

- Processamento de Imagens Discretas

→ O tratamento contínuo deve ser modificado para levar em conta que as imagens reais têm dimensões finitas e são amostradas em pontos discretos

Análise 1-D:

$f(x) \equiv$ Sinal analógico

$f_a(n) \equiv f_a(nL) \equiv$ Sinal amostrado

$f(n) \equiv f_a(n)w(n) \equiv$ Sinal amostrado tomado numa janela

onde $L \equiv$ Período de amostragem e

$$w(n) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & : n \geq N-1 \end{cases}$$

com $N \equiv$ tamanho da janela

- TF de um sinal amostrado (obedecendo o teorema de Nyquist)

$$F(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f_a(n) \exp\{-j\Omega n\}$$

onde Ω é dado em radianos

→ $F(\Omega) = F(\Omega + 2\pi)$ (Periódica)

→ O espectro do sinal amostrado é limitado (basta trabalhar com $\Omega \in [0, 2\pi]$)

Como Ω é contínua, no computador só é possível trabalhar com suas amostras

→ Trabalhamos com

$$\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k$$

para $k = 0, 1, \dots, N - 1$

→ Transformada Discreta de Fourier (DFT)

$$F(k) \equiv F(\Omega_k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp\left\{-j \frac{2\pi}{N}nk\right\}$$

→ DFT Inversa

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp\left\{j \frac{2\pi}{N}nk\right\}$$

mas daí vem que $f(n + N) = f(n)$

→ A DFT é uma aproximação da TF, que trata o sinal de entrada como se fosse uma extensão periódica do sinal amostrado numa janela

Em 2-D:

$$F(k_1, k_2) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} f(n, m) \exp\left\{-j2\pi \left(\frac{k_1 n}{N} + \frac{k_2 m}{M}\right)\right\}$$

com

$$f(n, m) = \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{M-1} F(k_1, k_2) \exp\left\{j2\pi \left(\frac{k_1 n}{N} + \frac{k_2 m}{M}\right)\right\} \times \frac{1}{NM}$$

para $k_1, n \in [0, N - 1]$, e $k_2, m \in [0, M - 1]$

→ A DFT apresenta as mesmas vantagens da TF (e.g., cálculo de convoluções), e existem algoritmos rápidos para o seu cálculo (FFT - *Fast Fourier Transform*)

*DFT (cálculo direto): $M^2 N^2$ multiplicações (MM, ponto a ponto com frequência)

FFT: $4MN \log_2 MN$ multiplicações

Transformadas de Imagens

- Transformada *Unitária* de Fourier (DFT unitária)

Para sequência $f(n)$, $0 \leq n \leq N - 1$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \exp \left\{ -j \frac{2\pi}{N} nk \right\}, \quad 0 \leq k \leq N - 1$$

Podemos escrever,

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} a_k(n) f(n)$$

→ Matriz $\mathbf{A} = \{a_k(n)\}$ é unitária, *i.e.*, $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$

onde $\mathbf{A}^\dagger = \{\mathbf{A}^*\}^T$

→ Da unitariedade de \mathbf{A} resulta

$$f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} F(k) a_k^*(n) \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \exp \left\{ j \frac{2\pi}{N} nk \right\}$$

i.e., a DFT unitária inversa

→ Representação de $f(n)$ em termos dos *vetores de base* de Fourier:

$$\mathbf{a}_k^* = \{a_k^*(n), 0 \leq n \leq N - 1\}^T, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1$$

- Há outras transformadas unitárias úteis, utilizando *vetores de base diferentes*

Todas as transformadas unitárias satisfazem as propriedades de

- Ortonormalidade: $\sum_m a_k(m)a_l(m) = \delta_{k,l}$
- Completeza: $\sum_k a_k(m)a_k(n) = \delta_{m,n}$

A *ortonormalidade* garante que qualquer série truncada do tipo

$$\tilde{f}(n) = \sum_{k=0}^{P-1} F(k)a_k^*(n), \quad P < N$$

minimiza o erro quadrático

$$\sigma^2 = \sum_n [f(n) - \tilde{f}(n)]^2$$

A *completeza* garante que, para $P = N$, o erro quadrático será zero.

No caso bidimensional, temos relações semelhantes:

Para uma imagem $f(m, n)$, $0 \leq m, n \leq N - 1$,

$$F(k, l) = \sum_{m,n} f(m, n)a_{kl}(m, n)$$

$$f(m, n) = \sum_{k,l} F(k, l)a_{kl}^*(m, n)$$

para $0 \leq k, l \leq N - 1$

Imagens de Base:

