TEORIA DAS FILAS

* DESCRIÇÃO:

- CLIENTES CHEGAM ALEATORIAMENTE PARA ALGUM SERVIÇO
- SE HÁ SERVIDORES DISPONÍVEIS, ELES SÃO ATENDIDOS IMEDIATAMENTE, SE NÃO, ELES ESPERAM A SUA VEZ NUMA FILA
- UMA VEZ ATENDIDOS, OS CLIENTES DEIXAM O SISTEMA

⇒ VARIÁVEIS ALEATÓRIAS ENVOLVIDAS:

e.g., TEMPO ENTRE CHEGADAS DE CLIENTES

TEMPO DE EXECUÇÃO DO SERVIÇO

- QUESTÕES DE INTERESSE:

i) QUANTO TEMPO UM CLIENTE QUE CHEGA TERÁ QUE ESPERAR?

⇒ TEMPO DE ESPERA

ii) QUANTO TEMPO A EXECUÇÃO DO SERVIÇO VAI DURAR?

⇒ TEMPO DE OCUPAÇÃO DO SERVIDOR

iii) QUANTOS CLIENTES ESTARÃO ESPERANDO ATENDIMENTO NUM DADO INSTANTE, INCLUINDO AQUELES SENDO ATENDIDOS?

⇒ TAMANHO DA FILA

iv) QUAL O COMPORTAMENTO DO FLUXO DE CLIENTES QUE DEIXAM O SISTEMA APÓS O SERVIÇO?

⇒ PROCESSO DE PARTIDA

* ESPECIFICAÇÃO DE UM SISTEMA DE FILA

- PROCESSO DE CHEGADA:

  ⇒ FORMA COMO OS CLIENTES JUNTAM-SE À FILA

- DISCIPLINA DA FILA:

  ⇒ FORMA COMO OS CLIENTES SÃO ESCOLHIDOS PARA RECEBER O SERVIÇO: e.g., 'FIRST COME - FIRST SERVED'

- MECANISMO DE SERVIÇO:

  ⇒ NÚMERO DE SERVIDORES, TEMPO DE CADA OPERAÇÃO

* CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS DE FILA

NOTAÇÃO: A/B/s/K

A: TIPO DE PROCESSO DE CHEGADA

B: DISTRIBUIÇÃO DO TEMPO DE SERVIÇO

s: NÚMERO DE SERVIDORES

K: CAPACIDADE DO SISTEMA
QUANDO NÃO ESPECIFICADA, ASSUME-SE ILIMITADA

e.g., FILA M/M/2 :
- PROCESSO DE CHEGADA DE POISSON (M ≡ MARKOV)
  i.e., DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL DO TEMPO ENTRE CHEGADAS.
- TEMPO DE SERVIÇO EXPONENCIAL
- 2 SERVIDORES

FILA M/G/1 :
- PROCESSO DE CHEGADA DE POISSON
- TEMPO DE SERVIÇO GERAL
- 1 SERVIDOR

FILA M/D/1 : D ≡ DETERMINÍSTICO (TEMPO DE SERVIÇO CONSTANTE)

* GRANDEZAS BÁSICAS:

L : NÚMERO MÉDIO DE CLIENTES NO SISTEMA

L_q : NÚMERO MÉDIO DE CLIENTES ESPERANDO NA FILA

L_s : NÚMERO MÉDIO DE CLIENTES EM SERVIÇO

$$L = L_q + L_s$$

W : TEMPO MÉDIO QUE UM CLIENTE GASTA NO SISTEMA

W_q : TEMPO MÉDIO QUE UM CLIENTE GASTA NA FILA

W_s : TEMPO MÉDIO QUE UM CLIENTE GASTA EM SERVIÇO

$$W = W_q + W_s$$

- EM GERAL, AS SEGUINTES RELAÇÕES VALEM ENTRE ESSAS GRANDEZAS:

