Processamento Linear de Imagens

- Sistema LTI bidimensional

→ Definido pela *função de espalhamento de ponto*, $h(x, y)$

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi, y-\eta)h(\xi, \eta)d\xi d\eta$$

onde $h(x, y)$ é a resposta do sistema para a entrada $\delta(x, y)$

→ $h(x, y)$ (*point-spread function*) diz como o sistema borra ou *espalha* um ponto de luz

- A Transformada de Fourier 2-D

→ Expressão do sinal 2-D como uma soma de ondas exponenciais complexas

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_x, \omega_y)\exp\{j(\omega_x x + \omega_y y)\}d\omega_x d\omega_y$$

onde

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\exp\{-j(\omega_x x + \omega_y y)\}dxdy$$

$$F(\omega_x, \omega_y) \equiv \mathcal{F}[f(x, y)] \equiv \text{Transformada de Fourier}$$

$$f(x, y) \equiv \mathcal{F}^{-1}[F(\omega_x, \omega_y)] \equiv \text{Transformada Inversa de Fourier}$$

Propriedades da TF:

i) $\mathcal{F}[f(x,y) * g(x,y)] = F(\omega_x,\omega_y)G(\omega_x,\omega_y)$

ii) $\mathcal{F}[f(x,y)g(x,y)] = \frac{1}{4\pi^2}F(\omega_x,\omega_y) * G(\omega_x,\omega_y)$

iii) $\mathcal{F}[f(x-x_0,y-y_0)] \exp\{-j(\omega_x x_0+\omega_y y_0)\}F(\omega_x,\omega_y)$

iv) $\mathcal{F}[\delta(x,y)] = 1$

Assim,

$$\delta(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{\pm j(\omega_x x+\omega_y y)\}d\omega_x d\omega_y =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\pm j\omega_x x\}d\omega_x \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{\pm j\omega_y y\}d\omega_y = \delta(x)\delta(y)$$

• Função de Transferência de Modulação

→ Caracteriza o sistema LTI no domínio da freqüência

$$H(\omega_x,\omega_y) = \mathcal{F}[h(x,y)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)\exp\{-j(\omega_x x+\omega_y y)\}dxdy$$

→ Pela propriedade da convolução, a relação entrada-saída do sistema LTI, no domínio da freqüência, é

$$G(\omega_x,\omega_y) = \mathcal{F}[f(x,y) * h(x,y)] = F(\omega_x,\omega_y)H(\omega_x,\omega_y)$$

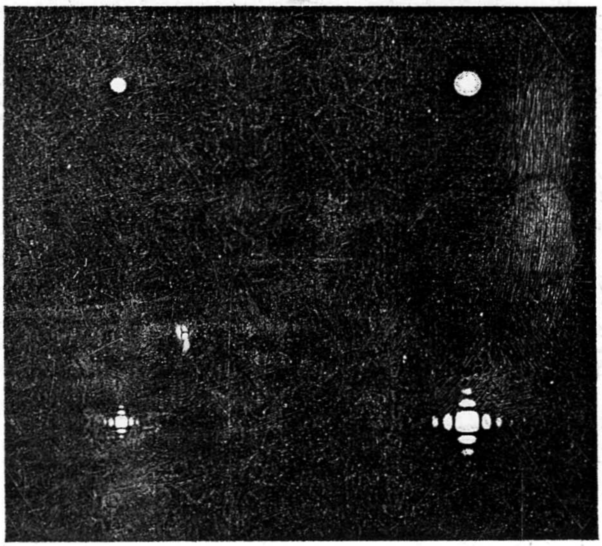


Figure 2.2 Examples of PSFs

a	*b*
c	*d*

(a) Circularly symmetric PSF of average atmospheric turbulence causing small blur; (b) atmospheric turbulence PSF causing large blur; (c) separable PSF of a diffraction limited system with square aperature; (d) same as (c) but with smaller aperture.

