Formação de Imagens

→ Aspectos Geométricos e Aspectos Físicos

• Física da Formação de Imagens (Radiometria)

→ Determina a intensidade de cada ponto na imagem, em função das propriedades físicas da cena e das condições de captura da imagem (*Veremos adiante*)

• Geometria da Formação de Imagens

→ Determina onde cada ponto da cena vai se projetar no plano-imagem

Sistema de Captura de Imagens Simplificado (Câmera de Orifício)

→ Raios luminosos penetram pelo centro de projeção, O, e atingem o plano de imagem situado à distância f (distância focal)

Ponto objeto $P = (x, y, z)$ na cena se projeta no ponto imagem $P' = (x', y') \equiv (x', y', -f)$ no plano-imagem, onde as coordenadas são relativas ao sistema de referência centrado em O

A reta definida pelo ponto P e pelo centro de projeção (linha de visada) determina a posição do ponto P'

→ A imagem projetada é invertida com relação ao objeto

Para evitar este problema, costuma-se considerar o plano-imagem na frente do centro de projeção

- Projeção Perspectiva

Por semelhança de triângulos, obtêm-se as relações

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{r'}{r} = \frac{f}{z}$$

onde $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ e $r' \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2}$ são as distâncias de P e de P' ao eixo z

Daí resultam as equações da projeção perspectiva

$$x' = \frac{f}{z}x \quad \text{e} \quad y' = \frac{f}{z}y$$

Obs.: Se o sistema de referência é centrado no plano de imagem, as equações se tornam

$$x' = \frac{f}{f-z}x \quad \text{e} \quad y' = \frac{f}{f-z}y$$

- Projeção Ortográfica

Se o centro de projeção está muito distante do objeto (i.e, se $f \to \infty$, no segundo grupo de equações, ou $f \to \infty$ e $z \to \infty$, no primeiro), o ponto objeto se projeta sem distorção no plano imagem:

$$x' = x \quad \text{e} \quad y' = y$$

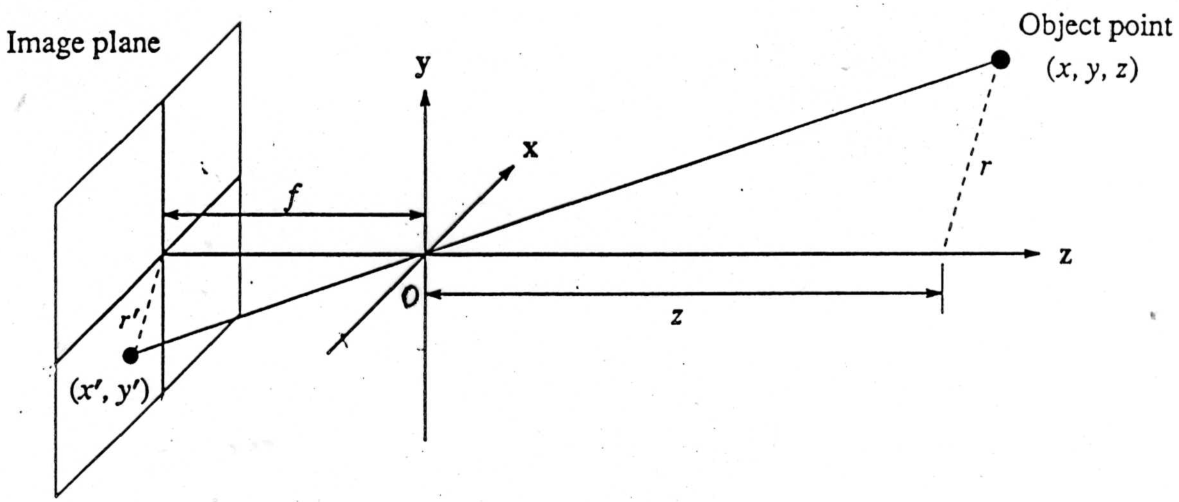
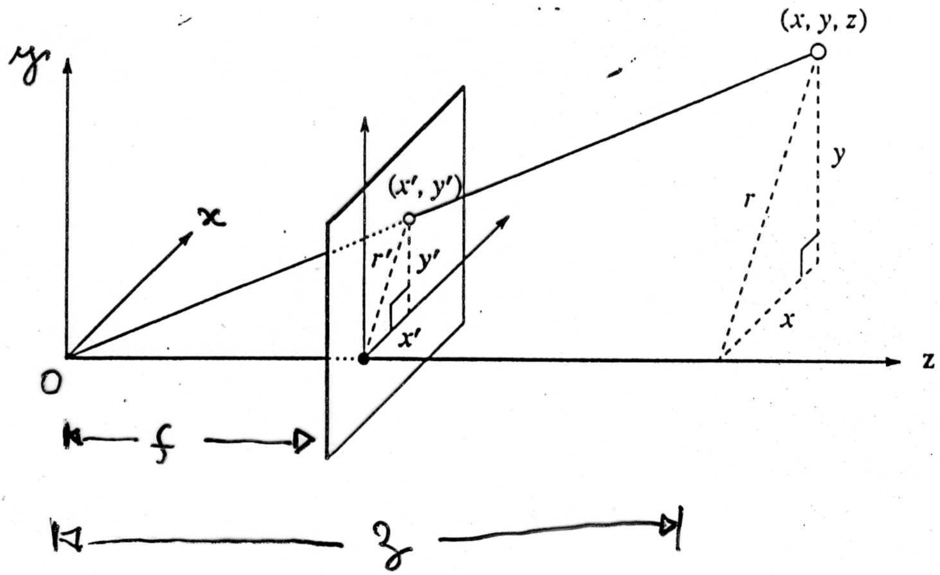