$$L = \lambda_a W \quad \text{(FÓRMULA DE LITTLE)}$$

$$L_q = \lambda_a W_q$$

$$L_s = \lambda_a W_s$$

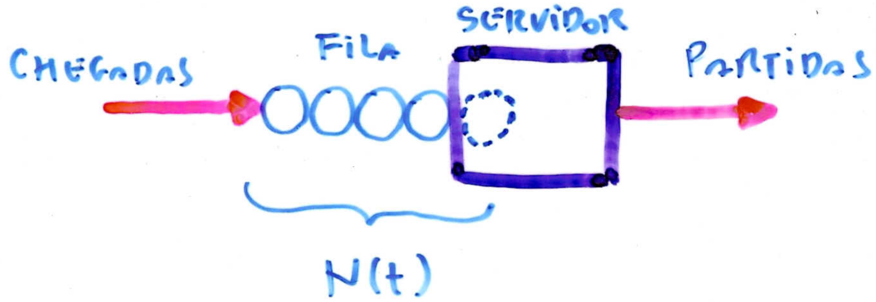
ONDE λ_a É A TAXA MÉDIA DE CHEGADA DOS CLIENTES

$$\lambda_a = \lim_{t \to \infty} \frac{X(t)}{t}$$

$X(t)$ = NÚMERO DE CLIENTES CHEGANDO NO TEMPO t

* PROCESSOS DE NASCIMENTO-E-MORTE

- SISTEMA DE FILA:



DIZEMOS QUE O SISTEMA ESTÁ NO ESTADO S_n SE HÁ n CLIENTES, INCLUINDO AQUELES EM SERVIÇO.

SEJA $N(t)$ O PROCESSO DE MARKOV QUE ASSUME O VALOR n QUANDO O SISTEMA ESTÁ NO ESTADO S_n.

$\Rightarrow$ $N(t)$ É UM PROCESSO DE NASCIMENTO-E-MORTE, SE AS SEGUINTES CONDIÇÕES SÃO SATISFEITAS

i) SE O SISTEMA ESTÁ NO ESTADO S_n, ELE SÓ PODE FAZER TRANSIÇÕES PARA S_{n-1} OU S_{n+1}, $n \geq 1$

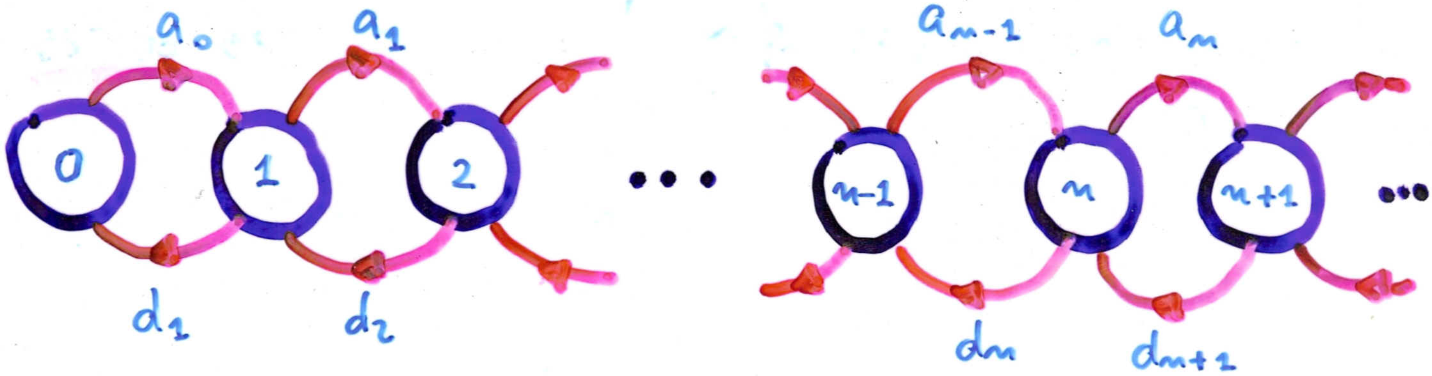
i.e., OU UM CLIENTE COMPLETA O SERVIÇO E SAI DO SISTEMA, OU, ENQUANTO O CLIENTE ATUAL ESTÁ EM SERVIÇO, UM OUTRO CHEGA.

