

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

RAFAEL CARLOS SOARES LIMA

Busca em Grafos por Criticalidades em
Sistemas de Medição

NITERÓI

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

RAFAEL CARLOS SOARES LIMA

Busca em Grafos por Criticalidades em Sistemas de Medição

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Computação. Área de concentração: Computação Científica e Sistemas de Potência.

Orientadores:

Prof. Milton Brown Do Couto Filho, D.Sc.

Prof. Julio Cesar Stacchini de Souza, D.Sc.

NITERÓI

2021

Ficha catalográfica automática - SDC/BEE
Gerada com informações fornecidas pelo autor

S676b Soares lima, Rafael Carlos
Busca em Grafos por Criticalidades em Sistemas de Medição
/ Rafael Carlos Soares lima ; Milton Brown Do Couto Filho,
orientador ; Julio Cesar Stacchini de Souza, coorientador.
Niterói, 2021.
104 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Niterói, 2021.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PGC.2021.m.05744450726>

1. Criticalidades. 2. Estimação de Estado. 3. Teoria dos
Grafos. 4. Sistemas Elétricos de Potência. 5. Produção
intelectual. I. Do Couto Filho, Milton Brown, orientador. II.
Stacchini de Souza, Julio Cesar, coorientador. III.
Universidade Federal Fluminense. Instituto de Computação.
IV. Título.

CDD -

RAFAEL CARLOS SOARES LIMA

Busca em Grafos por Criticalidades em Sistemas de Medição

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Computação. Área de concentração: Computação Científica e Sistemas de Potência.

Aprovada em Março de 2021.

BANCA EXAMINADORA

**Milton Brown Do Coutto
Filho**

Assinado de forma digital por Milton
Brown Do Coutto Filho
Dados: 2021.03.03 20:33:43 -03'00'

Prof. Milton Brown Do Couto Filho, D.Sc. – Orientador
UFF – Universidade Federal Fluminense

JULIO CESAR STACCHINI DE SOUZA
jstacchini@id.uff.br:94367612791

Assinado de forma digital por JULIO CESAR
STACCHINI DE SOUZA
jstacchini@id.uff.br:94367612791
Dados: 2021.03.03 18:11:41 -03'00'

Prof. Julio Cesar Stacchini de Souza, D.Sc. – Orientador
UFF – Universidade Federal Fluminense



Prof. Fabio Protti, D.Sc.

UFF – Universidade Federal Fluminense



Prof. Leonardo Willer de Oliveira, D.Sc.
UFJF – Universidade Federal de Juiz de Fora

Niterói

2021

*À Deus e aos meus pais, Rosilene e Francisco,
indispensáveis em minha vida
e fundamentais em minhas conquistas.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço à Deus, o Criador, o Ser Supremo e Regente de tudo o que existe, pois, sem Ele, a minha vida e minhas conquistas não seriam possíveis.

Agradeço aos meus pais Francisco e Rosilene, os meus alicerces, que sempre estiveram ao meu lado nos momentos em que mais precisei, me dando todo amor e suporte necessários. Sem o apoio e o empenho deles, o ensino superior não teria sido uma realidade em minha vida.

Agradeço aos meus orientadores, Professor Milton Brown do Coutto Filho e Professor Julio Cesar Stacchini de Souza, pelo acompanhamento constante, pela disponibilidade e pelos conhecimentos compartilhados no decorrer do mestrado, além dos conselhos e incentivos dados.

Agradeço ao Professor Fabio Protti, por compartilhar seus conhecimentos, materiais e ideias concernentes à área de teoria dos grafos, o que foi decisivo para a escolha e o desenvolvimento do conteúdo abordado nesta Dissertação.

Agradeço a todos os meus amigos, especialmente Ayres e Vinícius, pelos momentos de descontração e pela cooperação durante o exercício do Mestrado.

Agradeço ao CNPQ pela concessão da bolsa de estudos de pós-graduação, que foi essencial para a concretização desta pesquisa.

Resumo

A Estimação de Estado (EE) é uma importante função do Sistema de Gerenciamento de Energia, responsável por construir uma base de dados de tempo real confiável concernente às condições operativas de um sistema elétrico de potência, caracterizadas pelas tensões complexas nas barras que o constituem. Os dados de entrada da EE são medições redundantes obtidas em uma determinada configuração de rede. A redundância do plano de medição de uma rede, estabelecida pela quantidade, localização e tipo de medida (e.g., fluxo de potência em ramos de transmissão, injeção de potência, magnitude de tensão nas barras), é um requisito precípua para a confiabilidade dos resultados do processo de estimação. A análise de observabilidade destina-se a averiguar se, para uma dada configuração de rede elétrica, com as medidas disponíveis, a EE pode ser realizada por completo. Em geral, existem duas classes de métodos para desenvolvimento dessa análise: numéricos, que empregam operações aritméticas em ponto flutuante; e topológicos, que utilizam exclusivamente operações lógicas, baseando-se na teoria dos grafos. A análise de criticalidades destaca-se por estabelecer graus de observabilidade, considerando cenários de reconfiguração de rede e indisponibilidade de medidas. De ponto de vista conceitual, os métodos topológicos adequam-se naturalmente às análises de observabilidade e criticalidades, pois tais análises são de natureza estrutural. Além disso, os métodos numéricos podem enfrentar problemas na avaliação da observabilidade de um sistema, devido a erros provenientes de arredondamento e de truncamento. Em meados da década de 1990, os estudos de métodos topológicos para as análises de observabilidade e de criticalidades tornaram-se escassos. Em vista disso, esta Dissertação objetiva retomar essa linha de pesquisa, propondo metodologias para as análises de observabilidade e de criticalidades baseadas na busca por árvores geradoras arco-íris (em inglês, *rainbow spanning trees*) em multigrafos coloridos. Os algoritmos implementados baseiam-se, fundamentalmente, nas técnicas de busca em profundidade (em inglês, *depth-first search*) e de intersecção de matrôides. A fim de validar os algoritmos propostos, resultados obtidos em estudos de simulação com planos de medição construídos nas redes de teste do IEEE de 14, 30 e 118 barras são apresentados.

Palavras-chave: estimação de estado, análises de observabilidade e de criticalidades, sistemas elétricos de potência, abordagem topológica, teoria dos grafos, árvore geradora arco-íris.

Abstract

State Estimation (SE) is an essential function of Energy Management Systems, responsible for providing a reliable real-time database regarding the operating conditions of an electric power system, characterized by the complex bus voltages. SE input data are redundant measurements obtained in a given network configuration. The measurement redundancy, determined by quantity, location, and type (e.g., power flows in network branches, bus power injections, bus voltage magnitudes), is crucial for the SE results' reliability. The observability analysis ascertains whether the available measurements allow the SE as a whole for a given network configuration. In general, there are two classes of methods for developing this analysis: numerical, which uses floating-point arithmetic operations; and topological, performed exclusively by logical operations based on graph theory. The criticality analysis stands out for establishing the different system observability degrees, considering network reconfigurations and measurement unavailabilities. From a conceptual viewpoint, topological methods are suited to observability and criticality analyses, as they correspond to problems of structural nature. Also, numerical methods may fail to assess the system observability due to round-off and truncation errors. After the mid-90s, the study of topological methods for observability and criticality studies became scarce in the specialized literature. Thus, this Dissertation aims to present methodologies for the observability and criticality analyses based on finding rainbow spanning trees in edge-colored multigraphs. The algorithms implemented apply depth-first search and Edmonds' matroid intersection techniques. In order to enable further understanding and demonstrate the validity of the proposed algorithms, the results of simulation studies performed on the the IEEE 14-, 30-, and 118-bus benchmark systems are presented.

Keywords: state estimation, observability and criticality analyses, electrical power systems, topological approach, graph theory, rainbow spanning tree.

Lista de Figuras

2.1	Módulos da função de EE.	13
3.1	O problema das Sete Pontes de Königsberg. Adaptado de [22].	25
3.2	Modelagem do problema das Setes Pontes de Königsberg.	26
3.3	Representações geométricas distintas para o mesmo grafo. Adaptado de [46].	27
3.4	Representação de um multigrafo.	28
3.5	Exemplo de um subgrafo próprio \mathcal{H} de \mathcal{G}	29
3.6	Exemplo de um subgrafo gerador \mathcal{H} de \mathcal{G}	29
3.7	Subgrafo induzido $\mathcal{G}[X_v]$ de \mathcal{G}	30
3.8	Subgrafo induzido $\mathcal{G}[X_e]$ de \mathcal{G}	30
3.9	Complemento $\bar{\mathcal{G}}$ de um grafo \mathcal{G}	31
3.10	Grafos isomorfos.	32
3.11	Caminho e ciclo com cordas.	34
3.12	Caminho e ciclo induzidos.	34
3.13	Subconjuntos maximal e máximo referentes a vértices independentes. . . .	35
3.14	Exemplos de grafos desconexos.	36
3.15	Representação geométrica de um digrafo.	37
3.16	Exemplos de caminho e ciclo direcionados.	38
3.17	Ciclos direcionados triviais em um digrafo.	38
3.18	Exemplos de grafos bipartidos.	39
3.19	Representação de um grafo \mathcal{G} planar e de um grafo \mathcal{H} não planar.	39
3.20	Um grafo não direcionado e a matriz de adjacências correspondente.	40
3.21	Um digrafo e a matriz de adjacências correspondente.	40

3.22	Um grafo não direcionado e a lista de adjacências correspondente.	41
3.23	Um digrafo e a lista de adjacências correspondente.	41
3.24	Um corte de vértices e uma articulação de um grafo.	42
3.25	Um conjunto desconectante e uma ponte de um grafo.	42
3.26	Um corte de arestas de um grafo.	43
3.27	Dois co-ciclos de um grafo.	43
3.28	Uma floresta formada por duas árvores.	44
3.29	Uma árvore geradora de um grafo.	44
3.30	Formações de ciclo numa árvore geradora.	45
3.31	Uma árvore geradora arco-íris.	46
3.32	Uma árvore geradora com arestas de mesma cor.	46
4.1	Uma rede de 6 barras composta de 7 medidas.	48
4.2	Grafo de rede e árvore geradora observável referente à rede anterior.	49
4.3	Representação de medidas de fluxo de potência como arestas de fluxo.	50
4.4	Representação de uma medida de injeção de potência como arestas de injeção.	50
4.5	Representação de medidas de corrente como arestas de fluxo.	50
4.6	Representação de medidas de ângulo como arestas de fluxo.	51
4.7	Uma rede de 6 barras composta de 10 medidas.	51
4.8	Multigrafo de medições referente a um sistema de 6 barras.	52
4.9	Grafo \mathcal{G}_f referente a um multigrafo de medições \mathcal{Z}	53
4.10	Uma floresta maximal arco-íris \mathcal{F} de \mathcal{G}_f	55
4.11	Subconjuntos S_{cor} e S_{ciclo} da partição Y em \mathcal{B}	58
4.12	Conjunto resultante da diferença simétrica entre A e B (região cinza).	59
4.13	Árvore observável referente a um sistema de 6 barras e 10 medidas.	59
4.14	Grafo \mathcal{B}_0 de um sistema de 6 barras e 10 medidas.	62
5.1	Sistema de 14 barras e 18 medidas.	68

5.2	Sistema de 14 barras e 20 medidas.	68
5.3	Sistema de 30 barras e 43 medidas. Adaptado de [4].	69
5.4	Sistema de 118 barras e 176 medidas de fluxo de potência.	69
5.5	Grafo \mathcal{Z} do sistema de 14 barras e 18 medidas.	70
5.6	Grafo \mathcal{G}_f do sistema de 14 barras e 18 medidas.	70
5.7	Floresta \mathcal{F} de \mathcal{G}_f do sistema de 14 barras e 18 medidas.	71
5.8	Digrafo auxiliar \mathcal{B} inicial.	72
5.9	Grafo hipotético $\mathcal{T} + P_{3(4)}$, para avaliação de $P_{3(4)}$	72
5.10	Grafo hipotético $\mathcal{T} + P_{9(7)}$, para avaliação de $P_{9(7)}$	73
5.11	Digrafo auxiliar \mathcal{B} obtido da inclusão de $P_{9(10)}$	73
5.12	Grafo \mathcal{T} resultante da inclusão de $P_{9(10)}$	73
5.13	Criação do arco $(P_{9(10)}, P_{9(14)})$ em \mathcal{B}	74
5.14	Grafo hipotético $\mathcal{T} + P_{9(14)}$, para avaliação de $P_{9(14)}$	74
5.15	Criação do arco $(P_{10(9)}, P_{9(10)})$ em \mathcal{B}	74
5.16	Grafo hipotético $\mathcal{T} + P_{10(9)}$, para avaliação de $P_{10(9)}$	74
5.17	Digrafo auxiliar \mathcal{B} obtido da inclusão de $P_{10(11)}$	75
5.18	Grafo \mathcal{T} resultante da inclusão de $P_{10(11)}$	75
5.19	Criação do arco $(P_{11(10)}, P_{10(9)})$ em \mathcal{B}	75
5.20	Grafo hipotético $\mathcal{T} + P_{11(10)}$, para avaliação de $P_{11(10)}$	75
5.21	Grafo \mathcal{T} obtido do processamento das arestas de injeção.	76
5.22	Caminho direcionado P em \mathcal{B}	76
5.23	Árvore observável referente ao sistema de 14 barras e 18 medidas.	77
5.24	Grafo \mathcal{Z} do sistema de 14 barras e 20 medidas.	78
5.25	Árvore observável referente ao sistema de 14 barras e 20 medidas.	78
5.26	Digrafo \mathcal{B}_0 referente ao sistema de 14 barras e 20 medidas.	79
5.27	Grafo \mathcal{Z} do sistema de 30 barras e 43 medidas.	80

5.28	Árvore observável referente ao sistema de 30 barras e 43 medidas.	80
5.29	Digrafo \mathcal{B}_0 referente ao sistema de 30 barras e 43 medidas.	81
5.30	Grafo \mathcal{Z} do sistema de 118 barras e 176 medidas.	82
5.31	Árvore observável referente ao sistema de 118 barras e 176 medidas.	83

Lista de Tabelas

3.1	Grau e vizinhança dos vértices do grafo G	27
3.2	Correspondência biunívoca entre os vértices de G e H	32
5.1	Sequência de arestas de fluxo exploradas.	71
5.2	Ordenamento escolhido para processamento das arestas de injeção.	72
5.3	Ordenamento ideal para processamento das arestas de injeção.	77
5.4	$C_{k\text{-tuplas}}$ identificadas no sistema de 14 barras e 20 medidas.	79
5.5	$C_{k\text{-tuplas}}$ identificadas no sistema de 30 barras e 43 medidas.	81
5.6	$C_{k\text{-tuplas}}$ identificadas no sistema de 118 barras e 176 medidas.	84

Lista de Abreviaturas e Siglas

C_{conj}	: Conjunto Crítico de medidas;
$C_{\text{k-tupla}}$: Tupla Crítica de k medidas;
C_{med}	: Medida Crítica;
C_{par}	: Par Crítico de medidas;
COS	: Centros de Operação de Sistema;
DEI	: Dispositivos Elétricos Inteligentes;
EE	: Estimação de Estado;
EG	: Erro Grosseiro;
MQP	: Mínimos Quadrados Ponderados;
SCADA	: <i>Supervisory Control and Data Acquisition</i> ;
SEP	: Sistema Elétrico de Potência;
SGE	: Sistema de Gerenciamento de Energia;
UMF	: Unidade de Medição Fasorial;
UTR	: Unidade Terminal Remota.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Contextualização	1
1.2	Objetivos	4
1.3	Contribuições	5
1.4	Trabalhos Relacionados	6
1.5	Estrutura da Dissertação	9
2	Observabilidade e Criticalidades	11
2.1	Estimação de Estado	11
2.2	Subproblemas da Estimação de Estado	12
2.3	Fundamentos da Estimação de Estado	13
2.4	Análise de Observabilidade	17
2.5	Criticalidades	20
3	Noções Básicas da Teoria dos Grafos	25
3.1	Sete Pontes de Königsberg	25
3.2	Definições Iniciais	27
3.3	Subgrafos	28
3.4	Operações Básicas com Grafos	30
3.5	Isomorfismo	32
3.6	Caminhos e Ciclos	33
3.7	Maximalidade e Minimalidade	35

3.8	Grafos Conexos e Desconexos	36
3.9	Grafos Direcionados	36
3.10	Grafos Bipartidos	39
3.11	Grafos Planares	39
3.12	Grafos como Estrutura de Dados	40
3.13	Cortes em Grafos	42
3.14	Árvores	44
4	Metodologia Proposta	47
4.1	Considerações Iniciais	47
4.2	Multigrafo de Medições	49
4.3	Algoritmo de Observabilidade Topológica	52
4.3.1	Etapa 1 do Algoritmo de Observabilidade Topológica	53
4.3.2	Etapa 2 do Algoritmo de Observabilidade Topológica	55
4.4	Análise Topológica de Criticalidades	59
4.4.1	Identificação de Medidas Críticas	60
4.4.2	Identificação de K-Tuplas Críticas de Medidas	63
5	Testes e Resultados	67
5.1	Sistemas Avaliados	67
5.2	Sistema de 14 Barras e 18 Medidas	70
5.3	Sistema de 14 Barras e 20 Medidas	77
5.4	Sistema de 30 Barras e 43 Medidas	79
5.5	Sistema de 118 Barras e 176 Medidas	82
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	85
	Referências	88

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, encontram-se as principais motivações, objetivos e contribuições desta pesquisa, à luz de trabalhos existentes na literatura especializada sobre o assunto abordado. Apresenta-se também como a Dissertação está estruturada.