Image plane
Object point
(x, y, z)
y
x
f
r
z
r'
(x', y')
O
z


(x, y, z)
y
x
(x', y')
r
y
r'
y'
x'
x
O
z
f
z

- Amostragem e Quantização

Imagem Digital

Toda função contínua deve ser amostrada em um número finito de pontos e representada na aproximação discreta permitida pelo computador

Amostra quantizada da função imagem:

pixel (*picture element*)

Imagem digital: Matriz bidimensional de pixels, $I(i, j)$

Observações:

i) As coordenadas x e y no plano-imagem são relacionadas aos índices i e j da matriz

e.g., para matriz $M \times N$,

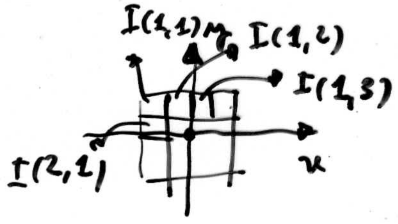
$$x = j - \frac{M-1}{2} \;\text{ e }\; y = -i + \frac{N-1}{2}$$

ii) A taxa de amostragem determina o número de pixels

Consideraremos amostragem em uma grade quadrada regular

iii) A quantização determina os níveis de intensidade:

Inteiro de 8 *bits* $\rightarrow$ Níveis de cinza de 0 a 255



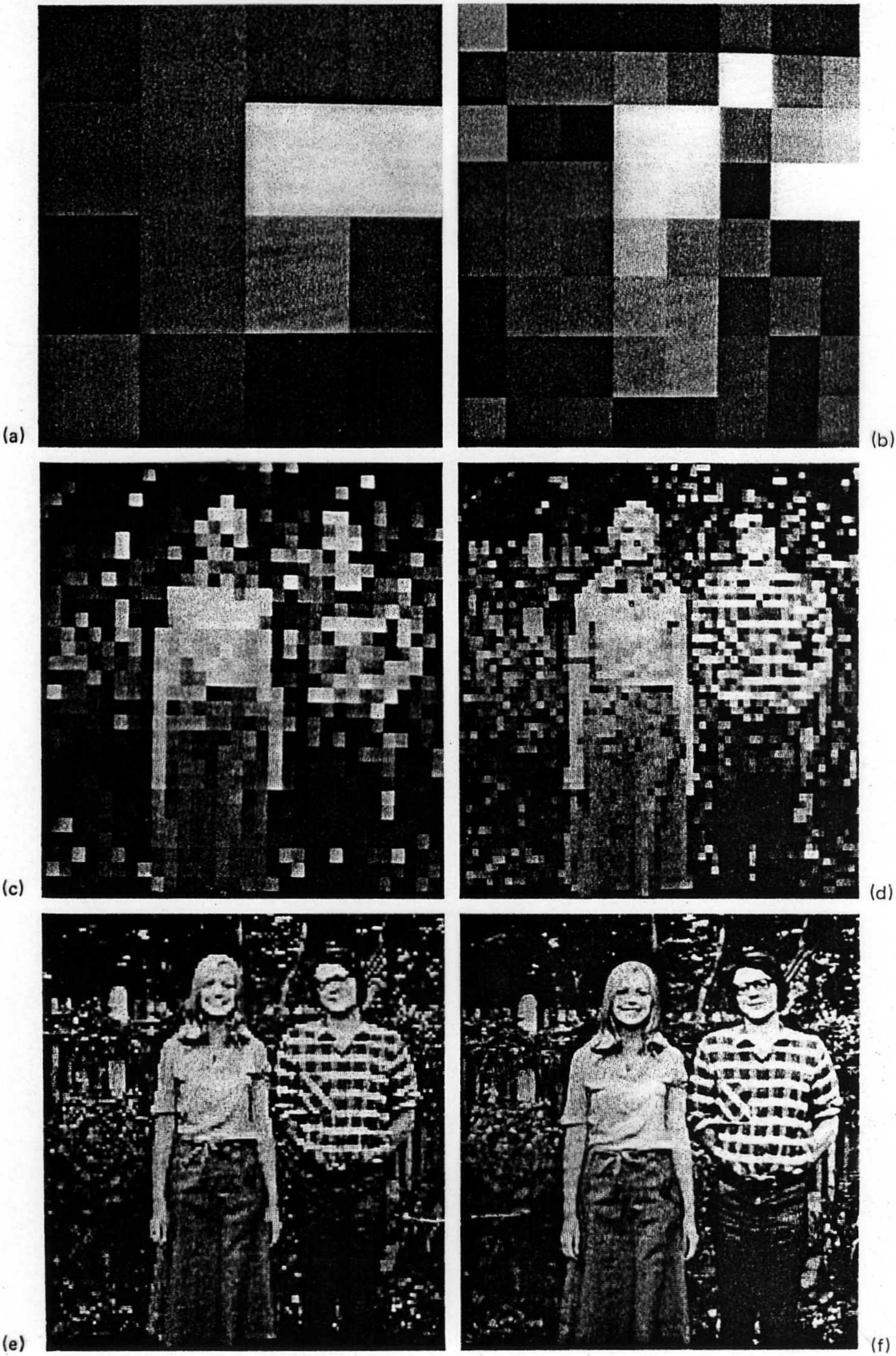


Fig. 2.9 Using different numbers of samples. (a) $N = 16$; (b) $N = 32$; (c) $N = 64$; (d) $N = 128$; (e) $N = 256$; (f) $N = 512$.

