

Estimação de Curvatura

Informação de Curvatura

→ Permite *representação invariante* da superfície

→ Importante para reconhecimento e manipulação

- Mapa de Reflectância e Curvatura

$$I(x, y) = R(p, q)$$

Diferenciando em relação a x e a y

$$\begin{pmatrix} I_x \\ I_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x & q_x \\ p_y & q_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_p \\ R_q \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} p_x & q_x \\ p_y & q_y \end{pmatrix}$$

é a matriz Hessiana de $z(x, y)$

Como $p_y = q_x$, a matriz Hessiana é simétrica, para superfícies suaves

A matriz \mathbf{H} é uma representação *centrada no observador*, da curvatura da superfície (depende da forma explícita de $z(x, y)$)

i.e., \mathbf{H} relaciona a variação na orientação local da superfície a uma variação nas coordenadas no plano imagem, (x, y)

Nós estamos interessados em representações independentes do ponto de observação, i.e., representações *centradas no objeto*

- Matriz de Curvatura: Representação Centrada no Objeto

$$\mathbf{C} = (1 + p^2 + q^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} q^2 + 1 & -pq \\ -pq & p^2 + 1 \end{pmatrix} \mathbf{H}$$

→ \mathbf{C} multiplicada por um vetor infinitesimal no plano tangente à superfície produz a variação correspondente na orientação local

- Curvatura Gaussiana

$$K = \det \mathbf{C} = \frac{\det \mathbf{H}}{(1 + p^2 + q^2)^2} = \frac{p_x q_y - p_y^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$$

→ O sinal da curvatura gaussiana é o mesmo do determinante da matriz Hessiana

- Curvatura Média

$$H = \frac{1}{2} \text{tr } \mathbf{C} = \frac{(1 + p^2)q_y - 2pqp_y + (1 + q^2)p_x}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}$$

- Curvaturas Principais

Uma seção normal através de um dado ponto numa superfície é obtida por sua interseção com qualquer plano que contenha o vetor normal àquele ponto

A curvatura da linha de seção normal (*curvatura normal*) pode ser expressa como

$$k_n = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

onde θ é o ângulo entre o plano da seção normal e um plano de referência (o de máxima curvatura), e k_1 e k_2 são as *curvaturas principais* da superfície

★ Quando $k_1 \neq k_2$, os *planos principais* correspondentes são ortogonais

★ Pontos *umbílicos* são aqueles em que todas as curvaturas normais são iguais

★ Em termos das *curvaturas principais*, k_1 e k_2 , temos

$$K = k_1 k_2 \quad \text{e} \quad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

★ k_1 e k_2 são os *autovalores* da matriz \mathbf{C} , e os seus correspondentes *autovetores* são as direções principais

★ É possível classificar localmente uma superfície suave em um de oito tipos básicos, de acordo com os sinais das curvaturas média e gaussiana

