– CADEIAS DE MARKOV: CASO FINITO E IRREDUTÍVEL

⇒ PROCESSO ALEATÓRIO DE PARÂMETRO DISCRETO

$$X_0, X_1, X_2, \ldots$$

E DE ESTADOS DISCRETOS:

$$X_n = i \quad , \quad i \text{ INTEIRO}$$

⇒ O 'SISTEMA' ESTÁ NO ESTADO i APÓS n PASSOS

* A ESTRUTURA DO PROCESSO É DADA PELAS DENSIDADES CONJUNTAS

$$P_r[X_0 = j_0, X_1 = j_1, \ldots, X_k = j_k]$$

PARA TODAS AS POSSÍVEIS SEQÜÊNCIAS DE k ESTADOS, $\forall k$

* COMO O PROCESSO É MARKOVIANO, ISTO SE REDUZ A

$$P_r[X_0 = j_0, X_1 = j_1, \ldots, X_k = j_k] = p(j_0)\, p(j_1|j_0)\, p(j_2|j_1) \ldots p(j_k|j_{k-1})$$

ONDE $p(j_0) = P_r[X_0 = j_0]$

E $p(j_k|j_{k-1}) = P_r[X_k = j_k \mid X_{k-1} = j_{k-1}]$

⇒ NECESSITA-SE APENAS DAS PROBABILIDADES INICIAIS E DAS PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO EM UM PASSO, PARA DESCREVER O PROCESSO

* EM GERAL: $p(j_k|j_{k-1})$ DEPENDE DE j_k, j_{k-1} E k

i.e., A PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO PODE VARIAR COM O TEMPO

ASSUMIREMOS PROCESSOS ESTACIONÁRIOS

$\Rightarrow$ AS PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO INDEPENDEM DO TEMPO

*NOTAÇÃO: $p_{ij} = P_r[X_n = j \mid X_{n-1} = i] \equiv P_r[X_1 = j \mid X_0 = i]$

$$p_i \equiv p_i^{(0)} = P_r[X_0 = i]$$

$$\text{COM } \sum_j p_{ij} = 1$$

*FORMULAÇÃO MATRICIAL:

A MATRIZ

$$\underset{\sim}{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

É A MATRIZ DE TRANSIÇÃO DO PROCESSO

$\Rightarrow$ A SOMA DOS TERMOS EM CADA LINHA DE $\underset{\sim}{P}$ É IGUAL A 1

QUALQUER MATRIZ COM ENTRADAS NÃO-NEGATIVAS QUE TEM ESTA PROPRIEDADE É CHAMADA MATRIZ ESTOCÁSTICA

O VETOR

$$\underset{\sim}{p}^0 = (p_0^{(0)}, p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots) \equiv (p_0, p_1, p_2, \ldots)$$

É O VETOR DE PROBABILIDADES INICIAIS DO PROCESSO

- PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO EM n PASSOS:

$$p_{ij}^{(n)} = Pr[X_k = j \mid X_{k-n} = i] \equiv Pr[X_n = j \mid X_0 = i]$$

=> PROBABILIDADE DE QUE O SISTEMA VÁ DO ESTADO i AO ESTADO j EM n PASSOS

=> INDEPENDENTE DO TEMPO PARA PROCESSOS ESTACIONÁRIOS

* CONHECENDO OS $p_{ij}^{(n)}$ E O VETOR DE PROBABILIDADES INICIAIS, CONSEGUIMOS OBTER AS PROBABILIDADES

$$p_i^{(n)} = Pr[X_n = i]$$

DE QUE O SISTEMA ESTEJA NO ESTADO i APÓS n PASSOS, i.e., NO TEMPO n.

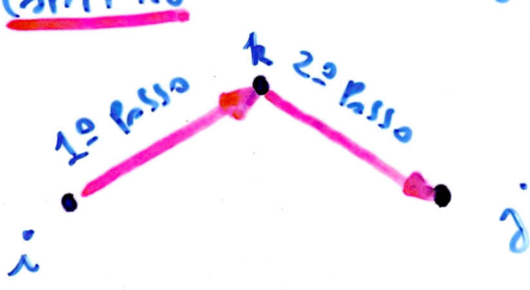
=> PRECISAMOS DETERMINAR A MATRIZ

$$\underset{\sim}{P}^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

EM TERMOS DA MATRIZ $\underset{\sim}{P}$ (MATRIZ DE TRANSIÇÃO EM 1 PASSO)

* INICIALMENTE, DETERMINAMOS $p_{ij}^{(2)}$ EM TERMOS DE p_{ij}:

<u>POSSÍVEL</u> <u>CAMINHO</u> ENTRE i E j EM 2 PASSOS:



=> PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO POR ESTE CAMINHO

$$p_{ik}p_{kj}$$

* CONSIDERANDO TODOS OS POSSÍVEIS CAMINHOS, i.e., TODOS OS POSSÍVEIS k INTERMEDIÁRIOS, OBTEMOS

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}$$

i.e., $\underset{\sim}{P}^{(2)} = \underset{\sim}{P}\,\underset{\sim}{P} = \underset{\sim}{P}^2$

SIMILARMENTE, REPETINDO O RACIOCÍNIO, OBTEMOS EM n PASSOS:

$$\underset{\sim}{P}^{(n)} = \underset{\sim}{P}^n$$

$\Rightarrow$ PARA OBTER AS PROBABILIDADES DE TRANSIÇÃO EM n PASSOS, DEVEMOS CALCULAR POTÊNCIAS DA MATRIZ DE TRANSIÇÃO

COMO $\underset{\sim}{P}^{n+m} = \underset{\sim}{P}^n \underset{\sim}{P}^m$, OBTEMOS $\underset{\sim}{P}^{(n+m)} = \underset{\sim}{P}^{(n)} \underset{\sim}{P}^{(m)}$

i.e., $$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_k p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$$ (EQUAÇÃO DE CHAPMAN-KOLMOGOROV)

— CLASSIFICAÇÃO DOS ESTADOS:

i) SE $p_{jk}^{(n)} > 0$, PARA ALGUM n, O ESTADO k É **ALCANÇÁVEL** A PARTIR DO ESTADO j.

