

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

Jefferson Silva Mello

Uma análise do Método de Diferenças Finitas
utilizando passos de tempo ajustados localmente

Niterói-RJ

2011

JEFFERSON SILVA MELLO

UMA ANÁLISE DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS UTILIZANDO PASSOS
DE TEMPO AJUSTADOS LOCALMENTE

Monografia apresentada ao Curso de Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Bacharel em Ciência da Computação.

Orientador: Profa. Regina C. P. Leal Toledo, D.Sc.

Co-orientador: Prof. Otton Teixeira da Silveira Filho, D.Sc.

Niterói-RJ

2011

JEFFERSON SILVA MELLO

UMA ANÁLISE DO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS UTILIZANDO PASSOS
DE TEMPO AJUSTADOS LOCALMENTE

Monografia apresentada ao Curso de
Graduação em Ciência da Computação
da Universidade Federal Fluminense,
como requisito parcial para obtenção do
Grau de Bacharel em Ciência da Com-
putação.

Aprovada em dezembro de 2011.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Regina C. P. Leal Toledo, Dsc. - Orientador

IC-UFF

Prof. Otton Teixeira da Silveira Filho, Dsc. - Co-orientador

IC-UFF

Profa. Lúcia Maria de Assumpção Drummond, Dsc.

IC-UFF

Marcelo Zamith, Msc.

IC-UFF

Niterói-RJ

2011

“O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.”

— Albert Einstein

*“É espantosa a quantidade de coisas que não sabemos. E mais espantoso ainda é o que
passa por saber.”*

— Philip Roth, em *A marca humana*

Agradecimentos

Pelos idos de abril de 2010, enquanto eu cursava a disciplina Métodos Numéricos 2, surgiu uma oportunidade de trabalhar num "projecinho" no Instituto de Computação. Esse foi o termo utilizado pela professora Regina para designar o projeto de pesquisa junto ao Cenpes que envolvia aplicações da área de Sísmica. Depois de um tempo pensando aceitei a proposta. Naquele momento, eu era um aluno que oscilava entre notas boas e medianas e não produzia nada além dos trabalhos pedidos nas disciplinas. Eu queria mais. Logo quando começou o "projecinho", deparei-me com equações matemáticas complicadas, conceitos físicos avançados e um linguajar novo que criavam uma neblina em minha frente. Esta neblina jamais desapareceu. Ela, no entanto, passou a incomodar cada vez menos devido as marcantes reuniões da equipe do projeto. Cada integrante não contribuiu apenas para que este Projeto Final tenha sido realizado eles, na verdade, fizeram-me crescer como pessoa e profissionalmente mostrando-me, no dia a dia, que eu era capaz de superar desafios através da determinação, foco e trabalho em equipe. Esta monografia é um dos frutos deste projeto.

Cada um contribuiu a sua maneira. A professora Regina parecia ler meus pensamentos quando dava ênfase apenas aos pontos mais importantes das reuniões (e que eram acessíveis ao meu conhecimento prévio). Seu empenho, velocidade de raciocínio e capacidade de síntese me motivaram ainda mais. Naquele momento ela já era minha orientadora. Fica difícil pontuar suas inúmeras contribuições, por isso, agradeço a dedicação do seu precioso tempo e a confiança depositada em mim, principalmente, na escrita do artigo para o CILAMCE 2011 e na escrita desta monografia. Além disso, agradeço ao tratamento carinhoso dado a mim durante o tempo que trabalhamos juntos. Nas reuniões, o Otton ia para o quadro e sempre dizia uma frase como esta: "Não faço ideia se isso está certo". Eu pensava: "Ora, se ele que é fera não faz ideia, então esse negócio é difícil mesmo". Com o passar do tempo, percebi que essa premissa é condição *sine qua*

non ao pensamento científico. Curiosidade, intuição e força de vontade são os agentes que fazem surgir novas ideias. Novamente, eu aprendia mais uma lição além dos métodos numéricos. Agradeço a sua paciência ao me explicar conceitos difíceis, a sua dedicação durante esse tempo e a sua co-orientação neste trabalho. Como se não bastasse o crescimento profissional, ainda ganhei amigos neste tempo que trabalhei no projeto. Um deles é o Alexandre Antunes, aluno de mestrado do IC-UFF que trabalhou comigo durante a maioria dos experimentos deste esquema. Nossas longas discussões acerca do tema da monografia, permitiram-me abordar o problema de várias formas diferentes. O Thales Rodrigues, mestrando do IC-UFF, contribuiu na codificação ao programar um módulo gráfico que permitia a visualização da onda durante a execução do programa. A imagem do esquema para o caso bidimensional contida nesta monografia também foi feita por ele. O Adelmo Lima, graduando em matemática, por sua vez, prestou-me uma consultoria de alto nível sobre a interpretação de gráficos e o uso correto do programa Gnuplot.

Aos meus amigos da Universidade Federal Fluminense, André Guimarães, Douglas Mareli, Felipe Ribeiro, Giulio Bottari, Matheus Erthal, Troy Kohwalter e Wallace Ribeiro agradeço não somente pelos conselhos que me auxiliaram nesta trajetória de escrita de monografia, mas também pelo privilégio de tê-los como companheiros de turma. Dada esta pequena amostra, creio que o Brasil estará bem servido de profissionais de computação. Não poderia deixar de citar meus amigos Bruno Rodrigues, Jeferson Carvalho e Kleverton Santana de Manaus, local onde iniciei meus estudos de graduação na Universidade Federal do Amazonas. As palavras de incentivo, mesmo pela Internet, foram revigorantes nos momentos mais difíceis do período. À minha família, remeto agradecimentos especiais, pois sem eles eu nada seria. Minha mãe que me dedica amor incondicional e que proporciona um ambiente espetacular para o estudo ao cuidar de mim com zelo inigualável. Ao meu pai que é um exemplo de dedicação à família e ao trabalho. À minha irmã que me entende como ninguém e me ouve pacientemente.

Lista de Figuras

2.1	Malha no tempo e no espaço	9
2.2	Malhas espaciais para o caso 2-D (a) 2 ^a ordem e (b) 4 ^a ordem	11
3.1	Esquema 1-D para uma aproximação 2-4 com 1 nível de adaptatividade. . .	15
3.2	Esquema 1-D para uma aproximação 2-4 com 2 níveis de adaptatividade. .	16
3.3	Esquema para o caso 2-D com 1 nível de adaptatividade para uma aproximação 2-2. Imagem gentilmente cedida por Sabino, T. L. R..	17
4.1	Gráficos Amplitude x Tempo (a) e Amplitude x Frequência (b) para a fonte sísmica descrita na Eq. 4.1 com frequência de corte igual a 30 Hz.	19
4.2	Campo de velocidades simulado.	22
4.3	Ondas em $t = 2,0s$ para uma aproximação 2-2. (a) tem-se a solução utilizando passos de tempo constante e em (b) a solução com passos de tempo adaptativos.	23
4.4	Sismogramas para uma aproximação 2-2 (a) S_1 e (b) S_2	23
4.5	Ondas em $t = 2,0s$ para uma aproximação 2-4. (a) tem-se a solução utilizando passos de tempo constante e em (b) a solução com passos de tempo adaptativos.	24
4.6	Sismogramas para uma aproximação 2-4 (a) S_1 e (b) S_2	24
4.7	Ondas em $t = 2,0s$ para uma aproximação 2-2. (a) tem-se a solução utilizando passos de tempo constante e em (b) a solução com passos de tempo adaptativos.	25
4.8	Sismogramas para uma aproximação 2-2 (a) S_1 e (b) S_2	26
4.9	Ondas em $t = 2,0s$ para uma aproximação 2-4. (a) tem-se a solução utilizando passos de tempo constante e em (b) a solução com passos de tempo adaptativos.	26

4.10	Sismogramas para uma aproximação 2-4 (a) S_1 e (b) S_2	27
4.11	Campo de velocidades com três velocidades diferentes	28
4.12	Ondas em $t = 1,4s$ para uma aproximação 2-2. (a) tem-se a solução utilizando passos de tempo constante e em (b) a solução com passos de tempo adaptativos.	28
4.13	Sismogramas para uma aproximação 2-2 (a) S_1 e (b) S_2	29
4.14	Ondas em $t = 1,4s$ para uma aproximação 2-4. (a) tem-se a solução utilizando passos de tempo constante e em (b) a solução com passos de tempo adaptativos.	29
4.15	Sismogramas para uma aproximação 2-4 (a) S_1 e (b) S_2	30
6.1	Esquemas com dois níveis de adaptatividade sem passos de tempo aninhados (a) 2-2 e (b) 2-4.	37
6.2	Influência do número de pontos no tempo intermediário $t - \Delta t/4$ para o cálculo do tempo intermediário $t + \Delta t/4$. Esse exemplo se aplica a operadores de segunda ordem no tempo.	38

Lista de Tabelas

3.1	Tabela com regras gerais para mudança de Δt . Considere $\lambda = \Gamma/\Gamma_{menor\Delta t}$	14
4.1	Tabela com parâmetros comuns as simulações	22
4.2	Tabela de desempenho para as simulações das Seções 4.3, 4.4 e 4.5. Aproximação 2-2.	30
4.3	Tabela de desempenho para as simulações das Seções 4.3, 4.4 e 4.5. Aproximação 2-4.	31
4.4	Tabela de desempenho para as simulações com velocidade menor em 90% do campo de velocidades. Aproximação 2-2.	31
4.5	Tabela de desempenho para as simulações com velocidade menor em 90% do campo de velocidades. Aproximação 2-4.	31

Sumário

Agradecimentos	v
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
Resumo	xii
Abstract	xiii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	3
1.2 Organização da monografia	4
1.3 Trabalhos relacionados	4
2 O problema da onda acústica	7
2.1 A equação da onda acústica	7
2.2 Método de Diferenças Finitas	8
3 Adaptatividade temporal	13
4 Exemplos numéricos	18
4.1 Termo de fonte	18
4.2 Metodologia dos experimentos	20
4.3 Um nível de adaptatividade	22
4.4 Dois níveis de adaptatividade	25
4.5 Três diferentes passos de tempo	27
4.6 Testes de desempenho	29

5	Conclusões e trabalhos futuros	33
6	Apêndice A - Adaptatividade temporal sem passos de tempo aninhados	35

Resumo

A resolução do problema da propagação de ondas acústicas em meios contínuos é de grande interesse nas mais diversas áreas da ciência, como por exemplo, na geofísica, medicina, engenharia, entre outras. Este problema é modelado através de equações diferenciais parciais com condições inicial e de contorno conhecidas. Para um problema de sísmica, por exemplo, a simulação da propagação da onda inclui meios anisotrópicos, interfaces que não são planas entre camadas, variação de velocidade/densidade entre outras características. Diversos métodos numéricos são utilizados para encontrar soluções aproximadas para a equação de onda, tal como o método de diferenças finitas (MDF) utilizado no presente trabalho. O método de DF explícito, frequentemente utilizado para resolver esse tipo de problema, possui um critério de estabilidade para a garantia de convergência da solução numérica. Num domínio heterogêneo, a condição de estabilidade fica condicionada à região que necessita da discretização mais refinada, por exemplo, em um problema de sísmica, quanto maior a velocidade de propagação do meio, mais refinado deve ser o passo de tempo requerendo, de forma geral, um grande esforço computacional. O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento do MDF com uma técnica, proposta em Falk et al (1998), que permite adaptar o passo de tempo localmente de acordo com a velocidade de propagação da onda. Baseados nestes esquemas, resolveu-se a equação da onda acústica para meios heterogêneos que necessitam de passos de tempo divididos por dois ou, em outros casos, por quatro. Além disso, simulou-se um campo que pode ser calculado com três diferentes passos de tempo. Essa abordagem aponta para uma redução no custo computacional em domínios onde o campo de velocidades não é homogêneo.

Palavras-chave: equação da onda acústica, diferenças finitas, passos de tempo ajustáveis.

Abstract

The resolution of the acoustic wave scattering in continuous medium is important to several areas of the science, for instance, in geophysics, medicine, engineering and so on. This problem is modeled by partial differential equations with known initial and boundary conditions. For a seismic problem, for example, the simulation of wave propagation includes anisotropic media, interfaces that are not flat between layers, variable speed / density among other features. Several numerical methods are used to find approximate solutions to the wave equation, such as the finite difference method (FDM) used in this work. The explicit FD method, often used to solve this problem, has a stability criterion for ensuring convergence of the numerical solution. In a heterogeneous domain, the stability condition depends on the region that needs the more refined discretization, for example, in a seismic problem, the greater the velocity of propagation of the medium, the greater must be the time step. Thus, these simulations require, in general, a large computational effort. The objective of this paper is to analyze the behavior of MDF with a technique proposed in Falk et al (1998) that allows to adjust the time step locally according to the velocity of wave propagation. Based on these new schemes of locally adjustable time-steps, we solve the acoustic wave equation for a heterogeneous medium which needs a time-step size divided by a factor of two, other one uses a time-step size divided by four. Furthermore, we simulate a more complex field velocity that can use three different time-steps sizes. This approach points to a reduction of the computational cost in domains where velocity field is not a homogeneous medium.

Keywords: acoustic wave equation, finite-difference, adjustable time-steps.

Capítulo 1

Introdução

Uma grande variedade de fenômenos da natureza podem ser descritos através de modelos matemáticos que podem possuir uma solução exata ou aproximada. A solução exata de uma equação, sistema ou qualquer problema matemático pode ser obtida a partir de um desenvolvimento analítico, que é a aplicação sucessiva de operações algébricas e diferenciais. No entanto, vários problemas práticos não possuem solução exata. Na solução aproximada usa-se um método numérico que encontra uma solução através da aplicação de operações aritméticas simples (Williams 1980).

A maioria dos métodos numéricos para resolução de problemas matemáticos foram descritos antes do aparecimento dos primeiros computadores eletrônicos (Dacunto 2004). O método de Euler (1707-1783), por exemplo, é comumente aceito como o primeiro esquema de diferenças finitas utilizado para resolver numericamente equações diferenciais. Essa necessidade surgiu devido a existência de alguns problemas sem solução exata ou que eram demasiadamente complicados para se resolver analiticamente. Deve-se considerar, no entanto, que computadores tem memória finita e para se resolver um problema de natureza contínua é preciso discretizá-lo. Por exemplo, ao se calcular uma integral numericamente, utiliza-se um número finito de pontos em vez de se considerar uma subdivisão do intervalo de integração infinitesimalmente. Esta aproximação acarreta um erro de truncamento na solução. Além disso, os números são representados por um número finito de algarismos na memória, o que pode introduzir um erro de arredondamento. Uma vez que a propagação dos erros do algoritmo seja conhecida e controlada, o método numérico pode compor sistemas computacionais complexos que são utilizados na resolução de problemas em áreas como astrofísica, dinâmica dos fluidos, economia, etc.