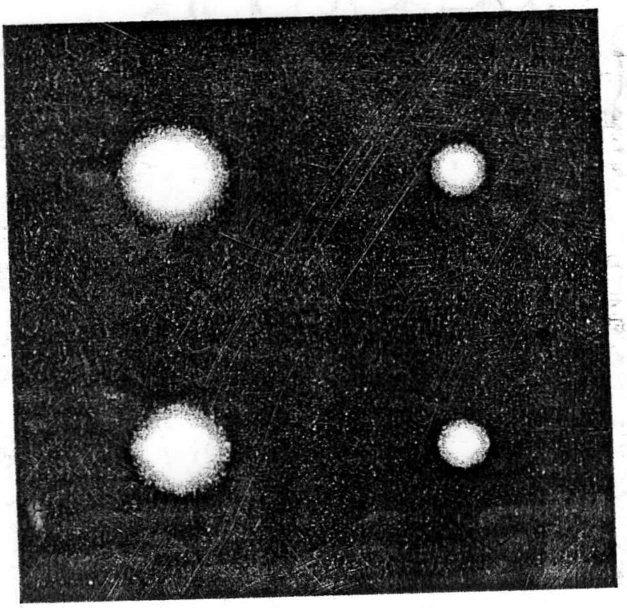
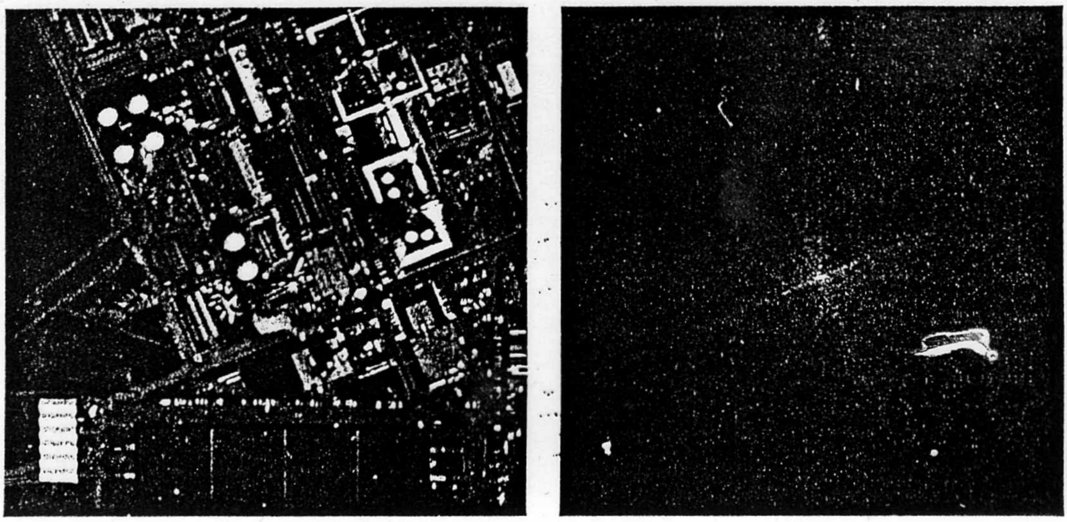