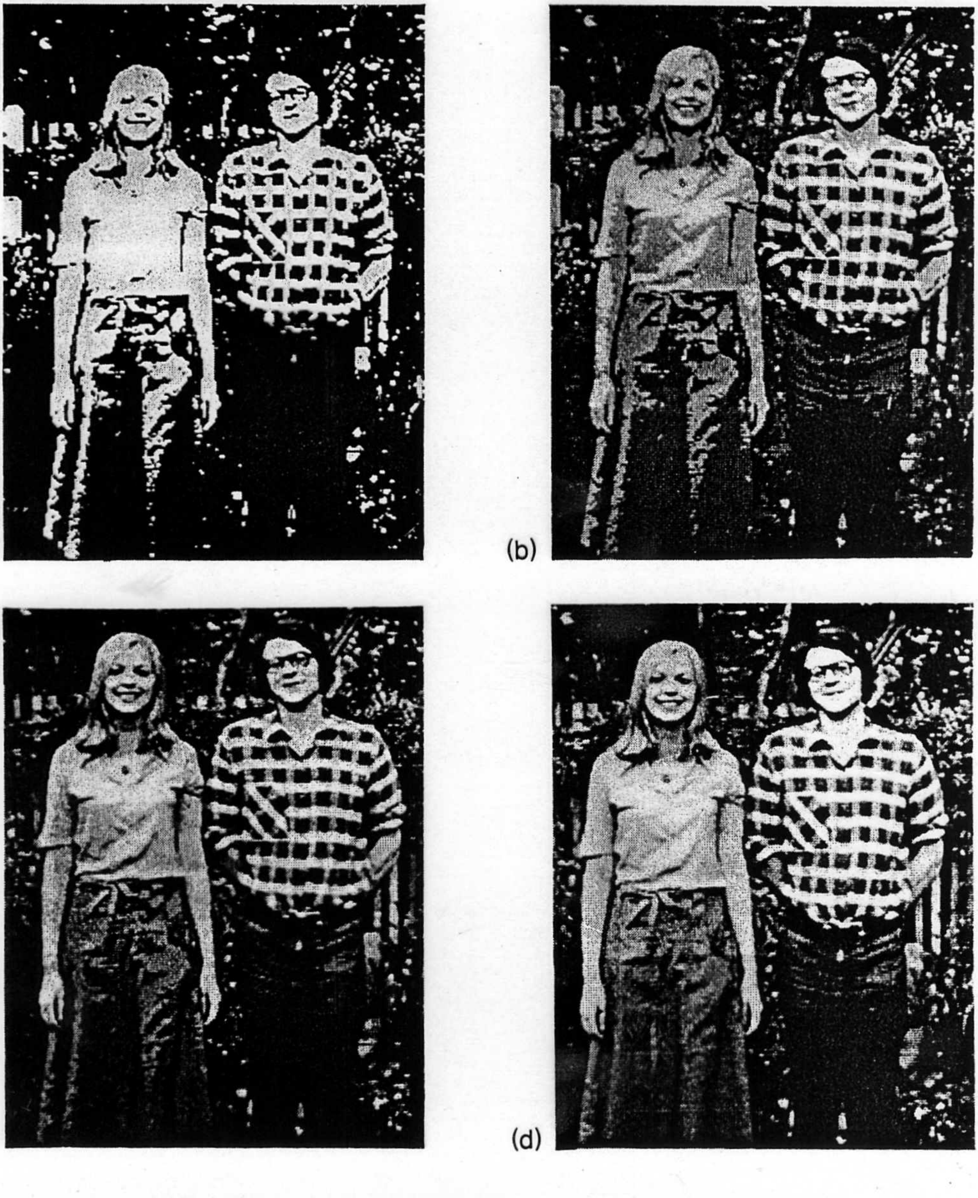


Fig. 2.10 Using different numbers of bits per sample. (a) $m = 1$; (b) $m = 2$; (c) $m = 4$; (d) $m = 8$.

Processamento Linear de Imagens

Sinais e Sistemas

Sinais: Funções representando grandezas físicas que transmitem informação

e.g., Imagem estática, $f(x, y)$

Sistemas: Transformações de sinais

e.g., Sistema de filtragem ou de compressão de imagens

Teoria dos Sistemas Lineares 1D

Sinais de entrada: $f_i(x)$

Sinais de saída: $g_i(x) = T[f_i(x)]$

- Sistema Linear

$\rightarrow$ Um sistema é dito linear, se

$$T[\sum_i \alpha_i f_i(x)] = \sum_i \alpha_i T[f_i(x)] = \sum_i \alpha_i g_i(x)$$

• Sistema Linear e Invariante sob Translação (LIT)

→ É um sistema linear para o qual se verifica

$$T[f_i(x - x_0)] = g_i(x - x_0), \quad \forall x$$

Importância dos sistemas LIT

- Muitos processos físicos podem ser modelados exatamente, ou aproximadamente, por sistemas LIT

- Sistemas LIT admitem uma análise matemática simples

- Qualquer sistema LIT fica completamente definido por sua resposta a um sinal particular: o *Sinal Impulso Unitário*

• O Sinal Impulso Unitário ou Função Delta

→ A função delta unidimensional fica definida pela expressão

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta(x)dx = \begin{cases} f(0) & : \quad x_1 \leq 0 \leq x_2 \\ 0 & : \quad x_1 > 0 \ \text{ ou } \ x_2 < 0 \end{cases}$$

para $f(x)$ contínua em $x = 0$, e x_1 e x_2 arbitrários

→ Propriedades (a partir da definição)

$$\delta(0) \to \infty$$

$$\delta(x) = 0, \ x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1 \quad \text{(Normalizada)}$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad \text{(Par)}$$

→ A função delta é o limite de uma distribuição de funções

- Distribuição

→ Família de funções dependentes de certos parâmetros

e.g., Distribuição Gaussiana:

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\}$$

Observa-se que

$$\lim_{\sigma \to 0} G_\sigma(x) = \delta(x)$$

- Outras Propriedades da Função Delta

- *Propriedade da Filtragem* (Definição mais geral de $\delta(x)$)

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0), \quad \text{para } x_1 \leq x_0 \leq x_2$$