1.1 Contextualização

A eletricidade é a forma de energia versátil e de conhecido controle, produzida a partir de diversas fontes primárias, tais como: carvão, gás natural, movimentação de águas/ventos e energia solar. O conforto e a comodidade da vida moderna são, em boa parte, dela advindas. O consumo *per capita* de energia elétrica está entre os principais indicadores atinentes ao nível de desenvolvimento econômico e à qualidade de vida dos habitantes de um país.

O crescimento consumo de energia elétrica no decorrer dos anos criou a necessidade de uma infraestrutura complexa e de grandes proporções para a sua geração e transmissão. O conjunto coordenado das instalações e dos equipamentos que constituem essa infraestrutura para o fornecimento confiável e seguro de eletricidade aos consumidores residenciais, comerciais e industriais é chamado de sistema elétrico de potência (SEP).

O SEP consiste basicamente dos sistemas de geração, transmissão e distribuição. Na geração encontram-se as usinas elétricas, onde ocorre a transformação de outras formas de energia em eletricidade. Devido ao grande potencial hidráulico, o Brasil conta com expressivo número de usinas hidrelétricas. A transmissão interconecta as grandes usinas aos principais centros de carga, possibilitando a circulação de grandes blocos de potência, com níveis elevados de tensão (para reduzir perdas elétricas no SEP). A distribuição

representa o último estágio do processo de transferência de energia para as unidades consumidoras. Para manter o SEP operando sem interrupções, com padrões de segurança e qualidade adequados, deve-se controlá-lo e monitorá-lo a todo instante (tempo real), tarefa essa executada muitas vezes remotamente, de forma centralizada e hierarquizada, através de Centros de Operação de Sistema (COS).

Os COS usam ferramentas computacionais sofisticadas, reunidas no chamado Sistema de Gerenciamento de Energia (SGE), que fornecem informações atualizadas relativas ao estado operativo do SEP, alicerces para decisões tomadas por operadores, definidora de ações preventivas e corretivas. O estado operativo do SEP é basicamente caracterizado pelo equilíbrio entre geração e consumo de energia elétrica (carga), sem violação dos limites operativos das instalações e dos equipamentos que compõem o sistema. Como exemplo de limites operativos, pode-se destacar a capacidade de geração de cada usina, potência máxima em linhas de transmissão, entre outros. A violação desses limites, além do desequilíbrio entre geração e carga, pode resultar em desligamentos indesejados na rede.

As tensões complexas das barras da rede elétrica, referentes a uma determinada configuração de rede, caracterizam perfeitamente o estado operativo do SEP. Os dados da configuração da rede são disponibilizados por sensores que indicam o estado aberto/fechado de chaves e disjuntores. Usualmente, as tensões nodais complexas são obtidas por meio de um conjunto de medidas convencionais (e.g., fluxos de potência ativa/reactiva, injeções de potência ativa/reactiva nas barras, magnitude das tensões nodais), coletadas por unidades terminais remotas (UTRs) e dispositivos eletrônicos inteligentes (DEIs), sendo transmitidas remotamente aos COS por intermédio do sistema de supervisão e aquisição de dados, abreviadamente SCADA (acrônimo em inglês para *Supervisory Control and Data Acquisition*). O estado operativo do SEP também pode ser observado diretamente, através de unidades de medição fasorial (UMFs), que fornecem sincrofasores, i.e., medidas de magnitude/ângulo de fase das tensões nodais e correntes fasoriais de ramos da rede (decompostas em suas componentes retangulares). As UMFs possuem um custo elevado em comparação com os correspondentes de UTRs e DEIs, o que tem limitado sua utilização em grande quantidade na EE.

As medidas coletadas estão sujeitas a erros estatisticamente pequenos, como também a erros grosseiros (EGs), estes introduzidos por causas diversas (e.g., perda de calibração, falhas em equipamentos de comunicação, ligações incorretas, ataques cibernéticos). A função do SGE responsável por determinar o estado mais provável de operação da rede

é chamada de Estimação de Estado (EE). A estimativa para as tensões complexas nas barras do sistema e os dados filtrados de medição provenientes da EE formam o conjunto de dados de entrada para outras funcionalidades do SGE, relacionadas a estudos de análise de rede, tais como, previsão de carga, análise e monitoração da segurança. Em suma, a função de EE recebe dados brutos de medição, reduz suas inconsistências e estima o estado operativo do SEP, auxiliando os operadores do sistema na tomada de decisão.

Classicamente, a EE é formulada como um problema de mínimos quadrados ponderados (MPQ), que se destaca por sua simplicidade. O desempenho da EE depende de dados de entrada relacionados a um conjunto de medidas redundantes. Essa redundância refere-se ao excedente de medidas variadas, distribuídas uniformemente ao longo da rede, em relação ao mínimo necessário para estimação das variáveis de estado (tensões complexas das barras) do sistema monitorado. Adicionalmente, com o intuito de garantir a plena funcionalidade da EE, o sistema de medição deve atender os seguintes requisitos [26]:

- *Observabilidade*: refere-se à habilidade de estimar o estado operativo de toda a rede;
- *Confiabilidade*: relacionado à capacidade de detectar, identificar e substituir medidas portadoras de EGs;
- *Qualidade*: relativo à precisão das quantidades estimadas;
- *Robustez*: diz respeito à garantia de manutenção dos requisitos anteriores após indisponibilidades de dados de medição em tempo real ou reconfiguração topológica da rede supervisionada.

Todavia, dispor de um sistema de supervisão alimentado por um conjunto redundante de medidas, atendendo todos os requisitos anteriores, requer elevados investimentos. Para garantir preços competitivos no mercado de energia, os agentes do SEP buscam reduzir gastos com infraestrutura de supervisão de rede. Com isso, os requisitos necessários para a garantia de bom desempenho da EE não são atendidos em sua plenitude, resultando em estimativas errôneas de estado operativo do SEP e comprometendo a filtragem dos dados de medição. Isso pode levar os operadores a atuarem indevidamente na rede, pondo em descrédito a função EE. Nesse contexto, justificam-se as análises de observabilidade e criticalidades, que fornecem informações sobre a funcionalidade e desempenho do EE num dado sistema, considerando os requisitos supracitados. Tais análises aplicam-se não

apenas na execução corrente da EE, como também contribuem para o projeto de um novo sistema de monitoramento ou reforço daquele existente.

A análise de observabilidade ocupa-se em avaliar se o conjunto disponível de medidas tomadas em determinada configuração de rede é suficiente para determinação das variáveis de estado de todo o sistema. Usualmente, a resposta quanto à observabilidade é binária (“sim”/“não”). Se a rede não for observável, pode-se identificar regiões dessa rede onde é possível estimar independentemente o estado, chamadas de ilhas observáveis. A observabilidade pode ser restaurada através da inserção de pseudomedidas, baseadas em dados históricos da rede. Comumente, existem três abordagens para o estudo de observabilidade: numéricos, que efetuam cálculos de ponto flutuante com as matrizes do processo de estimação; topológicos, que aplicam operações lógicas baseadas em teoria dos grafos; e híbridas, que combinam as abordagens numérica e topológica. A análise topológica de observabilidade favorece a identificação de ilhas observáveis e de regiões da rede que requerem pseudomedidas.

Alternativamente, a análise de criticalidade se distingue por identificar situações em que a inobservabilidade pode acontecer, devido a indisponibilidades inesperadas de elementos de rede, tais como, ramos da rede, unidades de medição (UMs) e medidas. Sobretudo, esse estudo se relaciona à capacidade de detecção e identificação de medidas portadoras de EGs pela função EE, de acordo com uma dada disponibilidade de medidas e determinada configuração topológica. Define-se como crítico aquele elemento do processo de estimação que ao se tornar indisponível leva o sistema à inobservabilidade. Este conceito se estende a grupos de elementos, ou seja, uma k -tupla crítica define-se como aquela cujos elementos ao se tornarem indisponíveis simultaneamente causa a inobservabilidade da rede.

Esta Dissertação aborda as análises de observabilidade e criticalidades, identificando k -tuplas de medidas de um sistema, aplicando conceitos de coloração de arestas de árvores, provenientes da teoria dos grafos.

1.2 Objetivos

A teoria dos grafos é aplicável a inúmeros problemas práticos. O desenvolvimento de algoritmos para solução de problemas em grafos vem crescendo consideravelmente nas últimas décadas, devido aos avanços tecnológicos na área da computação. A total compreensão da modelagem topológica dos problemas de observabilidade e criticalidades possibilita o

uso de algoritmos e ferramentas computacionais disponíveis para análise em grafos.

Aqui, objetiva-se apresentar uma metodologia para as análises de observabilidade e de criticalidades, com base na teoria dos grafos, em sistemas de supervisão que disponham de tipos variados de medidas, oriundas de unidades de medição convencionais e fasoriais. Além disso, busca-se estabelecer uma relação entre as propriedades de conectividade de arestas em grafos e criticalidades de medidas.

Neste trabalho, representa-se uma rede elétrica supervisionada mediante um multigrafo aresta-colorido, denominado *multigrafo de medições*, cujas cores representam medições. A existência de uma *árvore geradora observável* nesse multigrafo implica na observabilidade topológica do sistema. A metodologia desenvolvida para análise de criticalidades baseia-se na identificação de conjuntos de cores/arestas cuja remoção do multigrafo de medições torna o sistema inobservável.

Embora seja desejável estudar comparativamente o desempenho dos enfoques numéricos e topológicos mencionados anteriormente, tal objetivo não foi estabelecido neste trabalho. Isto porque este trabalho inaugura a abordagem topológica para a análise generalizada de criticalidades de medidas, o que requer uma etapa de maturação que antecede avaliações de desempenho.

As metodologias apresentadas nesta Dissertação foram implementadas em *Python*. As representações dos resultados em grafos foram obtidas a partir da biblioteca *NetworkX*.

1.3 Contribuições

Dentre as principais contribuições desta pesquisa, destacam-se:

- elucidação da dualidade existente entre definições da teoria dos grafos e propriedades da análise de observabilidade, incluindo a busca por criticalidades de medidas em uma rede elétrica supervisionada pela EE;
- introdução de uma modelagem topológica para as medidas de ângulo de tensão nodal, que são as principais constituintes das UMFs;
- proposição e descrição detalhada das metodologias empregadas para análise topológica de observabilidade e de criticalidades de uma rede elétrica;
- simplificação do tratamento topológico dado às medidas de fluxo de potência, corrente de ramo e ângulo de tensão;

- elucidação do tratamento topológico dado às medidas de injeção de potência; e
- descrição das propriedades de criticalidades de medidas sob uma perspectiva exclusivamente topológica.

1.4 Trabalhos Relacionados

Desde o trabalho seminal de Fred C. Schweppe [50] [49], que introduziu a função de EE em COS, poucos trabalhos abordaram análise estritamente qualitativa de observabilidade e, menos ainda, o estudo de criticalidades de medidas através da modelagem por grafos.

Em 1980, Krumpholz et al. [36] propuseram um método exato e estritamente qualitativo, baseado em teoria dos grafos, para análise de observabilidade. Esse trabalho provou que a existência de uma árvore geradora de posto máximo (observável) é uma condição necessária e suficiente para a observabilidade de uma rede elétrica monitorada. No contexto da observabilidade topológica, o posto de uma árvore refere-se à quantidade de arestas dessa que representam uma medida distinta. Além disso, Krumpholz apresentou um algoritmo para análise de observabilidade topológica, em duas etapas: a primeira delas processava sequencialmente as medidas de fluxo, a fim de construir uma floresta maximal composta de arestas coincidentes com a cobertura dessas medidas; a segunda etapa, baseada no algoritmo de Dinic [23] para o problema do fluxo máximo em redes, ocupava-se de expandir a floresta maximal corrente através do processamento das medidas de injeção de fronteira. As medidas de injeção de fronteira são aquelas instaladas em barras da rede incidentes concomitantemente em arestas cobertas e não cobertas por medidas de fluxo. Após o processamento de todas as medidas de fluxo e injeções de fronteira, se uma árvore geradora observável for encontrada, então o algoritmo classifica o sistema como observável. Caso contrário, o sistema será dito inobservável. Embora a estratégia seja de fácil compreensão, a implementação do algoritmo proposto por Krumpholz é complexa. Outrossim, as publicações posteriores, que abordaram a análise de observabilidade por grafos, trataram as medidas de injeção separadamente das medidas de fluxo.

No ano seguinte, Clements et al. [16] ampliaram o algoritmo proposto em [36], objetivando a identificação, de forma qualitativa, de medidas críticas e regiões de espalhamento de resíduos originados por erros em medidas não críticas. Nesse trabalho, mostra-se que uma medida crítica é associada a todas as árvores geradoras observáveis possíveis de um sistema. Além disso, encontra-se uma demonstração sobre o fato de que erros grosseiros não podem ser identificados em medidas críticas. A metodologia proposta para identifi-

cação das regiões de espalhamento de resíduos é baseado no algoritmo de Tarjan [55] para identificação de componentes biconexas de um grafo, consoante a busca de articulações (barras que pertencem simultaneamente a duas ou mais componentes biconexas). Essa publicação mostra que o espalhamento de resíduos provenientes de erros de medição é limitado por medidas críticas de injeção e barras não monitoradas da rede.

Em 1982, Clements et al. [17] propuseram uma nova extensão do algoritmo em [36], a fim de identificar as ilhas observáveis de uma rede não observável. A estratégia é baseada numa poda sistemática da floresta maximal obtida a partir do algoritmo de observabilidade topológica. Basicamente, removem-se os ramos da rede não atribuídos a medidas e/ou incidentes em medidas de injeção, que não formam ciclos com ramos pertencentes à floresta maximal. O grafo resultante indica as ilhas observáveis do sistema. Uma implementação que habilita o algoritmo em [36] processar pseudomedidas, visando a expansão de uma floresta não observável para obtenção de uma árvore geradora observável, é apresentada em [18].

Quintana et al. [47], em 1982, mostraram que é mais simples implementar um algoritmo que identifica uma árvore geradora observável num grafo de medidas, em vez de analisar a própria rede e atribuir sistematicamente medidas a essa, obedecendo a estrutura de uma floresta. Um grafo de medidas é aquele formado por todas as arestas associadas a medidas de fluxo e injeção de potência. A estratégia proposta para etapa de processamento de medidas de fluxo é baseada no algoritmo de Kruskal [37] para construção de uma floresta maximal. Quanto à etapa de processamento das medidas de injeção, Quintana tomou por base a teoria de matróides, aplicando um algoritmo de interseção de matróides. Basicamente, essa segunda etapa identifica a intersecção entre um matróide gráfico e um matróide particional. O matróide gráfico representa a restrição de que não podem existir ciclos na floresta de posto maximal, enquanto que o matróide particional caracteriza a impossibilidade de duas ou mais arestas dessa floresta se referirem a uma mesma medida. Embora a teoria envolvida seja de difícil compreensão, o algoritmo proposto por Quintana et al. não apresenta difícil implementação.

