Visão Tridimensional

Fluxo Óptico

→ Movimento do padrão de intensidades na imagem, em geral devido ao movimento relativo câmera/cena

→ Recuperação do movimento relativo e/ou da estrutura da cena

- Fluxo Óptico × Campo de Movimento

Campo de movimento: Associa um vetor de velocidade a cada ponto na imagem, relacionado ao movimento do ponto correspondente na cena

Sejam,

$\mathbf{V} = \mathbf{V}(X, Y, Z)$, a velocidade relativa à câmera de um ponto na cena, P_o

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, f)$, a velocidade do ponto imagem correspondente, P_i → *Campo de movimento*

Da projeção perspectiva,

$$\frac{\mathbf{r}}{f} = \frac{1}{\mathbf{R} \cdot \hat{z}} \mathbf{R} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{f} = \frac{X}{Z} \\ \frac{y}{f} = \frac{Y}{Z} \end{cases}$$

onde $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ e $\mathbf{r} = (x, y, f)$

Diferenciando em relação ao tempo,

$$\frac{\mathbf{v}}{f} = \frac{(\mathbf{R}\cdot\hat{z})\mathbf{V} - (\mathbf{V}\cdot\hat{z})\mathbf{R}}{(\mathbf{R}\cdot\hat{z})^2} = \frac{(\mathbf{R}\times\mathbf{V})\times\hat{z}}{(\mathbf{R}\cdot\hat{z})^2}$$

Em termos das componentes,

$$v_x = \frac{V_x - xV_z}{Z}$$
$$v_y = \frac{V_y - yV_z}{Z}$$

onde tomamos $f = 1$

Por exemplo, para movimento rígido,

$$\mathbf{V} = \mathbf{V^t} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{R}$$

E o campo de movimento se torna

$$v_x = \frac{V_x^t - xV_z^t}{Z} - \Omega_x xy + \Omega_y(1+x^2) - \Omega_z y \quad *$$
$$v_y = \frac{V_y^t - yV_z^t}{Z} - \Omega_x(1+y^2) + \Omega_y xy - \Omega_z x$$

O campo de movimento é um conceito matemático puramente geométrico, enquanto o fluxo óptico é um observável, que também envolve aspectos fotométricos

O campo de movimento e o fluxo óptico nem sempre coincidem:

- esfera lambertiana em rotação: campo de movimento não-nulo, fluxo óptico nulo

- esfera parada e fonte em movimento: campo de movimento nulo, fluxo óptico não-nulo

$$* \left.\begin{array}{l} V_x^R = \Omega_y Z - \Omega_z Y \\ V_z^R = \Omega_x Y - \Omega_y X \end{array}\right\} v_x^R = \frac{(\Omega_y Z - \Omega_z Y) - x(\Omega_x Y - \Omega_y X)}{Z} = \Omega_y - \Omega_z \frac{Y}{Z} - x\Omega_x \frac{Y}{Z} + x\Omega_y \frac{X}{Z}$$

mas $\frac{Y}{Z} = y$, $\frac{X}{Z} = x$ $\therefore v_x^R = (1+x^2)\Omega_y - \Omega_z y - xy\Omega_x$

• Equação do Fluxo Óptico

Sejam,

$$u(x,y) = \frac{dx}{dt}, \text{ e } v(x,y) = \frac{dy}{dt}$$

as componentes x e y do fluxo óptico.

Assumindo conservação da irradiância, o fluxo óptico é tal que

$$I(x + u\delta t, y + v\delta t, t + \delta t) = I(x,y,t)$$

Para u e v contínuos,

$$I(x,y,t) + \frac{\partial I}{\partial x}\delta x + \frac{\partial I}{\partial y}\delta y + \frac{\partial I}{\partial t}\delta t = I(x,y,t)$$

onde $\delta x = u\delta t$, $\delta y = v\delta t$, e desprezamos termos de ordem superior.