$$\mathbf{a}_{kl}^* = \{a_{kl}^*(m, n), \quad 0 \leq m, n \leq N - 1\}$$

Se a transformada é *separável*, $a_{kl}(m, n) = a_k(m)a_l(n)$

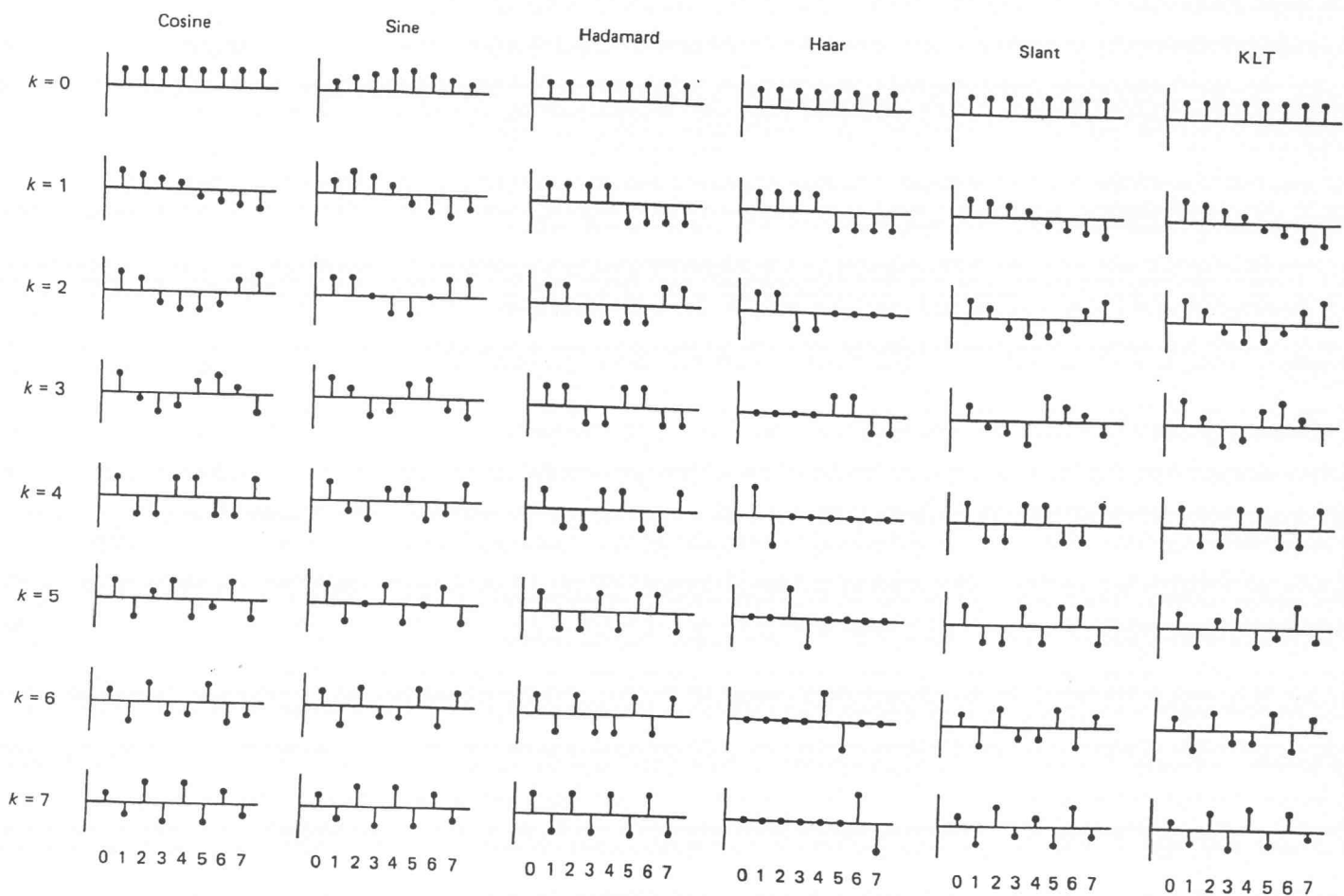


Figure 5.1 Basic vectors of the 8×8 transforms.