Um algoritmo simples proposto por Van Cutsem [20] consistia na enumeração de todas as possibilidades de correlação entre medidas e ramos da rede, a fim de obter uma árvore geradora observável. No entanto, essa estratégia possui um elevado custo computacional, tendo em vista que a quantidade de árvores geradoras cresce exponencialmente com o porte da rede [12], sendo, portanto, inviável do ponto de vista prático.

Em 1986, Bargiela et al. [9] propuseram uma modelagem baseada na construção

de um grafo em níveis, composto de três conjuntos independentes de vértices: o primeiro conjunto é composto de vértices representantes de medidas do sistema; o segundo conjunto consiste de vértices relacionados a ramos da rede; por fim, o terceiro representa as barras da rede. As arestas do grafo em níveis representam as possibilidades de árvores geradoras da rede. Estabelecendo uma restrição unitária de fluxo para cada vértice representante de ramo da rede, aplica-se o algoritmo para solução do problema de fluxo máximo. Após aplicação do algoritmo, os caminhos saturados obtidos representam a floresta de posto máximo da rede. Se a floresta for uma árvore, então o sistema é dado como observável.

A publicação de Simões Costa et al. de 1990 [52] rerepresentou o algoritmo para análise de observabilidade topológica proposta em [47], detalhando os fundamentos teóricos de matróides gráficos e particionais. A maior contribuição dessa publicação é a proposição de um algoritmo, inspirado na estratégia de intersecção de matróides, para identificação de medidas críticas. Adicionalmente, é apresentada, de forma bem sucinta, uma metodologia para identificação de conjuntos críticos (pares críticos de medidas, com um elemento do par em comum).

Em [41], Mori et al. abordaram a análise de observabilidade topológica propondo um algoritmo para identificação de árvore geradora de custo mínimo num grafo. Basicamente, pesos unitários são atribuídos aos ramos da rede não associados a medidas e, posteriormente, busca-se uma árvore geradora de custo zero. A existência dessa árvore geradora implica numa rede observável. No caso de inobservabilidade (custo diferente de zero), a estratégia possibilita a identificação direta de ilhas observáveis e ramos da rede em que a inserção de pseudomedidas restaura a observabilidade.

Em relação à metodologia descrita em [47], melhorias foram apresentadas por Nucera e Gilles em [44]. Eles propuseram a contração de arestas da floresta maximal de fluxos, obtida da etapa de processamento das medidas de fluxo do sistema, em vértices (na publicação, nomeado de super-nós). Essa contração resulta na redução do espaço de busca na etapa de processamento de medidas de injeção, sendo análogo ao processo de busca por medidas de injeção de fronteira do algoritmo introduzido por Krumpholz et al. em [36]. A identificação de uma árvore geradora, composta de super-nós e arestas referentes a medidas de injeção, indica a observabilidade topológica do sistema. Em caso de inobservabilidade, o algoritmo proposto revela as ilhas observáveis.

A inclusão da modelagem de dispositivos de chaveamento, tais como, disjuntores e chaves seccionadoras, na análise de observabilidade topológica foi proposta por Simões et al. em [51], objetivando expandir as metodologias propostas em [47] e [52].

Outros trabalhos dedicaram-se ao desenvolvimento de métodos híbridos, que alia as abordagens numérica e topológica, com destaque para a publicação de Korres em 1991 [34]. Valendo-se de operações matriciais, matemática simbólica e teoria dos grafos, um método para avaliação de observabilidade da rede, consoante a identificação de medidas críticas e conjuntos críticos, foi proposto.

Até o momento, nesta seção, foram citados trabalhos que buscavam, de forma qualitativa, analisar a observabilidade e, em alguns trabalhos, identificar criticalidades de medidas com cardinalidade máxima igual a dois, isto é, medidas críticas e conjuntos críticos. A busca por criticalidades que excedem a cardinalidade dois possibilita uma melhor avaliação da capacidade de observação e depuração de erros grosseiros de um sistema de medição. De uma forma geral, considerando tanto a abordagem topológica quanto a numérica, poucos trabalhos empenharam-se na identificação de tuplas críticas com cardinalidades superiores a três.

No âmbito das metodologias que tomaram por base a teoria dos grafos, foco desta Dissertação, tem-se a publicação de Sou et al. em 2012 [53]. Eles apresentaram duas metodologias (um tanto limitadas) para identificação da tupla crítica de menor cardinalidade que uma determinada medida (variável de entrada do algoritmo) constitui. Uma metodologia é baseada na aplicação do algoritmo de Ford-Fulkerson [29], apoiando-se no teorema do fluxo máximo e corte mínimo. Dada uma medida, executa-se o algoritmo de Ford-Fulkerson no grafo de rede, considerando como fonte e terminal os extremos de cada aresta associada a essa medida. As medidas relacionadas às arestas do corte mínimo identificado constituem, possivelmente, uma tupla crítica. Nessa metodologia, a existência de medidas de injeção no sistema torna a solução não exata. Alternativamente, a outra metodologia proposta, diferentemente da metodologia baseada na aplicação do algoritmo de Ford-Fulkerson, é exata e baseia-se na modelagem do problema como programação linear inteira mista.

1.5 Estrutura da Dissertação

Este capítulo contextualizou e evidenciou a importância da função de EE no processo de supervisão, controle e gestão do SEP. Além disso, apresentou os objetivos desta Dissertação e percorreu sobre os trabalhos relacionados ao tema abordado. Os capítulos posteriores ao presente são descritos sucintamente a seguir:

O Capítulo 2 fundamenta os principais aspectos da EE, baseado no método MQP, em

SEP. Em seguida, são apresentados os procedimentos para a análise de observabilidade e identificação de criticalidades através de um modelo linear de estimação. Por fim, apresentam-se as propriedades básicas de criticalidades de elementos de rede.

O Capítulo 3 apresenta as definições e terminologias da teoria dos grafos imprescindíveis ao entendimento da metodologia proposta e análise dos resultados desta pesquisa.

O Capítulo 4 aborda as metodologias propostas para análise de observabilidade e identificação de criticalidades através da teoria dos grafos, discorrendo sobre a dualidade existente entre as abordagens numérica e topológica.

No Capítulo 5, discorre-se os resultados obtidos da aplicação das metodologias propostas sobre as redes IEEE de 14, 30 e 118 barras.

Encerrando este manuscrito, o Capítulo 6 apresenta as principais conclusões alcançadas neste estudo, propondo desdobramentos para continuação da pesquisa relacionada ao tema aqui abordado.

Capítulo 2

Observabilidade e Criticalidades

Até aqui, contextualizou-se o problema abordado nesta Dissertação como um dos estudos de análise de redes elétricas, apontando-se os objetivos a alcançar. Publicações relacionadas ao tema foram levantadas, para então se caracterizar as principais contribuições do presente trabalho. O presente capítulo apresenta os aspectos básicos da EE em SEP. As rotinas de estimação baseada no método MQP e de processamento de erros grosseiros são apresentadas. Além disso, abordam-se a análise numérica de observabilidade, baseada no modelo linear de estimação, e as propriedades de criticalidades de medidas, que integram os alicerces teóricos da Dissertação.

2.1 Estimação de Estado

Desde que foi proposta por Schweppe [50], a EE em SEP desperta muito interesse de pesquisadores, que buscam continuamente aprimorá-la, com o intuito de assegurar a confiabilidade de seus resultados [25].

A EE é uma importante funcionalidade do SGE, sendo responsável por fornecer em tempo real uma base de dados confiável a partir do processamento de dados brutos de medidas elétricas analógicas redundantes. Essas medidas são processadas com o propósito de fornecer a melhor estimativa para os valores de tensão complexa das barras da rede, que caracterizam perfeitamente as condições operativas do sistema.

A partir do estado estimado é possível calcular as demais variáveis (fluxos de potência, injeções de potência, etc.) do sistema, provendo informações relevantes sobre as condições operativas da rede, tais como, carregamento das linhas de transmissão, geração de cada usina, entre outras. Além disso, a função de EE funciona como um filtro das incertezas

conhecidas como ruído de medição, presentes nos dados brutos coletados, atualizando em tempo real o banco de dados com informações confiáveis sobre estado operativo do sistema.

2.2 Subproblemas da Estimação de Estado

Os dados brutos de medidas analógicas, disponibilizados pelo sistema SCADA, passam por um algoritmo de pré-filtragem, em que as grandezas monitoradas são comparadas com os limites operativos da rede, de modo a reter medidas flagrantemente errôneas pertencentes ao plano de medição. Paralelamente, as denominadas medidas lógicas a respeito do estado (*status* aberto ou fechado) de disjuntores/chaves seccionadoras das subestações, são processadas pelo Configurador de Rede. O processamento das medidas lógicas, provenientes do sistema SCADA, possibilita a construção do modelo barra-ramo da rede. Após a pré-filtragem e construção do modelo da rede, os dados alimentam a função EE propriamente dita, que se subdivide basicamente nos subproblemas (módulos) descritos a seguir:

1. *Análise de Observabilidade*: verifica se os dados de medição pré-filtrados e com o modelo que representa a rede conduzem à obtenção dos resultados da EE para todo o sistema. Em caso negativo, as ilhas observáveis são identificadas. Adicionalmente, em caso de inobservabilidade, são identificadas as pseudomedidas que garantem o reestabelecimento da observabilidade do sistema. Pseudomedidas correspondem a valores que tomam por base dados históricos de medições, resultados de estimações anteriores ou estudos de previsão de carga de curto prazo [18]. Quanto menor a variabilidade da carga, menor será a incerteza associada à pseudomedida correspondente;
2. *Solução do Estimador de Estado*: considerada como o núcleo da função EE. Responsável por determinar a estimativa mais provável de estado do sistema, recorrendo a um conjunto redundante de medidas analógicas e lógicas para a construção do modelo barra-ramo da rede. Comumente, adota-se o método MQP nessa etapa. Conhecendo-se o estado da rede, as demais quantidades supervisionadas (até mesmo as que não o são) podem ser calculadas;
3. *Processamento de Erros Grosseiros*: módulo responsável por detectar e, se possível, identificar medidas portadoras de EGs, não identificadas no algoritmo de pré-filtragem, através da análise dos resíduos da EE. Para que essa etapa apresente

bom desempenho, é necessário que o sistema disponha de um plano de medição com um nível adequado de redundância. A análise de criticalidades informa sobre as limitações desse processo;

4. *Processamento de Erros Estruturais e de Parâmetros*: ocupa-se de detectar erros estruturais relacionados a existência de erros na base de dados de medidas lógicas, bem como parâmetros de elementos de rede (linhas de transmissão, transformadores, reatores, etc.).

A Figura 2.1 apresenta um esquema simplificado com os diferentes módulos da EE descritos anteriormente.

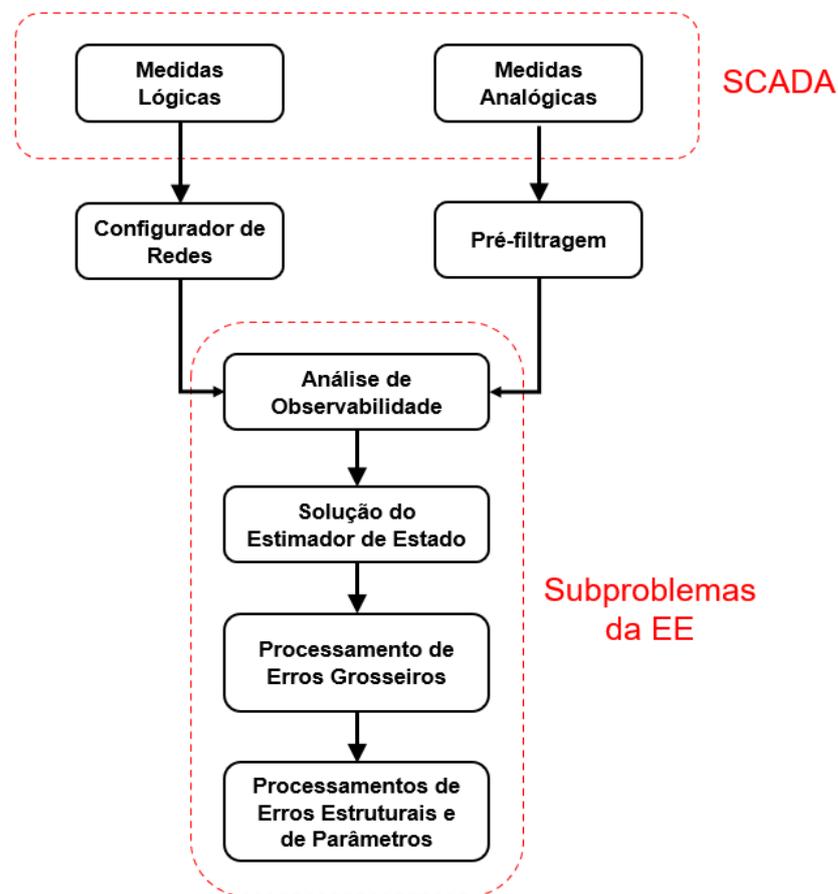


Figura 2.1: Módulos da função de EE.

2.3 Fundamentos da Estimação de Estado

A formulação clássica da EE em SEP é baseada na minimização da soma ponderada dos quadrados dos resíduos (estimadores do tipo MQP), em que as medidas com maior grau

de precisão preponderam-se sobre as demais no processo de EE. A relação entre estado do sistema e medidas, para uma dada configuração de rede, é descrita através de:

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{e} \quad (2.1)$$

Onde:

- \mathbf{z} — vetor das quantidades medidas, de dimensão $(m \times 1)$, sendo m a quantidade de medidas do sistema;
- \mathbf{h} — vetor de funções não-lineares (equações do problema de fluxo de potência), de dimensão $(m \times 1)$, que relaciona o estado às medidas;
- \mathbf{x} — vetor de estado, compreendendo as tensões complexas nas barras, de dimensão $(n \times 1)$, sendo n a quantidade de variáveis de estado do sistema, i.e., $n = 2NB - 1$ ($NB =$ quantidade de barras do sistema);
- \mathbf{e} — vetor que representa os erros de medição, de dimensão $(m \times 1)$.

Para modelagem dos erros de medição, assumem-se algumas hipóteses. Considera-se que os erros de medição são não-correlacionados, obedecendo uma distribuição normal (Gaussiana), com média zero ($E(e) = 0$) e matriz de covariância R . Como os erros de medição são não-correlacionados, a matriz R é diagonal, de dimensão $(m \times m)$, com elementos representando as variâncias dos erros de medição:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$$

A obtenção de uma estimativa do estado do sistema, baseando-se no método MQP, é dada através da solução da função objetivo:

$$\min_{\hat{\mathbf{x}}} J(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] \quad (2.2)$$

O estado $\hat{\mathbf{x}}$ que minimiza a função objetivo (2.2) deverá satisfazer a condição de otimalidade de primeira ordem, dada por:

$$\left. \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \Rightarrow \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{H}^\top(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] = 0 \quad (2.3)$$

Onde:

- $\mathbf{H} = \partial \mathbf{h} / \partial \mathbf{x}$: é a *matriz jacobiana* do processo de estimação, de dimensão $(m \times n)$, representando as derivadas das funções não-lineares pertencentes ao vetor \mathbf{h} .

Expandindo a função não-linear g em séries de Taylor e descartando os termos de ordem superior, tem-se que a solução do sistema (2.3) é obtida, de forma iterativa através do método de Gauss-Newton, por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{G}(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{H}^\top(\mathbf{x}_k) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)] \quad (2.4)$$

Onde:

- k — contador de iterações;
- \mathbf{x}_k — vetor de solução na iteração k ;
- $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \partial \mathbf{g}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} = \mathbf{H}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{x})$ — *matriz de ganho*, de dimensão $(n \times n)$, esparsa, positiva definida e simétrica [1].

Fazendo $\Delta \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ e multiplicando ambos os lados de (2.4) por $\mathbf{G}(\mathbf{x}_k)$, tem-se:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_k) \Delta \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{H}^\top(\mathbf{x}_k) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)] \quad (2.5)$$

A expressão (2.5) representa as chamadas *equações normais*, oriundas da aplicação do método MQP.