Os fenômenos que descrevem esses problemas podem ser divididos em sistemas discretos e contínuos. Um sistema discreto envolve a interconexão de um número finito de elementos como, por exemplo, um conjunto de partículas interagindo em um sistema fechado. Sistemas contínuos, por sua vez, ocorrem sobre uma região contínua, como na condução de calor em um determinado material. Williams (1980) classifica os problemas físicos em três categorias. Em problemas de equilíbrio o sistema permanece constante em relação ao tempo, um exemplo deste tipo, é a distribuição de campos eletrostático. Tais problemas são também conhecidos como problemas de estado estacionário e são descritos por sistemas de equações lineares e, em casos particulares, por sistema de equações não lineares ou por equações diferenciais ordinárias com condições de contorno. Problemas de autovalores, por sua vez, são uma extensão dos problemas de equilíbrio onde certos parâmetros adicionais devem ser determinados além daqueles definidos no estado estacionário. Um exemplo é a ressonância em circuitos elétricos. Eles são descritos por sistemas de equações lineares ou por equações diferenciais com condições de contorno. Por outro lado, problemas de propagação englobam os fenômenos transitórios e de regime não-permanente, nesse caso, estados subseqüentes do sistema são relacionados ao estado inicial, um exemplo deste tipo de problema é a propagação de ondas.

A resolução do problema de propagação de ondas acústicas é de grande interesse nas mais diversas áreas da ciência, por exemplo, na geofísica (Bulcão 2004), medicina (ultrasonografia), engenharia (identificação de danos estruturais), entre outras. A propagação de ondas acústicas se dá num meio material. Desta maneira, ele é modelado através de equações diferenciais parciais com condições iniciais conhecidas e condições de contorno. Uma análise fiel de dados sísmicos, nos permite observar que a simulação da propagação da onda em modelos computacionais realísticos incluem meios anisotrópicos, interfaces que não são planas entre camadas e blocos, velocidade/densidade entre outras características dentro das camadas e, frequentemente, uma camada livre de topografia (Moczo 2007). Uma vez que os métodos analíticos não proveem solução para modelos realísticos, o uso de aproximações é necessário. Diversos métodos numéricos são utilizados para encontrar soluções aproximadas para a equação de onda, tais como o método de diferenças finitas, de elementos finitos e de volumes finitos. Métodos numéricos implícitos demandam uma grande quantidade de memória e requerem um número de operações matemáticas consideravelmente maior que métodos numéricos explícitos, os primeiros envolvem a resolução

de sistemas lineares, o que pode os tornar inviáveis para algumas aplicações. Por outro lado, os métodos explícitos deparam-se com problemas de estabilidade o que acarreta uso de discretizações refinadas para garantia de convergência da solução numérica, como será descrito no Capítulo 4. Por esse motivo, a simulação numérica de fenômenos físicos descritos por equações diferenciais parciais (EDP) requer, de forma geral, um alto esforço computacional.

1.1 Motivação

Num domínio espacial heterogêneo a condição de estabilidade varia com a região e a garantia de estabilidade do método, fica condicionada à região que necessita da discretização mais refinada, ou seja, em um problema de sísmica, por exemplo, quanto maior a velocidade de propagação do meio, mais refinado deve ser o passo de tempo. Desta maneira, caso uma pequena parcela do domínio tenha maior velocidade a necessidade de garantia de estabilidade implicará uso de um passo de tempo que será conservador para as demais regiões do domínio espacial. Em outras palavras, as partes do domínio que tem menor velocidade de propagação utilizarão um passo de tempo mais refinado do que aquele necessário para assegurar a estabilidade numérica daquela região, ou seja, grande parte do domínio estará superamostrada em relação ao maior passo de tempo que assegura a convergência da solução numérica. Neste caso, serão feitos cálculos desnecessariamente aumentando o custo computacional. Falk et al. (1998) descreve um esquema alternativo que utiliza passos de tempo ajustados localmente, de acordo com a velocidade do meio, de modo a garantir a condição de estabilidade em todo o domínio. Uma das vantagens de fazer uso do esquema de adaptatividade temporal é um possível ganho no tempo final de simulação, uma vez que um passo de tempo maior pode ser utilizado em partes do domínio que tenham velocidades de propagação menores. No entanto, a eficiência do esquema proposto depende da relação entre o tamanho das regiões que não utilizam passos de tempo ajustados com o tamanho das regiões que precisam da técnica. Além das questões referentes à estabilidade numérica, para um domínio com variação de velocidade, ao se utilizar o mesmo passo de tempo teremos valores de dispersões diferentes de acordo com a velocidade da região o que pode comprometer a qualidade da solução (Alford et al. 1974).

Nesta monografia, utilizou-se o método de diferenças finitas (MDF) explícito para simular a propagação de ondas acústicas em meios não homogêneos (Kelly et al. 1976), isto é, meios que apresentam variações de propriedades físicas, como a velocidade de propagação. O objetivo deste trabalho é analisar o comportamento do MDF com a técnica de adaptatividade temporal em situações potencialmente críticas para tal esquema, como nas regiões onde ocorrem mudanças de velocidades. Em Falk et al. (1998) testou-se o esquema com passos de tempo Δt e $\Delta t/2$ com uma aproximação de segunda ordem no tempo e quarta ordem no espaço (2-4). Esta monografia apresenta resultados com uso de Δt e $\Delta t/4$, além de simulações com três diferentes passos de tempo em aproximações 2-2 e 2-4 para o caso bidimensional. Não houve preocupação com a modelagem de ambientes físicos reais pois o escopo da monografia é o estudo do esquema de adaptatividade temporal independentemente da aplicação utilizada.

1.2 Organização da monografia

Esta monografia está dividida em seis capítulos. No Capítulo 1 encontra-se a Introdução que é subdividida em Motivação e Trabalhos Relacionados. O Capítulo 2 contém a descrição do problema da equação da onda acústica seguida de uma seção sobre as aproximações de diferenças finitas utilizadas nesta monografia. O núcleo da monografia encontra-se nos capítulos 3 e 4. No capítulo 3 é descrito o esquema de adaptatividade temporal e os conceitos nele envolvidos. O capítulo seguinte é o mais extenso. Na primeira seção descreve-se o Termo de Fonte utilizado durante as simulações numéricas, na segunda seção, a metodologia dos experimentos é apresentada, nas três seções subseqüentes são apresentados os resultados das simulações, a última seção do capítulo 4 contém os resultados dos testes de desempenho. O capítulo 5 possui as conclusões e trabalhos futuros. Por fim, no capítulo 6 encontra-se o Apêndice A sobre esquemas de adaptatividade temporal sem passos de tempo aninhados.

1.3 Trabalhos relacionados

O Método das diferenças finitas (MDF) é largamente utilizado na resolução de equações diferenciais parciais. Num artigo seminal sobre diferenças finitas, Courant–Friedrichs–Lewy (1928) descreveram a condição necessária para a convergência da solução numérica quando

se resolve uma equação diferencial parcial pelo método de diferenças finitas. Yee (1966) resolveu as equações de Maxwell a partir de um esquema de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) que possibilitava o uso de malhas espaciais multidimensionais. Alterman (1968) utilizou aproximações de diferenças finitas (DF) na modelagem sísmica de equação de onda elástica num meio dividido em duas camadas. Madariaga (1976), por sua vez, desenvolveu uma malha escalonada (*staggered grid*) para diminuir o custo computacional ao se aplicar o MDF em um modelo de plano circular de uma falha friccional.

Geralmente, o operador de DF é obtido através do desenvolvimento da série de Taylor para as derivadas da equação de onda. A precisão varia com a ordem de aproximação, ou seja, depende do número de termos que são expandidos na série a fim de representar a função (campo de ondas). Além da necessidade de se obter boas aproximações para as derivadas parciais da equação, a propagação das ondas, em problemas de sísmica, deve considerar as características dos meios geológicos simulados. Uma análise das soluções usando DF em domínios com variações de propriedades físicas é descrita em Boore (1972), Virieux (1984) e Virieux (1986). Alford et al. (1974) comparou uma solução utilizando o MDF com uma solução analítica para a equação de onda acústica num campo com quinas. Esses métodos alcançam elevada precisão desde que malhas refinadas sejam utilizadas. Em Moczo (2007) há uma extensa revisão sobre a aplicação do MDF para resolução de problemas sísmicos.

Desta maneira, a precisão da aproximação da derivada depende do refinamento da malha. Entretanto, para problemas complexos de sísmica, o tamanho do domínio torna proibitiva a utilização de malhas muito refinadas. Além disso, métodos explícitos impõem um critério de estabilidade para assegurar a convergência da solução. Desta maneira, para que haja melhora da precisão com garantia de estabilidade é necessário refinar o passo de tempo. Falk et al. (1998) propôs a utilização de passos de tempo variáveis de acordo com a região do domínio para o método de diferenças finitas. Naquele trabalho, descreveu-se um esquema genérico que permite trabalhar com passos de tempo múltiplos de 2. Falk et al. (1998) simulou um campo sísmico em 2-D utilizando Δt e $\Delta t/2$ para um operador espacial escalonado (*staggered grid*) de sexta ordem na resolução de equação de onda elástica e obteve soluções com a "mesma precisão" se comparada com soluções utilizando um esquema com passos de tempo constante. Nesta monografia, estudou-se o comportamento e a eficiência do esquema de adaptatividade temporal para a resolução

da equação de onda acústica 2-D em domínios espaciais onde razão entre as velocidades necessite utilizar Δt , $\Delta t/2$ e $\Delta t/4$ em um operador espacial (2-2) e (2-4). Além disso, outro resultado inédito é a simulação em ambientes heterogêneos com três passos de tempo diferentes, a saber Δt , $\Delta t/2$ e $\Delta t/4$.

Capítulo 2

O problema da onda acústica

2.1 A equação da onda acústica

A equação da onda escalar é dada por:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \varphi + \psi \quad (2.1)$$

com condições iniciais dadas por:

$$\varphi(t_0, x, y) = f(x, y); \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=t_0} = g(x, y) \quad (2.2)$$

onde φ é uma função da posição e do tempo que descreve o comportamento da onda, c a velocidade de propagação da onda num dado ponto e ψ o termo da fonte. As condições iniciais na amplitude $f(x,y)$ e na derivada $g(x,y)$ são nulas para todas simulações desta monografia. A solução geral via série de Fourier, que corresponde à sobreposição ponderada de arcos múltiplos de seno e cosseno, é expressa mais sinteticamente por exponenciais com argumento complexo. Desta forma, examinando uma destas componentes, ou seja, uma única frequência tem-se:

$$\varphi(t, x) = \exp^{i(kx - \omega t)} \quad (2.3)$$

com k denominado número de onda e ω é a frequência angular. Esta solução é normalmente chamada de monocromática. Desenvolvendo as derivadas parciais separadamente obtém-se:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -i\omega\phi; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -ik\phi; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\omega^2\phi; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -k^2\phi; \quad (2.4)$$

daí:

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad (2.5)$$

onde ω/k é a velocidade de fase, quando a relação entre a frequência angular e o número de onda é linear dizemos que o meio no qual a onda se propaga é não dispersivo. Desta maneira, para a equação de onda, no caso analítico, a velocidade de fase é a velocidade de propagação quando se está em um meio não dispersivo. Entretanto, ao se aproximar as derivadas parciais através de métodos numéricos, como o das diferenças finitas, essas propriedades variam dependendo dos operadores utilizados.

2.2 Método de Diferenças Finitas

A técnica conhecida como Método de Euler (1707-1783) é comumente aceita pela comunidade científica como o primeiro método de diferenças finitas. Esse método foi utilizado para aproximar soluções de equações diferenciais parciais. Entretanto, apenas com o advento dos computadores na década de 1940 que foram realizadas pesquisas de modo sistemático sobre o tema. Atualmente, métodos de diferenças finitas proveem uma poderosa abordagem para resolver equações diferenciais e são amplamente aplicados em diversos campos da ciência. Equações com coeficientes variáveis e problemas não-lineares podem ser tratados por essa técnica. Geralmente, o erro de uma aproximação é pequeno e erros de arredondamento que surgem inevitavelmente durante o processo computacional podem ser controlados por uma análise preliminar do critério de estabilidade do esquema de DF utilizado.

O MDF é uma das várias técnicas usadas para se aproximar derivadas, neste método, tem-se um conjunto discreto de valores da variável dependente em pontos conhecidos da variável independente. Assim, dada uma função $\phi(x, t)$ definida no intervalo $0 \leq x \leq L$ e $0 \leq t \leq T$, uma discretização da função ϕ é obtida considerando apenas os valores ϕ_i^j sob um número finito de pontos (x_i, t_j)

$$\phi_i^j = \phi(x_i, t_j) = \phi(i\Delta x, j\Delta t), i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, n, \quad (2.6)$$

onde $\Delta x = L/m$, $\Delta t = T/n$. Na notação empregada para descrever as aproximações os índices subscritos correspondem as dimensões espaciais enquanto que o índice sobrescrito refere-se ao passo de tempo. Na Figura 2.1 tem-se a malha que aproxima a função $\phi(x, t)$. Uma regra para estimar o erro da aproximação de uma função por diferenças finitas é obtida através da expansão da Série de Taylor

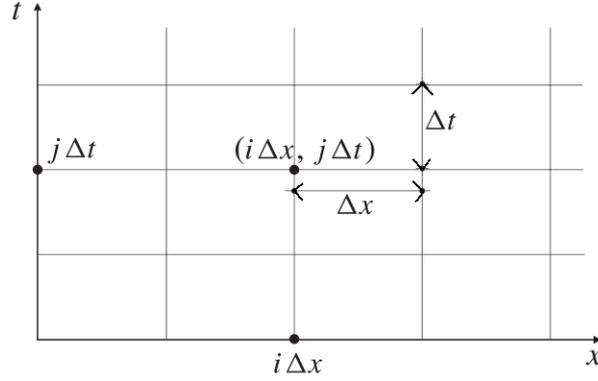


Figura 2.1: Malha no tempo e no espaço

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \sum_{h=1}^{n-1} f^{(h)}(x) \frac{(\Delta x)^h}{h!} + f^{(n)}(x + \theta \Delta x) \frac{(\Delta x)^n}{n!}, \quad (2.7)$$

onde $0 < \theta < 1$ e $f^{(h)}$ denota a h-ésima derivada de f . O último termo da Eq. 2.7 é da ordem de (Δx^n) e pode ser escrito como

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \sum_{h=1}^{n-1} f^{(h)}(x) \frac{(\Delta x)^h}{h!} + O((\Delta x)^n), \quad (2.8)$$

onde o símbolo O (o maiúsculo) é definido como segue

$$g(y) = O(y^n), y \in \Omega \iff |g(y)| \leq cy^n, \forall y \in \Omega \quad (2.9)$$

onde c é uma constante positiva. Os esquemas de diferenças finitas são chamados de progressivo, regressivo ou central dependendo dos pontos utilizados para o cálculo da aproximação. Aplicando a expansão da série de Taylor da Eq. 2.7 para a derivada parcial $\phi(x_i, t_j + \Delta t)$ tem-se

$$\phi(x_i, t_j + \Delta t) = \phi(x_i, t_j) + \phi_t(x_i, t_j) \Delta t + O((\Delta t)^2) \quad (2.10)$$

reescrevendo a Eq. 2.10 em notação empregada nesta monografia obtem-se

$$\phi_i^j = \phi_i^j + (\phi_t)_i^j \Delta t + O((\Delta t)^2), \quad (2.11)$$

daí,

$$(\phi_t)_i^j = \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^j}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (2.12)$$

Aplicando-se o procedimento descrito acima é possível encontrar uma aproximação progressiva para a derivada primeira ϕ_x . Uma aproximação regressiva é inferida de modo análogo para $\phi(x_i, t_j - \Delta t)$

$$(\phi_t)_i^j = \frac{\phi_i^j - \phi_i^{j-1}}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (2.13)$$

A aproximação central de diferenças finitas é obtida ao se aplicar a expansão da Série de Taylor da Eq. 2.7 com $n = 4$ como segue

$$\phi_i^{j+1} = \phi_i^j + (\phi_t)_i^j \Delta t + (\phi_{tt})_i^j \frac{(\Delta t)^2}{2!} + (\phi_{ttt})_i^j \frac{(\Delta t)^3}{3!} + O((\Delta t)^4) \quad (2.14)$$

$$\phi_i^{j-1} = \phi_i^j - (\phi_t)_i^j \Delta t + (\phi_{tt})_i^j \frac{(\Delta t)^2}{2!} - (\phi_{ttt})_i^j \frac{(\Delta t)^3}{3!} + O((\Delta t)^4) \quad (2.15)$$

Subtraindo a segunda expressão da primeira e isolando $(\phi_t)_i^j$ tem-se

$$(\phi_t)_i^j = \frac{\phi_i^{j+1} - \phi_i^{j-1}}{2\Delta t} + O((\Delta t)^2) \quad (2.16)$$

As aproximações de diferenças finitas descritas anteriormente consideram apenas dois pontos da malha para o cálculo da derivada primeira da função. Entretanto, fórmulas que envolvem três ou mais pontos da malha podem ser deduzidas para que, em geral, a solução obtida possua um erro menor. Para detalhes sobre o desenvolvimento em série de Taylor das fórmulas de diferenças finitas ver Collatz (1966), Ames (1977), Roache (1976) e Lapidus et al. (1982).