A PARTIR DE S_0, A ÚNICA TRANSIÇÃO POSSÍVEL É PARA S_1

ii) SE O SISTEMA ESTÁ EM S_n NO TEMPO t, A PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO PARA S_{n+1} NUM INTERVALO DE TEMPO Δt É $a_n \Delta t$, E A PROBABILIDADE DE TRANSIÇÃO PARA S_{n-1} É $d_n \Delta t$

i.e., CLIENTES CHEGAM NUMA TAXA EXPONENCIAL a_n (PARÂMETRO DE CHEGADA), E SAEM NUMA TAXA EXPONENCIAL d_n (PARÂMETRO DE SAÍDA)

* DIAGRAMA DE TRANSIÇÕES:



- PROBABILIDADES DE ESTADO:

SEJA $p_n(t)$ A PROBABILIDADE DE O SISTEMA ESTAR NO ESTADO S_n NO TEMPO t

i.e., $p_n(t) = P_r[N(t) = n]$

$\Rightarrow$ AS SEGUINTES RELAÇÕES RECURSIVAS SÃO VÁLIDAS

$$\begin{cases} p_n'(t) \equiv \dfrac{d}{dt} p_n(t) = -(a_n + d_n) p_n(t) + a_{n-1} p_{n-1}(t) + d_{n+1} p_{n+1}(t) \\ \quad \text{PARA } n \geq 1 \\ p_0'(t) \equiv \dfrac{d}{dt} p_0(t) = -(a_0 + d_0) p_0(t) + d_1 p_1(t) \\ \qquad = -a_0 p_0(t) + d_1 p_1(t) \end{cases}$$

ONDE ASSUMIMOS $d_0 = 0$.

* EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO:

NO ESTADO ESTACIONÁRIO: $\lim_{t \to \infty} p_n(t) = p_n$ (INDEPENDENTE DO TEMPO)

$\Rightarrow$ TOMANDO $p_0'(t) = p_n'(t) = 0$, OBTEMOS

$$\begin{cases} (a_n + d_n)\, p_n = a_{n-1}\, p_{n-1} + d_{n+1}\, p_{n+1}, & n \geq 1 \\ a_0 p_0 = d_1 p_1 \end{cases}$$

RESOLVENDO EM TERMOS DE p_0:

$$(1) \begin{cases} p_1 = \dfrac{a_0}{d_1} p_0 \\ p_2 = \dfrac{a_0 a_1}{d_1 d_2} p_0 \\ \vdots \\ p_n = \dfrac{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}{d_1 d_2 \cdots d_n} p_0 \end{cases}$$

ONDE p_0 PODE SER OBTIDO DE

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \left(1 + \frac{a_0}{d_1} + \frac{a_0 a_1}{d_1 d_2} + \cdots \right) p_0 = 1$$

* SISTEMAS DE FILA DA FORMA M/M/s/K SÃO MODELADOS COMO PROCESSOS DE NASCIMENTO-E-MORTE, DESCRITOS PELAS EQUAÇÕES ACIMA, PARA DIFERENTES PARÂMETROS a_n E d_n.