Em (2.5), deve-se arbitrar uma estimativa inicial para o vetor de estado \mathbf{x} . Tipicamente, considera-se o chamado perfil horizontal de tensões (*flat start*), i.e., um vetor com magnitude unitária e ângulo de fase nulo. O processo para estimação de estado do sistema resume-se aos seguintes passos [40]:

1. Inicializar o contador de iterações como $k = 0$;
2. Definir o vetor de estados \mathbf{x}_k como *flat start*;

3. Calcular a matriz de ganho $\mathbf{G}(\mathbf{x}_k)$;
4. Calcular a expressão $\mathbf{t}_k = \mathbf{H}^\top(\mathbf{x}_k) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)]$;
5. Resolver o sistema linear $\mathbf{G}(\mathbf{x}_k) \Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{t}_k$ para $\Delta \mathbf{x}_k$;
6. Atualizar o vetor de estado $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_k$;
7. Testar a convergência: se $\max |\Delta \mathbf{x}_k| \leq \epsilon$ (geralmente, $\epsilon = 10^{-4} pu$), então finalizar o processo iterativo e retornar o vetor de estado \mathbf{x}_k ;
8. Em caso de não convergência, fazer $k = k + 1$ e retornar ao passo 3.

Com o vetor de estado do sistema, calculam-se as demais quantidades: fluxos de potência ativa e reativa; injeções de potência ativa e reativa e magnitudes de corrente. Confrontando-se essas quantidades calculadas com os valores de medição correspondentes, é possível levantar suspeitas sobre a existência de EGs. Uma medida é dita portadora de EG quando seu valor medido for muito discrepante do valor calculado. Essas medidas, se utilizadas, comprometem a confiabilidade dos resultados da função de EE, sendo, portanto, imprescindível detectá-los, identificá-los e removê-los (e.g., substituição por pseudomedidas).

O vetor de resíduos da estimação \mathbf{r} , de dimensão $(m \times 1)$, é dado por:

$$\mathbf{r} = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] \quad (2.6)$$

Onde:

- $\hat{\mathbf{x}}$ — vetor de estado obtido do método MQP.

Para identificação das medidas portadoras de EGs, cada i -ésimo elemento do vetor de resíduos da estimação \mathbf{r} são normalizados e submetidos ao seguinte teste de validação:

$$r_i^N = \frac{|r_i|}{\sigma_{E_i}} = \frac{|r_i|}{\sqrt{E_{i,i}}} \leq \lambda \quad (2.7)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{R} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}})^\top \quad (2.8)$$

Onde:

- r_i^N — resíduo normalizado do i -ésimo elemento do vetor de resíduos r ;
- $\sigma_{E_i} = \sqrt{E_{i,i}}$ — desvio padrão do i -ésimo elemento do vetor de resíduos r ;
- \mathbf{E} — matriz de covariância dos resíduos da estimação, de dimensão $(m \times m)$;
- $E_{i,i}$ — elemento da linha i e coluna i da matriz de covariância E ;
- λ — limiar de detecção de erros grosseiros.

As medidas cujos valores correspondentes de resíduos normalizados excederem o valor do limiar de detecção λ são assinaladas como suspeitas de estarem contaminadas por EGs [40].

2.4 Análise de Observabilidade

O problema da observabilidade consiste basicamente em determinar se, com o conjunto de medidas disponíveis em uma determinada topologia da rede, pode-se estimar todas as variáveis de estado do sistema. Na fase de comissionamento da EE, a análise de observabilidade ocorre offline. Essa análise deve ocorrer rotineiramente online, no início da execução da função EE, a fim de verificar se os dados de medição correntes garantem a obtenção do estado do sistema como um todo [1].

Em caso de inobservabilidade, tal análise poderá prover informações relevantes sobre as ilhas observáveis da rede. Alternativamente, pode também indicar as pseudomedidas apropriadas que, ao serem inseridas no sistema de medição deficitário, resultarão no restabelecimento da observabilidade de todo o sistema [40].

A análise de observabilidade pode ser realizada por abordagens numéricas e/ou topológicas. A abordagem topológica consiste numa análise qualitativa, aplicando-se a teoria dos grafos. A abordagem numérica, foco desta seção, consiste na aplicação de métodos baseados na manipulação da matriz Jacobiana, de Ganho ou Gram (realizando operações aritméticas de ponto flutuante). Em caso de observabilidade do sistema, o posto dessas matrizes será máximo.

Sem perda de generalidade, a análise de observabilidade é normalmente realizada adotando-se o modelo linear de estimação, com as seguintes simplificações [1] [26] [40]:

- medidas de fluxo e injeção de potência são tomadas aos pares (ativa-reativa);

- magnitudes de tensão nas barras são unitárias e iguais entre si;
- reatâncias série das linhas de transmissão são unitárias ($b_{k,m} = 1$); e
- reatâncias shunt e resistências das linhas de transmissão são desconsideradas.

Aplicando-se as hipóteses simplificadoras anteriores, tem-se a relação linear entre estado (ângulo de fase) e as quantidades ativas medidas, dada por:

$$\bar{z} = \bar{H}\theta + \bar{e} \quad (2.9)$$

Onde:

- \bar{z} — vetor das medidas ativas (fluxos de potência ativa e injeções de potência ativa), de dimensão ($m \times 1$), sendo m a quantidade de medidas ativas do sistema;
- \bar{H} — matriz Jacobiana referente às medidas ativas (equações linearizadas do problema de fluxo de potência), de dimensão ($m \times n$), que relaciona linearmente o estado às medidas;
- θ — vetor de estado, compreendendo os ângulos de fase de tensão nas barras, de dimensão ($n \times 1$), sendo n a quantidade de variáveis de estado do sistema, $n = NB - 1$ ($NB =$ número de barras do sistema);
- \bar{e} — vetor que modela os erros de medição, de dimensão ($m \times 1$).

A equação (2.9) caracteriza um *estimador linear*, pois se estabelece uma relação linear entre medidas ativas e ângulo de fase das tensões nodais. Note que as medidas reativas (fluxos de potência reativa e injeções de potência reativa) foram desconsideradas, bem como as variáveis de estado referentes às magnitudes das tensões nodais. Isso se assemelha ao princípio considerado no fluxo de potência desacoplado, que consiste em assumir que as medidas ativas fornecem mais informações sobre os ângulos de fase das tensões nodais correspondentes do que sobre as magnitudes dessas [39].

Os elementos da matriz Jacobiana \bar{H} , referente à i -ésima medida, são definidos do seguinte modo:

- Fluxo de potência ativa P_{k-m} entre as barras k e m :

$$\bar{H}_{i,k} = b_{k,m} \quad \text{e} \quad \bar{H}_{i,m} = -b_{k,m} \quad (2.10)$$

- Injeção de potência ativa P_k na barra k :

$$\overline{H}_{i,k} = \sum_{m \in \xi} b_{k,m} \quad , \quad k \neq m \quad \text{e} \quad \overline{H}_{i,m} = -b_{k,m} \quad (2.11)$$

Onde:

- ξ — vizinhança da barra k .

- Corrente de ramo I_{k-m} entre as barras k e m :

$$\overline{H}_{i,k} = b_{k,m} \quad \text{e} \quad \overline{H}_{i,m} = -b_{k,m} \quad (2.12)$$

- Ângulo de fase de tensão nodal θ_k na barra k :

$$\overline{H}_{i,k} = 1 \quad (2.13)$$

Analisando-se a estrutura de $\overline{\mathbf{H}}$, caracterizada por (2.10), (2.11), (2.12) e (2.13), as seguintes afirmações podem ser feitas [47]:

- uma medida de fluxo de potência ativa relaciona os ângulos de fase das tensões nas barras terminais do ramo monitorado;
- uma injeção de potência ativa relaciona o ângulo de fase de tensão na barra monitorada com os ângulos de fase das tensões nas barras adjacentes;
- uma medida de corrente pode ser interpretada como uma medida de fluxo de potência [1]; e
- uma medida de ângulo de fase de tensão nodal apenas contém informações sobre a própria barra monitorada.

Após obtenção da matriz Jacobiana $\overline{\mathbf{H}}$, seguindo as regras de construção anteriores, determina-se a matriz de Ganho linear $\overline{\mathbf{G}}$, dada através da seguinte equação:

$$\overline{\mathbf{G}} = \overline{\mathbf{H}}^T \overline{\mathbf{R}}^{-1} \overline{\mathbf{H}} \quad (2.14)$$

No modelo linearizado, considera-se que os erros de medição em $\overline{\mathbf{e}}$ obedecem uma distribuição normal, de média zero e matriz de covariância $\overline{\mathbf{R}}$ igual à matriz identidade \mathbf{I} .

Como $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$ e a matriz identidade é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, a (2.14) torna-se:

$$\bar{\mathbf{G}} = \bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}} \quad (2.15)$$

O sistema é considerado numericamente observável se a matriz de ganho linear $\bar{\mathbf{G}}$ for inversível (ou não-singular), característica verificada aplicando-se técnicas de escalonamento de matrizes (e.g., eliminação de Gauss). Em caso de inobservabilidade, serão identificados pivôs nulos durante o processo de fatoração.

A matriz de covariância dos resíduos da estimação linear $\bar{\mathbf{E}}$, de dimensão $(m \times m)$, é dada por:

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{I} - \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{G}}^{-1} \bar{\mathbf{H}}^T \quad (2.16)$$

Assim como a matriz de ganho $\bar{\mathbf{G}}$, considera-se o sistema numericamente observável se a matriz de covariância de resíduos $\bar{\mathbf{E}}$ for inversível.

2.5 Criticalidades

A análise de criticalidade destaca-se por estabelecer graus de observabilidade de um sistema, i.e., identificar cenários de inobservabilidade, consoante as possíveis indisponibilidades de elementos de rede, ora presentes em determinada execução da EE. Os elementos de rede, cuja indisponibilidade poderá resultar em inobservabilidade da rede, são ramos (linhas de transmissão), unidades de medição (e.g., UTRs, DEIs e UMFs) e medidas individuais. Salienta-se que esta Dissertação se concentra na análise de criticalidades de medidas individuais, sem importar em que unidades de medição se originaram.

A redundância de medidas (variadas e estrategicamente posicionadas na rede elétrica) é um requisito vital para a plena funcionalidade da EE. Um sistema de medição deficiente, além dos riscos iminentes à observabilidade, compromete a capacidade da EE de detecção e identificação de medidas corrompidas, comprometendo a qualidade dos valores estimados, circunstância extraordinária para os seus usuários. Essas possíveis limitações da EE estão intimamente relacionadas à presença de dados críticos.

Uma medida crítica (C_{med}) diz respeito a um elemento não redundante para o processo de EE, cuja remoção do plano de medição torna o sistema inobservável [15]. Isto significa

que não há como estimar um valor diferente daquele medido para a referida grandeza. Sob o aspecto numérico, os resíduos de estimação referentes a C_{meds} e, conseqüentemente, as respectivas covariâncias são sempre nulas [26]. Portanto, durante o processamento da EE, a i -ésima medida será classificada como C_{med} se:

$$r_i = 0 \quad (2.17)$$

$$\sigma_{E_i} = \sqrt{E_{i,i}} = 0 \quad (2.18)$$

Por outro lado, um par crítico (C_{par}) refere-se àquele composto por duas medidas não críticas, onde a indisponibilidade de uma dessas torna a outra C_{med} [27]. As medidas que constituem um C_{par} apresentam resíduos iguais entre si, o que impossibilita a correta identificação de EG em quaisquer dessas [21], embora ainda seja possível a detecção.

Um conjunto crítico (C_{conj}) forma-se por duas ou mais medidas, do qual a remoção de qualquer uma dessas torna as remanescentes C_{meds} . As combinações dos elementos de um C_{conj} tomados dois a dois representam C_{pares} [5]. Conseqüentemente, a remoção de duas medidas quaisquer pertencentes a um C_{conj} torna o sistema inobservável. Os resíduos normalizados das medidas pertencentes a um mesmo C_{conj} são numericamente idênticos, ou seja [24]:

$$\rho_{k-m} = \frac{r_k^N}{r_m^N} = 1 \quad (2.19)$$

Além disso, para duas medidas pertencentes a um mesmo C_{conj} , tem-se o seguinte coeficiente de correlação [24]:

$$\gamma_{k-m} = \frac{|E_{k,m}|}{\sqrt{E_{k,k}} \sqrt{E_{m,m}}} = 1 \quad (2.20)$$

Onde:

- γ_{k-m} — coeficiente de correlação entre as medidas z_k e z_m .

Para identificação de C_{meds} e C_{conjs} em um sistema de medição, é suficiente a aplicação do estimador linear [1]. Baseando-se no método MQP, o vetor de resíduos do modelo linear de estimação \bar{r} , de dimensão $(m \times 1)$, referente às m medidas ativas do sistema, é dado por [26]:

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{z}} \quad (2.21)$$

O procedimento numérico para identificação de C_{meds} e C_{conj} resume-se nos seguintes passos:

1. Construir a matriz Jacobiana $\bar{\mathbf{H}}$, de acordo as medidas ativas (fluxo de potência ativa, injeção de potência ativa, corrente de ramo e ângulos de fase de tensão) disponíveis e topologia da rede. Definir valores arbitrários para o vetor de medidas ativas $\bar{\mathbf{z}}$;
2. Para cada medida ativa \bar{z}_i , calcular $\bar{E}_{i,i}$ e \bar{r}_i , aplicando as equações (2.16) e (2.21), respectivamente. Se $\bar{E}_{i,i} = \bar{r}_i = 0$, classificar \bar{z}_i como C_{med} ;
3. Para cada medida \bar{z}_i não classificada como C_{med} , calcular o resíduo normalizado \bar{r}_i^N , dado por:

$$\bar{r}_i^N = \frac{|\bar{r}_i|}{\sqrt{\bar{E}_{i,i}}}$$

4. Ordenar os resíduos normalizados, calculados no passo anterior, de modo decrescente;
5. Comparar sequencialmente os resíduos normalizados, agrupando medidas com valores de resíduos normalizados iguais entre si;
6. Para cada conjunto de medidas formado no passo anterior:
 - (a) Calcular o coeficiente de correlação para cada combinação de medidas tomadas dois a dois. Considerando uma combinação formada pelas medidas \bar{z}_k e \bar{z}_m pertencentes a um conjunto formado no *passo 5*, tem-se o coeficiente de correlação $\bar{\gamma}_{k-m}$ dado por:

$$\bar{\gamma}_{k-m} = \frac{|\bar{E}_{k,m}|}{\sqrt{\bar{E}_{k,k}} \sqrt{\bar{E}_{m,m}}}$$

- (b) Manter no conjunto todas as medidas que possuem coeficientes de correlação unitárias entre si ($\bar{\gamma}_{k-m} = 1$).

7. Classificar como C_{conj} os conjuntos que contêm mais de uma medida.

A generalização do conceito de criticalidades de elementos de rede se dá pela definição de uma *k-tupla crítica* ($C_{k-tupla}$): um grupo de k medidas que indisponíveis simultaneamente tornam o sistema inobservável. À vista disso, tem-se que uma C_{med} representa uma $C_{1-tupla}$. Os C_{pares} que constituem um C_{conj} são, portanto, $C_{2-tuplas}$. A cardinalidade k de uma $C_{k-tupla}$ refere-se a quantidade de medidas que a integram. As $C_{k-tuplas}$ de cardinalidades superiores a dois fornecem informações sobre a capacidade de processamento de múltiplos EGs mediante a análise de resíduos da estimação. Uma $C_{k-tupla}$ apresenta as seguintes propriedades:

- **Propriedade 1** : Uma $C_{k-tupla}$ não contém uma $C_{j-tupla}$, para $\forall j < k$.

Demonstração: de acordo com a definição de $C_{k-tupla}$, apenas a remoção de todas as k medidas torna o sistema inobservável. Consequentemente, a remoção de $j < k$ não resultará na inobservabilidade, portanto esse subconjunto não é uma $C_{j-tupla}$. ■

- **Propriedade 2** : A eventual indisponibilidade de r elementos de uma $C_{k-tupla}$, supondo $r < k$, tem-se que as $k - r$ medidas remanescentes formam uma $C_{(k-r)-tupla}$.