Nesta monografia aproximou-se derivadas de segunda ordem da Equação da onda acústica (Eq. 2.1) utilizando um operador de segunda ordem no tempo, para todas as simulações, e operadores espaciais de segunda e quarta ordem com os pontos da malha dispostos conforme o esquema de moléculas computacionais da Fig. 2.2. As aproximações de segunda e quarta ordem, utilizadas nesta monografia, são ambas centrais e estão descritas como $\mathbf{u}_{i,j}^n$ em Eq. 2.17 e 2.18, respectivamente, para a derivada espacial. Durante todo o trabalho, usou-se a malha igualmente espaçada nas direções x e y . A aproximação de segunda ordem para a derivada temporal é obtida de maneira direta.

$$(\mathbf{u}_{xx})_{i,j}^n = \frac{\mathbf{u}_{i+1,j}^n - 2\mathbf{u}_{i,j}^n + \mathbf{u}_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \quad (2.17)$$

$$(\mathbf{u}_{xx})_{i,j}^n = \frac{-\mathbf{u}_{i-2,j}^n + 16\mathbf{u}_{i-1,j}^n + 30\mathbf{u}_{i,j}^n + 16\mathbf{u}_{i+1,j}^n - \mathbf{u}_{i+2,j}^n}{12\Delta x^2} \quad (2.18)$$

Particularizando a Eq. 2.1 para o caso bidimensional, e substituindo as aproximações temporal e espacial ambas de segunda ordem (2-2) descritas na Eq. 2.17 obtém-se:

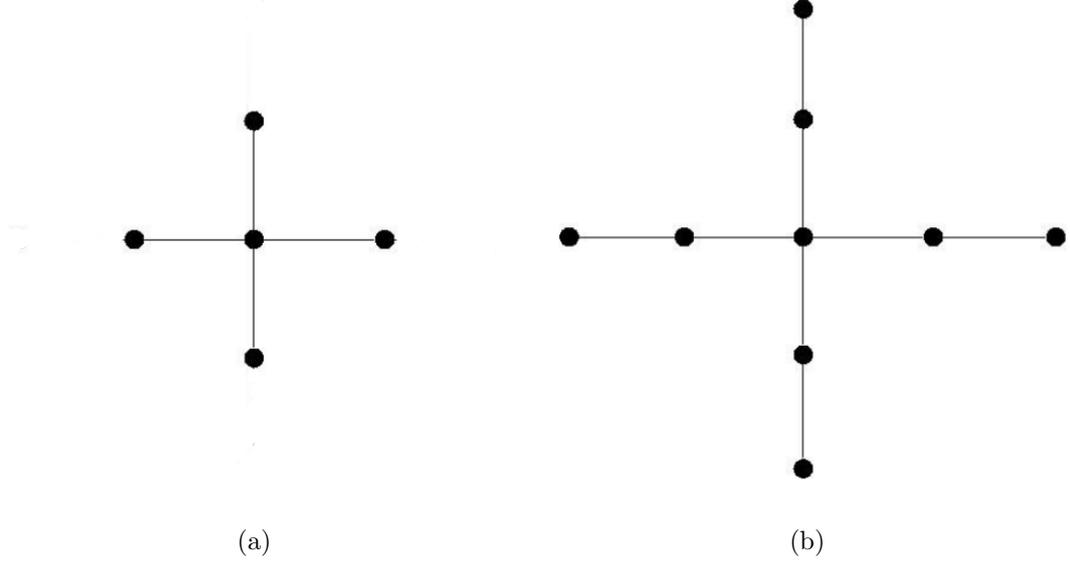


Figura 2.2: Malhas espaciais para o caso 2-D (a) 2ª ordem e (b) 4ª ordem

$$\mathbf{u}_{i,j}^{n+1} - 2\mathbf{u}_{i,j}^n + \mathbf{u}_{i,j}^{n-1} = C^2(\mathbf{u}_{i+1,j}^n - 2\mathbf{u}_{i,j}^n + \mathbf{u}_{i-1,j}^n + \mathbf{u}_{i,j+1}^n - 2\mathbf{u}_{i,j}^n + \mathbf{u}_{i,j-1}^n) + (\Delta t)^2\psi \quad (2.19)$$

onde $C = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta r^2}$, n representa o passo de tempo, os índices i e j representam os pontos da malha espacial em cada direção e Δt e Δr correspondem as discretizações temporal e espacial respectivamente. A Eq. 2.19 é eficaz para $n > 0$. No entanto, quando $n = 0$ teremos:

$$\mathbf{u}_{i,j}^1 - 2\mathbf{u}_{i,j}^0 + \mathbf{u}_{i,j}^{-1} = C^2(\mathbf{u}_{i+1,j}^0 - 2\mathbf{u}_{i,j}^0 + \mathbf{u}_{i-1,j}^0 + \mathbf{u}_{i,j+1}^0 - 2\mathbf{u}_{i,j}^0 + \mathbf{u}_{i,j-1}^0) + (\Delta t)^2\psi \quad (2.20)$$

Para eliminarmos o termo no instante $n = -1$, usaremos a condição inicial na derivada temporal que já discretizada (discretização central de segunda ordem) nos dá,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = \frac{\mathbf{u}_{i,j}^1 - \mathbf{u}_{i,j}^{-1}}{2\Delta t} = g(x, y) \quad (2.21)$$

isolando o termo em $n = -1$ temos que

$$\mathbf{u}_{i,j}^{-1} = \mathbf{u}_{i,j}^1 - 2\Delta t g(x, y) \quad (2.22)$$

substituindo o termo $\mathbf{u}_{i,j}^{-1}$ em 2.20 pelo lado direito da Eq. 2.22 temos a aproximação de diferenças finitas para $n = 0$:

$$\mathbf{u}_{i,j}^1 = \frac{C^2}{2}(\mathbf{u}_{i+1,j}^0 - 2\mathbf{u}_{i,j}^0 + \mathbf{u}_{i-1,j}^0 + \mathbf{u}_{i,j+1}^0 - 2\mathbf{u}_{i,j}^0 + \mathbf{u}_{i,j-1}^0) + \mathbf{u}_{i,j}^0 + \frac{(\Delta t)^2}{2}\psi \quad (2.23)$$

Analogamente, segue a aproximação 2-4 na Eq. 2.24 para $n > 0$. Para a obtenção da aproximação no tempo $n = 0$ utiliza-se um procedimento semelhante àquele descrito anteriormente para a aproximação de segunda ordem no tempo e no espaço.

$$\mathbf{u}_{i,j}^{n+1} - 2\mathbf{u}_{i,j}^n + \mathbf{u}_{i,j}^{n-1} = \frac{C^2}{12}[-\mathbf{u}_{i+2,j}^n - \mathbf{u}_{i-2,j}^n - \mathbf{u}_{i,j+2}^n - \mathbf{u}_{i,j-2}^n + 16(\mathbf{u}_{i+1,j}^n + \mathbf{u}_{i-1,j}^n + \mathbf{u}_{i,j+1}^n + \mathbf{u}_{i,j-1}^n) - 60\mathbf{u}_{i,j}^n] + (\Delta t)^2\psi \quad (2.24)$$

Capítulo 3

Adaptatividade temporal

A maioria das simulações da área de Geofísica, em especial da indústria do petróleo, envolve modelos geológicos com grandes variações de velocidade (Moczo 2007), como, por exemplo, o modelo geológico Marmousi (Versteeg 1991). Conforme exposto no Capítulo 1, métodos numéricos explícitos possuem um limiar de estabilidade para qual é assegurada a convergência da solução. Esse critério de estabilidade depende, dentre outros fatores (ver seção 4 para mais detalhes), da velocidade de propagação da onda acústica em cada região do domínio espacial (Lines 1999). Desta forma, domínios heterogêneos, isto é, aqueles que apresentam grandes variações de velocidade possuem diferentes condições de estabilidade de acordo com a velocidade de propagação da onda. Em simulações onde se utilizam o mesmo passo de tempo para todas as regiões do domínio, a condição de estabilidade é governada pela região que tiver maior velocidade. Com isso, o intervalo de tempo utilizado nas regiões de menor velocidade passa a ser muito conservador, o que acarreta cálculos desnecessários para aquela parte do domínio espacial.

Visando diminuir o custo computacional, a alternativa investigada nesta monografia é a utilização de passos de tempo variáveis dependendo da velocidade de propagação do meio. Para se utilizar passos de tempo localmente ajustáveis, os incrementos no tempo são feitos em função do meio no qual se está realizando os cálculos utilizando passos de tempo intermediários que sejam múltiplos na forma de 2^i onde i é um inteiro positivo ou negativo. Desta maneira, um nível de adaptatividade implica que partes do meio são resolvidas em Δt e outras partes em $\Delta t/2$, enquanto dois níveis significa que o menor passo de tempo utilizado é $\Delta t/4$ podendo, inclusive, ter regiões calculadas com $\Delta t/2$. O esquema de passos de tempo localmente ajustáveis não possui uma regra formal que

determina quando deve haver mudança no passo de tempo, a rigor, a única regra que deve ser seguida se refere ao limiar de estabilidade da solução numérica. Por esse motivo, a mudança no passo de tempo depende, principalmente, do maior passo de tempo utilizado e da distância do seu valor correspondente à condição de estabilidade.

Como exemplo, suponhamos um domínio unidimensional com os seguintes pontos da malha espacial: $i-1$, i , $i+1$, onde o ponto $i-1$ possui a menor velocidade v e os pontos i e $i+1$ possuem as velocidades $1,3v$ e $2,0v$ respectivamente. Neste caso, se o passo de tempo escolhido para o cálculo de $i-1$ corresponder ao limiar de estabilidade (chamaremos de Γ), isso acarretará mudança obrigatória no passo de tempo quando do cálculo de i . Assim, uma regra para a mudança do passo de tempo pode ser definida, *a priori*, ao se estabelecer uma relação entre a estabilidade no menor passo de tempo (chamaremos de $\Gamma_{menor\Delta t}$) e o limiar de estabilidade do método na forma: $\lambda = \Gamma/\Gamma_{menor\Delta t}$. Se a razão entre a velocidade da região, que tem seu ponto calculado, e a menor velocidade do domínio v_i/v_{menor} for maior que λ o passo de tempo deve ser mudado para $\Delta t/2$, caso seja maior que 2λ então deve ser mudado para $\Delta t/4$. A Tabela 3.1 sintetiza essas regras.

Tabela 3.1: Tabela com regras gerais para mudança de Δt . Considere $\lambda = \Gamma/\Gamma_{menor\Delta t}$

$\Gamma = V_i/V_{menor}$	Passo de tempo
$1 \leq \Gamma \leq \lambda$	Δt
$\lambda < \Gamma \leq 2\lambda$	$\Delta t/2$
$2\lambda < \Gamma \leq 4\lambda$	$\Delta t/4$

Para exemplificar esse procedimento, apresentamos na Fig. 3.1 o esquema com passos de tempo localmente ajustáveis num esquema de modelagem unidimensional. Esta figura apresenta um esquema com um nível de adaptatividade temporal para a onda acústica com aproximações de 2ª ordem no tempo e 4ª ordem no espaço (esquema 2-4), onde é utilizado Δt para a região com menor velocidade (v_1) e $\Delta t/2$ naquela de maior velocidade (v_2). Neste esquema o tempo avança para baixo e os quadrados representam os pontos do domínio espacial discretizados. Os quadrados brancos são pontos situados na região com menor velocidade e que são calculados com Δt e os quadrados pretos são pontos da malha dentro da região de maior velocidade e que são calculados com $\Delta/2$. Ao se calcular o ponto $k+1$ no tempo $t+\Delta t$ utilizando um operador 2-4 (conforme descrito na Eq. 2.24 da Seção 2.2) surge a necessidade do cálculo dos pontos $k-1$ e k , que

situados na região de menor velocidade, do tempo intermediário $t + \Delta t/2$. Essa região é conhecida como zona de transição e para esse caso de um nível de adaptatividade temporal é calculada com $\Delta t/2$. O número de pontos necessários para compor essa região (zona) de transição depende da ordem da aproximação espacial. Pode-se notar que há um distinção entre o número de pontos da malha que são calculados a cada passa de tempo. Tempos que calculam todos os pontos são chamados de tempos inteiros e os tempos entre os tempos inteiros são chamados de tempos intermediários.