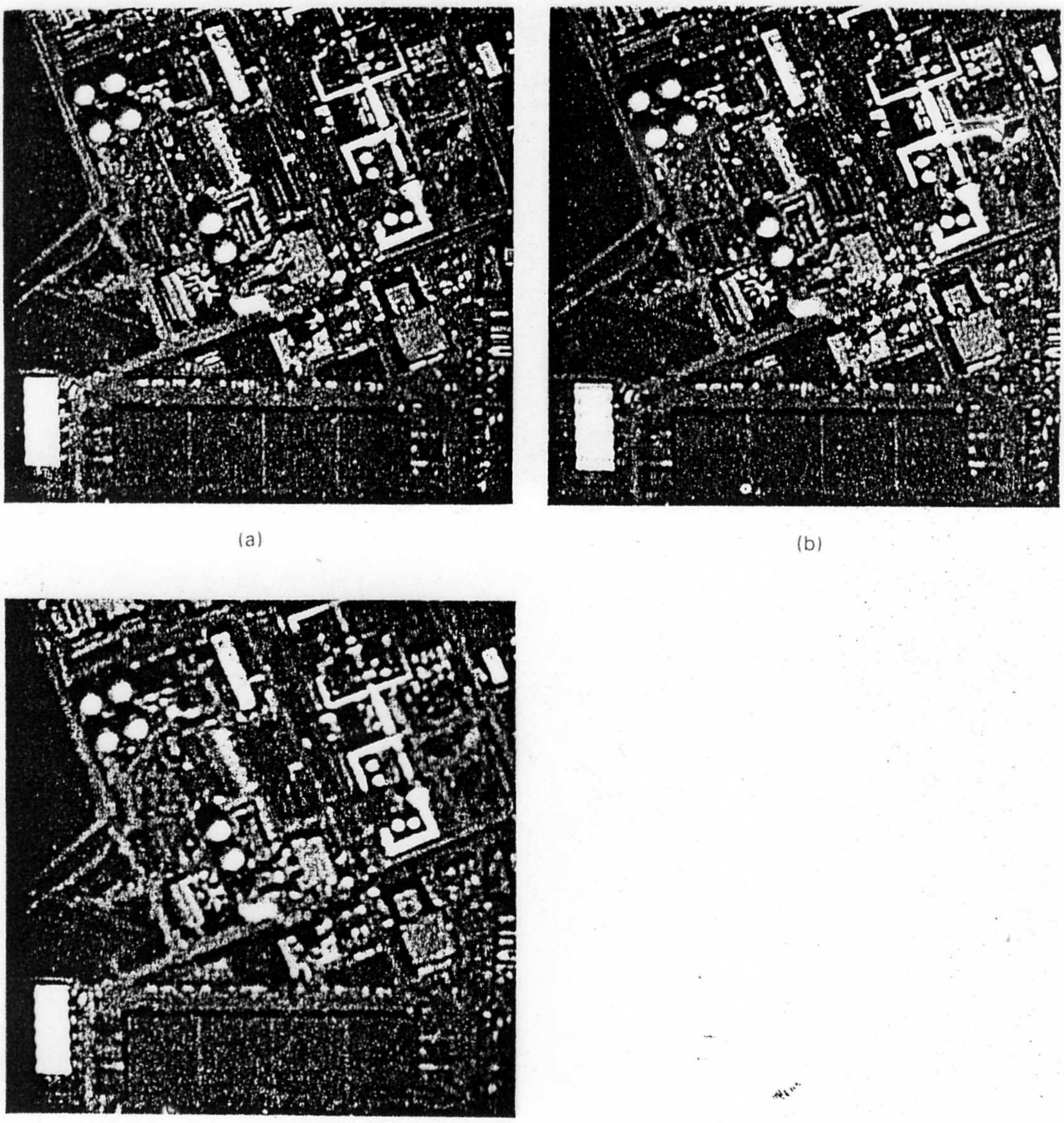