No limite $\delta t \to 0$:

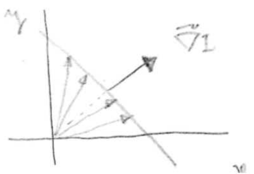
$$\frac{\partial I}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial I}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial I}{\partial t} \equiv \frac{dI}{dt} = 0$$

ou seja,

$$I_x u + I_y v + I_t = 0 \quad \text{(Equação do Fluxo Óptico)}$$

$\to \nabla I \cdot (u,v) = -I_t$

$\to$ Restrição para as componentes do fluxo óptico: projeção de (u,v) sobre ∇I é dada em cada ponto da imagem



Problema da Abertura:

A equação do fluxo óptico determina a componente do fluxo na direção do gradiente da intensidade, mas não a sua componente na direção perpendicular ao gradiente

- Algoritmo Iterativo para Estimação do Fluxo Óptico

$\rightarrow$ Minimização de um funcional incorporando a equação do fluxo óptico e uma condição de suavidade:

$$e = e_S + \lambda e_C$$

onde,

$$e_S = \frac{1}{4}\sum_{i,j}[(u(i+1,j)-u(i,j))^2 + (u(i,j+1)-u(i,j))^2 +$$
$$+(v(i+1,j)-v(i,j))^2 + (v(i,j+1)-v(i,j))^2]$$

e

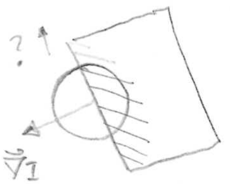
$$e_C = \sum_{i,j}(I_x u(i,j) + I_y v(i,j) + I_t)^2$$

com $I_x(i,j)$, $I_y(i,j)$, e $I_t(i,j)$ apropriadamente discretizados (ver adiante)

Minimização de e:

$$\frac{\partial e}{\partial u(k,l)} = 2(u(k,l) - \overline{u}(k,l)) + 2\lambda(I_x u(k,l) + I_y v(k,l) + I_t)I_x = 0$$

$$\frac{\partial e}{\partial v(k,l)} = 2(v(k,l) - \overline{v}(k,l)) + 2\lambda(I_x u(k,l) + I_y v(k,l) + I_t)I_y = 0$$



Ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1+\lambda I_x^2 & \lambda I_x I_y \\ \lambda I_x I_y & 1+\lambda I_y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k,l) \\ v(k,l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{u}(k,l) - \lambda I_x I_t \\ \overline{v}(k,l) - \lambda I_y I_t \end{pmatrix}$$

onde $\overline{u}$ e $\overline{v}$ são médias locais de u e v:

$$\overline{u}(k,l) = \frac{1}{4}[u(k+1,l) + u(k,l+1) + u(k-1,l) + u(k,l-1)]$$

$$\overline{v}(k,l) = \frac{1}{4}[v(k+1,l) + v(k,l+1) + v(k-1,l) + v(k,l-1)]$$

Invertendo-se a equação matricial acima, resulta

$$(1+\lambda(I_x^2+I_y^2))(u(k,l)-\overline{u}(k,l)) = -\lambda I_x[I_x\overline{u}(k,l)+I_y\overline{v}(k,l)+I_t]$$

$$(1+\lambda(I_x^2+I_y^2))(v(k,l)-\overline{v}(k,l)) = -\lambda I_y[I_x\overline{u}(k,l)+I_y\overline{v}(k,l)+I_t]$$

Assim, o seguinte esquema iterativo pode ser empregado

$$u^{(n+1)} = \overline{u}^{(n)} - \lambda I_x \left[\frac{I_x\overline{u}^{(n)} + I_y\overline{v}^{(n)} + I_t}{1+\lambda(I_x^2+I_y^2)}\right]$$

$$v^{(n+1)} = \overline{v}^{(n)} - \lambda I_y \left[\frac{I_x\overline{u}^{(n)} + I_y\overline{v}^{(n)} + I_t}{1+\lambda(I_x^2+I_y^2)}\right]$$

$\rightarrow$ A cada iteração, o novo valor de (u,v), num dado sítio, é obtido pela média dos valores anteriores em sua vizinhança, menos um ajuste que se dá na direção do gradiente da imagem

- Esquema de Discretização

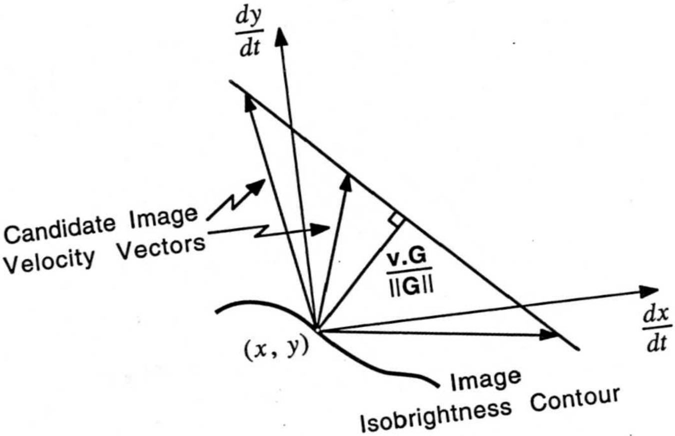
A seguinte discretização é empregada para o cálculo das derivadas das intensidades:

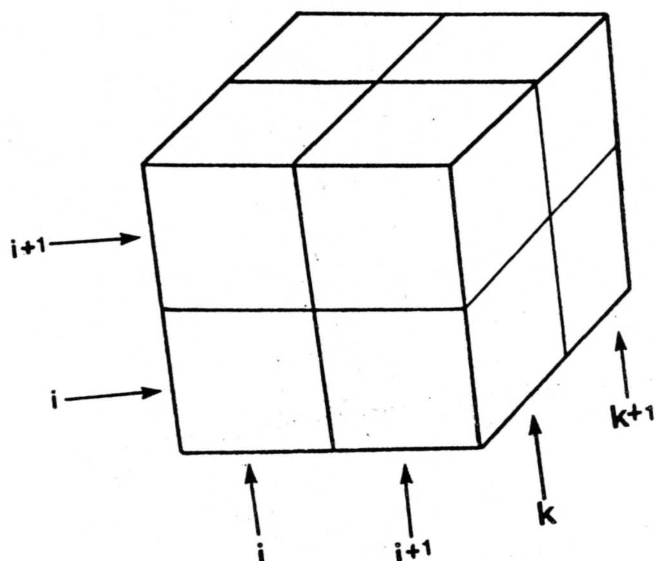
$$I_x(i,j) = [(I(i,j+1,k) + I(i,j+1,k+1)+$$
$$+I(i+1,j+1,k) + I(i+1,j+1,k+1))-$$
$$-(I(i,j,k) + I(i,j,k+1) + I(i+1,j,k) + I(i+1,j,k+1))]/4\Delta_x$$

$$I_y(i,j) = [(I(i+1,j,k) + I(i+1,j,k+1)+$$
$$+I(i+1,j+1,k) + I(i+1,j+1,k+1))-$$
$$-(I(i,j,k) + I(i,j,k+1) + I(i,j+1,k) + I(i,j+1,k+1))]/4\Delta_y$$

$$I_t(i,j) = [(I(i,j,k+1) + I(i+1,j,k+1)+$$
$$+I(i,j+1,k+1) + I(i+1,j+1,k+1))-$$
$$-(I(i,j,k) + I(i+1,j,k) + I(i,j+1,k) + I(i+1,j+1,k))]/4\Delta_t$$

onde Δ_x, Δ_y e Δ_t são as unidades de discretização ao longo das dimensões x, y e t, respectivamente


$\frac{dy}{dt}$
Candidate Image
Velocity Vectors
$\frac{\mathbf{v.G}}{\|\mathbf{G}\|}$
$\frac{dx}{dt}$
(x, y)
Image
Isobrightness Contour


i+1
i
j
j+1
k
k+1

Navegação Passiva/Estrutura a Partir do Movimento

$\rightarrow$ Recuperação do movimento relativo câmera/cena e da forma das superfícies observadas

- Movimento Rígido

- Objeto em movimento com relação a uma câmera estática

Assumimos um sistema de coordenadas fixo na entrada da câmera, e distância focal $f = 1$

Seja P um ponto na cena, de posição $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$ com relação ao sistema de coordenadas da câmera

Sejam,

$\mathbf{V}^{\mathrm{t}} = (U, V, W)$ a velocidade de translação e $\mathbf{\Omega} = (A, B, C)$ a velocidade de rotação do ponto P

A velocidade total de P é então dada por

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}^{\mathrm{t}} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}$$

Da projeção perspectiva,

$$\frac{x}{f} = \frac{X}{Z} \ \text{ e } \ \frac{y}{f} = \frac{Y}{Z}$$

Assumindo que o fluxo óptico é igual ao campo de movimento, obtemos, diferenciando em relação ao tempo,

$$u = \frac{U - xW}{Z} - Axy + B(1 + x^2) - Cy$$

$$v = \frac{V - yW}{Z} - A(1 + y^2) + Bxy - Cx$$

Ou seja,

$$u = u_t + u_r \ \text{ e } \ v = v_t + v_r$$

onde

$$\begin{cases} u_t = (U - xW)/Z \\ v_t = (V - yW)/Z \end{cases}$$

$\rightarrow$ componentes translacionais do fluxo óptico

$$\begin{cases} u_r = -Axy + B(1 + x^2) - Cy \\ v_r = -A(1 + y^2) + Bxy - Cx \end{cases}$$