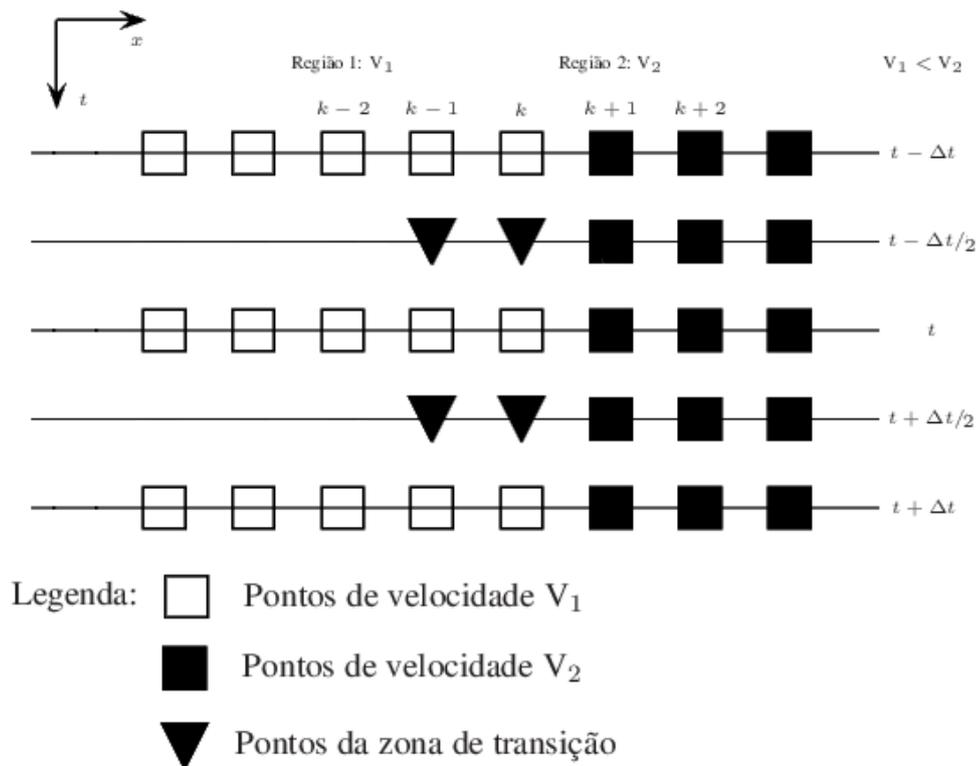


Figura 3.1: Esquema 1-D para uma aproximação 2-4 com 1 nível de adaptatividade.

Em seguida é mostrado um esquema para dois níveis de adaptatividade na Fig. 3.2. A divisão do domínio espacial é feita da mesma forma que do esquema com um nível de adaptatividade, o cálculo do ponto $k + 1$ do tempo t é feito de modo análogo àquele mostrado no exemplo anterior. Surge, no entanto, um caso especial ao se calcular os pontos na zona de transição do tempo intermediário $t + \Delta t/2$. Eles são calculados com $\Delta t/2$ em vez de $\Delta t/4$ como é o caso dos demais tempos intermediários num esquema de dois níveis de adaptatividade, isso é feito a fim de que o operador espacial utilize os pontos que são calculados no tempo t . Por esse motivo, esquemas que utilizam apenas passos

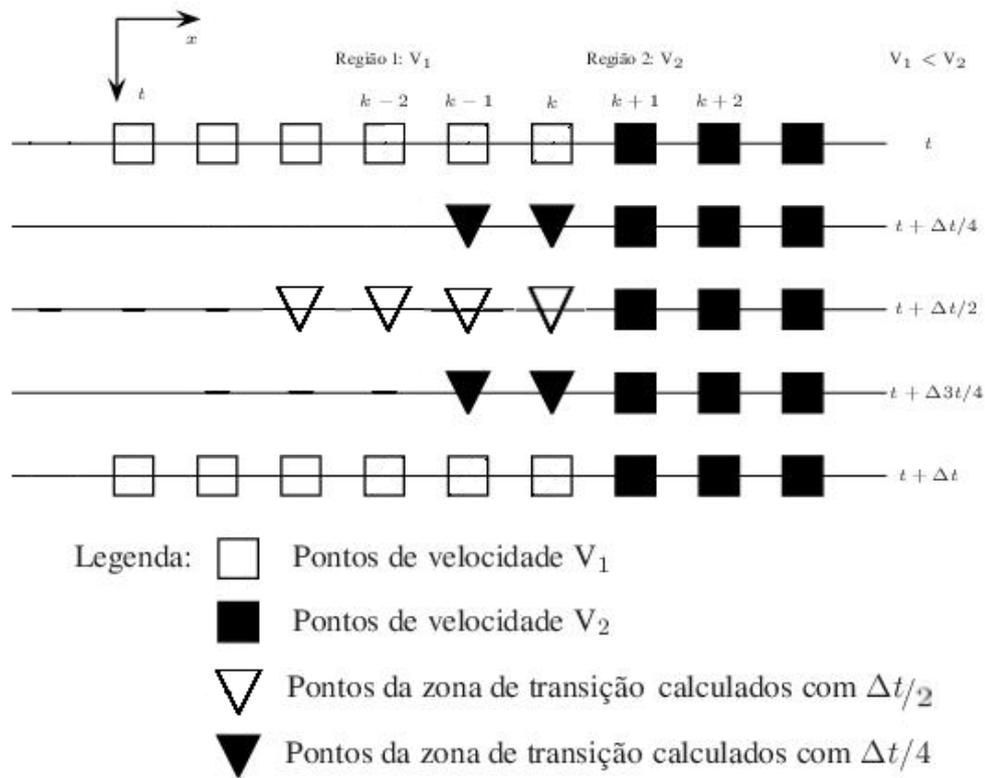


Figura 3.2: Esquema 1-D para uma aproximação 2-4 com 2 níveis de adaptatividade.

de tempo múltiplos de 2 são chamados de esquemas aninhados. No Apêndice A há uma explicação detalhada sobre a impossibilidade de se usar o mesmo passo de tempo, nos tempos intermediários, para o caso aplicado nesta monografia.

Um exemplo análogo para o caso 2-D, utilizando uma aproximação 2-2, é mostrado na Fig. 3.3. Nesse esquema, de um nível de adaptatividade, os pontos que estão dentro do quadrado marcado em negrito (inclusive os pontos sob a linha) possuem velocidade maior (v_2) e os pontos de fora possuem velocidade menor (v_1). Esta figura apresenta os três casos diferentes que surgem durante a simulação para o esquema com 1 nível de adaptatividade temporal. O ponto na região com v_1 é calculado com Δt e os outros dois casos mostram pontos sendo calculados com $\Delta t/2$. Um deles está dentro da região de maior velocidade v_2 e o outro situa-se na interface de mudança de velocidades, ou seja, ele é vizinho de um ponto com menor velocidade e, por isso, utiliza pontos da zona de transição que é representado neste esquema como um triângulo.

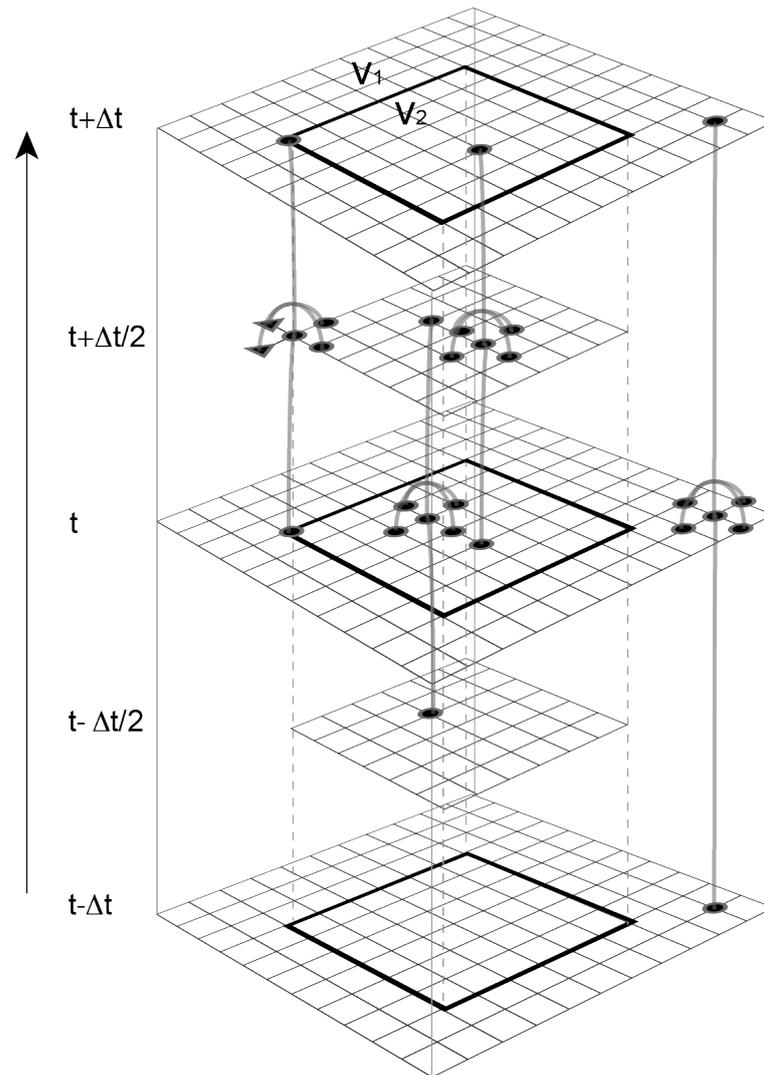


Figura 3.3: Esquema para o caso 2-D com 1 nível de adaptatividade para uma aproximação 2-2. Imagem gentilmente cedida por Sabino, T. L. R..

Capítulo 4

Exemplos numéricos

A Seção 4.1 contém a descrição do termo de fonte utilizado nesta monografia. Na seção seguinte, são detalhados alguns parâmetros utilizados nos experimentos. Esses parâmetros são: os valores do espaçamento da malha, a condição de contorno e o tamanho do domínio espacial. Por fim, nas seções subseqüentes temos os resultados das simulações para o caso bidimensional.

4.1 Termo de fonte

Em problemas de modelagem numérica de Geofísica, usualmente, utiliza-se uma fonte que simula uma onda sísmica gerada por determinados dispositivos. Esses dispositivos podem ser, por exemplo, uma carga explosiva sendo detonada ou um canhão de ar, como é empregado em levantamentos sísmicos marítimos Bording et al. (1997) e Coffeen (1986) *apud* Bulcão (2004). Uma fonte sísmica é uma função matemática com determinadas características, ela deve ser limitada no domínio do tempo e no domínio da frequência, ou seja, deve-se ter valores não nulos apenas em uma determinada região do domínio. Uma fonte é limitada no domínio do tempo a fim de simular uma fonte explosiva, a limitação no domínio da frequência, por sua vez, controla a frequência máxima, conhecida como frequência de corte, a qual o modelo numérico estará sujeito (Bulcão 2004). A frequência de corte (f_{corte}) é um dos fatores que influencia o espaçamento da malha utilizado nas simulações numéricas (Boore 1972, Alford et al. 1974, Kelly et al. 1976 e Javaherian 1994). Este tópico será melhor detalhado na Seção 4.2.

Nesta monografia, apesar de não haver preocupação com a modelagem de pro-

blemas físicos, utilizou-se como fonte sísmica a derivada segunda da função Gaussiana descrita em Cunha (1997) *apud* Bulcão (2004), onde utiliza-se um tempo defasado que, em linhas gerais, atrasa o aparecimento do sinal gerado pela fonte. Na Equação 4.1, tem-se a expressão matemática, do termo de fonte, que deve ser prescrita na Equação de Onda mostrada em 2.1 substituindo o termo ψ .

$$f(t) = [1 - 2\pi(\pi f_c t_d)^2] e^{-\pi(\pi f_c t_d)^2} \quad (4.1)$$

onde: t é o tempo, t_d é o tempo defasado que atrasa o aparecimento do sinal da fonte e f_c é um parâmetro relacionado à frequência de corte da fonte sísmica.

$$t_d = t - \frac{2\sqrt{\pi}}{f_{corte}} \quad (4.2)$$

$$f_c = \frac{f_{corte}}{3\sqrt{\pi}} \quad (4.3)$$

A transformada de Fourier da Eq. 4.1 é dada pela Eq. 4.4. Na Figura 4.1 tem-se representados os gráficos Amplitude x Tempo e Amplitude x Frequência da função de fonte quando $f_{corte} = 30$ Hz.

$$F(f) = \frac{2f^2}{\pi^2 f_c^3} e^{-\frac{f^2}{\pi f_c^2}} \quad (4.4)$$

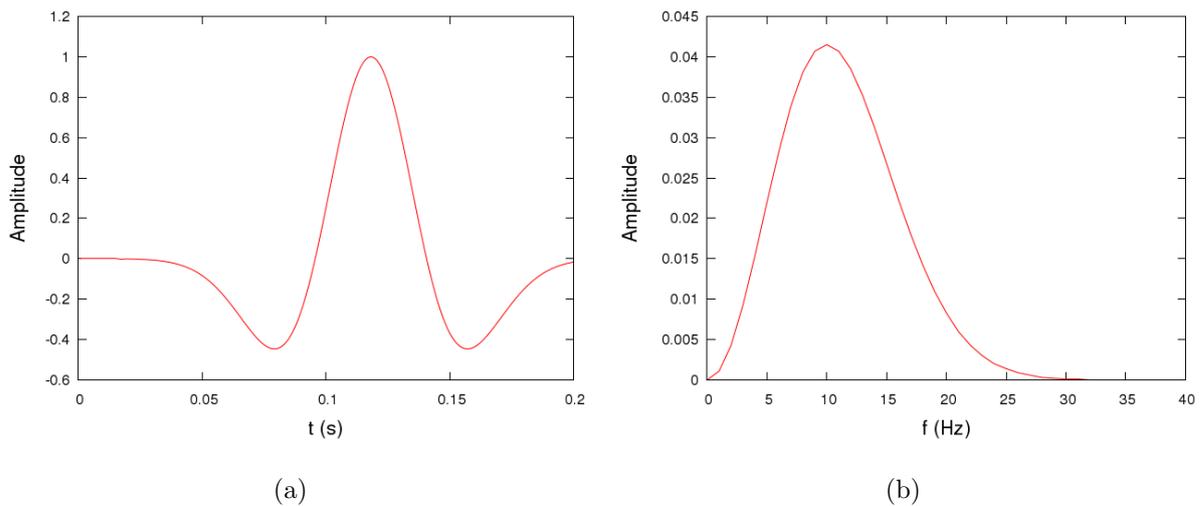


Figura 4.1: Gráficos Amplitude x Tempo (a) e Amplitude x Frequência (b) para a fonte sísmica descrita na Eq. 4.1 com frequência de corte igual a 30 Hz.

4.2 Metodologia dos experimentos

Conforme citado na Seção 4.1, o valor da frequência de corte a qual o modelo numérico estará submetido, tem relação direta com o espaçamento da malha espacial. Alford et al. (1974) relacionaram o número de pontos da malha utilizados para representar o menor comprimento de onda do sinal da fonte com a dispersão numérica para a equação de onda acústica no caso bidimensional. Naquele trabalho, eles concluíram que, para reduzir satisfatoriamente a dispersão da malha, o número de pontos da malha utilizados para representar o menor comprimento de onda do sinal da fonte deveria ser aproximadamente dez ou mais para uma aproximação de segunda ordem no espaço. Boore (1969), Boore (1972) e Kelly et al. (1976) descreveram a mesma relação para equação de onda em meios elásticos. Além disso, Holberg (1987) mostrou que quanto maior a ordem do operador espacial, menor é a necessidade de pontos da malha por comprimento de onda.