Figure 2.5 MTFs of systems whose PSFs are displayed in Figure 2.2.



(a) (b)

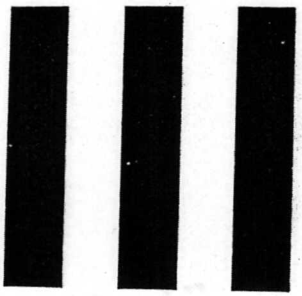
Figure 1.33 Example of the Fourier transform magnitude of an image. (a) Original image $x(n_1, n_2)$ of 512 × 512 pixels; (b) $|X(\omega_1, \omega_2)|^{1/4}$, scaled such that the smallest value maps to the darkest level and the largest value maps to the brightest level. The operation $(\cdot)^{1/4}$ has the effect of compressing large amplitudes while expanding small amplitudes, and therefore shows $|X(\omega_1, \omega_2)|$ more clearly for higher-frequency regions.



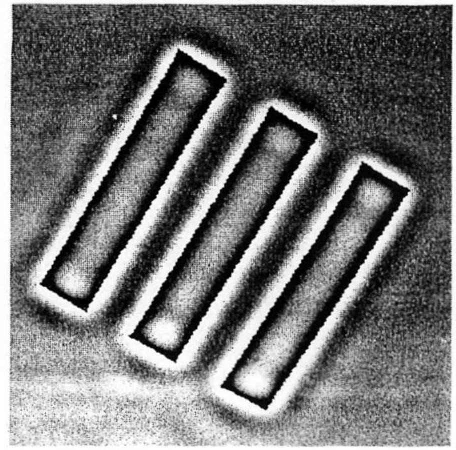
(a) (b)

(c)

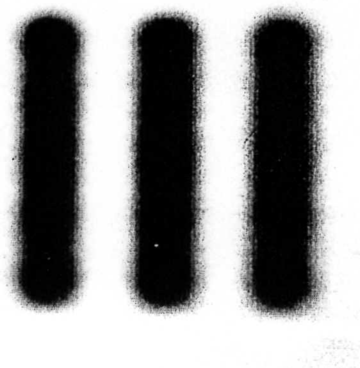
Figure 1.34 Illustration of energy concentration in the Fourier transform domain for a typical image. (a) Image obtained by preserving 12.4% of Fourier transform coefficients of the image in Figure 1.33(a). All other coefficients are set to 0. (b) Same as (a) with 10% of Fourier transform coefficients preserved; (c) same as (a) with 4.8% of Fourier transform coefficients preserved.



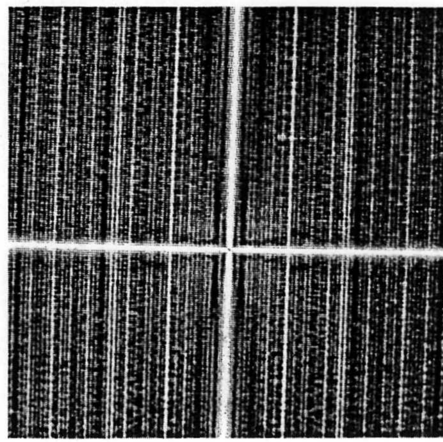
(a)



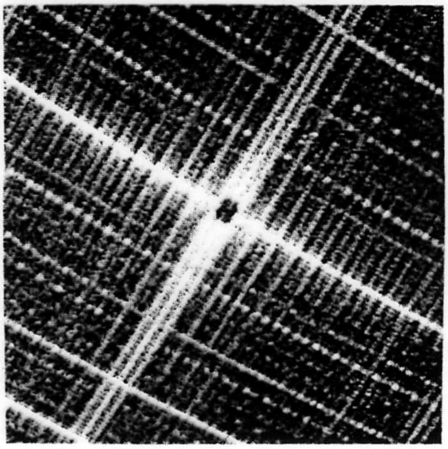
(b)



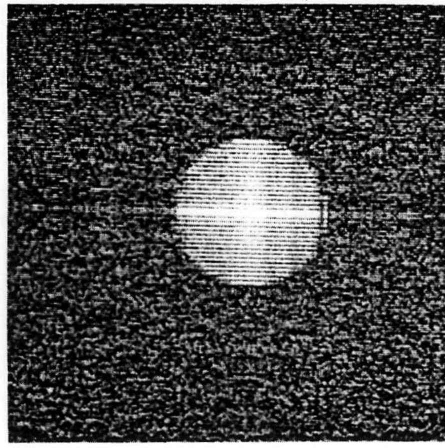
(c)



(d)



(e)



(f)

- Alguns Sistemas de Processamento Linear de Imagens

i) Sistemas Diferenciadores Unidirecionais

Entrada: $f(x,y)$

Saída: $g(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$

$\rightarrow$ Caracterização no domínio espacial (FEP):

$$h(x,y) = \frac{\partial \delta}{\partial x}$$

onde

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\partial G_\sigma}{\partial x} =$$

$$= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{-x}{2\pi\sigma^4} \exp\{-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\}$$

com

$$G_\sigma = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\{-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\}$$