Demonstração: de acordo com a *propriedade 1*, a remoção de $j < k$ medidas que constituem uma $C_{k-tupla}$ não compromete a observabilidade do sistema. Logo, a remoção das $k - r$ medidas remanescentes da $C_{k-tupla}$ inicial tornará o sistema inobservável. Portanto, tem-se que essas medidas formam uma $C_{(k-r)-tupla}$. ■

- **Propriedade 3** : Para um sistema de medição composta de m medidas, a cardinalidade máxima teórica k_{max} de uma $C_{k-tupla}$ é dada por [38]:

$$k_{max} = m - (n - 1) \quad (2.22)$$

Onde:

- n — quantidade de elementos do vetor de estado a serem processados na rotina de estimação.

- **Propriedade 4** : A submatriz da matriz de covariância dos resíduos $\bar{\mathbf{E}}$ (ou \mathbf{E}) correspondente às medidas que constituem uma $C_{k-tupla}$ não é inversível (singular), representando um conjunto linearmente dependente [3].

A abordagem numérica comumente empregada para identificação de $C_{k-tuplas}$ num sistema baseia-se na construção da matriz de covariância $\bar{\mathbf{E}}$. Como cada linha e coluna dessa

matriz refere-se a uma determinada medida do plano de medição, formam-se submatrizes cujas linhas e colunas correspondem ao grupo de medidas a serem avaliadas. Se uma submatriz, de tamanho $(k \times k)$, em $\overline{\mathbf{E}}$ formar pivôs nulos no processo de escalonamento, então o grupo de k medidas correspondentes contém ou representa uma $C_{k\text{-tupla}}$. Para garantir que a *propriedade 1* não seja violada, comumente buscam-se as $C_{k\text{-tuplas}}$ em ordem crescente de cardinalidade.

O problema de busca por $C_{k\text{-tuplas}}$ de cardinalidade superior a dois tem recebido pouco destaque por parte da literatura especializada, pois trata-se de um problema NP-difícil [48], não sendo, portanto, possível identificar todas as $C_{k\text{-tuplas}}$ de um sistema de medição em tempo polinomial.

Capítulo 3

Noções Básicas da Teoria dos Grafos

O capítulo anterior trouxe aspectos básicos da EE em SEP, dando destaque para os problemas da observabilidade e de criticalidades de medidas em redes elétricas supervisionadas. O presente capítulo apresenta as noções básicas de teoria dos grafos, e estabelece a notação aqui adotada, necessárias ao pleno entendimento da metodologia proposta nesta Dissertação. Tais noções, por exemplo, tratam de grafos simples, digrafos, multigrafos, árvores e florestas. Os problemas de conectividade e coloração de grafos também são abordados. Para os leitores familiarizados com a teoria dos grafos, sugere-se avançar para o próximo capítulo.

3.1 Sete Pontes de Königsberg

Possivelmente, o problema das *Sete Pontes de Königsberg* apresenta-se como um dos mais emblemáticos da história da Matemática. Baseia-se na antiga cidade de Königsberg (atualmente, Kaliningrado), onde havia um conjunto de sete pontes que cruzavam o rio Pregel, conforme indica a Figura 3.1.

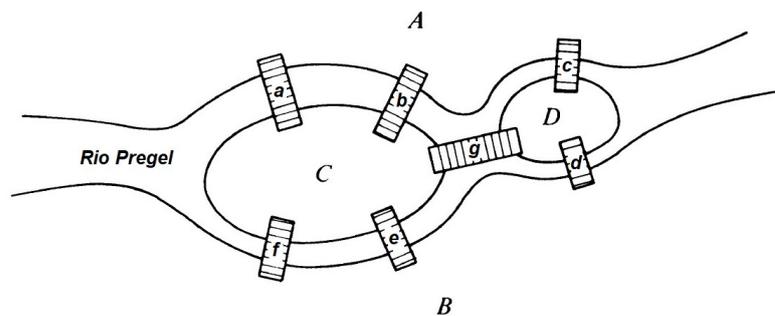


Figura 3.1: O problema das Sete Pontes de Königsberg. Adaptado de [22].

Essas pontes conectavam duas ilhas (C e D) entre si e com as margens (A e B). Durante muito tempo, os habitantes dessa cidade discutiam sobre a possibilidade de atravessar as sete pontes numa caminhada contínua, sem atravessar duas vezes uma mesma ponte. A possibilidade dessa façanha tornara-se uma duradoura lenda popular. Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) apresentou uma solução para esse problema, concluindo que um caminho, obedecendo as condições impostas, era impossível.

Para chegar à resposta do problema, Euler construiu um diagrama para representação do mapa da cidade: representou as regiões (as ilhas e as margens) como pontos no espaço e as pontes por linhas os conectando. A Figura 3.2 ilustra a estrutura desenvolvida por Euler.

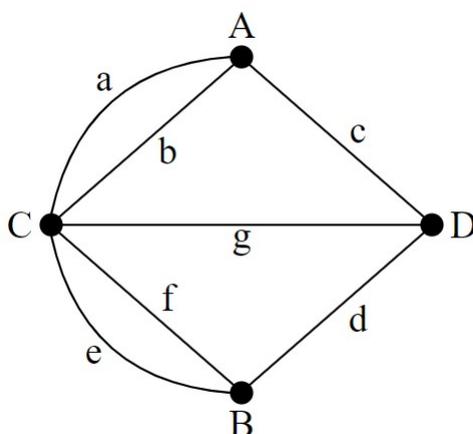


Figura 3.2: Modelagem do problema das Setes Pontes de Königsberg.

Essa estrutura ficou conhecida como, possivelmente, o primeiro grafo da História. Analisando o grafo construído, Euler concluiu que a travessia desejada só seria possível se todos os pontos fossem atingidos diretamente por uma quantidade par de linhas, pois é necessário uma linha (ponte) distinta para entrar e outra para sair do ponto (região). No problema em questão, os pontos A e B são conectados por uma quantidade ímpar de linhas, sendo, portanto, impossível a existência do trajeto procurado.

A publicação de Euler, que aborda a solução do problema das Sete Pontes de Königsberg, é considerada como a obra seminal da área da teoria dos grafos [2] [22]. Com os resultados de Euler, pode-se concluir que um grafo é uma estrutura de abstração útil na representação e solução de problemas práticos. Por sua simplicidade e generalidade, a teoria dos grafos tem uma ampla gama de aplicações na Engenharia, nas Ciências Físicas, Sociais, Biológicas e em inúmeras outras áreas [22]. Matematicamente, um grafo estabelece as relações de interdependência existentes entre elementos de um conjunto [32].

3.2 Definições Iniciais

Um *grafo simples* \mathcal{G} contém um conjunto de *vértices*, denotado por $V(\mathcal{G})$, e um conjunto de *arestas*, denotado por $E(\mathcal{G})$. Atribui-se a cada aresta um par não ordenado (x, y) de vértices distintos x e y , que são chamados de *extremos* dessa aresta [46]. Chamam-se de *adjacentes*, *conectados* ou *vizinhos* os vértices que compõem uma mesma aresta. Seja um grafo \mathcal{G} , onde $V(\mathcal{G}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $E(\mathcal{G}) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 7), (6, 7)\}$. A Figura 3.3 ilustra duas representações geométricas diferentes desse grafo \mathcal{G} .

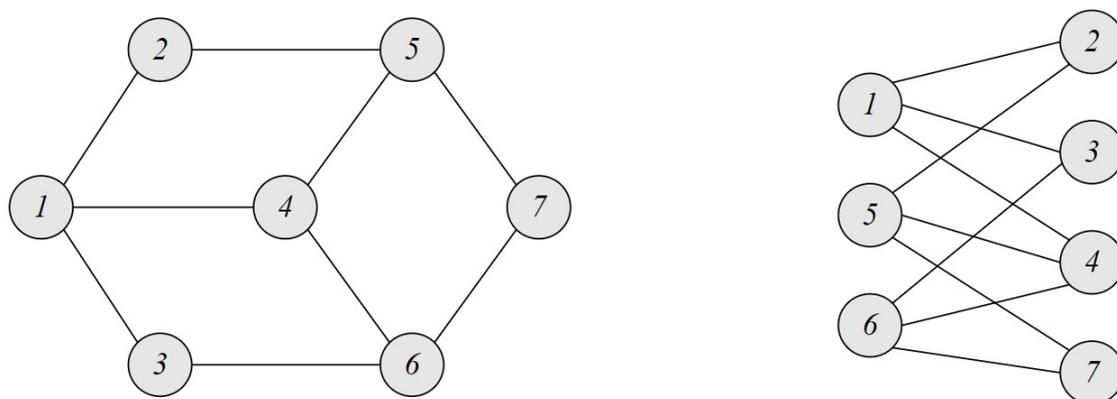


Figura 3.3: Representações geométricas distintas para o mesmo grafo. Adaptado de [46].

A *ordem* de um grafo é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices, i.e., $|V(\mathcal{G})|$, e o *tamanho* de um grafo pela soma das cardinalidades dos conjuntos de vértices e arestas, ou seja, $|V(\mathcal{G})| + |E(\mathcal{G})|$. Um *grafo trivial* é aquele com um único vértice (ordem unitária). Um *grafo nulo* é aquele com conjuntos de vértices e arestas vazios [56].

O *grau* $d(v)$ de um vértice v é igual à quantidade de arestas incidentes. A *vizinhança* $N(v)$ de um vértice v é o conjunto de seus vizinhos (ou vértices adjacentes). Em um grafo simples, o grau de um vértice é igual à cardinalidade do conjunto de seus vizinhos, ou seja, $d(v) = |N(v)|$. Um vértice *isolado* tem grau zero. A Tabela 3.1 relaciona os graus e vizinhanças de cada vértice pertencente ao grafo \mathcal{G} representado na Figura 3.3.

Tabela 3.1: Grau e vizinhança dos vértices do grafo \mathcal{G} .

v	1	2	3	4	5	6	7
$d(v)$	3	2	2	3	3	3	2
$N(v)$	{2, 3, 4}	{1, 5}	{1, 6}	{1, 5, 6}	{2, 4, 7}	{3, 4, 7}	{5, 6}

Em um grafo, duas ou mais arestas que unem o mesmo par de vértices (isto é, arestas com mesmos extremos) são chamadas de *arestas múltiplas*. Uma aresta que possui extremos iguais é chamada de *laço*. Um grafo simples é um grafo que não admite arestas múltiplas e laços. Em contrapartida, um *multigrafo* é um grafo que admite arestas múltiplas e laços, portanto, uma generalização do conceito de grafo de simples.

As definições anteriores de grau e vizinhança de um vértice são válidas para multigrafos, destacando-se que, para cada laço incidente em um vértice incrementa-se o respectivo grau em duas unidades. Na representação numérica do conjunto de arestas de um multigrafo, diferentemente do grafo simples, as arestas correspondem a pares não ordenados associados a um elemento adicional para distinção entre arestas múltiplas.

A Figura 3.4 ilustra um multigrafo \mathcal{G}_m , onde $V(\mathcal{G}_m) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $E(\mathcal{G}_m) = \{(1, 2, 0), (1, 3, 0), (1, 4, 0), (1, 4, 1), (2, 5, 0), (3, 6, 0), (3, 6, 1), (3, 6, 2), (4, 4, 0), (4, 5, 0), (4, 6, 0), (5, 7, 0), (5, 7, 1), (5, 7, 2), (6, 7, 0), (6, 7, 1)\}$.

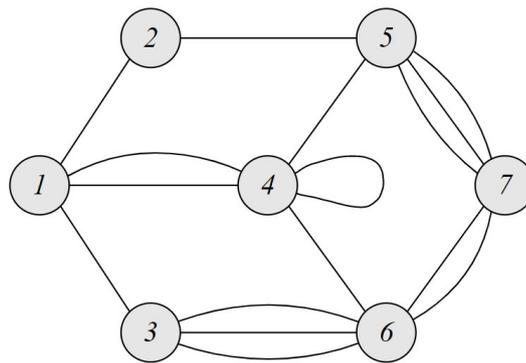


Figura 3.4: Representação de um multigrafo.

3.3 Subgrafos

Outra definição importante da teoria dos grafos é a de *subgrafos*. Um subgrafo de um grafo \mathcal{G} é um grafo \mathcal{H} com todos os vértices em $V(\mathcal{H})$ e todas as arestas em $E(\mathcal{H})$ pertencentes aos conjuntos $V(\mathcal{G})$ e $E(\mathcal{G})$, respectivamente. Matematicamente, tem-se que \mathcal{H} é subgrafo de \mathcal{G} se $V(\mathcal{H}) \subseteq V(\mathcal{G})$ e $E(\mathcal{H}) \subseteq E(\mathcal{G})$. Além disso, escreve-se $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ para afirmar que “o grafo \mathcal{G} contém o grafo \mathcal{H} ” [56].

O grafo \mathcal{H} é um *subgrafo próprio* de \mathcal{G} quando \mathcal{H} for um subgrafo de \mathcal{G} que não é o próprio \mathcal{G} , isto é, $V(\mathcal{H}) \subset V(\mathcal{G})$ e $E(\mathcal{H}) \subset E(\mathcal{G})$ [46]. A Figura 3.5 exemplifica um subgrafo próprio \mathcal{H} do grafo \mathcal{G} .

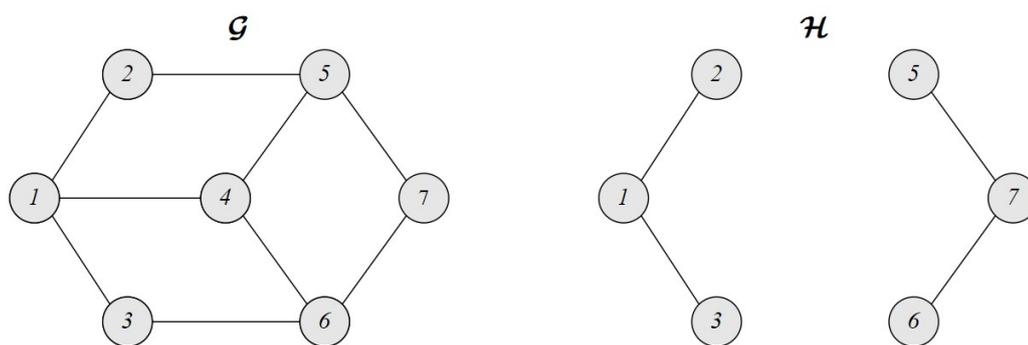


Figura 3.5: Exemplo de um subgrafo próprio \mathcal{H} de \mathcal{G} .

Um *subgrafo gerador* (em inglês, *spanning subgraph*) de um grafo \mathcal{G} é um subgrafo \mathcal{H} que contém todos os vértices de \mathcal{G} , mas não propriamente todas as arestas de \mathcal{G} . Matematicamente, tem-se que \mathcal{H} é subgrafo gerador de \mathcal{G} se $V(\mathcal{H}) = V(\mathcal{G})$ e $E(\mathcal{H}) \subseteq E(\mathcal{G})$. A Figura 3.6 apresenta um subgrafo gerador \mathcal{H} obtido do grafo \mathcal{G} .