Na equação de onda, a dispersão numérica ocorre quando a velocidade de fase (v_f) e a velocidade de grupo (v_g) passam a ser função do espaçamento da malha, da frequência do sinal e do ângulo de propagação (Faria 1993). Nesse sentido, diversos autores utilizam esses resultados seguindo um critério, que é mostrado nas Eq. 4.5 e 4.6, que acopla o espaçamento da malha utilizado, a fim de reduzir a dispersão numérica, com o valor do passo de tempo necessário para a estabilidade da solução numérica (Alford et al. 1974, Loewenthal et al. 1985, Mufti 1990, Silva 1995 e Bulcão 2004).

$$h \leq \frac{V_{min}}{\alpha f_{corte}} \quad (4.5)$$

$$\Delta t \leq \frac{h}{\beta V_{max}} \quad (4.6)$$

onde:

h : o espaçamento da malha, neste trabalho o *grid* é regular, ou seja, é o mesmo em ambas as direções x e y;

V_{min} e V_{max} : são, respectivamente, a velocidade mínima e máxima de propagação do campo de velocidades simulado;

α : é um parâmetro empírico, estudado nos trabalhos citados anteriormente, que determina o número de pontos do *grid* utilizados para representar o menor comprimento de onda a qual o modelo numérico estará sujeito;

f_{corte} : a frequência de corte, que pode ser de uma condição inicial ou, no caso deste trabalho, da fonte descrita em 4.1;

β : parâmetro que corresponde ao número de passos no tempo necessário para a frente de onda percorrer uma distância equivalente ao espaçamento da malha entre os pontos da malha, considerando a maior velocidade de propagação do meio;

Δt : é o tamanho do passo de tempo utilizado nas simulações numéricas.

Nesta monografia, utilizou-se operadores de 2ª e 4ª ordem no espaço com $\alpha = 10$, a fim de que o número de parâmetros diferentes fosse o menor possível permitindo, assim, comparar as diferenças entre os métodos com passos de tempo adaptados e os métodos com passo de tempo constante. Da Seção 4.1 tem-se que a frequência de corte da fonte sísmica utilizada é igual a 30Hz, além disso, a menor velocidade V_{min} em todos os campos simulados é igual a 1500m/s. Desta maneira, da aplicação da Eq. 4.5 obtém-se o espaçamento da malha igual a 5,0m constante para todas as simulações. O domínio espacial em todas as simulações possui 5000m tanto na direção x quanto na direção y.

Com relação ao tamanho do passo de tempo, há algumas diferenças entre os critérios utilizados nesta monografia com relação àqueles utilizados nas referências citadas nesta Seção. As simulações foram realizadas com o valor de β igual a aproximadamente 6,6, diferentemente dos trabalhos anteriores que utilizam valores de β igual a 4 para um operador de 2ª ordem temporal. Esse valor empírico fora escolhido de modo a amenizar a propagação de erros que aparece na solução numérica quando ocorre a mudança do passo de tempo. Observou-se, em simulações preliminares, o surgimento de um pequeno ruído na solução próximo da região de mudanças de velocidades (Mello et al. 2011), esse erro no entanto, torna-se desprezível quando se utiliza um valor de β mais conservador como aproximadamente 6,6. Outra adequação da sistemática descrita nas Equações 4.5 e 4.6 acima é feita para as simulações com passos de tempo adaptativos. Neste caso, a Eq. 4.6 utiliza o valor da menor velocidade V_{min} do domínio espacial, haja vista que o valor de Δt será ajustado quando houver necessidade segundo os critérios expostos no Capítulo 3.

Como condição de contorno utilizou-se a Condição de Dirichlet que especifica, *a priori*, a amplitude nas bordas do domínio considerado. Nesta monografia, a condição de contorno gera um reflexo com o mesmo módulo da amplitude da onda que chegou à borda. Na Tabela 4.1, encontram-se sintetizados alguns parâmetros fixos utilizados durante as simulações desta monografia.

Tabela 4.1: Tabela com parâmetros comuns as simulações

Domínio Espacial (em metros)	Posição da fonte	$\Delta x = \Delta y$
5000m x 5000m	$x = 200m$ e $y = 2500m$	5m

Nas Seções 4.3, 4.4 e 4.5 comparou-se as soluções com passos de tempo ajustados localmente com aquelas que utilizam um passo de tempo global (chamaremos de esquema convencional) para o mesmo operador espacial. Desta maneira, não se usa uma solução de referência. A comparação das soluções é feita para cada operador espacial e de acordo com o campo de velocidades simulado, isto é, apresenta-se o resultado para a aproximação 2-2 e, em seguida, para uma aproximação 2-4.

4.3 Um nível de adaptatividade

A fim de analisar o esquema com um nível de adaptatividade, comparou-se a solução com passos de tempo ajustados localmente com a solução utilizando passo de tempo constante e igual a $\Delta t = 0,00025s$ no campo de velocidades mostrado na Fig. 4.2. Este campo possui uma divisão no centro do domínio $x = 2500m$. O ponto amarelo, marcado por f , corresponde a localização da fonte sísmica em $x = 200m$ e $y = 2500m$. S_1 e S_2 representam a posição dos sismogramas, em $x = 2100m$ e $y = 2500m$ e $x = 2700m$ e $y = 2500m$, respectivamente. Esse campo possui velocidades $V_2 > V_1$ e será utilizado nesta Seção e na Seção 4.4. Na simulação com o esquema de passos de tempo adaptativos, utilizou-se $\Delta t = 0,0005s$ para o meio com velocidade $V_1 = 1500m/s$ e $\Delta t/2 = 0,00025s$ para a região com velocidade $V_2 = 3000m/s$.

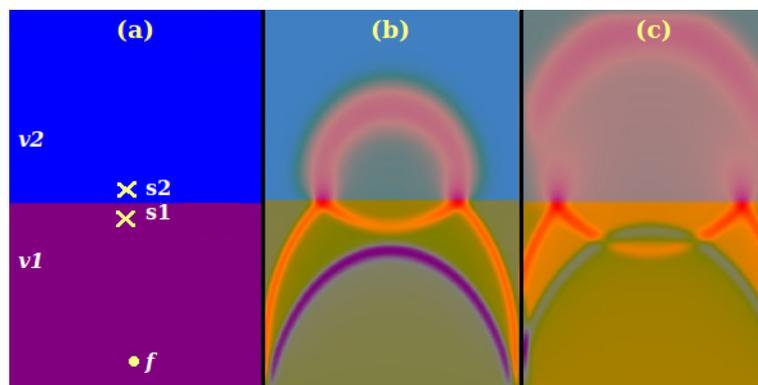


Figura 4.2: Campo de velocidades simulado.

Nas Figuras 4.3 encontram-se as ondas no tempo final ($t = 2,0s$) para uma aproximação 2-2. Na Figura 4.3 (a) tem-se a solução com passos de tempo constante e, em Fig. 4.3 (b), a solução com passos de tempo ajustados localmente. Nesses gráficos a diferença entre as soluções é quase imperceptível, o que pode ser corroborado nos sismogramas das Figuras 4.4 (S_1 em $x = 2100m$ e S_2 em $x = 2700m$, ambos em $y = 2500m$) situados em pontos dentro da região com maior velocidade. Nesses sismogramas, a solução com o esquema adaptativo é bastante próxima daquela resolvida através do esquema convencional.

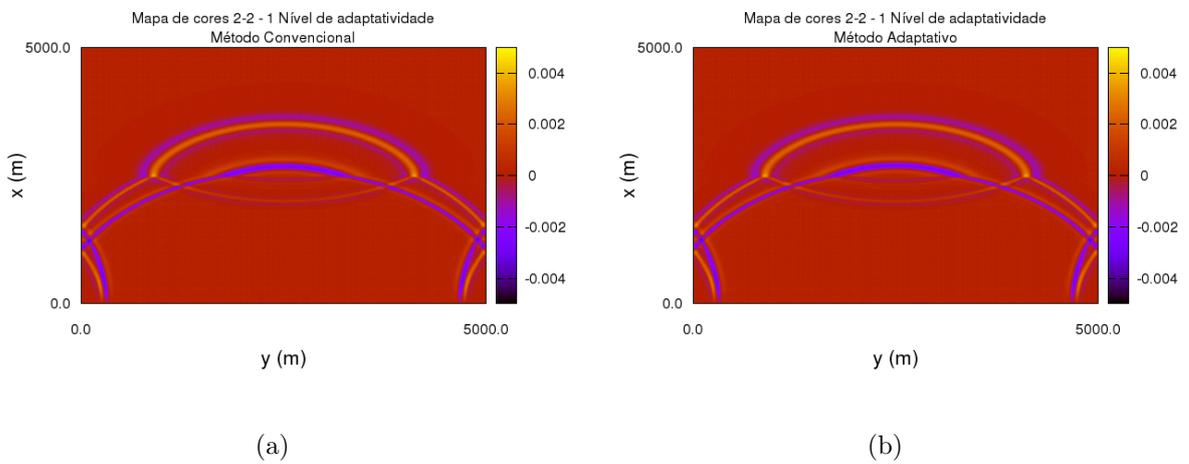


Figura 4.3: Ondas em $t = 2,0s$ para uma aproximação 2-2. (a) tem-se a solução utilizando passos de tempo constante e em (b) a solução com passos de tempo adaptativos.

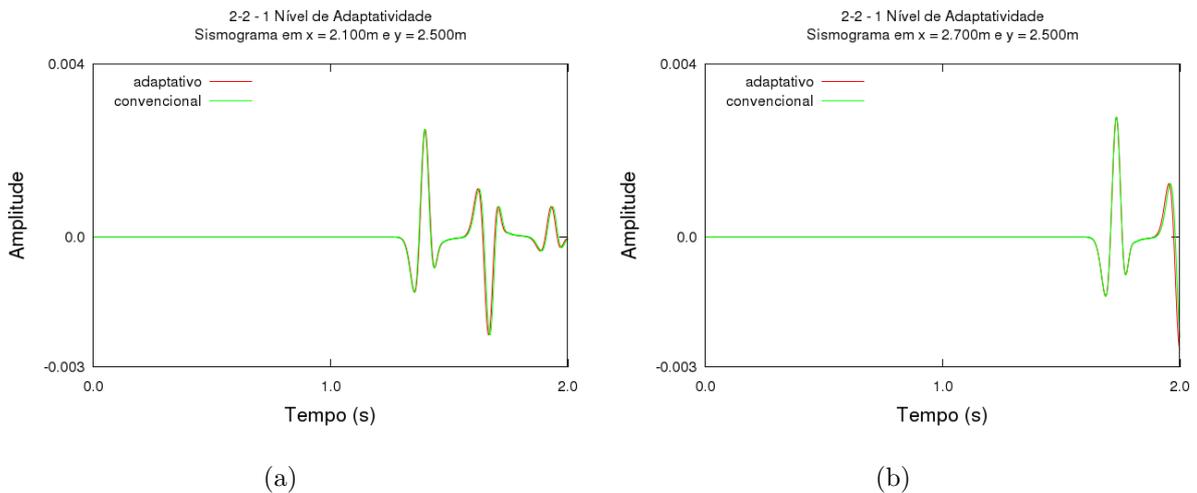


Figura 4.4: Sismogramas para uma aproximação 2-2 (a) S_1 e (b) S_2 .

A seguir, são mostrados os resultados para uma aproximação 2-4 seguindo a mesma

sistemática anterior ao comparar a solução com passos de tempo global com uma que utiliza passos de tempo ajustados localmente. Nas Figuras 4.5 encontram-se as ondas no tempo final ($t = 2,0s$) e, em Fig. 4.6 (a) e (b), são apresentados os resultados capturados pelos sismogramas S_1 e S_2 , respectivamente. Esses resultados mostram que o esquema testado apresenta elevada acurácia também para um operador de 4ª ordem espacial.

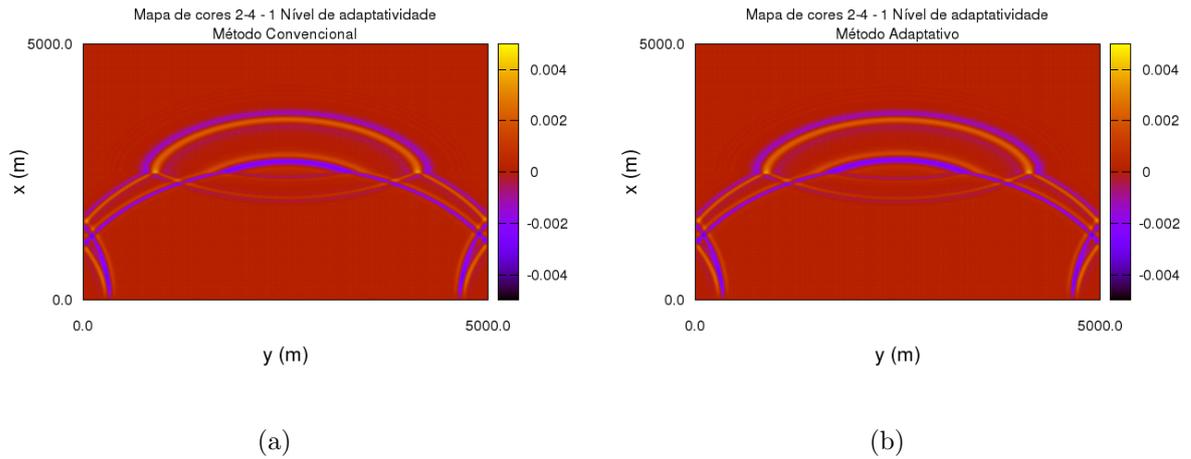


Figura 4.5: Ondas em $t = 2,0s$ para uma aproximação 2-4. (a) tem-se a solução utilizando passos de tempo constante e em (b) a solução com passos de tempo adaptativos.

