- A Transformada de Hough

$\rightarrow$ Método para o *agrupamento* de pontos de borda, i.e., dados os pontos, encontrar as linhas de borda

$\rightarrow$ Útil sobretudo quando o número de soluções não é conhecido

- Formulação original: Detecção de linhas retas

Equação da reta (forma polar):

$$x \cos\theta + y \sin\theta = \rho$$

$\rightarrow$ Todas as possíveis retas são representadas por (θ, ρ), para $0 < \theta < \pi$, com $-\infty < \rho < \infty$

$\rightarrow$ Dados θ e ρ, a equação representa todos os pontos (x, y) que pertencem à reta (θ, ρ)

$\rightarrow$ Dados x e y, a equação representa todas as retas (θ, ρ) que passam pelo ponto (x, y)

Retas passando num ponto (x_A, y_A):

$$x_A \cos\theta + y_A \sin\theta = \rho$$

$\rightarrow$ Curva senoidal no espaço de parâmetros, $\rho \times \theta$

$\rightarrow$ Dado um conjunto de pontos, a reta passando por todos eles pode ser obtida pela interseção das curvas correspondentes no espaço de parâmetros

$\rightarrow$ Um ponto de interseção de um grande número de curvas no espaço de parâmetros representa evidência da existência de uma reta no espaço de configuração (imagem)

$\rightarrow$ A transformada de Hough fornece uma indicação do número de retas, do número de pontos em cada reta e da equação das mesmas

- Implementação Computacional

$\rightarrow$ Discretização do espaço de parâmetros (ρ, θ)

- A cada célula (i, j) do espaço discretizado é associado um acumulador, $H(i, j)$, inicializado em zero

- As curvas discretas são geradas, e a entrada $H(i, j)$ é incrementada de 1 para cada curva que passa na célula correspondente

- Depois que a matriz dos acumuladores é calculada para todas as curvas (i.e., todos os pontos no plano de imagem), os seus máximos (indicações de retas) são localizados

Dificuldades:

- Devido a ruído ou efeitos de digitalização, pontos numa reta nem sempre dão origem a um único ponto no espaço de parâmetros

$\rightarrow$ A matriz H deve ser primeiramente suavizada, e apenas os máximos acima de um certo limiar devem ser considerados

- Linhas paralelas e próximas podem dar origem a um único máximo no espaço de parâmetros

$\rightarrow$ As linhas correspondendo aos máximos devem ser projetadas no plano de imagem, e os pontos de borda devem ser examinados

- Extensão da Transformada de Hough

$\rightarrow$ Extração de curvas mais complexas

Exemplo: Detecção de círculos

$\rightarrow$ Determinar o centro, (a, b), e o raio, r, de um círculo passando por um conjunto de pontos de borda

Equação paramétrica do círculo:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$\rightarrow$ O espaço de parâmetros é tridimensional

$\rightarrow$ Dado um ponto (x, y), o conjunto dos centros dos círculos de raio r que passam por este ponto forma um círculo de raio r

$\rightarrow$ Variando r obtém-se a equação de um cone no espaço de parâmetros, centrado em (x, y)

- Implementação Computacional

→ Discretização do espaço de parâmetros (r, a, b)

- Para cada ponto (x, y) na imagem, e para cada r, incrementa-se de 1 o acumulador das células para as quais

$$\begin{cases} a = r\cos\theta + x \\ b = r\sin\theta + y \end{cases}$$

onde θ vai de 0 a 2π em incrementos discretos

- Os picos na matriz de acumuladores correspondem aos valores de (r, a, b) que determinam os círculos passando pelos pontos na imagem

Dificuldades:

- Mesmas da detecção de retas, e maior custo computacional

- A detecção de curvas com mais de dois parâmetros é em geral impraticável

→ Mais informação é necessária para diminuir a dimensão do espaço de busca. Por exemplo, informação sobre a orientação das bordas, dada pelo gradiente das intensidades

Gradiente:

$$\nabla I = \frac{\partial I}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial I}{\partial y}\hat{y} = I_x\hat{x} + I_y\hat{y}$$

Direção do Gradiente:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{I_y}{I_x}\right)$$

