• Representação de um Sinal em termos de um Conjunto Ortogonal:

$f(x) \equiv$ Sinal qualquer

$\{\phi_i(x)\} \equiv$ Conjunto ortonormal em (a, b)

Podemos escrever

$$f(x) = \Sigma_{i=-\infty}^{\infty} c_i \phi_i(x) \quad \text{(Série de Fourier Generalizada)}$$

com

$$c_k = \int_a^b f(x)\phi_k^*(x)dx \quad \text{(Coefs. Generalizados de Fourier)}$$

• Série de Fourier:

→ Representação de um sinal *periódico* em termos de exponenciais complexas

Sinal Periódico: $f(x) = f(x + nL),\ \forall x,\ n \in \mathcal{Z}$

$L \equiv$ Período Espacial

$\omega_0 = \frac{2\pi}{L} \equiv$ Freqüência Angular Espacial

Conjunto *Ortonormal* de Sinais Periódicos:

$$\{\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \exp jn\omega_0 x, \quad n \in \mathcal{Z}\}$$

• Série Exponencial de Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp jn\omega_0 x$$

com

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{<L>} f(x) \exp\{-jn\omega_0 x\} dx$$

$< L >$ indica integração em qualquer intervalo de tamanho L

• Coeficientes de Fourier:

→ Números complexos: $c_n = |c_n| \exp j\phi_n$

• Espectros de Linha:

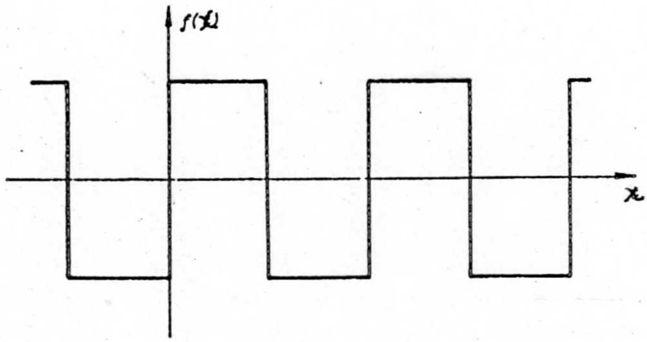
Gráfico $|c_n| \times n \equiv$ Espectro de Magnitude

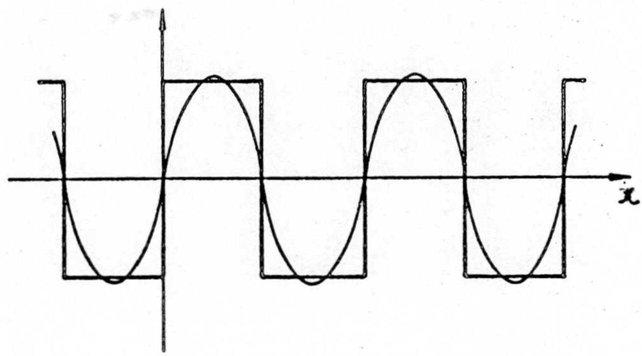
Gráfico $\phi_n \times n \equiv$ Espectro de Fase

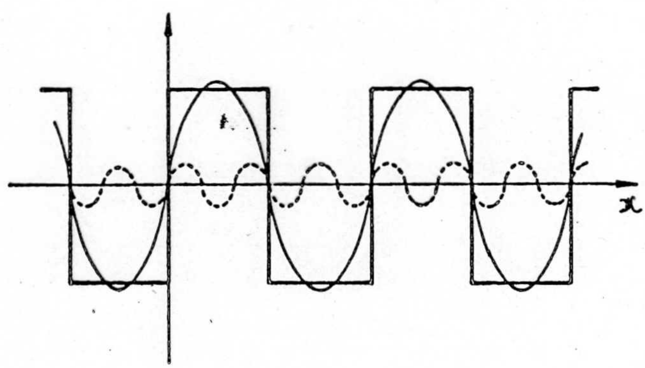
Para $n = 0$:

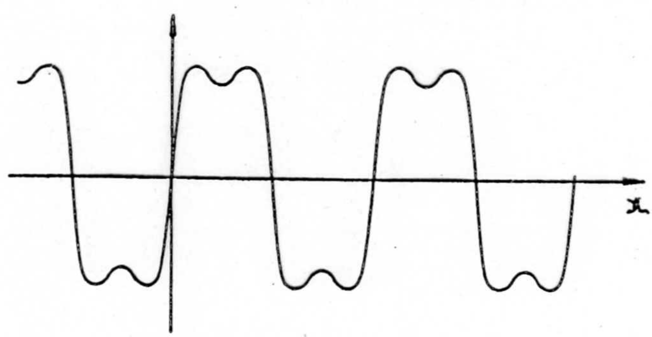
$$c_0 = \frac{1}{L} \int_{<L>} f(x) dx$$