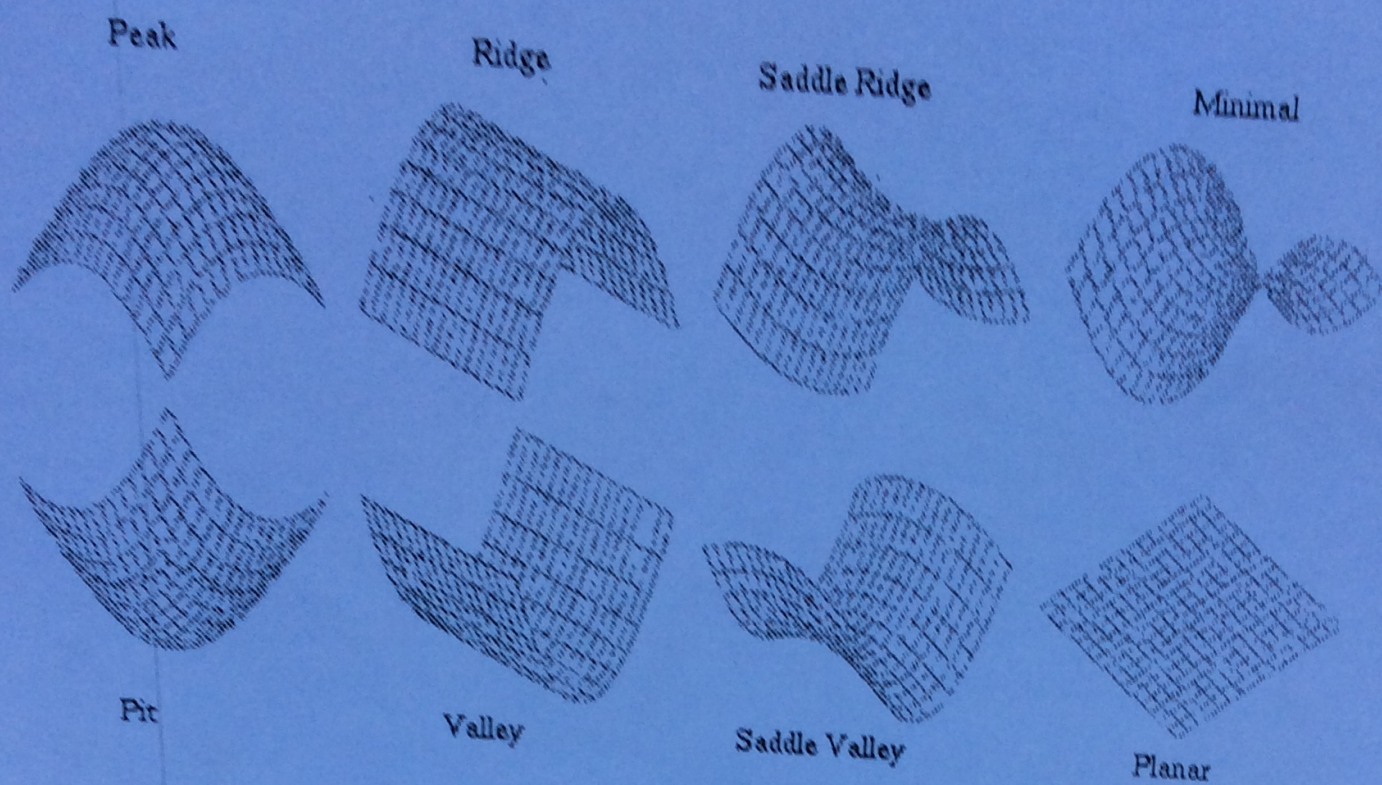


Figura 3.1: Tipos fundamentais de superfícies (Peak, Ridge, Saddle Ridge, Minimal, Pit, Valley, Saddle Valley e Planar).

	$K > 0$	$K = 0$	$K < 0$
$H < 0$	Peak $S=1$	Ridge $S=2$	Saddle Ridge $S=3$
$H = 0$	Não usado $S=4$	Flat $S=5$	Minimal $S=6$
$H > 0$	Pit $S=7$	Valley $S=8$	Saddle Valley $S=9$

Tabela 3.1: Tabela de classificação de superfícies a partir dos sinais de H e K .

- Estimacão de Curvatura: Método de Woodham

→ Estimacão da Matriz Hessiana

→ Extensão do EF tradicional: Estimacão de \mathbf{H} depende da estimacão de (p, q)

→ Permite obteno da matriz de curvatura, \mathbf{C}

Abordagem a partir de três imagens de Estéreo Fotométrico

$$\begin{pmatrix} I_x^{(1)} & I_x^{(2)} & I_x^{(3)} \\ I_y^{(1)} & I_y^{(2)} & I_y^{(3)} \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} R_p^{(1)} & R_p^{(2)} & R_p^{(3)} \\ R_q^{(1)} & R_q^{(2)} & R_q^{(3)} \end{pmatrix}$$

Estimaco de mínimos quadrados

$$\hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} I_x^{(1)} & I_x^{(2)} & I_x^{(3)} \\ I_y^{(1)} & I_y^{(2)} & I_y^{(3)} \end{pmatrix} \mathbf{M}^T [(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1}]$$

onde

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} R_p^{(1)} & R_p^{(2)} & R_p^{(3)} \\ R_q^{(1)} & R_q^{(2)} & R_q^{(3)} \end{pmatrix}$$

→ Depende dos valores de p e q , mas  menos sensível a ruído do que o cômputo direto das derivadas p_x , p_y e q_y

→ R , R_p e R_q são obtidos por calibrao

→ Para assegurar a simetria da matriz Hessiana, emprega-se

$$\mathbf{H} = \frac{\hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{H}}^T}{2}$$

Estimação de Mínimos Quadrados

Equação Matricial:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

onde \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes conhecidas, $n \times m$, e \mathbf{X} é uma matriz de incógnitas, $m \times m$

Para obter \mathbf{X} , multiplicamos ambos os lados da equação por \mathbf{A}^T , pela esquerda:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{AX} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}$$

e operamos, também à esquerda, com a inversa de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, que é uma matriz quadrada $m \times m$:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B}$$