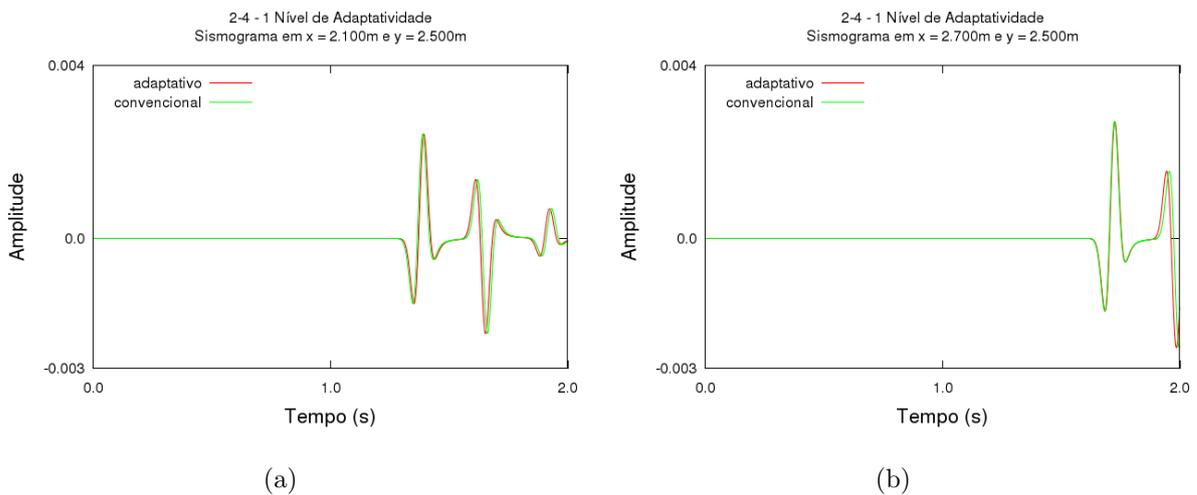


Figura 4.6: Sismogramas para uma aproximação 2-4 (a) S_1 e (b) S_2 .

4.4 Dois níveis de adaptatividade

Repetiu-se os mesmos experimentos utilizando o campo de velocidades da Fig. 4.2 para o esquema com dois níveis de adaptatividade. Nestes experimentos, a menor velocidade V_1 continua igual a $1500m/s$, enquanto $V_2 = 6000m/s$. Para a solução com um passo de tempo global, a discretização temporal foi $\Delta t = 0,000125s$. No caso adaptativo, utilizou-se $\Delta t = 0,0005s$ para o meio com menor velocidade e $\Delta t/4 = 0,000125s$ para a região com velocidade $v = 6000m/s$.

Nas Figuras 4.7 encontram-se as ondas no tempo final ($t = 2,0s$) para uma aproximação 2-2. Na Figura 4.7 (a) tem-se uma solução com passos de tempo constante e, em Fig. 4.7 (b), uma solução com passos de tempo ajustados localmente. Nesses gráficos a diferença entre as soluções é quase imperceptível, o que pode ser visto nos sismogramas das Figuras 4.8 (S_1 em $x = 2100m$ e S_2 em $x = 2700m$, ambos em $y = 2500m$) situados em pontos dentro da região com maior velocidade. Nesses sismogramas a solução com o esquema adaptativo é bastante próxima daquela resolvida através do esquema convencional.

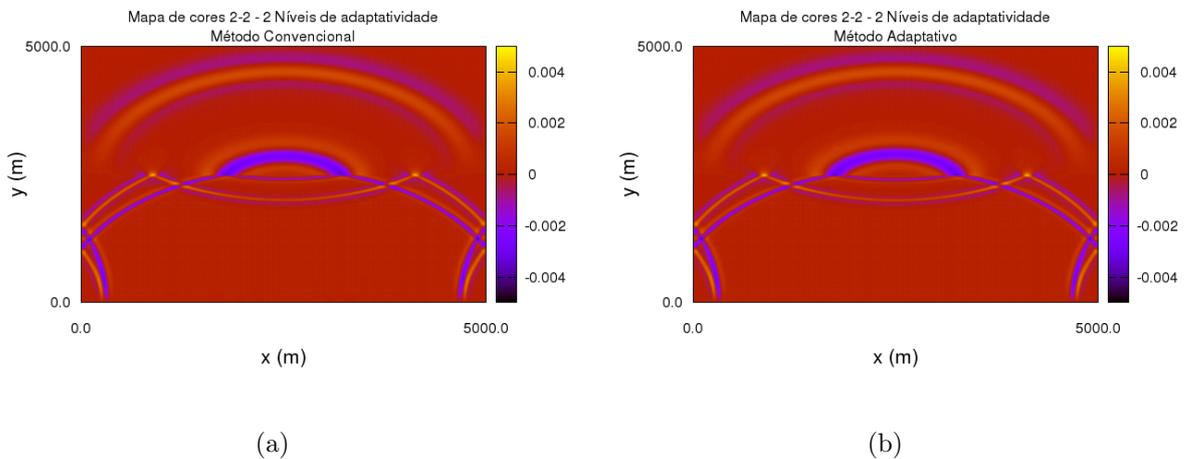


Figura 4.7: Ondas em $t = 2,0s$ para uma aproximação 2-2. (a) tem-se a solução utilizando passos de tempo constante e em (b) a solução com passos de tempo adaptativos.

A seguir, são apresentados os resultados para uma aproximação 2-4. Nas Figuras 4.9 encontram-se as ondas no tempo final ($t = 2,0s$) e, em Fig. 4.10 (a) e (b), são apresentados os resultados capturados pelos sismogramas S_1 e S_2 , respectivamente. Esses resultados mostram que o esquema com dois níveis de adaptatividade temporal apresenta uma diferença maior em relação à solução com o esquema convencional, do que a compa-

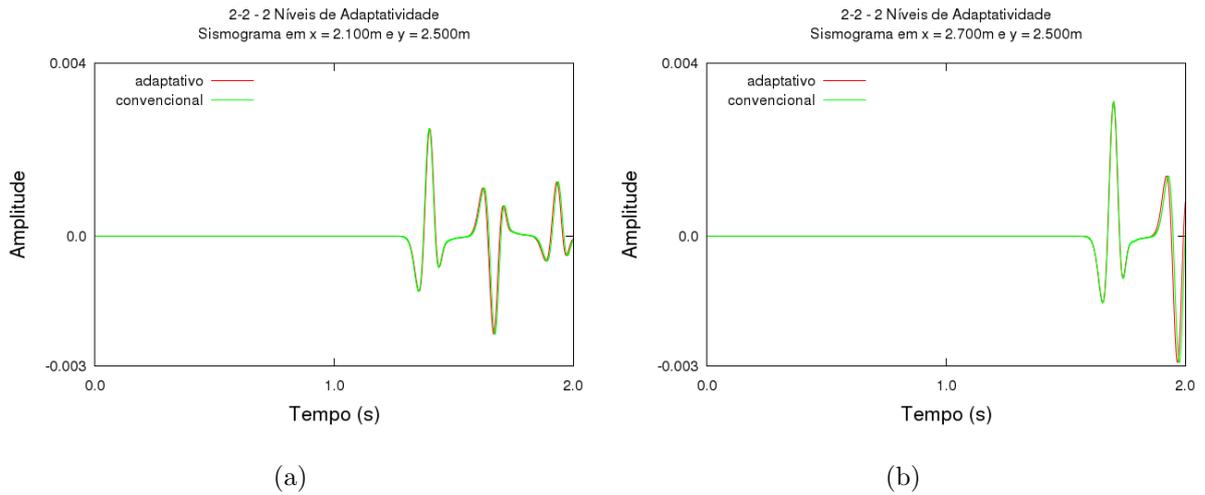


Figura 4.8: Sismogramas para uma aproximação 2-2 (a) S_1 e (b) S_2 .

ração feita na Seção 4.3. Tal fato, pode ser compreendido devido a maior propagação de erros que acontece quando se adapta o passo de tempo de Δt para $\Delta/4$ no esquema da Fig. 3.1 do que aquele apresentado na Fig. 3.2. No esquema com dois níveis de adaptatividade temporal, os pontos da região de transição no tempo intermediário $t + \Delta t/2$ são calculados com passo de tempo igual a $\Delta t/2$ e, portanto, tem um erro maior do que os demais pontos dos tempos intermediários calculados com $\Delta t/4$.

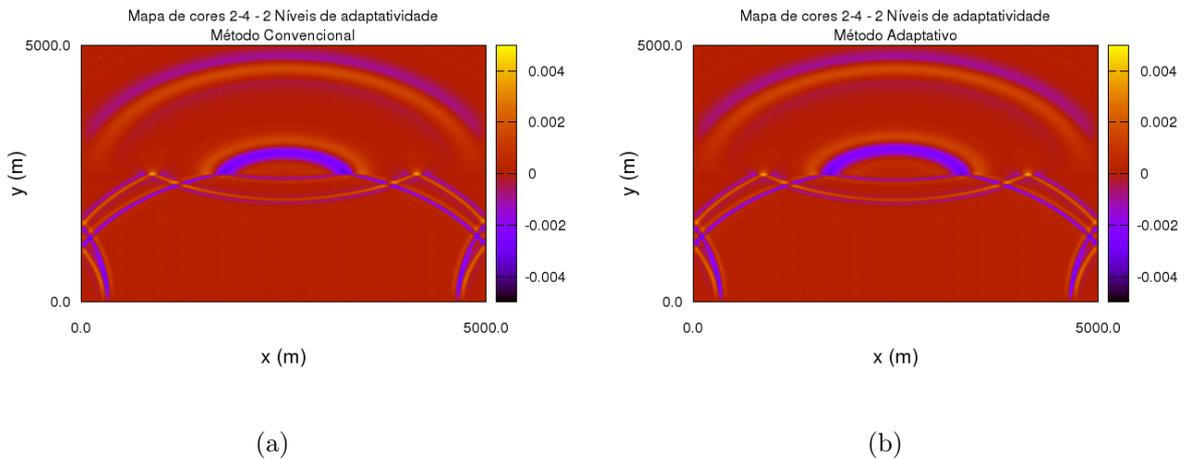


Figura 4.9: Ondas em $t = 2,0\text{s}$ para uma aproximação 2-4. (a) tem-se a solução utilizando passos de tempo constante e em (b) a solução com passos de tempo adaptativos.

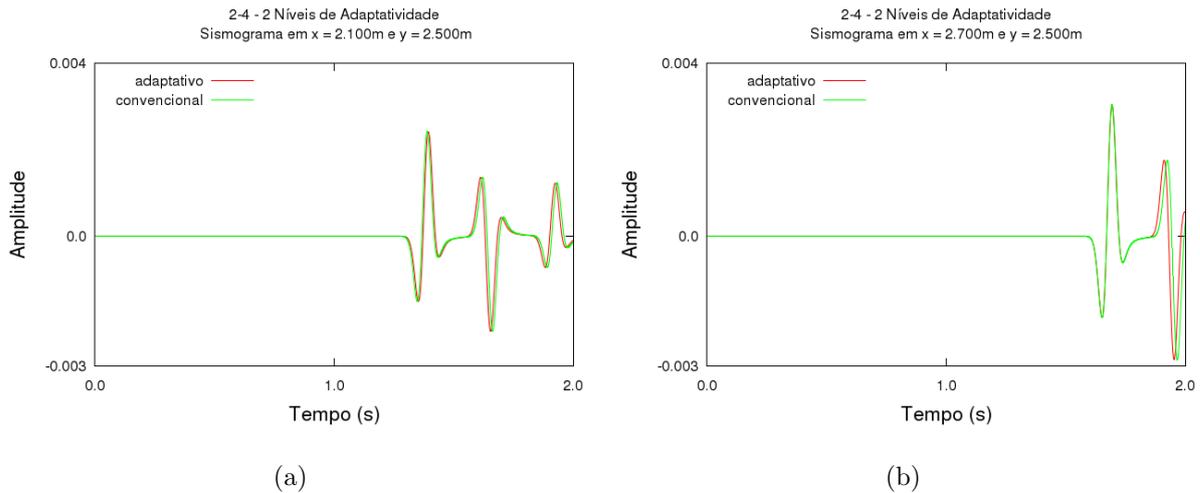


Figura 4.10: Sismogramas para uma aproximação 2-4 (a) S_1 e (b) S_2 .

4.5 Três diferentes passos de tempo

Nesta seção são mostrados os resultados da simulação numérica para um campo de velocidades com três velocidades diferentes. O modelo apresentado na Fig. 4.11 utilizou três diferentes passos de tempo para a simulação com o esquema de adaptatividade temporal, isto é, Δt para $V_1 = 1500m/s$, $\Delta t/2$ para $V_2 = 3000m/s$ e $\Delta t/4$ para $V_3 = 6000m/s$. Este campo de velocidades possui três regiões diferentes. A primeira com $V_1 = 1500m/s$ em $x \leq 1250m$, a região central com $V_2 = 3000m/s$ em $x > 1250m$ e $x \leq 3750m$ e a região com $V_3 = 6000m/s$ encontra-se em $x > 3750m$. O ponto amarelo marcado por f corresponde a localização da fonte sísmica em $x = 200m$ e $y = 2500m$. S_1 e S_2 representam a posição dos sismogramas, em $x = 2100m$ e $y = 2500m$ e $x = 2700m$ e $y = 2500m$, respectivamente. O tempo de simulação foi alterado para $t = 1,4s$, a fim de minimizar as reflexões na borda do domínio espacial.

Nas Figuras 4.12 encontram-se as ondas no tempo final ($t = 1,4s$) para uma aproximação 2-2. Na Figura 4.12 (a) tem-se uma solução com passos de tempo constante e, em Fig. 4.12 (b), uma solução com passos de tempo ajustados localmente. Nesses gráficos a diferença entre as soluções é quase imperceptível, o que pode ser visto nos sismogramas das Figuras 4.13 (S_1 em $x = 2100m$ e S_2 em $x = 2700m$, ambos em $y = 2500m$) situados em pontos dentro da região com maior velocidade. Nesses sismogramas há uma diferença entre as soluções, uma interpretação possível é o surgimento de uma pequena defasagem da solução com o esquema adaptativo em relação à solução com o esquema convencional na região próxima a mudança de velocidades. Essa "defasagem" some à medida que a onda

se distancia dessa região.

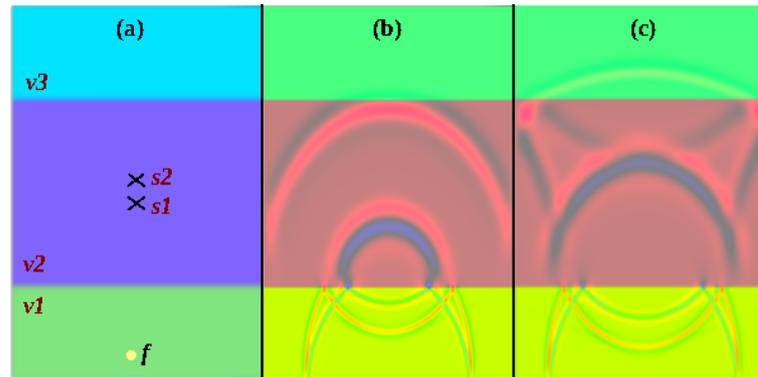


Figura 4.11: Campo de velocidades com três velocidades diferentes

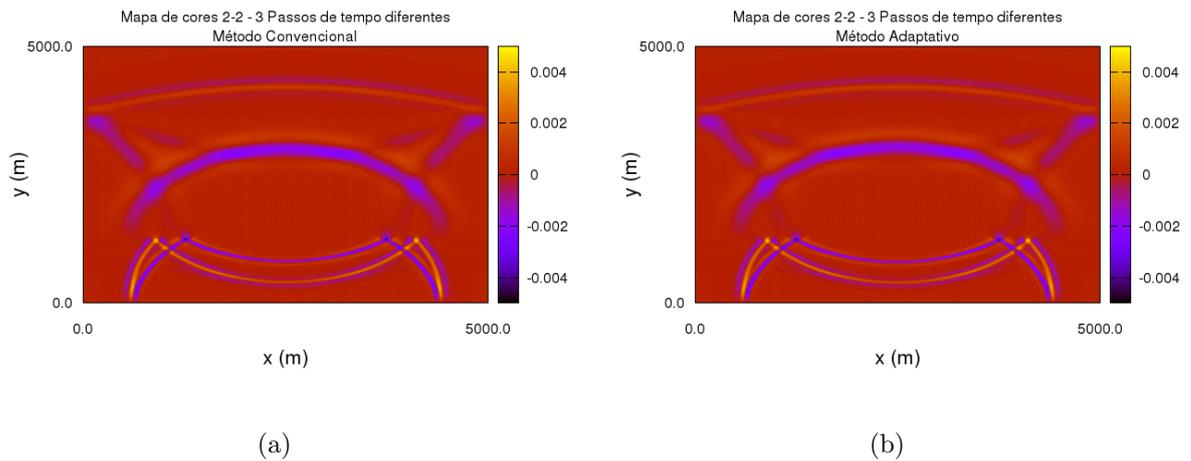


Figura 4.12: Ondas em $t = 1, 4s$ para uma aproximação 2-2. (a) tem-se a solução utilizando passos de tempo constante e em (b) a solução com passos de tempo adaptativos.