* SISTEMA DE FILA M/M/1:

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{PROCESSO DE CHEGADA: POISSON, COM TAXA MÉDIA } \lambda \\ \text{TEMPO DE SERVIÇO: EXPONENCIAL, COM TAXA MÉDIA } \mu \end{cases}$$

⇒ PROCESSO DE NASCIMENTO-E-MORTE COM PARÂMETROS

$$a_n = \lambda \ , \quad n \geq 0$$

$$d_n = \mu \ , \quad n \geq 1$$

A PARTIR DAS EQUAÇÕES (1) E (2):

$$p_n = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}{d_1 d_2 \cdots d_n} p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

E

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = p_0 \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = 1 \ \therefore \ p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

ASSIM,
$$\begin{cases} p_0 = 1 - \rho \\ p_n = (1-\rho)\rho^n \end{cases}$$

ONDE $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \equiv$ INTENSIDADE DE TRÁFEGO < 1

i.e., O SERVIDOR, EM MÉDIA, DEVE PROCESSAR OS CLIENTES A UMA TAXA MAIOR DO QUE A SUA TAXA DE CHEGADA, SENÃO O COMPRIMENTO DA FILA TENDE A INFINITO

OBSERVAÇÃO: EM GERAL,

$$\text{INTENSIDADE DE TRÁFEGO} = \frac{\text{TEMPO MÉDIO DE SERVIÇO}}{\text{TEMPO MÉDIO ENTRE CHEGADAS}} = \frac{\text{TAXA MÉDIA DE CHEGADA}}{\text{TAXA MÉDIA DE SERVIÇO}}$$

– NÚMERO MÉDIO DE CLIENTES NO SISTEMA:

$$L \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n\, p_n \equiv E[N] = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

A PARTIR DAÍ, USANDO $L = \lambda_a W$, $W = W_q + W_s$ E $L_q = \lambda_a W_q$, OBTEMOS

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

* SISTEMA DE FILA M/M/1/K

=> CAPACIDADE LIMITADA A K CLIENTES

QUANDO O SISTEMA ATINGE ESTE LIMITE, A TAXA DE CHEGADA SE REDUZ A ZERO, ATÉ QUE UM CLIENTE SEJA ATENDIDO, LIBERANDO ESPAÇO NA FILA.

=> PROCESSO DE NASCIMENTO-E-MORTE COM PARÂMETROS

$$a_n = \begin{cases} \lambda, & 0 \leq n < K \\ 0, & n \geq K \end{cases} \qquad d_n = \mu, \quad n \geq 1$$

A PARTIR DAS EQUAÇÕES (1) E (2):

$$p_n = \frac{a_0 a_1 \cdots a_{n-1}}{d_1 d_2 \cdots d_n} p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \rho^n p_0, \quad 0 \leq n \leq K$$

E

$$\sum_{n=0}^{K} p_n = p_0 \sum_{n=0}^{K} \rho^n = p_0 \left[\frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}\right] = 1$$

$$\therefore \begin{cases} p_0 = \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \\[2ex] p_n = \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}} \end{cases}$$

OBSERVAÇÕES:

i) NESTE CASO, NÃO É PRECISO ASSUMIR QUE A INTENSIDADE DE TRÁFEGO, λ/μ, SEJA MENOR QUE 1.

ii) COMO CLIENTES NÃO SÃO ACEITOS QUANDO O SISTEMA ESTÁ NO ESTADO K, A FRAÇÃO DAS CHEGADAS QUE EFETIVAMENTE ENTRAM NO SISTEMA É $1 - p_K$.

=> $\lambda_e = \lambda(1-p_K)$ TAXA EFETIVA DE CHEGADA

– NÚMERO MÉDIO DE CLIENTES NO SISTEMA:

$$L = \rho \left[\frac{1-(K+1)\rho^{K} + K\rho^{K+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})} \right]$$

A PARTIR DAÍ, COM $\lambda_a = \lambda_e = \lambda(1-p_K)$

$$W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda(1-p_K)}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$L_q = \lambda_e W_q = \lambda(1-p_K) W_q$$

OBSERVAÇÃO:

OUTROS SISTEMAS DE FILA PODEM SER SIMILARMENTE DESCRITOS, COMO O M/M/s, DE s SERVIDORES E CAPACIDADE ILIMITADA, E O M/M/s/K, DE s SERVIDORES E CAPACIDADE K.

NESTES CASOS, O PARÂMETRO DE PARTIDA DEPENDE DO ESTADO.