A Transformada de Fourier

→ Extensão da Série de Fourier para sinais não-periódicos.

- A TF como 'limite' da SF:

SF:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp jn\omega_0 x$$

$$c_n = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\exp\{-jn\omega_0 x\}dx$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{L}$$

Definindo

$$\omega_n = n\omega_0 \text{ e } F(\omega_n) \equiv Lc_n = \int_{-L/2}^{L/2} f(x)\exp\{-j\omega_n x\}dx$$

podemos reescrever:

SF:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0 F(\omega_n)\exp j\omega_n x$$

$$F(\omega_n) = \int_{-L/2}^{L/2} f(x)\exp\{-j\omega_n x\}dx$$

No limite $L \to \infty$:

- $f(x)$ torna-se não-periódico
- $\omega_0 \equiv \frac{2\pi}{L} \to d\omega$ (infinitesimal)
- $\omega_n \equiv n\omega_0 \to \omega$ (contínuo)
- SF$\to$ TF

TF:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp\{j\omega x\} d\omega$$
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\{-j\omega x\} dx$$

$F(\omega) = \mathcal{F}[f(x)] \equiv$Transformada de Fourier de $f(x)$

$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] \equiv$ Transformada Inversa de Fourier de $F(\omega)$

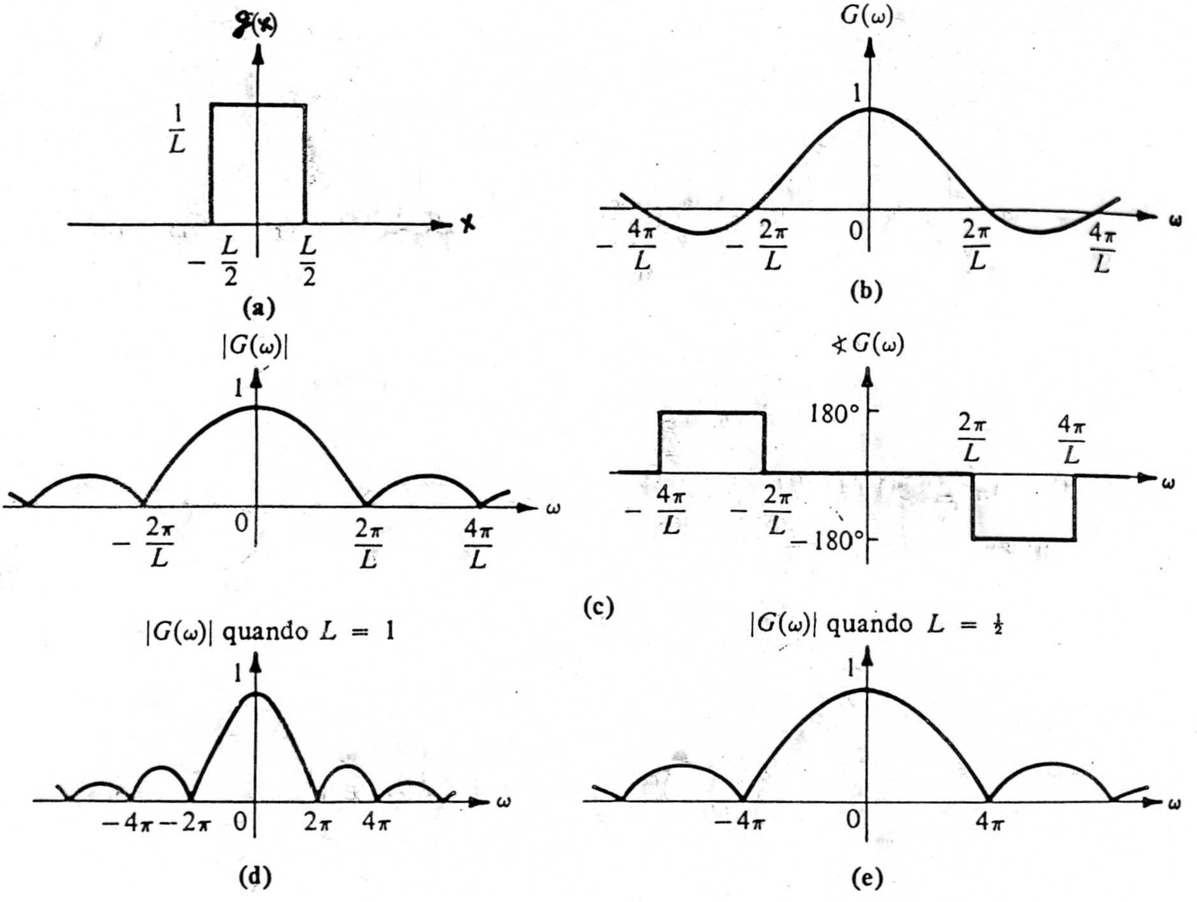
$\to$ A TF inversa equivale a uma expansão do sinal não-periódico, $f(x)$, em termos de uma *soma contínua* de exponenciais complexas, com os coeficientes da expansão dados pela TF,