A seguir, são apresentados os resultados para uma aproximação 2-4. Nas Figuras 4.14 encontram-se as ondas no tempo final ($t = 1, 4s$) e, em Fig. 4.15 (a) e (b), são apresentados os resultados capturados pelos sismogramas S_1 e S_2 , respectivamente. As diferenças entre o método adaptativo e o método convencional mostradas nos sismogramas das Figuras 4.13 e 4.15 são próximos daqueles com dois níveis de adaptatividade temporal conforme visto nas Figuras 4.8 e 4.10. Esses resultados mostram que a simulação com três passos de tempo diferentes é consistente com as simulações da Seção 4.4.

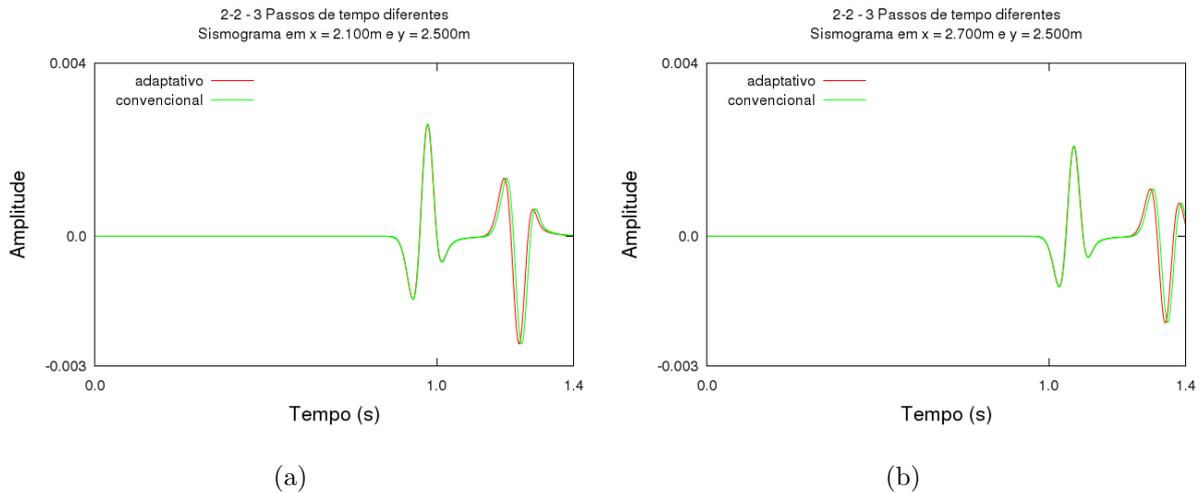


Figura 4.13: Sismogramas para uma aproximação 2-2 (a) S_1 e (b) S_2 .

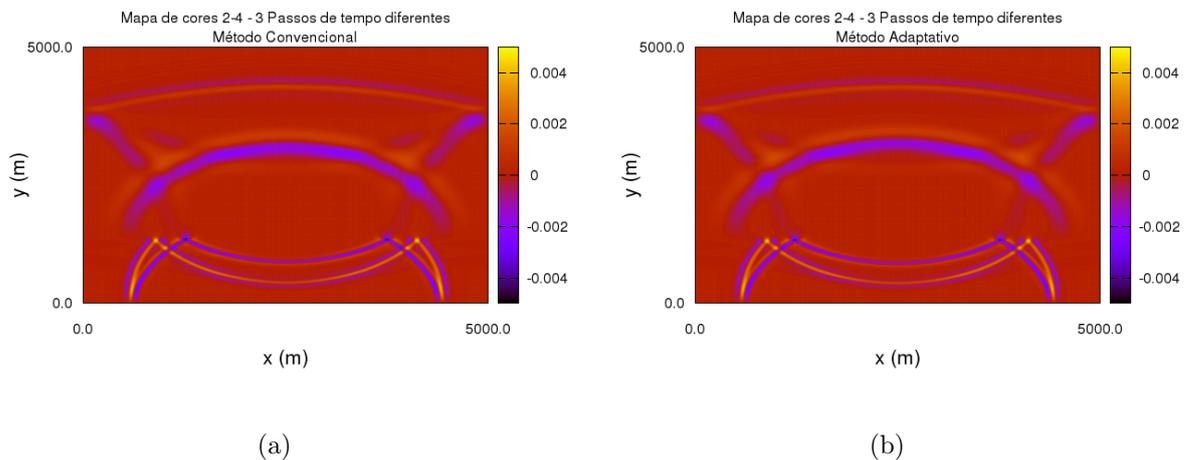


Figura 4.14: Ondas em $t = 1,4\text{s}$ para uma aproximação 2-4. (a) tem-se a solução utilizando passos de tempo constante e em (b) a solução com passos de tempo adaptativos.

4.6 Testes de desempenho

Todos os programas desta monografia foram implementados na Linguagem C. Os testes de desempenho foram realizados numa estação de trabalho do Laboratório da Pós-Graduação da Universidade Federal Fluminense equipada com um processador Intel i7 860 @2,40GHz (8MB de cache L2), memória RAM de 8GB DDR3 e com o sistema operacional Ubuntu 10.10 versão 64bits (kernel 2.6.35-23-generic). Todas as simulações foram executadas cinco vezes e, a partir dessa amostra, foi obtida a média aritmética dos tempos de execução através do programa Time do GNU/Linux. As máquinas foram dedicadas exclusivamente para a realização das simulações.

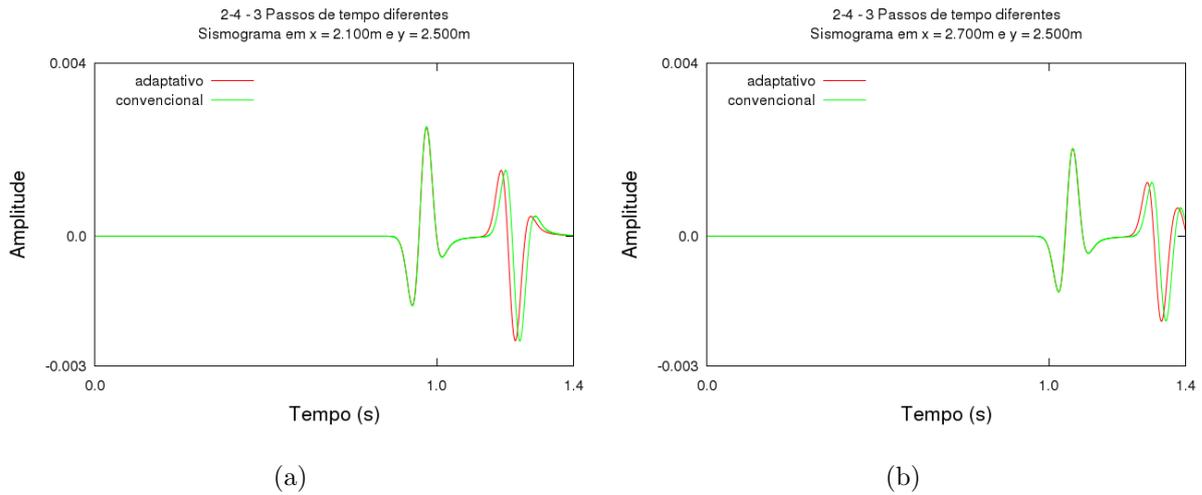


Figura 4.15: Sismogramas para uma aproximação 2-4 (a) S_1 e (b) S_2 .

Os resultados para as simulações das Seções 4.3, 4.4 e 4.5 são mostrados nas Tabelas 4.2 e 4.3. Como era esperado, os resultados para o esquema com 2 níveis de adaptatividade temporal (2 adap) obtiveram os maiores ganhos de desempenho, isso ocorre devido a diferença ser maior entre o passo de tempo utilizado na simulação com Δt constante e aquele usado no esquema adaptativo. A questão pode ser interpretada de outra maneira. Ao se fazer uso de passos de tempo ajustados localmente o custo computacional da simulação é reduzido de maneira mais significativa quanto maior a diferença entre as velocidades e, portanto, menor o passo de tempo para assegurar a estabilidade naquela região.

Tabela 4.2: Tabela de desempenho para as simulações das Seções 4.3, 4.4 e 4.5. Aproximação 2-2.

2-2	Tempo Convencional (s)	Tempo Adaptativo (s)	% de Ganho
1 adap	140,14	40,79	70,9%
2 adap	285,48	74,29	73,98%
1 e 2 adap	163,46	58,92	63,96%

Além dos testes anteriores, simulou-se campos de velocidade com as mesmas dimensões testadas nas Seções 4.3, 4.4 e 4.5, porém com menor velocidade em 90% do domínio espacial e tempo de simulação igual a $t = 2s$ para todos os experimentos. A média dos tempos de execução encontram-se na Tabelas 4.4 e 4.5 e pode-se observar que o ganho de desempenho se mostrou dependente da relação entre regiões que utilizam adaptatividade

Tabela 4.3: Tabela de desempenho para as simulações das Seções 4.3, 4.4 e 4.5. Aproximação 2-4.

2-4	Tempo Convencional (s)	Tempo Adaptativo (s)	% de Ganho
1 adap	172,9	63,62	63,20%
2 adap	330,42	108,48	67,17%
1 e 2 adap	207,7	90,88	56,25%

e aquelas com menor velocidade.

Tabela 4.4: Tabela de desempenho para as simulações com velocidade menor em 90% do campo de velocidades. Aproximação 2-2.

2-2	Tempo Convencional (s)	Tempo Adaptativo (s)	% de Ganho
1 adap	115,97	27,32	76,45%
2 adap	231,82	33,83	85,48%
1 e 2 adap	234,61	31,64	86,52%

Tabela 4.5: Tabela de desempenho para as simulações com velocidade menor em 90% do campo de velocidades. Aproximação 2-4.

2-4	Tempo Convencional (s)	Tempo Adaptativo (s)	% de Ganho
1 adap	160,30	47,73	70,22%
2 adap	317,06	57,47	81,87%
1 e 2 adap	293,90	54,67	81,40%

A interpretação destes resultados deve levar em consideração que as implementações utilizadas nesta monografia não estão otimizadas, pois o foco desta monografia é analisar a viabilidade do esquema em determinadas situações. Não obstante, os resultados dos testes de desempenho corroboram que há uma dependência entre o campo de velocidades testado e o ganho de desempenho ao se utilizar o esquema com passos de tempo ajustados localmente. Além disso, o esquema estudado mostrou-se mais eficiente em meios com elevada variação entre as velocidades.

No entanto, o esquema de adaptatividade temporal necessita de informações extras se comparado ao esquema com passos de tempo global. A rigor, precisa-se armazenar apenas os pontos das regiões de transições, ou seja, o gasto extra de memória são referentes

aos pontos representados pelos "triângulos" nos esquemas das Figuras 3.1 e 3.2. Porém, nas implementações desta monografia armazenou-se toda a região do meio de maior velocidade numa estrutura de dados (matriz) sem preocupação com economia de memória, haja vista que os modelos simulados eram discretizados e armazenados num array de duas dimensões (matriz 1000 x 1000 pontos) do tipo Float (4 bytes) o que ocupa, em média, 3,8MB por estrutura de dados. Nesse sentido, para um nível de adaptatividade temos o acréscimo de duas matrizes e para dois níveis temos o acréscimo de quatro matrizes. Em valores, tivemos um aumento de 66,67% para o caso com um nível de adaptatividade e de 133% para o caso com dois níveis de adaptatividade.

Capítulo 5

Conclusões e trabalhos futuros

Nesta monografia, foram implementados algoritmos que utilizam passos de tempo localmente ajustáveis para o caso bidimensional utilizando aproximações de segunda e quarta ordem no espaço. Apesar do esforço computacional extra necessário para a sua simulação, as experiências realizadas apontam para um ganho real de desempenho no uso da discretização temporal adaptativa quando maior parte do meio possui menor velocidade. Concluiu-se, portanto, que o ganho de desempenho é dependente do meio de velocidades testado.

Em relação a acurácia, o esquema mostrou-se preciso quando testado com razoável distância do limiar de estabilidade da aproximação testada ($\alpha = 6,6$ em detrimento de $\alpha = 4$ utilizado na literatura citada por esta monografia) e comparado com o esquema com passo de tempo global. Uma questão importante é o fato de o esquema utilizar resoluções temporais diferentes em cada região do domínio. Nas simulações aqui apresentadas, preocupou-se em manter constante o valor de estabilidade dentro de cada região esperando-se, desta forma, minimizar a diferença da dispersão numérica entre meios que não possuem a mesma velocidade. No entanto, a resolução temporal é alterada e os efeitos destas alterações devem ser cuidadosamente analisados sob o ponto de vista da qualidade dos dados oriundos da simulação.

Sob o ponto de vista do uso eficiente do algoritmo, podemos apontar duas questões envolvendo o procedimento sugerido em Falk et al. (1998). A primeira envolve a necessidade de um maior uso de memória para guardar os dados parciais nos instantes de tempo intermediários. Mesmo que as implementações desenvolvidas não tenham se preocupado com este aspecto, não é operação complexa trabalhar uma versão mais econômica

no uso da memória. No entanto, a necessidade de um maior uso de memória deverá ser levado em consideração mesmo com esta otimização colocada em prática, principalmente se o algoritmo for implementado para ser executado sob a arquitetura de GPUs (*Graphics processing unit*).