→ Valor médio do sinal em um período


f(x)
x


x


x


x

- Série Trigonométrica de Fourier:

→ Equivalente à série exponencial, para sinais reais

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 x) + b_n \sin(n\omega_0 x))$$

com

$$a_0 \equiv c_0 = \frac{1}{L} \int_{<L>} f(x) dx$$

$$a_n \equiv 2Re\{c_n\} = \frac{2}{L} \int_{<L>} f(x) \cos(n\omega_0 x) dx$$

$$b_n \equiv 2Im\{c_n\} = \frac{2}{L} \int_{<L>} f(x) \sin(n\omega_0 x) dx$$

- Séries de Fourier da Convolução e do Produto de Dois Sinais:

$\{b_n\} \equiv$ Coeficientes de $f(x)$, $\{c_n\} \equiv$ Coeficientes de $g(x)$

Se

$$z(x) = f(x) * g(x) \equiv \frac{1}{L} \int_{<L>} f(\xi) g(x - \xi) d\xi$$

então

$$z(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n c_n \exp jn\omega_0 x$$

→ *Convolução* (periódica) leva ao *produto* no domínio de Fourier

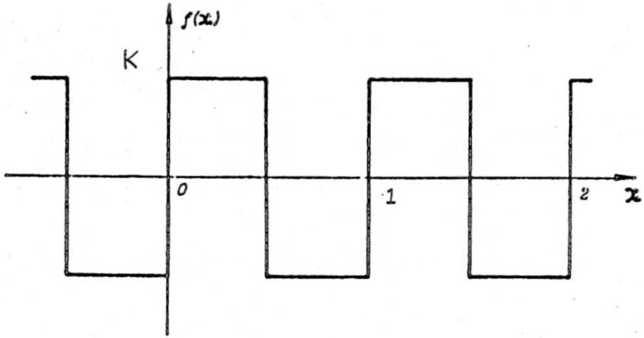
Se

$$z(x) = f(x) g(x)$$

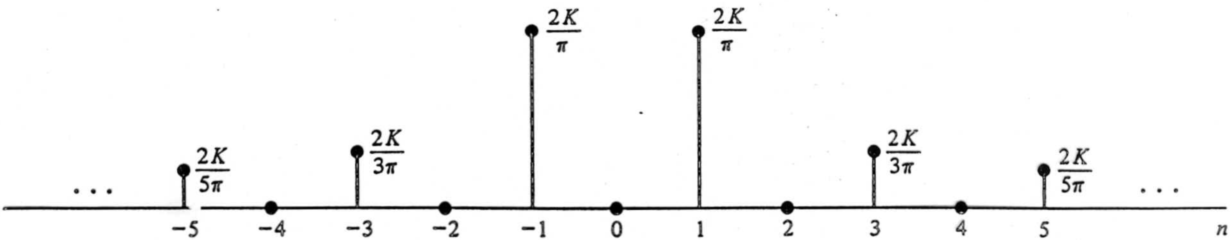
então

$$z(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\sum_{m=-\infty}^{\infty} b_{n-m} c_m] \exp jn\omega_0 x$$

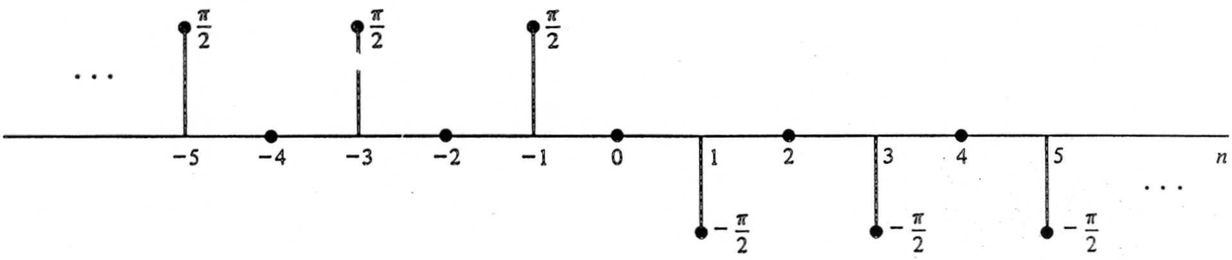
→ *Produto* leva à *convolução* (discreta) no domínio de Fourier