$$F(\omega) = |F(\omega)| \exp j\phi_F(\omega)$$

- Espectros do Sinal:

  Gráfico $|F(\omega)| \times \omega \equiv$ Espectro de Magnitude

  Gráfico $\phi_F(\omega) \times \omega \equiv$ Espectro de Fase



g(x)
1/L
− L/2
L/2
x
(a)
G(ω)
1
− 4π/L
− 2π/L
0
2π/L
4π/L
ω
(b)
|G(ω)|
1
− 2π/L
0
2π/L
4π/L
ω
∢G(ω)
180°
− 4π/L
− 2π/L
2π/L
4π/L
−180°
ω
(c)
|G(ω)| quando L = 1
1
−4π
−2π
0
2π
4π
ω
(d)
|G(ω)| quando L = ½
1
−4π
0
4π
ω
(e)

• Exemplos de Transformadas de Fourier:

i) TF da função impulso unitário:

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \exp\{-j\omega x\} dx = 1$$

Assim,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\pm j\omega x\} d\omega$$

→ No sinal impulso todas as freqüências têm o mesmo peso

ii) TF de um sinal periódico:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp jn\omega_0 x$$

$$\mathcal{F}[f(x)] \equiv F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}[\exp jn\omega_0 x] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{jn\omega_0 x\}. \exp\{-j\omega x\} dx =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{j(n\omega_0 - \omega)x\} dx$$

Assim,

$$F(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

→ A TF de um sinal periódico é um trem de impulsos localizados nas freqüências $\omega = n\omega_0$, com pesos $2\pi c_n$

→ Ela dá a mesma informação que a Série de Fourier

- Propriedades da Transformada de Fourier:

Sendo $\mathcal{F}[f(x)] = F(\omega)$,

i) Propriedade de escala:

Para α real:

$$\mathcal{F}[f(\alpha x)] = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$\rightarrow$ Expansão no espaço ($|\alpha| < 1$) leva a compressão na freqüência, e vice-versa

ii) Propriedade de translação:

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)] = \exp\{-j\omega x_0\} F(\omega)$$

$\rightarrow$ A translação do sinal só altera a fase da sua transformada

iii) TF das derivadas de um sinal:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right] = (j\omega)^n F(\omega)$$

$\rightarrow$ A diferenciação atenua as *baixas* freqüências

iv) TF da integral de um sinal:

Se $F(0) = 0$,

$$\mathcal{F}\left[\int f(x) dx\right] = \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

$\rightarrow$ A integração atenua as *altas* freqüências

v) TF da convolução de dois sinais:

$$\mathcal{F}[f(x) * h(x)] = F(\omega).H(\omega)$$

$\rightarrow$ A convolução no espaço equivale a uma multiplicação na freqüência

$\rightarrow$ Um sistema LTI fica definido, no domínio espacial, pela convolução, e, no domínio da freqüência, pelo produto