- *Propriedade da Amostragem*

$$f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0)$$

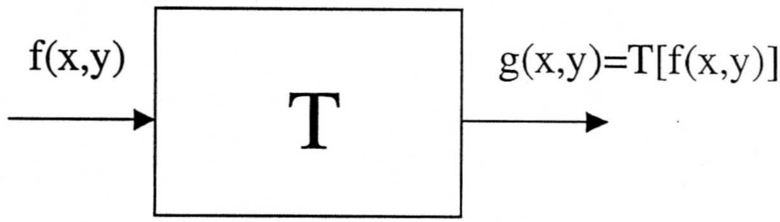
- *Propriedade de Escala e Translação*

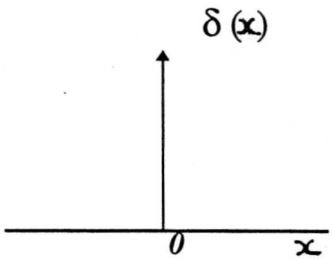
$$\delta(ax + b) = \frac{1}{|a|}\delta\left(x + \frac{b}{a}\right)$$

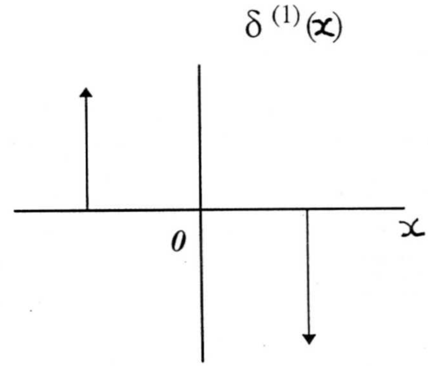
- *Propriedade das Derivadas*

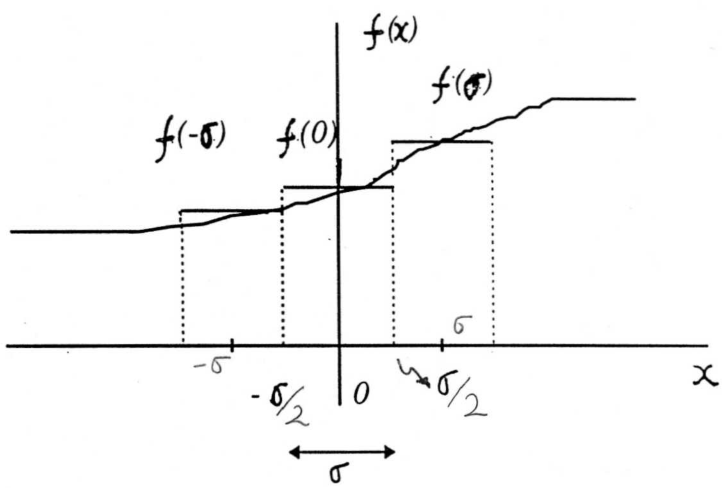
$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta^{(n)}(x - x_0)dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0),$$

para $x_1 \leq x_0 \leq x_2$, onde $f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f$


f(x,y)
T
g(x,y)=T[f(x,y)]


δ (x)
0
x


δ (1) (x)
0
x


f(x)
f(σ)
f(-σ)
f(0)
σ
-σ
- σ/2
0
σ/2
x
σ

- Expansão de um Sinal em termos da Função Delta

→ Da propriedade da filtragem

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi$$

→ Um sinal qualquer pode ser expresso como uma *soma contínua* de sinais impulso unitário

Demonstração:

Um sinal qualquer pode ser *aproximado* por uma soma discreta de pulsos retangulares, $P_\sigma(x)$

$$f(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\sigma)\sigma P_\sigma(x-k\sigma) =$$

$$= .... + f(-\sigma)\sigma P_\sigma(x+\sigma) + f(0)\sigma P_\sigma(x) + f(\sigma)\sigma P_\sigma(x-\sigma) + ...$$

No limite de $\sigma \to 0$:

$$k\sigma \to \xi$$

$$\sigma \to d\xi$$

$$P_\sigma(x) \to \delta(x)$$

Assim,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi$$

- Aplicação a Sistemas LIT

Pela *linearidade*, se a entrada do sistema LIT é

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi$$

a saída é

$$g(x) \equiv T[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)T[\delta(x-\xi)]d\xi$$

Pela *invariância sob translação*,

$$T[\delta(x-\xi)] = h(x-\xi)$$

onde $h(x) = T[\delta(x)]$ é a *resposta-impulso* do sistema LIT

Assim,

$$g(x) \equiv T[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)h(x-\xi)d\xi = f(x) * h(x)$$

onde $f(x) * h(x)$ se chama a *convolução* dos sinais f e h

Portanto,

A resposta de um sistema LIT a uma entrada qualquer é dada pela convolução do sinal de entrada com a resposta-impulso do sistema