Devido o foco do trabalho ser a análise do método em casos mais simplificados, os campos de velocidade eram definidos em nível de código, ou seja, foram implementados programas altamente específicos para os domínios simulados. Entretanto, outro aspecto está na detecção das regiões onde ocorrem as mudanças de velocidade assim como o aumento de complexidade na definição das regiões de transição se estivermos usando meios com alto grau de heterogeneidade. Para esta questão é razoável afirmar que a utilização eficiente dos métodos adaptativos impõe uma fase de pré-processamento tendo como informação organizadora o campo de velocidades. Este pré-processamento tem por função que a mudança da discretização temporal seja mapeada *a priori* dispensando o custo de determinação ponto a ponto das regiões de transição. Tal pré-processamento deverá trabalhar com faixas de velocidade pois a mudança de discretização tem por base valores inteiros, seja o algoritmo adaptativo original quanto o aqui desenvolvido. No entanto, níveis altos de refinamento poderão ser ineficientes devido ao processamento acessório necessário.

Outra questão importante está na paralelização deste algoritmo, pois cada subdomínio terá um tempo de processamento distinto devido aos diferentes números de passos no tempo e ao seu tamanho ser variável. Assim, a subdivisão do domínio deve levar tal aspecto em consideração para que não seja gerado um desbalanceamento de carga que poderia fazer com que as vantagens do algoritmo desaparecessem. Uma solução seria um balanceamento de carga dinâmico mas isto envolveria complicações extras. No entanto, um pré-processamento semelhante ao do caso não paralelo pode ser elaborado de forma que um balanceamento estático seja imposto, o que pode ser mais eficiente e simples.

Capítulo 6

Apêndice A - Adaptatividade temporal sem passos de tempo aninhados

Uma solução direta que surge como alternativa ao esquema descrito em Falk et al. (1998) prevê o cálculo de todos os pontos do grid em $\Delta t/4$, ou seja, todos os pontos são calculados usando o mesmo nível de adaptatividade (nesse caso 2 níveis). Essa alternativa se mostra interessante pois:

- Consome menos memória: Não utiliza o esquema de cálculo usando tempos aninhados proposto em Falk et al. (1998) e, por esse motivo, não precisa armazenar em memória os pontos intermediários calculados com passos de tempo diferentes. No esquema atual, a cada subida de nível de adaptatividade há um acréscimo, no armazenamento em memória, de 1 estrutura de dados no algoritmo.
- Possível diminuição na imprecisão e/ou dispersão: A utilização de passos de tempo diferentes (maiores como no caso da solução proposta no artigo) nos pontos intermediários no tempo acarreta maior imprecisão no resultado do que se fosse usado apenas o Δt de menor valor.

Entretanto, devido uma restrição inerente ao uso do operador de diferenças finitas não é possível utilizar tal esquema. Suponhamos um operador DF 2-2, sem perda de generalidade, já que o padrão aparecerá em qualquer aproximação espacial. Ao utilizarmos o artifício de, a partir do tempo final, verificarmos quais pontos devem ser calculados nos

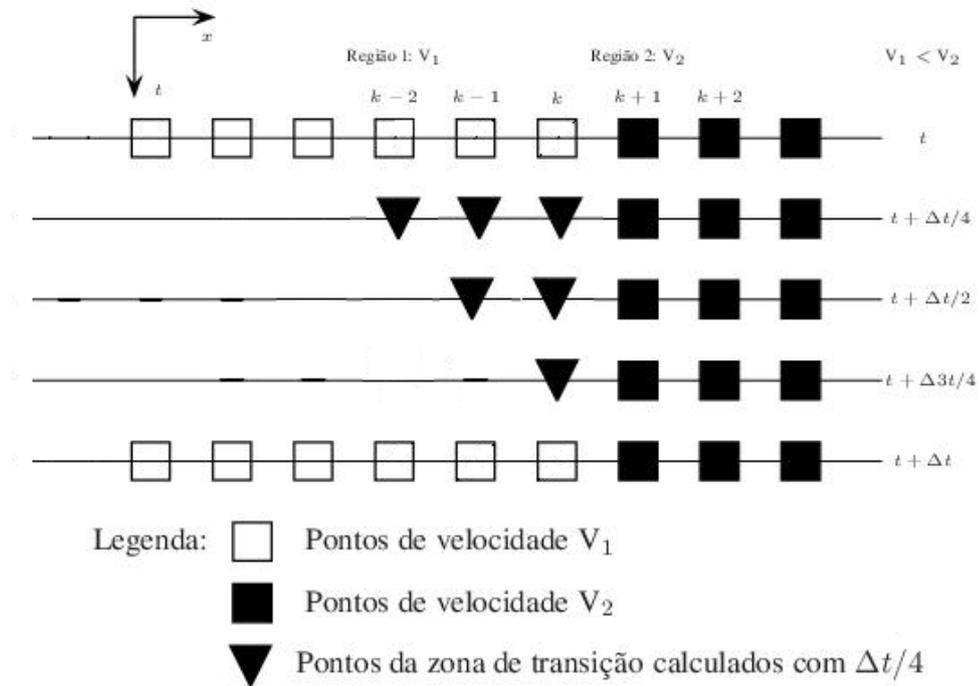
tempos anteriores para o novo esquema funcionar, fica claro que há uma dependência entre o número de pontos no grid que necessitam ser calculados nos tempos iniciais e o número de passos no tempo. Essa dependência acontece devido o comportamento em “forma de triângulo” mostrado nas Fig. 6.1. Um argumento mais formal que explica esse padrão em forma de triângulo dos pontos na zona de transição é composto de duas partes. O primeiro segue abaixo:

“Dado um tempo t qualquer, se o tempo intermediário $t + \Delta t/4$ possui m pontos calculados em sua zona de transição, então o tempo intermediário $t + i\Delta t/4$ com $i \in \{2, 3\}$ poderá ter no máximo $m - (i - 1)E/2$, onde E é o operador espacial.”

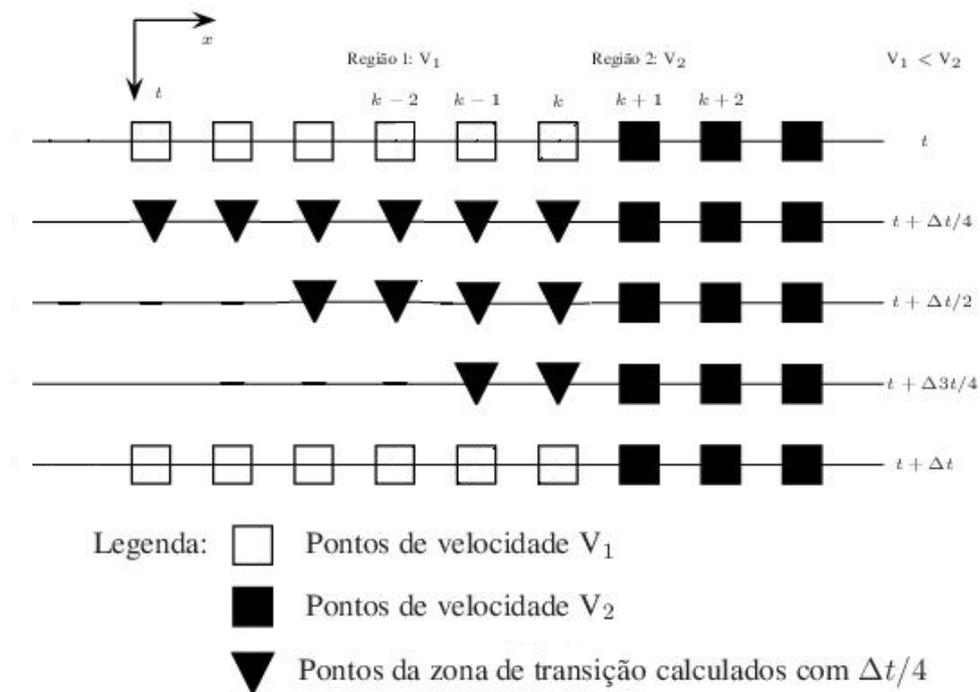
Analogamente, temos um segundo argumento que mostra que, o número de pontos calculados na zona de transição do tempo intermediário imediatamente anterior a um tempo t qualquer, influencia o número de pontos intermediários que podem ser calculados no tempo intermediário $t + \Delta t/4$. Como mostrado na Fig. 6.2.

“Dado um tempo t qualquer, se o tempo intermediário $t - \Delta t/4$ tem m pontos calculados na sua zona transição, então o tempo intermediário $t + \Delta t/4$ poderá ter, no máximo, m pontos calculados na sua zona de transição.”

A combinação desses dois argumentos implica o comportamento de “triângulo” no qual a zona de transição diminui à medida que o tempo avança, e isso acarreta falha no algoritmo devido a falta de pontos na zona de transição num tempo intermediário qualquer.



(a)



(b)

Figura 6.1: Esquemas com dois níveis de adaptatividade sem passos de tempo aninhados (a) 2-2 e (b) 2-4.

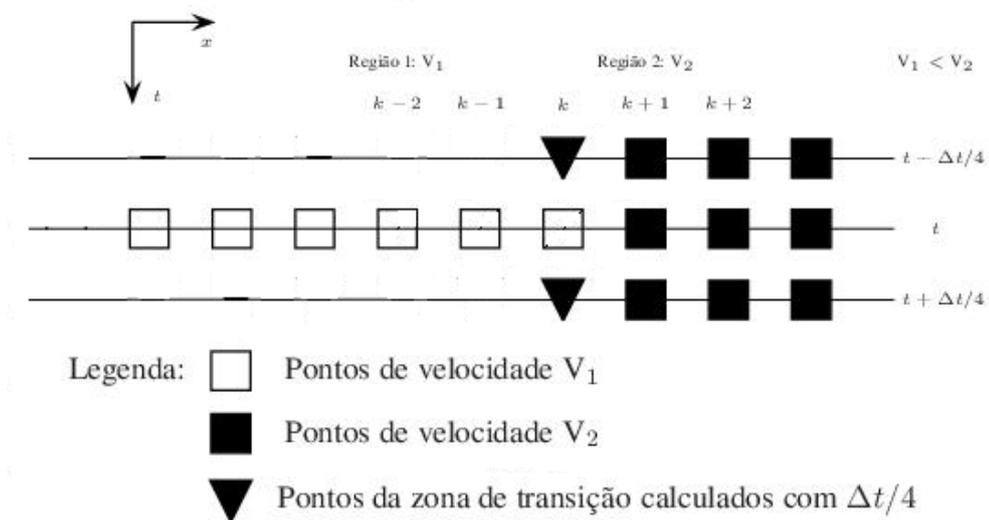


Figura 6.2: Influência do número de pontos no tempo intermediário $t - \Delta t/4$ para o cálculo do tempo intermediário $t + \Delta t/4$. Esse exemplo se aplica a operadores de segunda ordem no tempo.

Referências Bibliográficas

- [1] R. Alford, K. Kelly e D. M. Boore. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, 39:834–842, 1974.
- [2] Z. Alterman e F. C. Karal Jr. Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 58:367–398, 1968.
- [3] W. F. Ames. Numerical methods for partial differential equation, 1977.
- [4] D. M. Boore. *Finite-Difference Solutions to the Equations of Elastic Wave Propagation, with applications to Love Waves Over Dipping Interfaces*. PhD thesis, M. I. T., 1969.
- [5] D. M. Boore. Finite-difference methods for seismic wave propagation in heterogeneous materials. *Method in Computational Physics*, 39, 1972.
- [6] R. P. Bording e L. R. Lines. Seismic modeling and imaging with the complete wave equation. Number 8. Society of Exploration Geophysicists, 1997.
- [7] André Bulcão. *Modelagem e migração reversa no tempo empregando operadores elásticos e acústicos*. PhD thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ, Outubro 2004.
- [8] A. Coffeen. *Seismic Exploration Fundamentals: Seismic Techniques for Finding Oil*. PennWell Pub, 1986.
- [9] L. Collatz. The numerical treatment of differential equations, 1966.
- [10] R. Courant, K. Friedrichs e H. Lewy. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74, 1928.

- [11] P. E. M. Cunha. Estratégias eficientes para migração reversa no tempo pré-empilhamento 3-d em profundidade pelo método das diferenças finitas. Dissertação de Mestrado, P.P.P.G., Universidade Federal da Bahia, 1997.
- [12] Berardino D'Acunto. *Computational Methods for PDE in Mechanics*, volume 67. World Scientific Publishing Company, Incorporated, 2004.
- [13] J. Falk, E. Tessmer e D. Gajewski. Efficient finite-difference modelling of seismic waves using locally adjustable time steps. *Geophysical Prospecting*, 46:603–616, 1998.
- [14] E.L. Faria. *Modeling, migration and focusing analysis in transversely isotropic media*. PhD thesis, 1993.
- [15] O. Holberg. Computational aspects of the choice of operator and sampling interval for numerical differentiation in large-scale simulation of wave phenomena. *Geophysical Prospecting*, 35(6):629–655, 1987.
- [16] Abdolrahim Javaherian. Grid dispersion in generating finite-differences synthetic seismograms. *Acta Seismologica Sinica*, 7(3):397–407, 1994.
- [17] K. Kelly, R. Ward, S. Treitel e R. Alford. Synthetic seismograms a finite-difference approach. volume 41, pp. 2–27. 1976.
- [18] L. Lapidus e G. Pinder. *Numerical Solution of Partial Differential Equation in Science and Enginnering*. Wiley, 1982.
- [19] R.L. Lines, R. Slawinski e R.P. Bording. A recipe for stability analysis of finite-difference wave equation computations. *Geophysics*, 64:964, 1999.
- [20] D. Loewenthal, C.J. Wang, O.G. Johnson e C. Juhlin. High order finite difference modeling and reverse time migration. *Exploration Geophysics*, 22:533–545, 1991.
- [21] R. Madariaga. Dynamics of an expading circular fault. *Bull. seism. Soc. Am.*, 66:639–666, 1976.
- [22] J. S. Mello, T. L. R. Sabino, A. Antunes, A. J. Lima, R. C. Leal-Toledo e O. T. S. Filho. A locally time-step size adjustable scheme based on regions velocity for acustic wave equation simulation. *Proceedings of the XXXII CILAMCE, 2011*, 2011.

- [23] Peter Moczo, Johan O.A. Robertsson e Leo Eisner. *The Finite-Difference Time-Domain Method for Modeling of Seismic Wave Propagation*, volume 48 of *Advances in Geophysics*. Elsevier, 2007.
- [24] Irshad R. Mufti. Large-scale three-dimensional seismic models and their interpretive significance. *Geophysics*, 55(9):1166–1182, 1990.
- [25] P. J. Roache. *Computational fluid dynamics*, 1976.
- [26] R. P. Silva. Uso da migração reversa no tempo para estimar velocidades e migrar turning waves, 1995.
- [27] R.J. Versteeg e G. (Eds.) Grau. The marmousi experience. proc. eage workshop on practical aspects of seismic data inversion. 1991.
- [28] J. Virieux. Sh-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. volume 49, pp. 1933–1957. 1984.
- [29] J. Virieux. P-sv wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method. volume 51, pp. 889–901. 1986.
- [30] W.E. Williams. *Partial differential equations*. Oxford applied mathematics and computing science series. Clarendon Press, 1980.
- [31] K. S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations. *IEE Trans. Antenn. Propagat.*, 14:302–307, 1966.