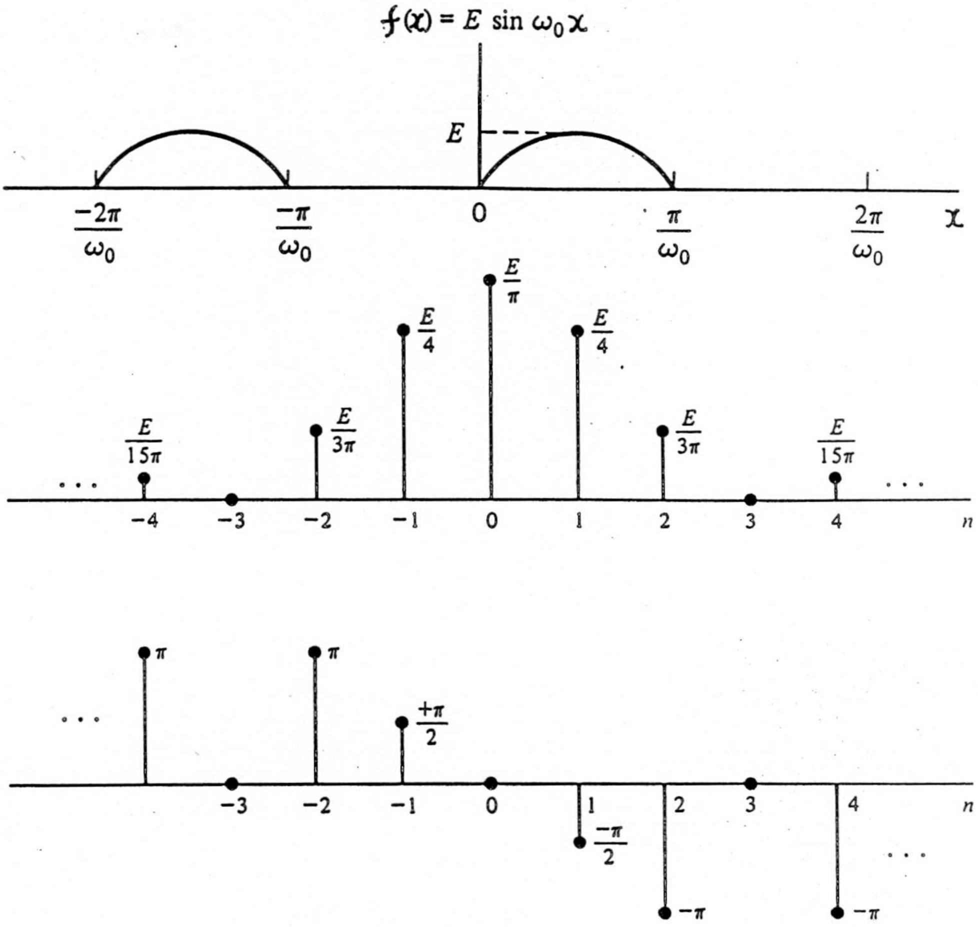
f(x)
K
0
1
2
x



2K/π
2K/π
2K/5π
2K/3π
2K/3π
2K/5π
. . .
. . .
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
n



π/2
π/2
π/2
. . .
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
n
. . .
− π/2
− π/2
− π/2



f(x) = E sin ω0x
E
−2π/ω0
−π/ω0
0
π/ω0
2π/ω0
x
E/π
E/4
E/4
E/3π
E/3π
E/15π
E/15π
. . .
. . .
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
n
π
π
+π/2
−π/2
−π
−π
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
n
. . .
. . .

Sistemas LIT com Entradas Periódicas

- Sistema LIT com resposta-impulso $h(x)$:

$\rightarrow$ Para entrada $f(x)$, a saída é

$$g(x) = f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) f(x-\xi) d\xi$$

Assim, para a entrada $f(x) = \exp j\omega x$,

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \exp\{j\omega(x-\xi)\} d\xi =$$

$$= \exp\{j\omega x\} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \exp\{-j\omega\xi\} d\xi$$

Portanto,

$$g(x) = H(\omega) \exp j\omega x$$

onde

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) \exp\{-j\omega\xi\} d\xi$$

$$H(\omega) \equiv \text{Função de Transferência do Sistema}$$

$\rightarrow$ A resposta de um sistema LTI para uma entrada exponencial complexa é a própria exponencial complexa, modulada pelo fator

$$H(\omega) = |H(\omega)| \exp j\phi_H(\omega)$$

- Resposta de um Sistema LIT a uma Entrada Periódica Qualquer:

Usando a representação de Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp jn\omega_0 x$$

Pela linearidade:

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(n\omega_0) \exp jn\omega_0 x$$

→ A saída é periódica, com coeficientes de Fourier

$$d_n = c_n H(n\omega_0)$$

→ A função de transferência define completamente a resposta de um sistema LIT a uma entrada periódica