Assim, um sistema LIT fica completamente definido pela sua resposta-impulso, ou seja, por sua resposta a um sinal impulso unitário

- Propriedades da Convolução

- *Comutatividade*: $f(x) * h(x) = h(x) * f(x)$

- *Associatividade*: $f(x) * [h_1(x) * h_2(x)] = [f(x) * h_1(x)] * h_2(x)$

- *Distributividade*:

$$f(x) * [h_1(x) + h_2(x)] = f(x) * h_1(x) + f(x) * h_2(x)$$

- *Convolução com a Delta*:

$$f(x) * \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi = f(x)$$

$\rightarrow$ O sistema identidade tem resposta-impulso igual à delta

- *Convolução com a Derivada da Delta*:

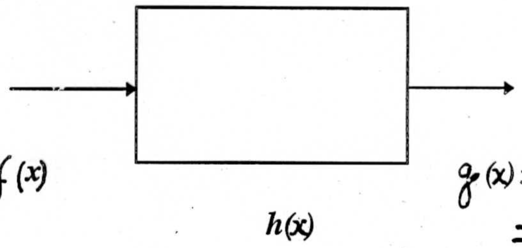
$$f(x) * \delta^{(1)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta^{(1)}(x-\xi)d\xi = f^{(1)}(x)$$

$\rightarrow$ O sistema diferenciador perfeito tem resposta-impulso igual à derivada da delta

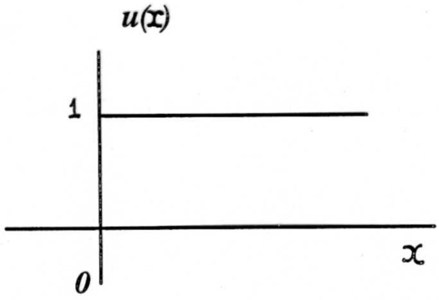
- *Convolução com a Função Degrau*:

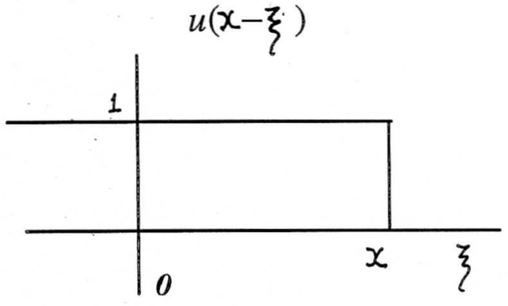
$$f(x) * u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)u(x-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\cancel{\infty}\, x} f(\xi)d\xi$$