$\rightarrow$ A TF da resposta-impulso do sistema LTI é a função de transferência (*resposta em freqüência*) do sistema:

$$H(\omega) \equiv \mathcal{F}[h(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \exp\{-j\omega x\} dx$$

vi) TF do produto de dois sinais (Modulação):

$$\mathcal{F}[f(x).m(x)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * M(\omega)$$

$\rightarrow$ A multiplicação (modulação) no espaço equivale a uma convolução na freqüência

- O Teorema da Amostragem

→ Determina sob que condições um sinal pode ser representado por suas amostras em pontos discretos do espaço, nL, $n \in \mathcal{Z}$

$L \equiv$ Período de Amostragem

Sinal de *Banda Limitada*, $f(x)$, com freqüência máxima ω_B

Amostragem Ideal → Modulação por um *Trem de Impulsos*

Sinal Amostrado:

$$f_s(x) = f(x)p(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nL)\delta(x - nL)$$

com

$$p(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nL)$$

Análise no Domínio da Freqüência:

$$\mathcal{F}[p(x)] \equiv P(\omega) = \frac{2\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

onde $\omega_s \equiv \frac{2\pi}{L}$ (Freqüência de Amostragem)

Assim, pela propriedade da modulação,

$$\mathcal{F}[f_s(x)] \equiv F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} P(\omega) * F(\omega) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma)P(\omega - \sigma)d\sigma$$

Ou seja,

$$F_s(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

→ O espectro do sinal amostrado é uma repetição periódica do espectro do sinal original

→ Para não haver superposição das diferentes componentes, $F(\omega - n\omega_s)$, a taxa de amostragem, ω_s, deve satisfazer

$$\omega_s - \omega_B > \omega_B$$

Ou seja,

$$\omega_s > 2\omega_B$$

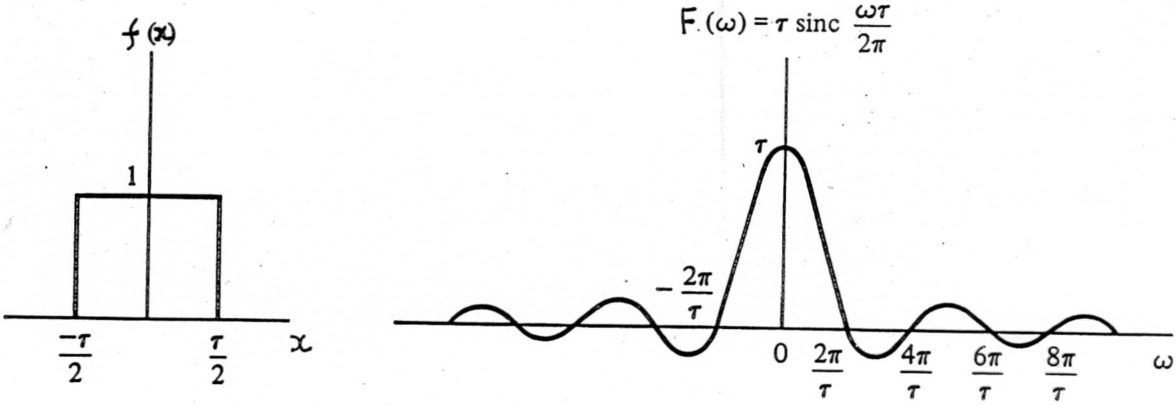
→ A mínima freqüência de amostragem deve ser a *freqüência de Nyquist* do sinal, $2\omega_B$, para que o mesmo possa ser recuperado a partir das suas amostras discretas

→ O máximo espaçamento entre as amostras deve ser de $L = 2\pi/2\omega_B = \pi/\omega_B$. Neste caso, o sinal original pode ser recuperado passando-se $f_s(x)$ por um filtro passa-baixa com resposta em freqüência