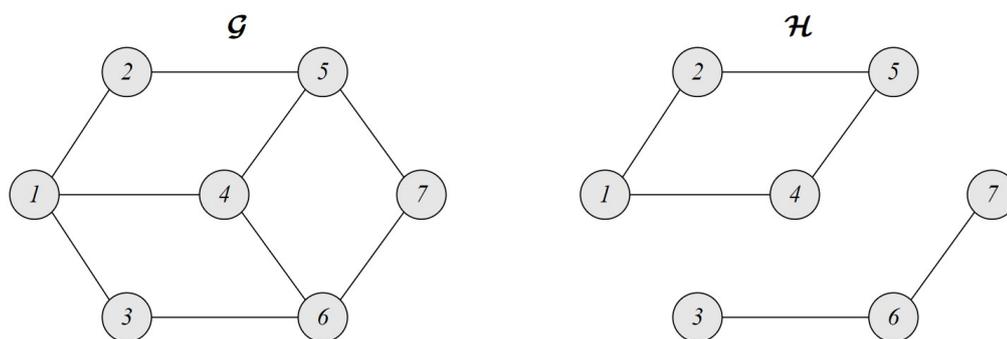
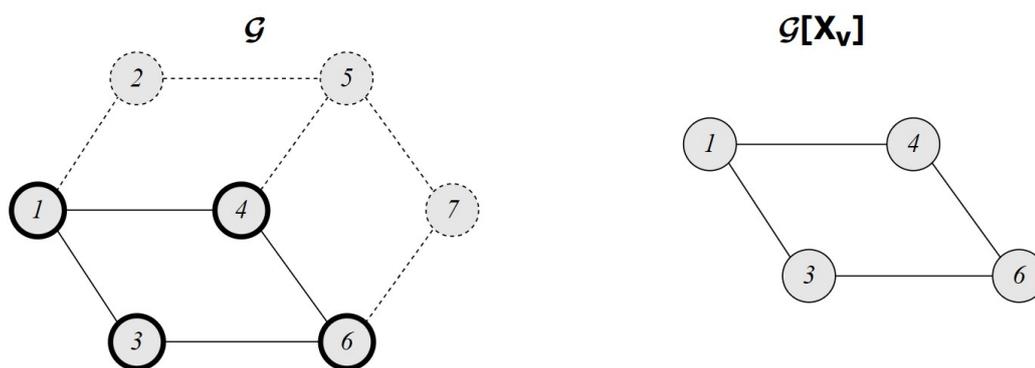
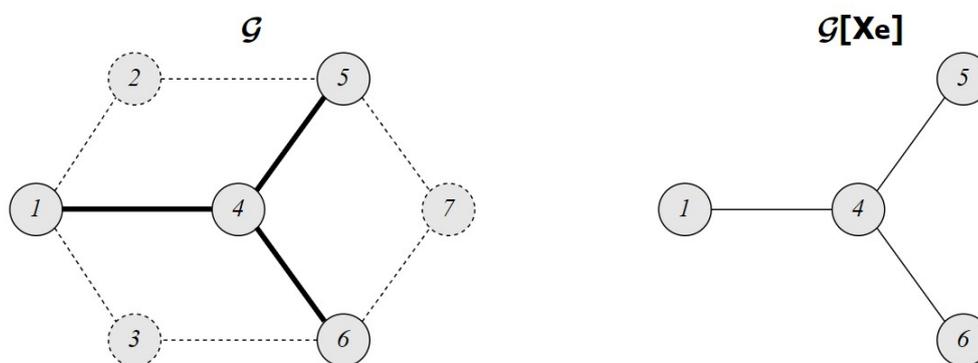


Figura 3.6: Exemplo de um subgrafo gerador \mathcal{H} de \mathcal{G} .

Seja X_v um subconjunto de vértices de um grafo \mathcal{G} , isto é, $X_v \subseteq V(\mathcal{G})$. Um *subgrafo induzido por um conjunto de vértices* X_v é um subgrafo \mathcal{H} de \mathcal{G} , denotado por $\mathcal{G}[X_v]$, formado por todos os vértices em X_v ($V(\mathcal{H}) = X_v$) e todas as arestas de \mathcal{G} que possuem seus dois extremos em X_v , ou seja, $E(\mathcal{H}) = \{(x, y) \mid x, y \in X \wedge (x, y) \in E(\mathcal{G})\}$ [46]. A Figura 3.7 ilustra um subgrafo induzido $\mathcal{G}[X_v]$ de \mathcal{G} , onde $X_v = \{1, 3, 4, 6\}$.

Considerando X_e um subconjunto de arestas de um grafo \mathcal{G} , i.e., $X_e \subseteq E(\mathcal{G})$, tem-se que um *subgrafo induzido por um conjunto de arestas* X_e é um subgrafo \mathcal{H} de \mathcal{G} , denotado por $\mathcal{G}[X_e]$, formado por todas as arestas em X_e ($E(\mathcal{H}) = X_e$) e todos os vértices de \mathcal{G} que são extremos de alguma aresta em X_e . A Figura 3.8 ilustra um subgrafo induzido $\mathcal{G}[X_e]$ de \mathcal{G} , onde $X_e = \{(1, 4), (4, 5), (4, 6)\}$.

Figura 3.7: Subgrafo induzido $\mathcal{G}[X_v]$ de \mathcal{G} .Figura 3.8: Subgrafo induzido $\mathcal{G}[X_e]$ de \mathcal{G} .

3.4 Operações Básicas com Grafos

Seja um grafo \mathcal{G} e a aresta e pertencente ao conjunto $E(\mathcal{G})$. Denota-se por $\mathcal{G} - e$ o grafo obtido pela remoção da aresta e de \mathcal{G} . Sejam $x, y \in V(\mathcal{G})$ vértices não adjacentes entre si em \mathcal{G} , então a notação $\mathcal{G} + (x, y)$ representa o grafo obtido ao inserir a aresta (x, y) em \mathcal{G} .

Analogamente, considere um vértice v pertencente ao grafo \mathcal{G} , isto é, $v \in V(\mathcal{G})$. O grafo $\mathcal{G} - v$ consiste naquele obtido pela exclusão do vértice v de \mathcal{G} . De forma similar, tem-se que $\mathcal{G} + v$ representa o grafo obtido pela inserção do vértice v em \mathcal{G} . Além disso, considere X_v um subconjunto de vértices de \mathcal{G} , tem-se que $\mathcal{G} - X_v$ representa o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $V(\mathcal{G}) \setminus X_v$, ou seja, $\mathcal{G}[V(\mathcal{G}) \setminus X_v]$.

Denota-se o grafo obtido da operação de *união* entre dois grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} por $\mathcal{G} \cup \mathcal{H}$, tal que os conjuntos resultantes de vértices e arestas são, respectivamente, dados por:

$$V(\mathcal{G} \cup \mathcal{H}) = V(\mathcal{G}) \cup V(\mathcal{H}) \quad \text{e} \quad E(\mathcal{G} \cup \mathcal{H}) = E(\mathcal{G}) \cup E(\mathcal{H})$$

Representa-se o grafo resultante da operação de *intersecção* entre dois grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} por $\mathcal{G} \cap \mathcal{H}$, caracterizado pelos seguintes conjuntos de vértices e arestas, respectivamente:

$$V(\mathcal{G} \cap \mathcal{H}) = V(\mathcal{G}) \cap V(\mathcal{H}) \quad \text{e} \quad E(\mathcal{G} \cap \mathcal{H}) = E(\mathcal{G}) \cap E(\mathcal{H})$$

Se dois grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} não possuem vértices em comum (isto é, $V(\mathcal{G}) \cap V(\mathcal{H}) = \emptyset$), então são denominados como *disjuntos em vértices*. Analogamente, se os grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} não possuem arestas em comum (isto é, $E(\mathcal{G}) \cap E(\mathcal{H}) = \emptyset$), então são denominados como *disjuntos em arestas*. Quando dois grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} são disjuntos em vértices, tem-se que obrigatoriamente são disjuntos em arestas. Entretanto, dois grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} disjuntos em arestas podem dispor de alguns vértices em comum, não sendo necessariamente disjuntos em vértices [46].

O *complemento* de um grafo \mathcal{G} é o grafo $\overline{\mathcal{G}}$ formado pelos mesmos vértices de \mathcal{G} , ou seja, $V(\mathcal{G}) = V(\overline{\mathcal{G}})$, tal que são disjuntos em arestas ($E(\mathcal{G}) \cap E(\overline{\mathcal{G}}) = \emptyset$). Informalmente, se quaisquer dois vértices pertencentes a $V(\mathcal{G}) = V(\overline{\mathcal{G}})$ são adjacentes em \mathcal{G} , então esses mesmos vértices não são adjacentes em $\overline{\mathcal{G}}$. Analogamente, pares de vértices adjacentes em $\overline{\mathcal{G}}$ não são adjacentes em \mathcal{G} . A Figura 3.9 ilustra um exemplo de um grafo \mathcal{G} e seu complemento $\overline{\mathcal{G}}$.

A operação de união entre um grafo simples \mathcal{G} e seu complemento $\overline{\mathcal{G}}$ resulta em um *grafo completo*. Um grafo completo é um grafo simples tal que todos os seus vértices são adjacentes entre si.

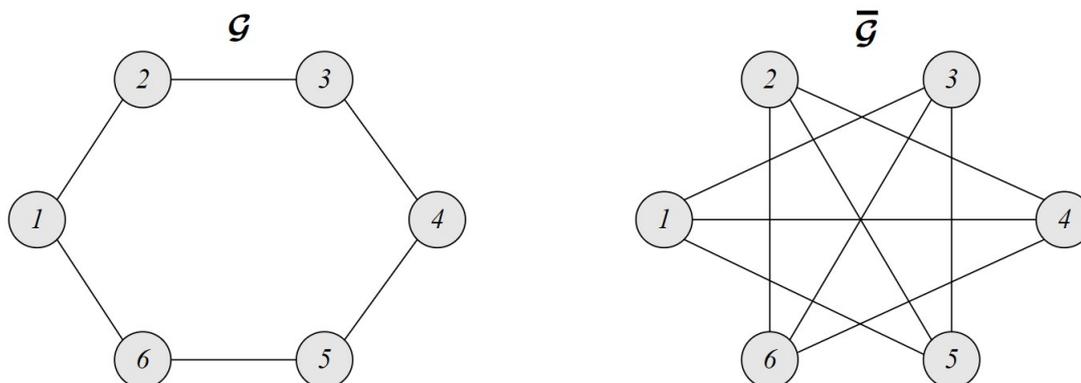


Figura 3.9: Complemento $\overline{\mathcal{G}}$ de um grafo \mathcal{G} .

3.5 Isomorfismo

Um grafo \mathcal{G} é completamente determinado a partir do conhecimento de seus conjuntos de vértices $V(\mathcal{G})$ e arestas $E(\mathcal{G})$ [2]. Sendo assim, dois grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} são *iguais* quando possuem os respectivos conjuntos de vértices e arestas iguais entre si. De acordo com essa definição, tem-se que grafos com representações geométricas distintas não são necessariamente diferentes (e.g., grafos representados na Figura 3.3), bem como grafos com mesma representação geométrica não são necessariamente iguais. Assim sendo, é importante distinguir grafos estruturalmente através do conceito de *isomorfismo*.

Classificam-se dois grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} como *isomorfos*, denotado por $\mathcal{G} \cong \mathcal{H}$, quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus respectivos vértices e arestas, obedecendo suas relações de incidência. Informalmente, \mathcal{G} e \mathcal{H} são estruturalmente iguais, porém os vértices possuem rotulações distintas. Para torná-los iguais, de acordo com a definição de igualdade entre grafos, basta modificar a rotulação de vértices de um deles. Matematicamente, os grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} são isomorfos se existir uma função bijetora $f : V(\mathcal{G}) \rightarrow V(\mathcal{H})$ tal que $(x, y) \in E(\mathcal{G})$ se e somente se $(f(x), f(y)) \in E(\mathcal{H})$ [46]. A Figura 3.10 exemplifica dois grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} diferentes, pois $V(\mathcal{G}) \neq V(\mathcal{H})$ e $E(\mathcal{G}) \neq E(\mathcal{H})$, e isomorfos.

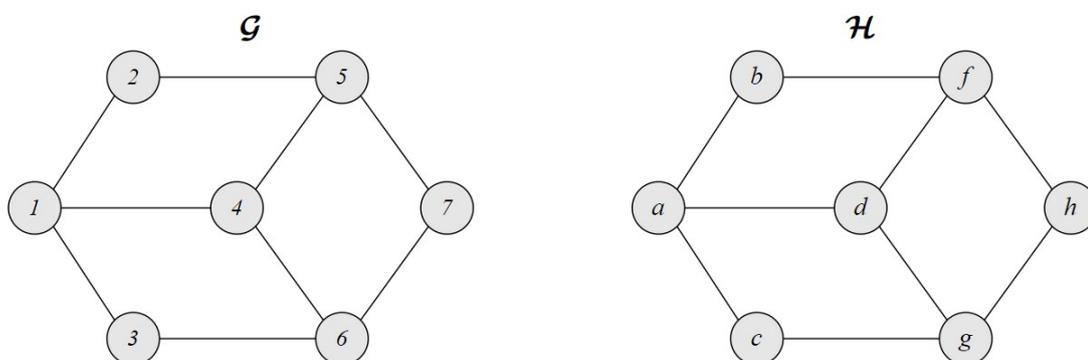


Figura 3.10: Grafos isomorfos.

A correspondência biunívoca entre os vértices dos grafos ilustrados na Figura 3.10 é apresentada na Tabela 3.2.

Tabela 3.2: Correspondência biunívoca entre os vértices de G e H .

v	a	b	c	d	f	g	h
$f(v)$	1	2	3	4	5	6	7

Considere dois grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} . Caso exista algum subgrafo de \mathcal{G} isomorfo ao grafo \mathcal{H} , afirma-se que \mathcal{G} contém \mathcal{H} . Quando existe algum subgrafo induzido de \mathcal{G} que seja isomorfo ao grafo \mathcal{H} , afirma-se que \mathcal{G} contém \mathcal{H} como subgrafo induzido. Por fim, não existindo um subgrafo induzido de \mathcal{G} isomorfo ao grafo \mathcal{H} , tem-se que \mathcal{G} é livre de \mathcal{H} [46].

3.6 Caminhos e Ciclos

Considerando um grafo \mathcal{G} , define-se como *passeio* (em inglês, *walk*) uma sequência de vértices $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$ tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E(\mathcal{G})$ para $1 \leq i \leq k-1$. Um passeio permite a repetição de vértices e arestas. Se o vértice de origem v_1 coincidir com o vértice de destino v_k , isto é, $v_1 = v_k$, então tem-se um *passeio fechado*. Caso contrário, denomina-se como *passeio aberto*. Baseando-se no grafo \mathcal{G} representado na Figura 3.10, tem-se que:

- $W_1 = \{4, 1, 3, 6, 4, 1, 2\}$ é um passeio aberto;
- $W_2 = \{4, 1, 3, 6, 4, 1, 2, 5, 4\}$ é um passeio fechado.

Uma *trilha* (em inglês, *trail*) diz-se de um passeio $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$ sem repetição de arestas. Assim como os passeios, as trilhas podem ser classificadas como fechadas ou abertas, bastando verificar se os vértices de origem v_1 e de destino v_k coincidem ou não. Considerando o grafo \mathcal{G} representado na Figura 3.10, tem-se que:

- $T_1 = \{4, 1, 3, 6, 4, 5, 7, 6\}$ é uma trilha aberta;
- $T_2 = \{4, 1, 3, 6, 4\}$ é uma trilha fechada.

Um *caminho* (em inglês, *path*) é um passeio $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$ sem repetição de vértices. Como não há repetição de vértices em um caminho, não há repetição de arestas. À vista disso, conclui-se que todo caminho é uma trilha, mas nem toda trilha é um caminho [46] [56]. Um caminho não pode ser classificado como fechado ou aberto. O *comprimento* de um caminho indica a quantidade de arestas que o compõem.

Em grafos simples, um *ciclo* (em inglês, *cycle*) é um passeio $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$ cujos vértices intermediários ($v_2, v_3, \dots, v_{k-2}, v_{k-1}$) são distintos e cujo destino coincide com a origem ($v_1 = v_k$) [11]. O comprimento de um ciclo é a quantidade de vértices (ou arestas) que o compõem. Por definição, o menor comprimento de um ciclo em grafos simples é

igual a 3, denominado *triângulo*. Um ciclo é classificado como *par* se o comprimento for par, caso contrário, classifica-se como *ímpar*.

Uma *corda* é uma aresta que conecta dois vértices não adjacentes que constituem um caminho ou um ciclo. A Figura 3.11 exemplifica um caminho com cordas, de comprimento igual a 5, no grafo \mathcal{G} e um ciclo com cordas, de comprimento igual a 6, no grafo \mathcal{H} . Um caminho que não possui cordas é denominado *caminho induzido*. Analogamente, um ciclo que não possui cordas é denominado *ciclo induzido*. A Figura 3.12 apresenta um caminho induzido, de comprimento igual a 3, e um ciclo induzido, de comprimento igual a 4, nos grafos \mathcal{G} e \mathcal{H} , respectivamente.