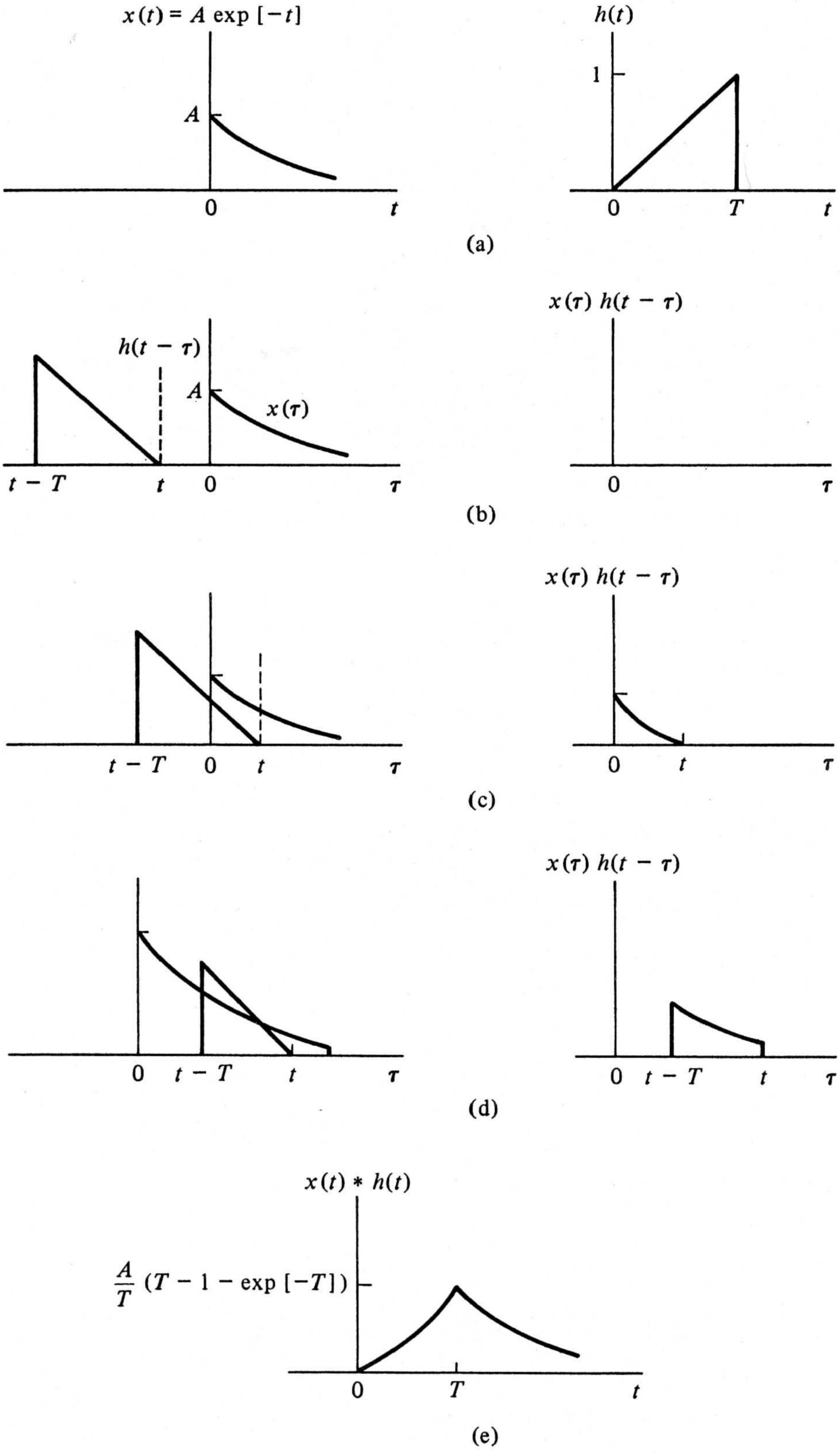
$\rightarrow$ O sistema integrador perfeito tem resposta-impulso igual à função degrau