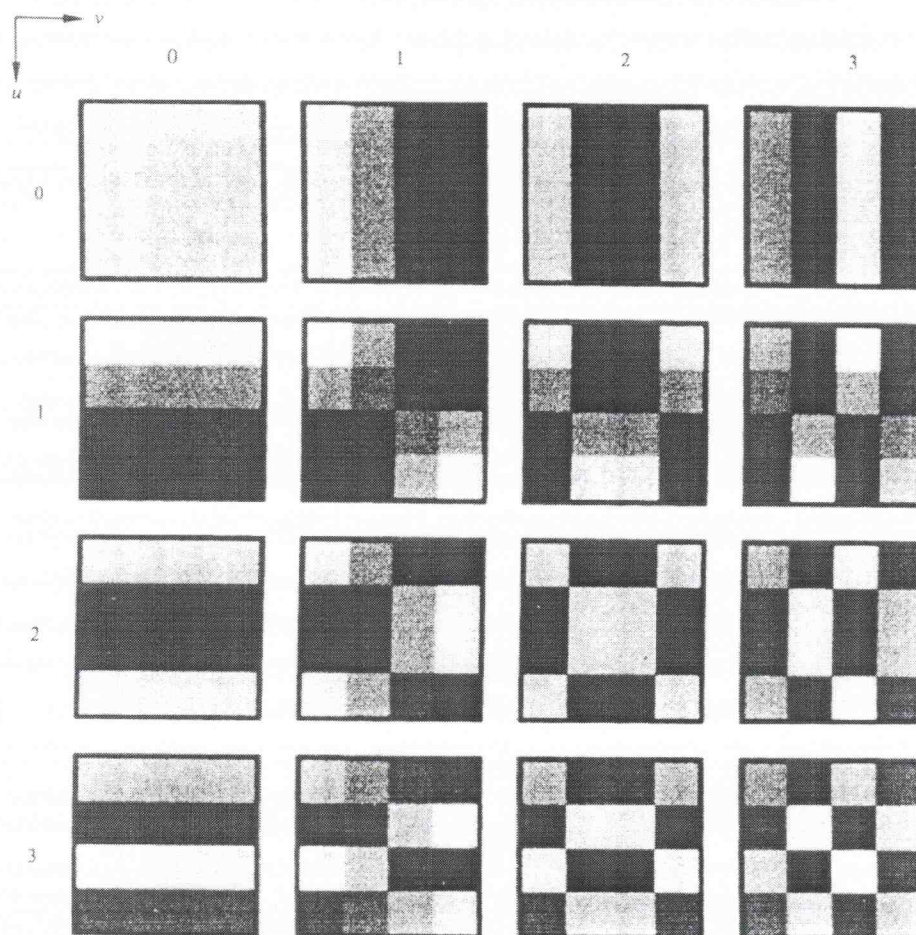


Figure 3.28 Discrete cosine transform basis functions for $N = 4$. Each block consists of 4×4 elements, corresponding to x and y varying from 0 to 3. The origin of each block is at its top left. The highest value is shown in white. Other values are shown in grays, with darker meaning smaller.

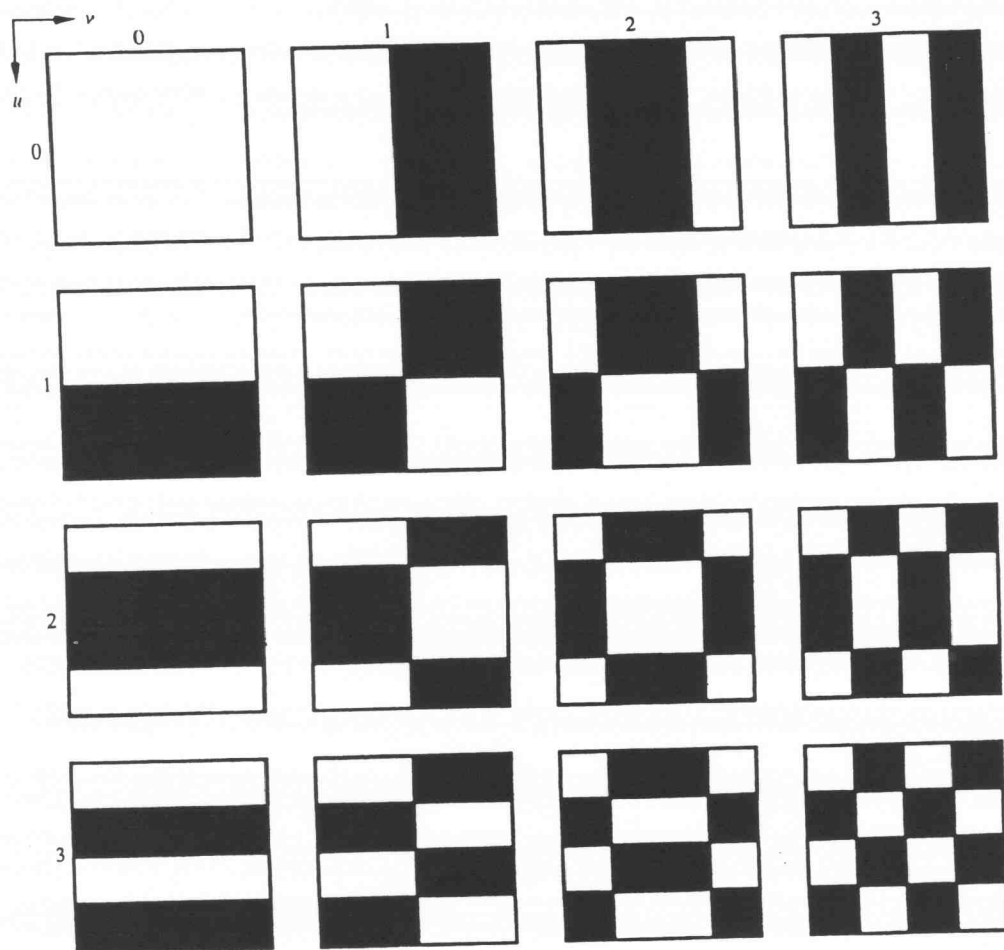


Figure 3.26 Ordered Hadamard basis functions for $N = 4$. Each block consists of 4×4 elements, corresponding to x and y varying from 0 to 3. The origin of each block is at its top left. White and black denote $+1$ and -1 , respectively.