α dá a direção de máxima variação local da intensidade

$\phi = \alpha + \pi/2$ dá a orientação da borda

- Utilizando a orientação dos pontos de borda

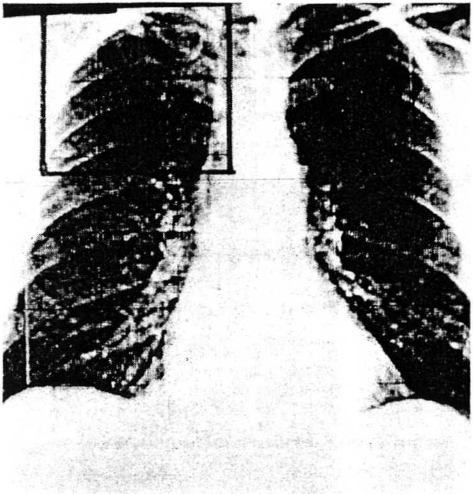
- Detecção de retas: Dado um ponto na reta e a sua orientação, a reta fica determinada:

$$\rho = x_a \cos\phi_A + y_a \cos\phi_A$$

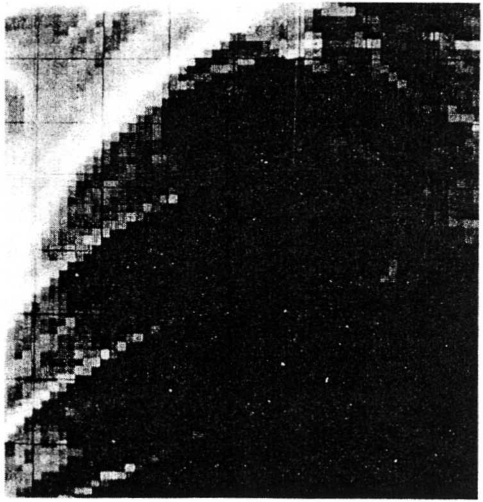
- Detecção de círculos: As equações para o cálculo da transformada de Hough tornam-se

$$\begin{cases} a = r\cos\phi_A + x_A \\ b = r\sin\phi_A + y_A \end{cases}$$

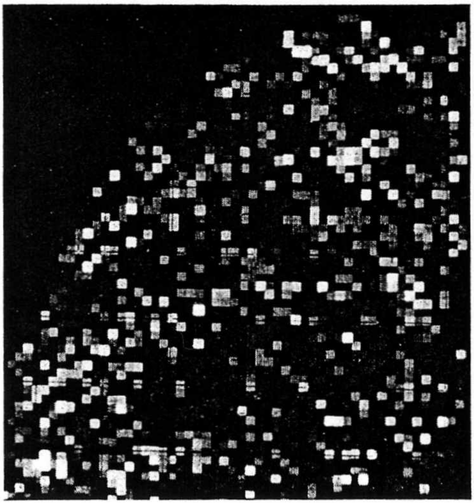
Para cada r, o centro do círculo, (a, b), fica determinado



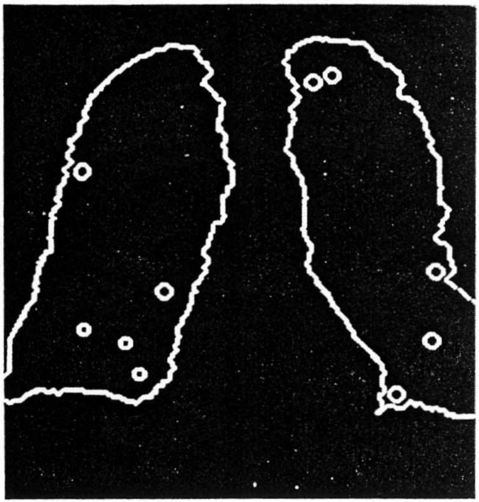
(a)



(b)



(c)



(d)

Visão Binária Bidimensional

Imagens Binárias (*Bitmaps*)

$\rightarrow$ Dois níveis de cinza ($1 \equiv$ Preto, $0 \equiv$ Branco)

$\rightarrow$ Podem ser obtidas por limiarização (*thresholding*)

$\rightarrow$ Incorporam informação apenas sobre a silhueta dos objetos

Propriedades Geométricas

- Imagens contínuas:

$\rightarrow$ Função Imagem

$$b(x,y) = \begin{cases} 1 & (Objeto) \\ 0 & (Fundo) \end{cases}$$

- Para um único objeto na cena:

• Área do objeto

$$A = \int\int_I b(x,y)dxdy$$

• Posição do objeto (Centro de Área)

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\int\int_I xb(x,y)dxdy$$

$$\overline{y} = \frac{1}{A}\int\int_I yb(x,y)dxdy$$

- Orientação do objeto

→ Direção do eixo de menor momento de inércia

→ Achar reta para a qual

$$E = \int\int_I r_{\mathrm{p}}^2(x, y) b(x, y) dx dy$$

é mínima, onde $r_{\mathrm{p}}(x, y)$ é a distância perpendicular, da reta ao ponto (x, y)

→ Solução:

- Os eixos de momentos *máximo* e *mínimo* passam pelo centro de área, e têm orientações dadas por

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{b}{a - c}\right)$$

onde

$$a = \int\int_I (x - \overline{x})^2 b(x, y) dx dy$$
$$b = 2\int\int_I (x - \overline{x})(y - \overline{y}) b(x, y) dx dy$$
$$c = \int\int_I (y - \overline{y})^2 b(x, y) dx dy$$

→ Duas direções perpendiculares entre si, correspondendo a E_{min} e E_{max}

- Medida da simetria do objeto: *Excentricidade*

$$\epsilon = \frac{E_{min}}{E_{max}}$$

Para um círculo: $\epsilon = 1$; para uma reta: $\epsilon = 0$

• Conclusão: Área, posição e orientação são dadas pelos *momentos* de ordem zero, um e dois, da imagem

- Momentos de ordem N:

$$\int\int_I x^m y^{N-m} b(x,y)dxdy, \quad m = 0, 1, 2, ..N$$

• **Projeções de uma imagem**

→ Esquema de representação mais compacto, que permite determinar os primeiros momentos da imagem

- Projeção da imagem na direção θ:

$$p_\theta(t) = \int_L b(x,y)ds$$

onde L é a reta sobre a qual se faz a projeção, θ é o ângulo entre L e o eixo horizontal, e s é uma direção perpendicular à reta L

- Exemplos:

Projeção vertical ($\theta = 0$): $v(x) = \int_L b(x,y)dy$

Projeção horizontal ($\theta = \pi/2$): $h(y) = \int_L b(x,y)dx$

• Área e posição podem ser dados em termos das projeções horizontal e vertical:

$$A = \int v(x)dx = \int h(y)dy; \ \overline{x}A = \int xv(x)dx, \ \overline{y}A = \int yh(y)dy$$

• Orientação depende também da projeção diagonal

- **Imagens Discretas**

→ $b(x, y)$ torna-se $b(i, j)$

→ Integrais tornam-se somas:

e.g., $A = \sum_i \sum_j b(i, j)$

- **Imagens com mais de um objeto**

→ Rotulação das componentes da imagem

→ Definição de vizinhança:

Conectividade 4: Células com faces comuns são vizinhas

Conectividade 8: Células com esquinas comuns também são vizinhas

→ Problemas com o *teorema da curva* de Jordan:

Uma curva fechada simples deve dividir o plano em duas regiões simplesmente conectadas

Conectividade 6 (Conectividade Mista) é mais adequada

→ Células com faces comuns e com esquinas comuns *numa única diagonal* são vizinhas

- **Algoritmo Seqüencial de Rotulação**

- Varredura: Linha a linha, de cima para baixo, da esquerda para a direita (*raster scan*)

- Conectividade 6

→ Ao visitar uma dada célula, A, a célula à sua esquerda, B, já foi rotulada, assim como as células acima, C e D, sendo que D se conecta a A, pela conectividade mista

- Rotulando apenas os objetos na imagem:

Se A é objeto:

→ Se D tem rótulo, A recebe rótulo de D

→ Se D não tem rótulo (D é fundo):

→ Se C *ou* B tem rótulo, A recebe este rótulo

→ Se C e B *não têm* rótulo, A recebe novo rótulo

→ Se C *e* B têm rótulos distintos:

Como C e B se conectam a A, e A é objeto, dois rótulos distintos foram usados para uma única componente conectada da imagem

→ Os rótulos de C e D são equivalentes, e A recebe um deles. No final da varredura, os rótulos equivalentes devem ser trocados por um único rótulo

• **Modificação Iterativa de Imagens**

→ Imagem dada é iterativamente transformada numa nova imagem que tem aspectos relevantes realçados

$b(i,j) \equiv$ Imagem dada

$c(i,j) \equiv$ Nova imagem

$a(i,j) \equiv$ Função de pertinência na vizinhança de interesse

→ $a(i,j) = 1$, se a célula (i,j) pertence à vizinhança de interesse; senão, $a(i,j) = 0$

→ A nova imagem é resultado de uma *operação booleana* entre a imagem dada e a função de pertinência

• Operações Úteis:

i) *Afinamento*: $c(i,j) = a(i,j) \cdot b(i,j)$ (AND Lógico)

→ Erode a silhueta dos objetos

ii) *Dilatação*: $c(i,j) = a(i,j) + b(i,j)$ (OR Lógico)

→ Expande a silhueta dos objetos

iii) *Esqueletização*: Afinamento que não muda a conectividade do objeto

→ Conserva o *número de Euler* do objeto (diferença entre o número de regiões conectadas e o número de buracos)