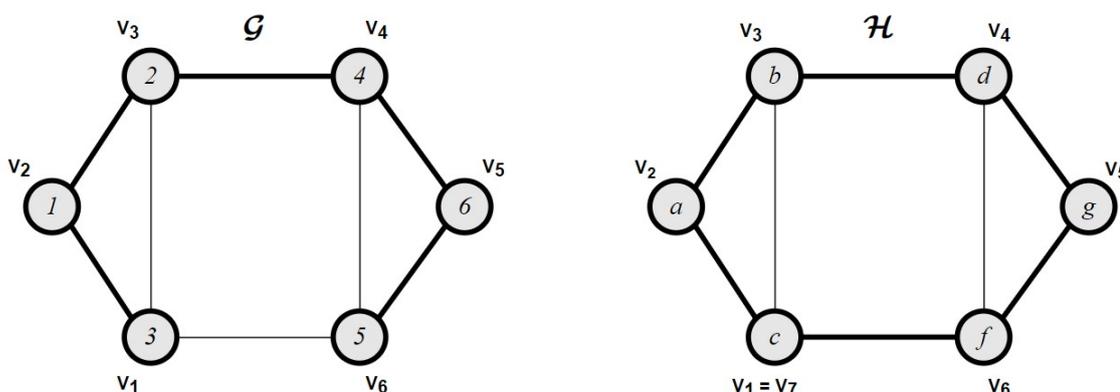


Figura 3.11: Caminho e ciclo com cordas.

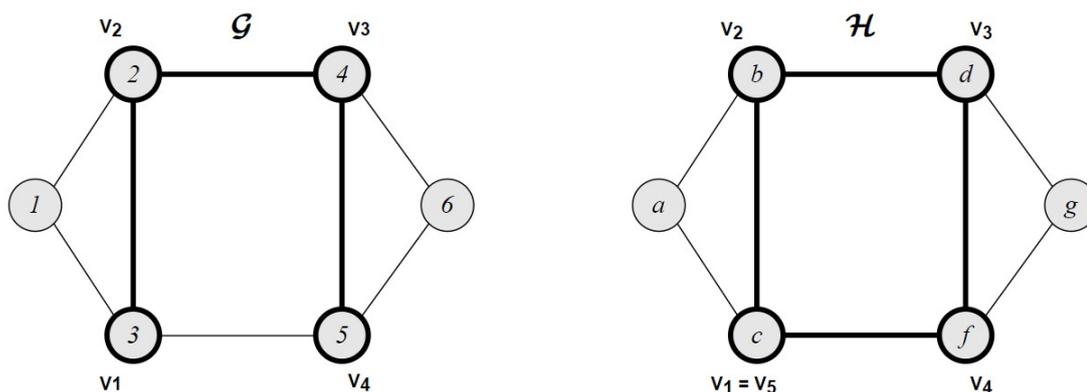


Figura 3.12: Caminho e ciclo induzidos.

Os caminhos e ciclos podem ser tratados como grafos (ou subgrafos), em lugar de considerá-los como sequência de vértices [46]. Assim sendo, um caminho \mathcal{P} é um grafo (ou subgrafo) tal que $V(\mathcal{P}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k \mid v_1 \neq v_k\}$ e $E(\mathcal{P}) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid$

$1 \leq i \leq k - 1$ }. Analogamente, um ciclo \mathcal{C} é um grafo (ou subgrafo) tal que $V(\mathcal{C}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k \mid v_1 = v_k\}$ e $E(\mathcal{C}) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq k - 1\}$.

3.7 Maximalidade e Minimalidade

Seja S a designação de um conjunto. Tem-se que um subconjunto S' de S é *maximal* em relação a uma certa propriedade P , quando: (1) S' satisfaz à propriedade P ; e (2) não existe um subconjunto S'' de S que satisfaça P e que contenha S' propriamente.

Além disso, designa-se um subconjunto S' de S como *máximo* em relação a uma certa propriedade P , quando: (1) S' satisfaz à propriedade P ; e (2) não existe um subconjunto S'' de S que satisfaça P e que contenha mais elementos do que S' .

Como exemplo, considere o grafo \mathcal{G} ilustrado na Figura 3.13. Seja $S = V(\mathcal{G})$ e P referente à propriedade “ser conjunto independente”. Um conjunto independente em \mathcal{G} representa um subconjunto de vértices $I \subseteq V(\mathcal{G})$ não adjacentes entre si. De acordo com a Figura 3.13, tem-se um subconjunto maximal $S'_1 = \{1, 5, 6\}$ e um subconjunto máximo $S'_2 = \{2, 3, 4, 7\}$ em relação à propriedade P .

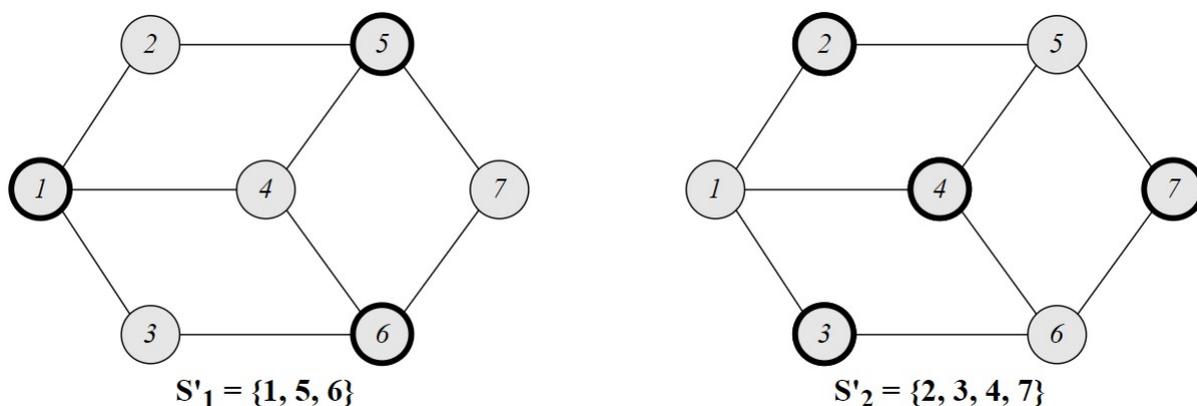


Figura 3.13: Subconjuntos maximal e máximo referentes a vértices independentes.

Analogamente, um subconjunto S' de S é denominado *minimal* em relação a uma certa propriedade P , quando: (1) S' satisfizer à propriedade P ; e (2) não existe um subconjunto S'' de S que satisfaça P e que esteja propriamente contido em S' .

Denomina-se um subconjunto S' de S como *mínimo* em relação a uma certa propriedade P , quando: (1) S' satisfaz à propriedade P ; e (2) não existe um subconjunto S'' de S que satisfaça P e que contenha menos elementos do que S' .

Salienta-se que todo subconjunto máximo é igualmente maximal, mas nem todo subconjunto maximal é máximo [46]. Do mesmo modo, todo subconjunto mínimo é também minimal, mas nem todo subconjunto minimal é mínimo.

A título de exemplo, considere um conjunto S de medidas de um sistema de medição. De acordo com as definições de criticalidades de medidas, apresentadas no Capítulo 2, e de minimalidade, tem-se que uma $C_{k\text{-tupla}}$ consiste de um subconjunto minimal de medidas S' de S cuja remoção torna o sistema inobservável. Nesse caso, note que P refere-se à propriedade “tornar o sistema inobservável”.

3.8 Grafos Conexos e Desconexos

Um grafo \mathcal{G} é denominado *conexo* se existir ao menos um caminho entre qualquer par de vértices em $V(\mathcal{G})$. Caso contrário, \mathcal{G} é denominado *desconexo*.

Os subgrafos conexos maximais de um grafo \mathcal{G} são denominados *componentes conexas* de \mathcal{G} . Nesse caso, tem-se que P refere-se à propriedade “ser conexo”. A quantidade de componentes conexas de um grafo \mathcal{G} é denotado por $w(\mathcal{G})$. De fato, se um grafo é conexo então $w(\mathcal{G}) = 1$ [31] [46].

A Figura 3.14 ilustra um grafo \mathcal{G} desconexo com $w(\mathcal{G}) = 3$ e um grafo \mathcal{H} *totalmente desconexo* com $w(\mathcal{H}) = |V(\mathcal{H})| = 7$.

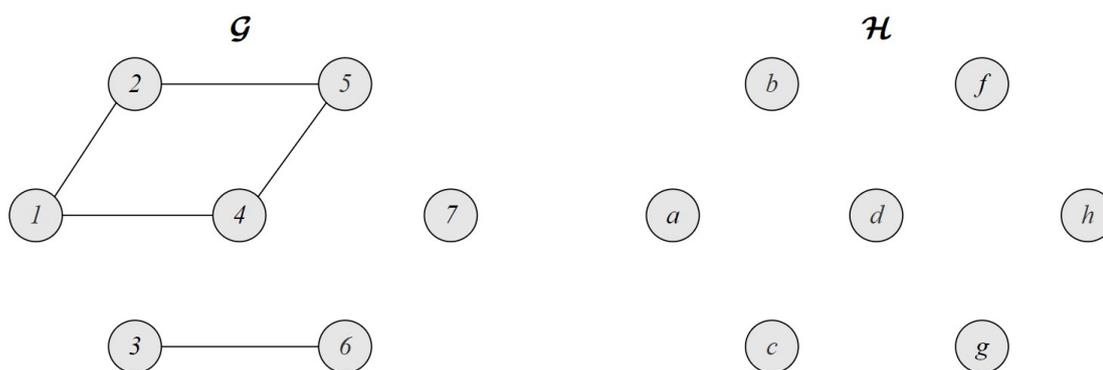


Figura 3.14: Exemplos de grafos desconexos.

3.9 Grafos Direcionados

Os grafos apresentados até a presente seção foram os denominados *não direcionados*, pois suas arestas não são direcionadas. Desse modo, se (x, y) é uma aresta em \mathcal{G} , então o

vértice x é adjacente ao vértice y , e vice-versa. Por outro lado, um *grafo direcionado* (ou, simplesmente, *digrafo*) \mathcal{D} compõe-se por um conjunto de vértices, denotado por $V(\mathcal{D})$, e um conjunto de *arcos* (ou *arestas direcionadas*), denotado por $A(\mathcal{D})$ [14].

Cada arco de um digrafo é constituído por um par ordenado (x, y) de vértices distintos x e y , que são extremos desse arco, em que x é o *extremo inicial* e y o *extremo final*. Além disso, x é *vizinho de entrada* de y , e y *vizinho de saída* de x [46]. Diz-se também que o arco (x, y) é *divergente* de x e *convergente* a y [54]. Dois arcos (x, y) e (y, x) são distintos por definição e, portanto, podem coexistir em um digrafo. A Figura 3.15 exemplifica uma representação geométrica de um digrafo.

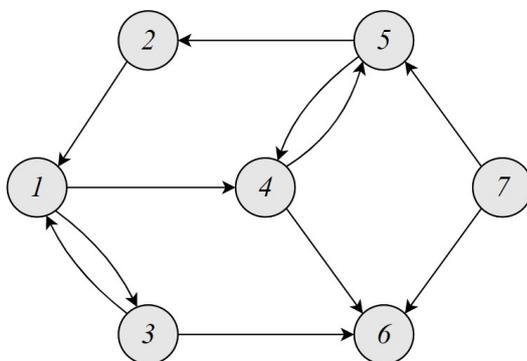


Figura 3.15: Representação geométrica de um digrafo.

Seja um digrafo \mathcal{D} e um vértice $v \in V(\mathcal{D})$. Denota-se por $N^+(v)$ o conjunto de vizinhos de saída de v , denominado *vizinhança de saída* de v . Semelhantemente, denota-se por $N^-(v)$ a *vizinhança de entrada* de v . O *grau de saída* de v indica a quantidade de arcos divergentes de v , definido como $d^+(v) = |N^+(v)|$. Do mesmo modo, o *grau de entrada* de v indica a quantidade de arcos convergentes a v , definido como $d^-(v) = |N^-(v)|$.

Por exemplo, no digrafo representado na Figura 3.15, as vizinhanças de entrada e de saída do vértice 1 são, respectivamente, $N^+(1) = \{3, 4\}$ e $N^-(1) = \{2, 3\}$. Ademais, os graus de saída e de entrada do vértice 1 são dados por $d^+(1) = d^-(1) = 2$.

Em um digrafo, um vértice com grau de entrada igual a zero é denominado *fonte*. Analogamente, *sumidouro* quando o grau de saída é igual a zero. No digrafo apresentado na Figura 3.15, o vértice 7 é uma fonte ($d^-(7) = 0$) e o vértice 6 um sumidouro ($d^+(6) = 0$).

Boa parte das definições de grafos não direcionados são análogas para digrafos [54]. Assim sendo, definem-se *trilha direcionada*, *passeio direcionado*, *caminho direcionado* e *ciclo direcionado* de forma análoga às definições apresentadas na Seção 3.6. Note que,

diferentemente das arestas, os arcos restringem determinadas seqüências de vértices.

A Figura 3.16 ilustra um caminho direcionado no digrafo \mathcal{D} e um ciclo direcionado no digrafo \mathcal{E} .

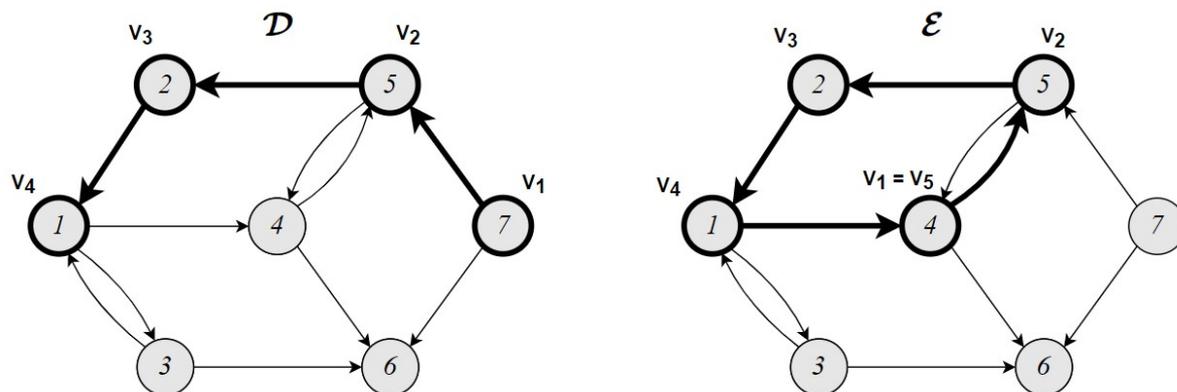


Figura 3.16: Exemplos de caminho e ciclo direcionados.

Diferentemente dos ciclos em grafos simples, que possuem no mínimo três vértices distintos, os ciclos direcionados podem englobar apenas dois vértices distintos x e y , pois os arcos (x, y) e (y, x) podem coexistir [46]. A Figura 3.17 evidencia os ciclos direcionados mínimos de um digrafo.

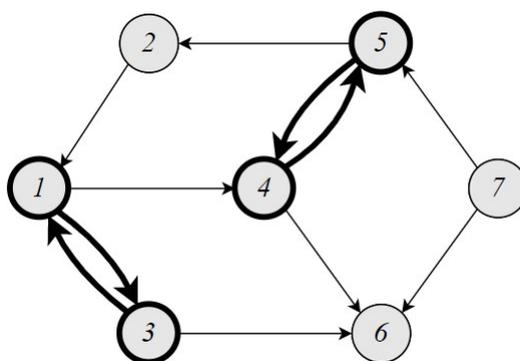


Figura 3.17: Ciclos direcionados triviais em um digrafo.

Seja um caminho direcionado, em um digrafo \mathcal{D} , que começa em um vértice x e termina em um vértice y . Assim sendo, diz-se que x alcança y , e y é alcançado por x [54]. Além disso, se x alcança y , x é predecessor de y , e y sucessor de x [46].

3.10 Grafos Bipartidos

Um *grafo bipartido* é um grafo \mathcal{G} cujos vértices em $V(\mathcal{G})$ podem ser particionados em dois subconjuntos disjuntos X e Y , de modo que todas as arestas em $E(\mathcal{G})$ possuam um extremo em X e outro em Y . De acordo com essa definição, tem-se que X e Y são conjuntos independentes. Não existem ciclos de comprimento ímpar em grafos bipartidos [46]. A Figura 3.18 exemplifica dois grafos bipartidos, sendo um constituído de arestas e outro de arcos (*digrafo bipartido*).