$\rightarrow$ Caracterização no domínio da freqüência (FTM):

$$H(\omega_x, \omega_y) \equiv \mathcal{F}[h(x,y)] = j\omega_x$$

Assim,

$$G(\omega_x, \omega_y) = j\omega_x F(\omega_x, \omega_y)$$

$\rightarrow$ Altas freqüências ao longo da direção x são realçadas, e baixas freqüências são atenuadas (Similarmente para diferenciação ao longo da direção y)

ii) Sistema Diferenciador Bidimensional (O Laplaciano)

Entrada: $f(x, y)$

Saída: $g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv \nabla^2 f(x, y)$

$\rightarrow$ Caracterização no domínio espacial (FEP):

$$h(x, y) = \nabla^2 \delta =$$

$$= \lim_{\sigma \to 0} \left(\frac{x^2 + y^2 - \sigma^2}{2\pi\sigma^6} \right) \exp\{- \left(\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right)\}$$

$\rightarrow$ Caracterização no domínio da freqüência (FTM):

$$H(\omega_x, \omega_y) \equiv \mathcal{F}[h(x, y)] = -(\omega_x^2 + \omega_y^2)$$

Assim,

$$G(\omega_x, \omega_y) = -(\omega_x^2 + \omega_y^2) F(\omega_x, \omega_y)$$

$\rightarrow$ Altas freqüências são realçadas e baixas freqüências são atenuadas, mas o efeito só depende da magnitude da freqüência, ($|\omega|^2 = \omega_x^2 + \omega_y^2$), e não de ω_x e ω_y separadamente

$\rightarrow$ O Laplaciano é um operador rotacionalmente simétrico (é a combinação linear de derivadas parciais de menor ordem que tem esta propriedade)

iii) Sistemas Borradores

• Borramento Gaussiano:

→ Transforma $\delta(x,y)$ numa gaussiana

FEP:

$$h(x,y) = G_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\left(\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)\}$$

FTM:

$$H(\omega_x,\omega_y) \equiv \mathcal{F}[h(x,y)] = \exp\{-\frac{1}{2}(\omega_x^2+\omega_y^2)\sigma^2\}$$

→ Freqüências acima de $1/\sigma$ são atenuadas.

• Borramento por movimento (*motion blur*)

→ Um ponto se espalha numa linha, devido ao movimento relativo câmera/cena

Para movimento ao longo da direção x:

FEP:

$$h(x,y) = \frac{1}{2l}[u(x+l) - u(x-l)]\delta(y)$$

onde $u(x)$ = degrau unitário, e $2l$ = comprimento da linha

FTM:

$$H(\omega_x,\omega_y) = \frac{\sin\omega_x l}{\omega_x l} \equiv \pi\mathrm{sinc}(\omega_x l/\pi)$$

onde

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

$\rightarrow$ Altas freqüências são atenuadas, baixas freqüências não são afetadas

$\rightarrow$ Freqüências $\omega_x = k\pi/l$ são suprimidas

$\rightarrow$ Algumas freqüências apresentam inversão de fase (regiões claras correspondentes a estas freqüências, na imagem original, tornam-se escuras na imagem borrada, e vice-versa)

iv) Sistema Desfocador

$\rightarrow$ Transforma $\delta(x, y)$ num círculo de intensidade uniforme

FEP:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & : \quad x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & : \quad x^2 + y^2 \geq R^2 \end{cases}$$