$\rightarrow$ componentes rotacionais do fluxo óptico

Abordagem de Mínimos Quadrados

- Translação Pura

$\rightarrow$ Minimizar o funcional

$$\int\int_I [(u - u_t)^2 + (v - v_t)^2] dxdy$$

Passo 1: Obtemos a função Z que minimiza o integrando acima

$\rightarrow$ Diferenciando em relação a Z:

$$Z(x, y) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{u\alpha + v\beta}$$

onde $\alpha = U - xW$ e $\beta = V - yW$

Passo 2: Reescrevemos o funcional, usando o Z obtido, e minimizamos com relação a U, V e W

$$\int\int_I (V - yW) K dxdy = 0$$
$$\int\int_I (U - xW) K dxdy = 0$$
$$\int\int_I (yU - xV) K dxdy = 0$$

onde

$$K = \frac{(u\beta - v\alpha)(u\alpha + v\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

$\rightarrow$ Três equações *linearmente dependentes*: a velocidade só pode ser determinada a menos de uma constante multiplicativa (o mesmo para $Z(x, y)$)

Passo 3: Resolvemos numericamente as duas equações *não-lineares* nas componentes U, V e W

- Rotação Pura

$\rightarrow$ Minimizar o funcional

$$\int\int_I [(u-u_r)^2 + (v-v_r)^2] dxdy$$

Passo 1: Como o funcional não depende de Z, neste caso, nós o minimizamos imediatamente com relação a A, B e C

$$\int\int_I [(u-u_r)xy + (v-v_r)(y^2+1)] dxdy = 0$$

$$\int\int_I [(u-u_r)(x^2+1) + (v-v_r)xy] dxdy = 0$$

$$\int\int_I [(u-u_r)y - (v-v_r)x] dxdy = 0$$

Pode-se reescrever

$$\int\int_I [u_r xy + v_r(y^2+1)] dxdy = \int\int_I [uxy + v(y^2+1)] dxdy = k$$

$$\int\int_I [u_r(x^2+1) + v_r xy] dxdy = \int\int_I [u(x^2+1) + vxy] dxdy = -l$$

$$\int\int_I [u_r y - v_r x] dxdy = \int\int_I [uy - vx] dxdy = m$$

Substituindo u_r e v_r por suas expressões em termos de A, B e C, obtém-se o sistema

$$aA + dB + fC = k$$

$$dA + bB + eC = l$$

$$fA + eB + cC = m$$

Onde,

$$a = -\int\int_I [x^2y^2 + (y^2+1)^2]dxdy, \; b = -\int\int_I [x^2y^2 + (x^2+1)^2]dxdy$$

$$c = -\int\int_I [x^2 + y^2]dxdy, \; d = \int\int_I [xy(x^2 + y^2 + 2)]dxdy$$

$$e = \int\int_I y dxdy, \; f = \int\int_I x dxdy$$

Passo 2: Se a matriz dos coeficientes é não-singular, inverte-se o sistema acima, para obter $\mathbf{\Omega} = (A, B, C)$

- Movimento Rígido Geral

$\rightarrow$ Minimizar o funcional

$$\int\int_I [(u - (u_t + u_r))^2 + (v - (v_t + v_r))^2](\alpha^2 + \beta^2)dxdy$$

sujeito a $|\mathbf{V^t}|^2 = U^2 + V^2 + W^2 = 1$

$\rightarrow$ Maior importância é dada aos pontos em que a componente translacional do fluxo óptico é grande

Passo 1 Minimizando o integrando com relação a Z, obtemos

$$Z(x, y) = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(u - u_r)\alpha + (v - v_r)\beta}$$

Passo 2 Substituindo Z no funcional acima, e minimizando com relação às componentes de velocidade, obtemos três equações *lineares* em A, B e C e três equações *não-lineares* em U, V e W

Passo 3 Obtemos A, B e C pela inversão das equações lineares, e U, V e W numericamente