SE, ALÉM DISSO, $p_{kj}^{(m)} > 0$, PARA ALGUM m (I.E., SE j É ALCANÇÁVEL A PARTIR DE k), OS ESTADOS k E j **SE COMUNICAM**.

ii) SE C É UM CONJUNTO DE ESTADOS TAL QUE NENHUM ESTADO FORA DE C PODE SER ALCANÇADO DE NENHUM ESTADO DE C, C É DITO **FECHADO**.

$\Rightarrow$ SE O PROCESSO ENTRA EM C, NÃO CONSEGUE MAIS SAIR.

SE CADA PAR DE ESTADOS EM C SE COMUNICA, C É UMA **CLASSE FECHADA COMUNICANTE**.

iii) SE UM CONJUNTO FECHADO TEM UM SÓ ESTADO, ESTE É DITO **ABSORVENTE**.

iv) SE UMA CADEIA DE MARKOV TEM COMO ÚNICO CONJUNTO FECHADO O CONJUNTO DE TODOS OS ESTADOS, ELA É DITA **IRREDUTÍVEL**.

v) UM ESTADO É DITO **TRANSIENTE** OU **NÃO-RECORRENTE**, SE EXISTE UMA PROBABILIDADE POSITIVA DE QUE O PROCESSO NÃO RETORNE ÀQUELE ESTADO.

vi) UM ESTADO É DITO **RECORRENTE** SE, SAINDO DELE, O PROCESSO RETORNA ÀQUELE ESTADO COM PROBABILIDADE 1, APÓS UM CERTO TEMPO.

- PROBABILIDADES DE ESTADO EM n PASSOS:

* VETOR DE PROBABILIDADES DE ESTADO NO TEMPO n:

$$\underset{\sim}{p}^{(n)} = \left(p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, \ldots\right)$$

ONDE

$$p_i^{(n)} = P_r\left[X_n = i\right]$$

TEMOS, APÓS 1 PASSO:

$$p_j^{(1)} = P_r\left[X_1 = j\right] = \sum_k \underbrace{P_r\left[X_0 = k\right] P_r\left[X_1 = j \mid X_0 = k\right]}_{P_r\left[X_1 = j,\, X_0 = k\right]}$$

$$= \sum_k p_k^{(0)} p_{kj}$$

=> EM FORMA VETORIAL:

$$\underset{\sim}{p}^{(1)} = \underset{\sim}{p}^{(0)} \underset{\sim}{P}$$

* POR INDUÇÃO, OBTEMOS $\underset{\sim}{p}^{(n)} = \underset{\sim}{p}^{(n-1)} \underset{\sim}{P}$

i.e., $p_j^{(n)} = \sum_k p_k^{(n-1)} p_{kj}$

E DAÍ,

$$\underset{\sim}{p}^{(n)} = \underset{\sim}{p}^{(0)} \underset{\sim}{P}^{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

i.e., $p_j^{(n)} = \sum_k p_k \, p_{kj}^{(n)}$

– DISTRIBUIÇÕES LIMITE

* QUEREMOS ESTUDAR O COMPORTAMENTO DE $p_j^{(n)}$ PARA n GRANDE, APÓS EFEITOS TRANSIENTES

⇒ DEFINIMOS:

PROBABILIDADES DE ESTADO ESTACIONÁRIO:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_j^{(n)}$$

* NO CASO DE AS PROBABILIDADES π_j NÃO DEPENDEREM DO ESTADO INICIAL, TEMOS TAMBÉM

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \quad (\text{INDEPENDENTE DE } i)$$

JÁ QUE $p_{ij}^{(n)}$ É A PROBABILIDADE DE SE ATINGIR j EM n PASSOS, A PARTIR DO ESTADO INICIAL i.

* NESTE CASO, TEMOS

$$\underset{\sim}{P}^{(n)} = \left\{ p_{ij}^{(n)} \right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underset{\sim}{V} = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\pi} \\ \underset{\sim}{\pi} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ONDE $\underset{\sim}{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_j, \ldots)$

MAS, $\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \sum_k p_k^{(n-1)} p_{kj} = \sum_k p_{kj} \lim_{n\to\infty} p_k^{(n-1)}$

$$\therefore \pi_j = \sum_k \pi_k p_{kj} \,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots$$

OU $\underset{\sim}{\pi} = \underset{\sim}{\pi}\, \underset{\sim}{P}$

* A SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES ACIMA DÁ O VETOR DE PROBABILIDADES ESTACIONÁRIAS DO PROCESSO

- Teoremas:

1. Os limites $\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_j^{(n)}$, $\forall j$, existem para toda cadeia de Markov aperiódica.

2. Os limites $\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_j^{(n)} = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}$ não dependem da distribuição de estados inicial para toda cadeia de Markov aperiódica e irredutível.

3. O vetor limite $\underset{\sim}{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$ é o único vetor de probabilidades estacionárias para qualquer cadeia de Markov finita, irredutível e aperiódica.

OBS.: Cadeias de Markov periódicas

$\Rightarrow$ o tempo entre visitas a certos estados é periódico, i.e., múltiplo de certo número