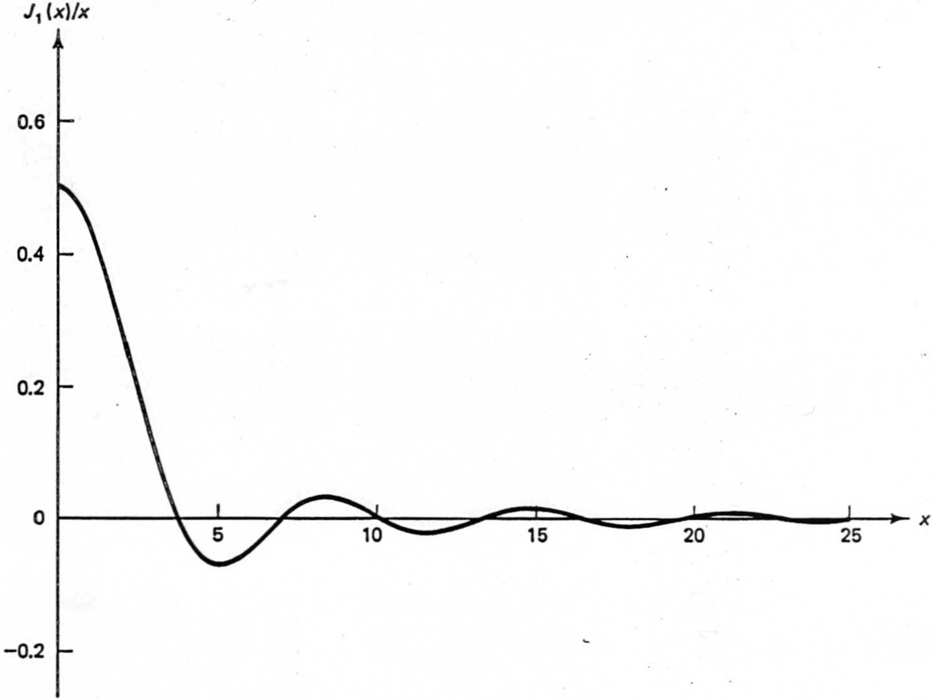
onde

$$R = \frac{dl}{2f}$$

com d = diâmetro da lente, f = distância focal, e l = deslocamento do plano focal

FTM: $H(\omega_x, \omega_y) \equiv \mathcal{F}[h(x, y)]$ = equivalente à função *sinc* bidimensional

$\rightarrow$ Efeito semelhante ao borramento por movimento


$J_1(x)/x$
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
5
10
15
20
25
x

• Restauração de Imagens Degradadas

→ Se $H(\omega_x, \omega_y)$ é a FTM do sistema degradador, pode-se restaurar a imagem utilizando-se um filtro com FTM dada por

$$H'(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{H(\omega_x, \omega_y)}$$

ou seja,

$$h'(x, y) * h(x, y) = \delta(x, y)$$

Possíveis problemas:

→ Freqüências suprimidas não podem ser recuperadas

→ Ruído pode ser amplificado juntamente com as freqüências restauradas

Possível solução:

→ Em vez de $H'(\omega_x, \omega_y)$, usar $H''(\omega_x, \omega_y)$, tal que

$$|H''(\omega_x, \omega_y)| = \min\left(\frac{1}{|H(\omega_x, \omega_y)|}, A\right)$$

onde $A \equiv$ ganho máximo

- Correlação de Imagens

→ Permite determinar a similaridade entre duas imagens

Definições:

Correlação Cruzada

$$\phi_{ab} \equiv a \star b = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\xi - x, \eta - y) b(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

→ Similar à convolução, mas sem a reflexão do sinal $a(\xi, \eta)$. Se $a(\xi, \eta)$ é simétrico por reflexão, as duas operações são iguais

Autocorrelação

$$\phi_{aa} \equiv a \star a = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} a(\xi - x, \eta - y) a(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

→ A autocorrelação é par, e tem um máximo em $(x, y) = (0, 0)$

→ Se tomarmos a correlação cruzada de $a(x, y)$ com uma sua cópia deslocada, $a(x - x_o, y - y_o)$, temos que o máximo da correlação ocorre em (x_o, y_o)

→ O deslocamento pode ser determinado pela análise da correlação

- TF da Autocorrelação (Espectro de Potência):

$$\mathcal{F}[\phi_{aa}(x, y)] = |A(\omega_x, \omega_y)|^2$$

onde $A(\omega_x, \omega_y) = \mathcal{F}[a(x, y)]$

→ Como o espectro de potência é real, ele não muda quando a imagem é deslocada (só a fase de $A(\omega_x, \omega_y)$ muda, neste caso)