0} E\left\{\left[\sum_i X(t_i)\Delta t_i - Y(t)\right]^2\right\}=0$$

onde

$$\Delta t_i = t_{i+1}-t_i, \quad t_0 < t_1 < \dots < t$$



- A integral-mq de X(t) existe se e só se

$$\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} R_X(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta$$

existe.

- Se X(t) é mq-contínuo, a sua integral-mq existe, e a sua média e autocorrelação são dadas por

$$\mu_Y(t) = E\left[\int_{t_0}^{t} X(\alpha)\,d\alpha\right] = \int_{t_0}^{t} E[X(\alpha)]\,d\alpha = \int_{t_0}^{t} \mu_X(\alpha)\,d\alpha \qquad (3)$$

$$R_Y(t,s) = E\left[\int_{t_0}^{t} X(\alpha)\,d\alpha \int_{t_0}^{s} X(\beta)\,d\beta\right] = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} E[X(\alpha)X(\beta)]\,d\beta\, d\alpha =$$

$$= \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} R_X(\alpha,\beta)\,d\beta\, d\alpha$$

*As equações (1), (2) e (3) indicam que a operação de valor esperado comuta[redacted] com as operações de limite, diferenciação e integração