→ Pode-se mostrar que esta solução para \mathbf{X} minimiza o erro quadrático

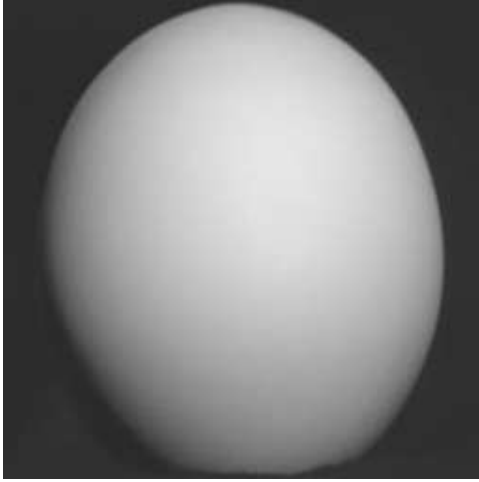
$$\epsilon = (\mathbf{AX} - \mathbf{B})^T (\mathbf{AX} - \mathbf{B})$$

Similarmente, para uma equação

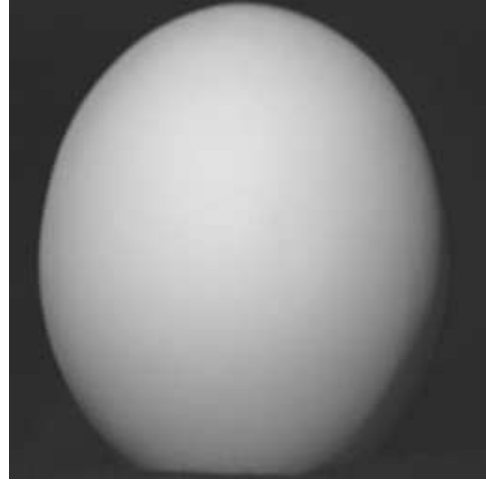
$$\mathbf{XA} = \mathbf{B}$$

a solução ótima tem a forma

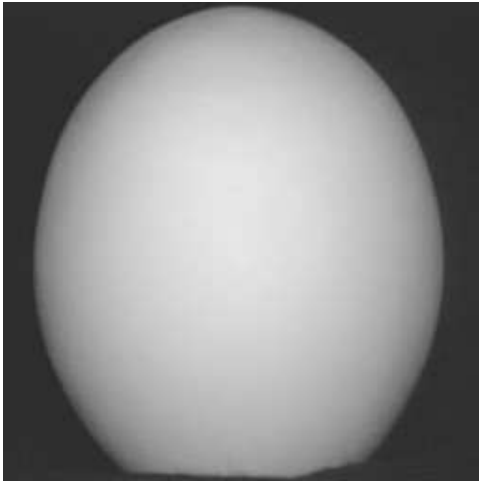
$$\mathbf{X} = \mathbf{BA}^T (\mathbf{AA}^T)^{-1}$$



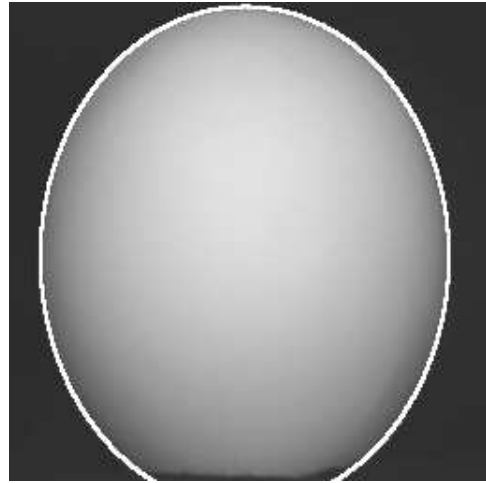
(a) Light source 1



(b) Light source 2



(c) Light source 3



(d) Boundary contour overlay

Figure 3: Images of calibration sphere.



(a) Light source 1



(b) Light source 2



(c) Light source 3

Figure 8: Three images of doll face (frame 5).