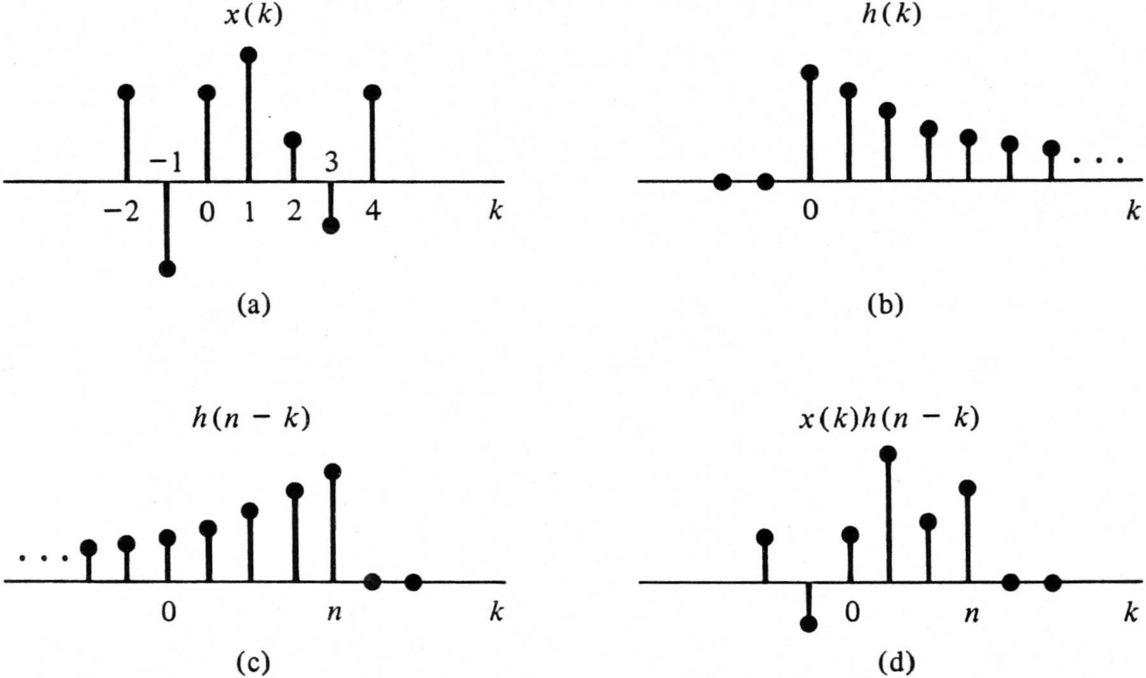
$$g(x) = f(u) * h(u) = h(u) * f(u)$$





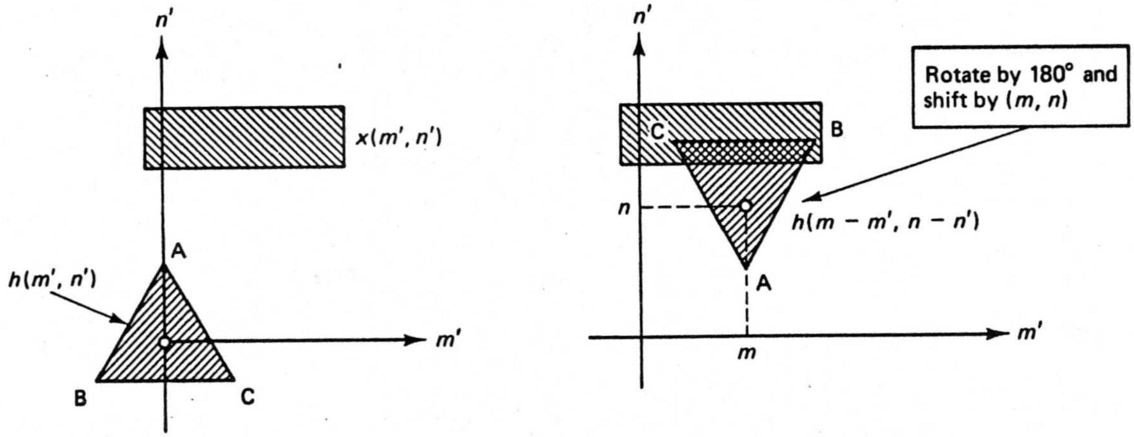


$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, x(\tau) h(t-\tau)$$



(a) (b) (c) (d)

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\, h(n-k)$$

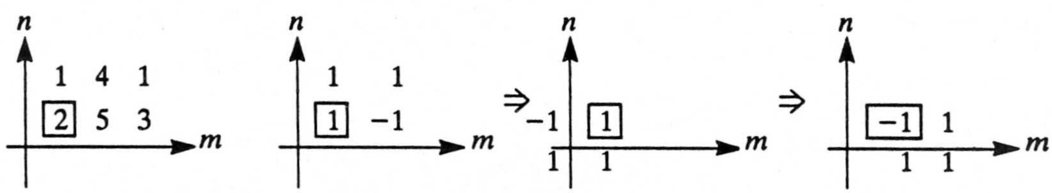


(a) impulse response

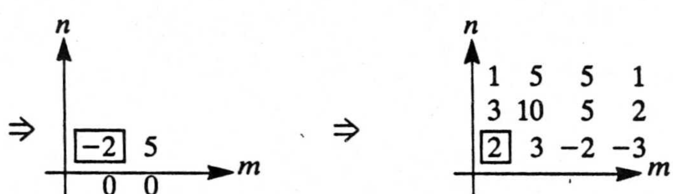
(b) output at location (m, n) is the sum of product of quantities in the area of overlap.

Example 2.1 (Discrete convolution)

Consider the 2×2 and 3×2 arrays $h(m, n)$ and $x(m, n)$ shown next, where the boxed element is at the origin. Also shown are the various steps for obtaining the convolution of these two arrays. The result $y(m, n)$ is a 4×3 array. In general, the convolution of two arrays of sizes $(M_1 \times N_1)$ and $(M_2 \times N_2)$ yields an array of size $[(M_1 + M_2 - 1) \times (N_1 + N_2 - 1)]$ (Problem 2.5).



(a) $x(m, n)$ (b) $h(m, n)$ (c) $h(-m, -n)$ (d) $h(1-m, -n)$



(e) $y(1, 0) = -2 + 5 = 3$ (f) $y(m, n)$

$$x(m,n) * h(m,n) = \sum_{n'} \sum_{m'} x(m',n')\, h(m-m', n-n') \equiv y(m,n)$$

$$\therefore\ y(1,0) = \sum_{n'} \sum_{m'} x(m',n')\, h(1-m', -n') \equiv \sum_{n} \sum_{m} x(m,n)\, h(1-m, -n)$$