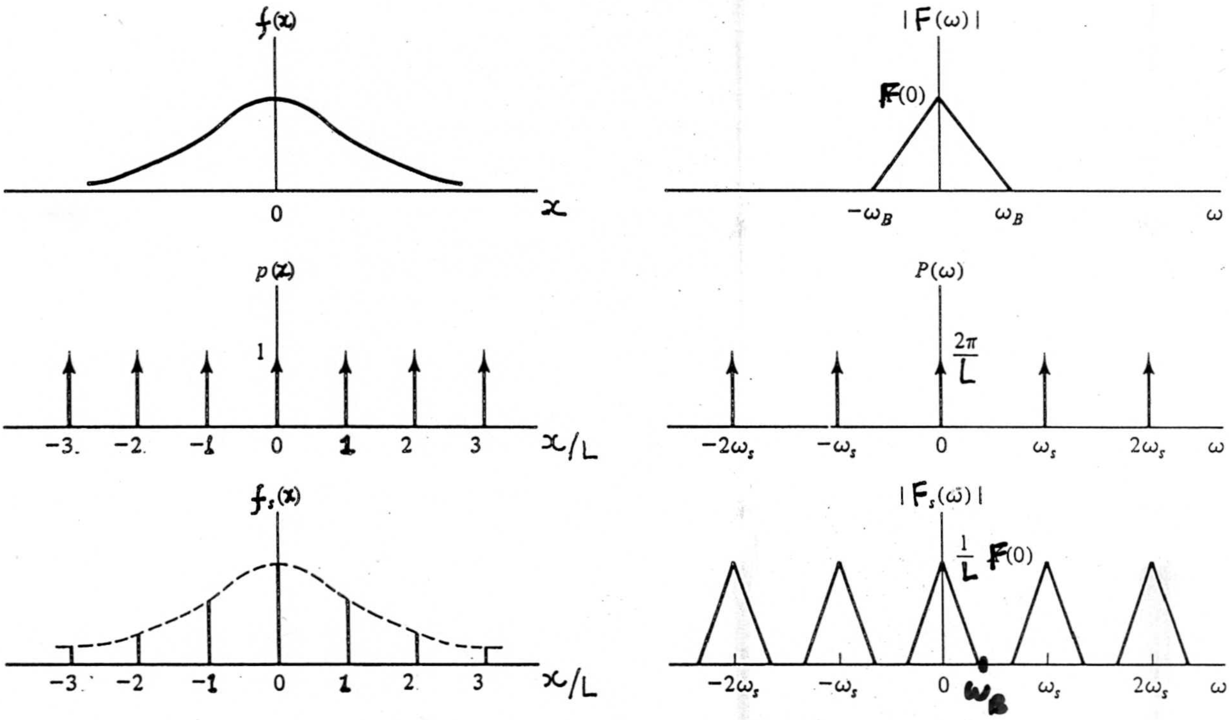
$$H(\omega) = \begin{cases} L & : \quad |\omega| < \omega_B \\ 0 & : \quad |\omega| \geq \omega_B \end{cases}$$

→ Se o máximo espaçamento não é respeitado, as diferentes componentes, $F(\omega - n\omega_s)$, se sobrepõem (*aliasing*), e o sinal não pode ser recuperado exatamente

→ Se o sinal não é de banda limitada, sempre há *aliasing*, qualquer que seja a taxa de amostragem



$f(x)$
1
$\frac{-\tau}{2}$
$\frac{\tau}{2}$
x
$F(\omega) = \tau \operatorname{sinc} \frac{\omega\tau}{2\pi}$
τ
$-\frac{2\pi}{\tau}$
0
$\frac{2\pi}{\tau}$
$\frac{4\pi}{\tau}$
$\frac{6\pi}{\tau}$
$\frac{8\pi}{\tau}$
ω



$f(x)$
0
x
$|F(\omega)|$
$F(0)$
$-\omega_B$
ω_B
ω
$p(x)$
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
x/L
$P(\omega)$
$\frac{2\pi}{L}$
$-2\omega_s$
$-\omega_s$
0
ω_s
$2\omega_s$
ω
$f_s(x)$
-3
-2
-1
0
1
2
3
x/L
$|F_s(\omega)|$
$\frac{1}{L}F(0)$
$-2\omega_s$
$-\omega_s$
0
ω_B
ω_s
$2\omega_s$
ω