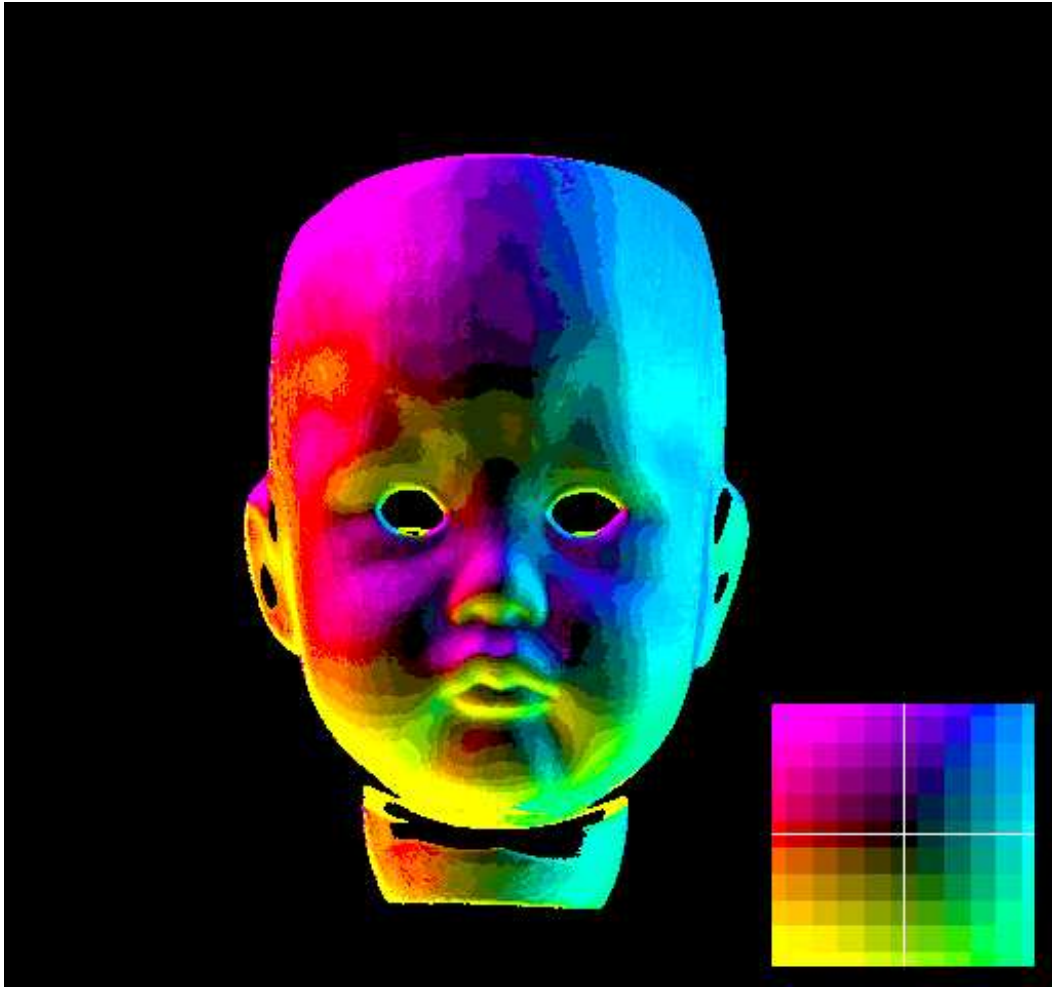
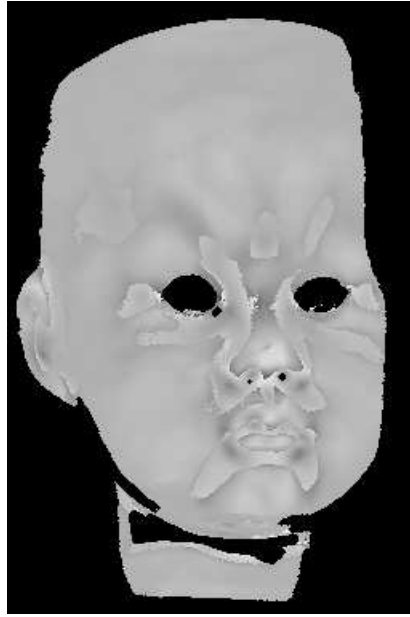


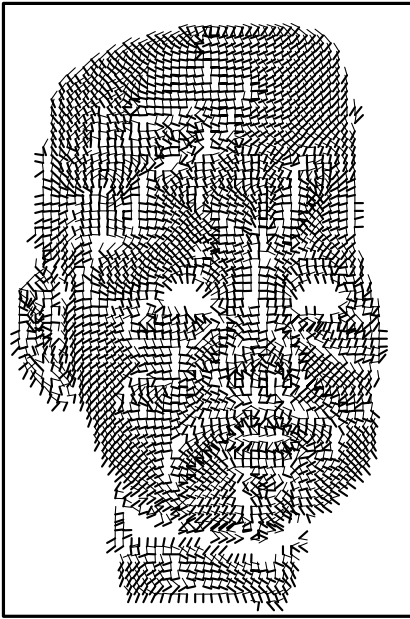
Figure 9: Example of color encoded gradient, (p, q) , as produced in the near real-time (15Hz) implementation of photometric stereo. The inset (lower right) shows the color rosette used to encode the gradient.



(a) Principal curvature k_1 (frame 0)



(b) Principal curvature k_2 (frame 0)



(c) Principal directions (frame 0)

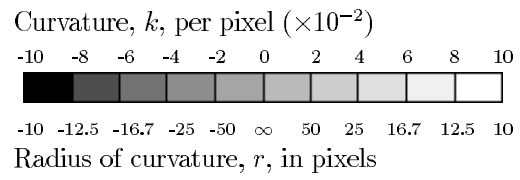


Figure 16: Principal curvature estimation for doll face (frame 0).