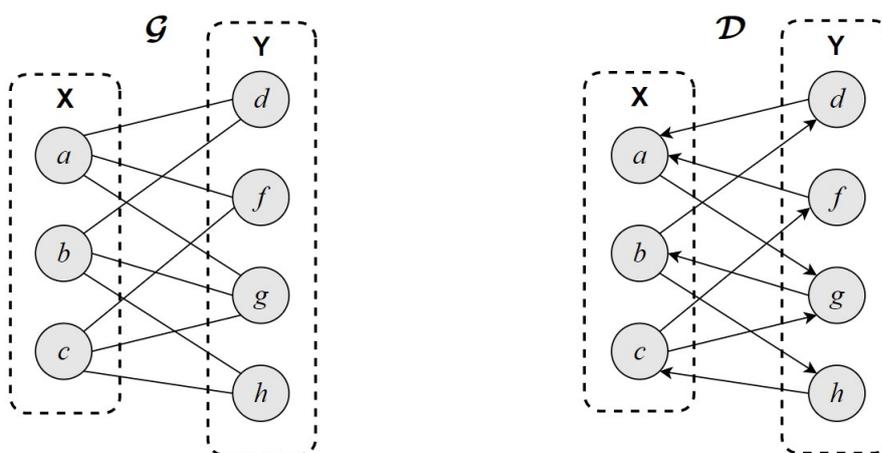


Figura 3.18: Exemplos de grafos bipartidos.

3.11 Grafos Planares

Denomina-se um grafo \mathcal{G} como *planar* quando for possível representá-lo no plano de modo que duas arestas não se encontrem, exceto em um vértice no qual ambas incidem [2]. Caso contrário, \mathcal{G} é *não planar*. Como exemplo, a Figura 3.19 ilustra as representações geométricas de um grafo \mathcal{G} planar e um grafo \mathcal{H} não planar.

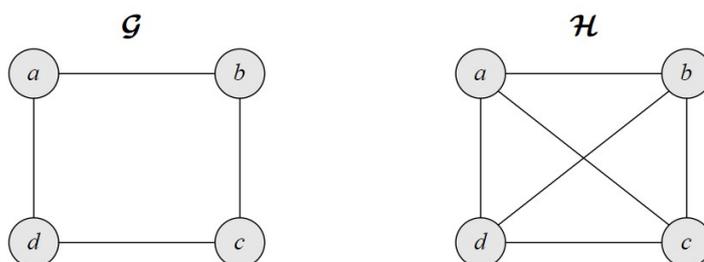


Figura 3.19: Representação de um grafo \mathcal{G} planar e de um grafo \mathcal{H} não planar.

3.12 Grafos como Estrutura de Dados

A representação geométrica de um grafo é visualmente agradável e, portanto, conveniente ao ser humano. No entanto, em casos mais complexos, o uso de meios computacionais é imprescindível, sendo necessária a representação de grafos como estrutura de dados.

A *matriz de adjacência* $M(\mathcal{G})$ de um grafo \mathcal{G} traduz-se por uma matriz quadrada de ordem $|V(\mathcal{G})|$, cujos elementos são dados por:

$$M(\mathcal{G})_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) \in E(\mathcal{G}); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Na representação de grafos não direcionados, a matriz de adjacências é simétrica, sendo suficiente tratá-la como matriz triangular superior ou inferior. Quando a matriz de adjacências refere-se a um digrafo, esta é assimétrica. As Figuras 3.20 e 3.21 mostram as matrizes de adjacência para um grafo não direcionado e um digrafo, respectivamente.

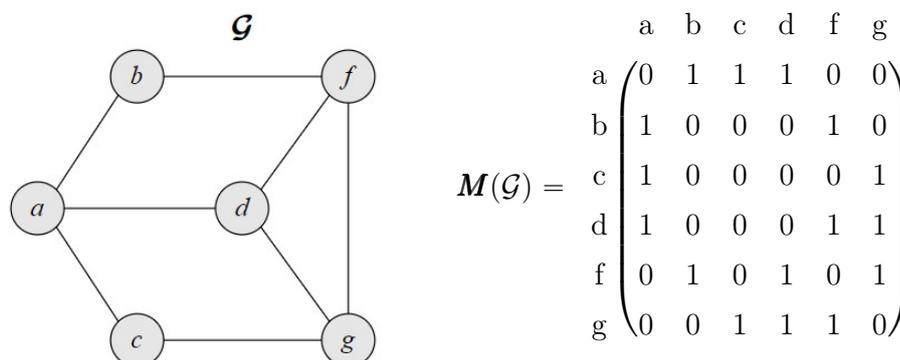


Figura 3.20: Um grafo não direcionado e a matriz de adjacências correspondente.

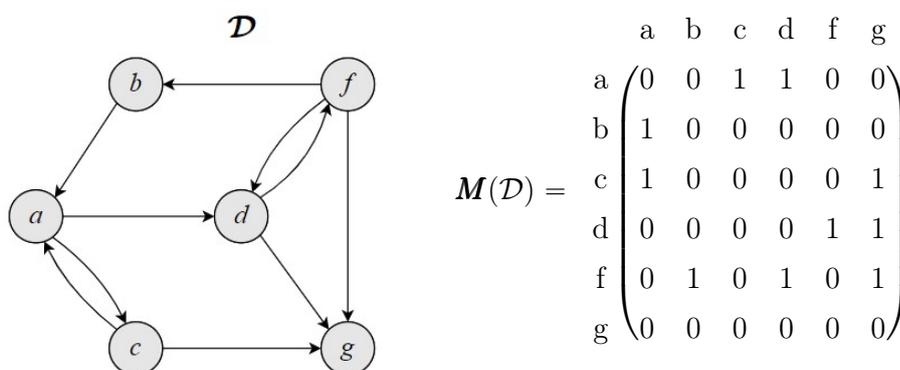


Figura 3.21: Um digrafo e a matriz de adjacências correspondente.

A *lista de adjacências* de um grafo \mathcal{G} é representada basicamente por um vetor de listas encadeadas. Os índices desse vetor referem-se aos vértices de \mathcal{G} . Cada lista encadeada contém a vizinhança (em digrafos, vizinhança de entrada) do vértice correspondente ao índice do vetor. As Figuras 3.22 e 3.23 mostram as listas de adjacências para um grafo não direcionado e um digrafo, respectivamente.

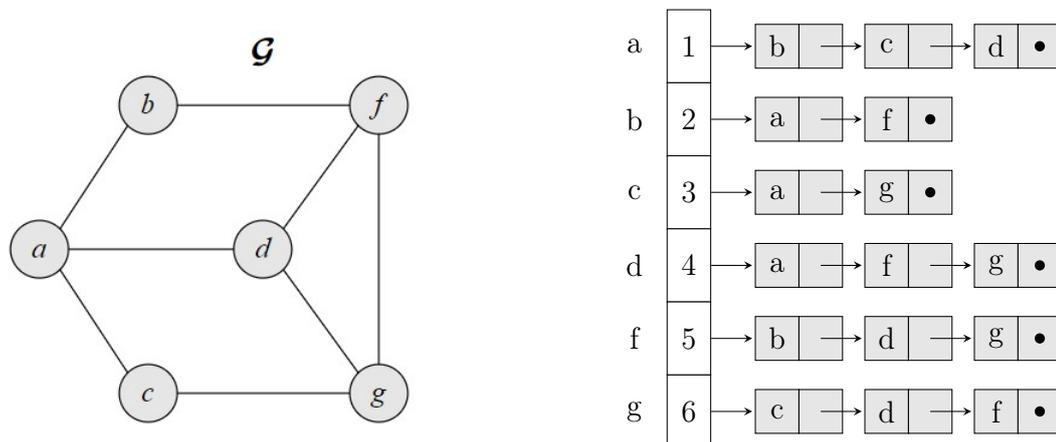


Figura 3.22: Um grafo não direcionado e a lista de adjacências correspondente.

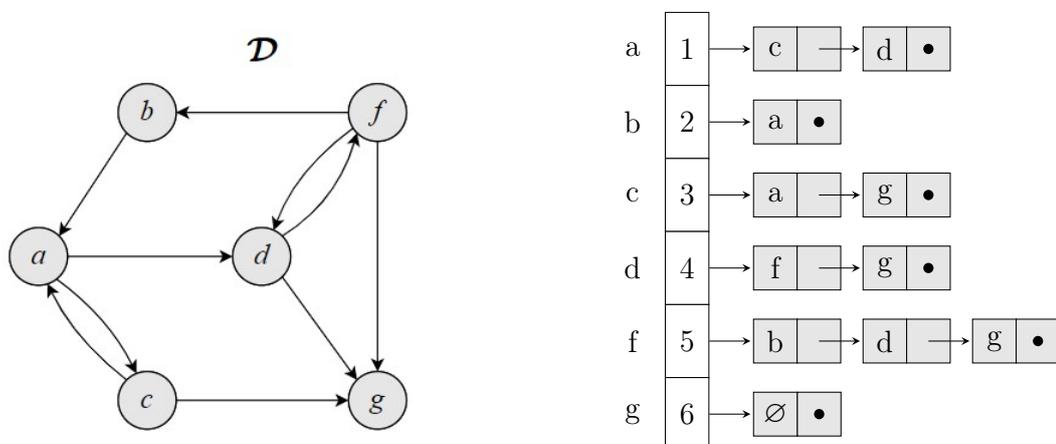


Figura 3.23: Um digrafo e a lista de adjacências correspondente.

Enquanto a matriz de adjacências requer um espaço quadrático com a ordem do referido grafo \mathcal{G} de $|V(\mathcal{G})|^2$, a lista de adjacências requisita, no máximo, um espaço linear com o tamanho de \mathcal{G} , sendo $|V(\mathcal{G})| + 2|E(\mathcal{G})|$ para grafos não direcionados e $|V(\mathcal{G})| + |A(\mathcal{G})|$ para digrafos.

A verificação da adjacência de um par de vértices na matriz de adjacências demanda um tempo constante de $O(1)$, e na lista de adjacências, no pior caso, requer um tempo linear de $O(|V(\mathcal{G})|)$ [46].

3.13 Cortes em Grafos

Considere um grafo conexo \mathcal{G} . Um *corte de vértices* é um subconjunto minimal de vértices $V' \subseteq V(\mathcal{G})$ cuja remoção desconecta \mathcal{G} , resultando em incremento na quantidade de componentes conexas de \mathcal{G} , ou seja, $w(\mathcal{G} - V') > 1$. Um vértice $v \in V(\mathcal{G})$ cuja remoção desconecta \mathcal{G} é denominado de *articulação*. A Figura 3.24 exemplifica um corte de vértices V' e uma articulação v .

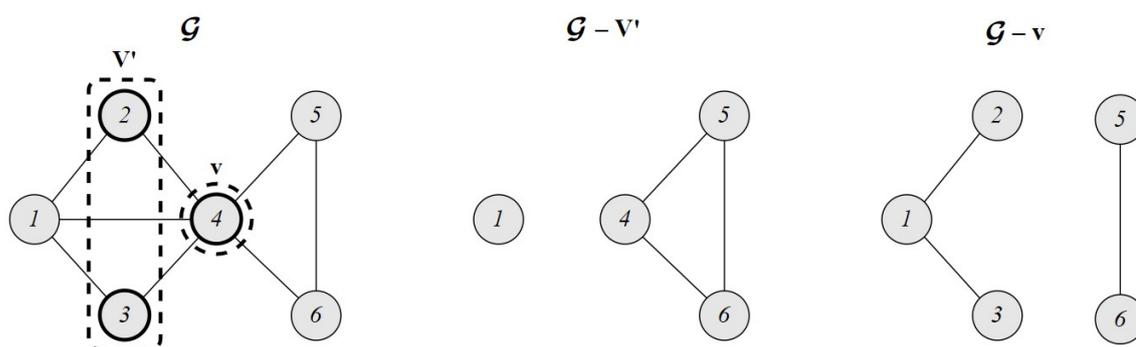


Figura 3.24: Um corte de vértices e uma articulação de um grafo.

Note que a remoção de um vértice v de um grafo resulta na exclusão de todas as arestas com extremo v . Assim sendo, de acordo com a definição, vértices de grau unitário ($d(v) = 1$) não constituem cortes de vértices.

Analogamente, considerando um grafo conexo \mathcal{G} , um *conjunto desconectante* representa um subconjunto de arestas $E' \subseteq E(\mathcal{G})$ cuja remoção desconecta \mathcal{G} , resultando em $w(\mathcal{G} - E') > 1$ [46]. Uma aresta $e \in E(\mathcal{G})$ cuja remoção desconecta \mathcal{G} é chamada de *ponte*. A Figura 3.25 exemplifica um conjunto desconectante E' e uma ponte e .

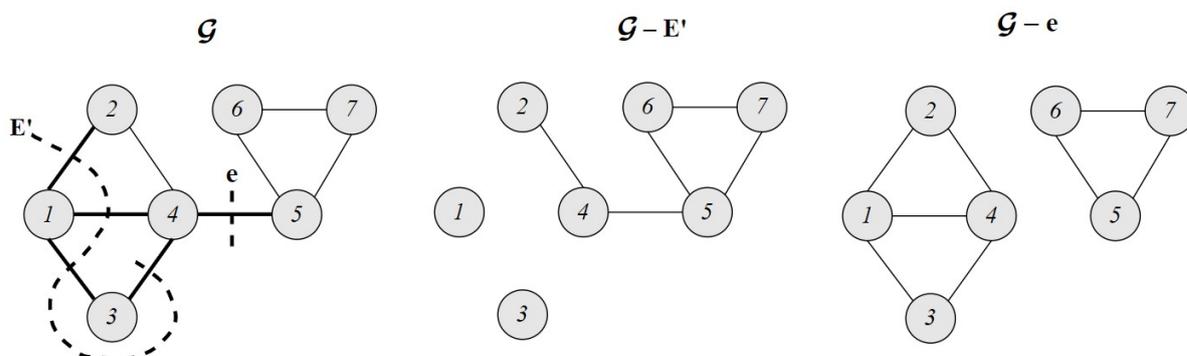


Figura 3.25: Um conjunto desconectante e uma ponte de um grafo.

Sejam $S, T \subseteq V(\mathcal{G})$ conjuntos de vértices de um grafo \mathcal{G} . Denota-se por $[S, T]$ o conjunto de arestas com um extremo em S e outro em T . Um *corte de arestas* de \mathcal{G} é um subconjunto de arestas $[S, \bar{S}] \subseteq E(\mathcal{G})$, no qual S é um subconjunto próprio não vazio de $V(\mathcal{G})$ e $\bar{S} = V(\mathcal{G}) \setminus S$ [46] [56]. A Figura 3.26 ilustra um corte de arestas $[S, \bar{S}]$, tal que $S = \{1, 3, 4\}$ e $\bar{S} = \{2, 5, 6, 7\}$.

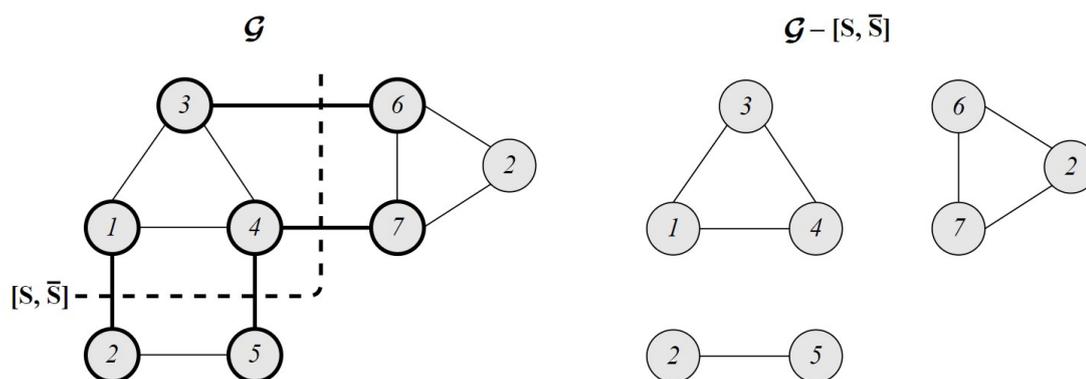


Figura 3.26: Um corte de arestas de um grafo.

Um corte minimal de arestas $F = [S, \bar{S}]$ é comumente denominado *co-ciclo* (em inglês, *co-cycle*) ou *ligação* (em inglês, *bond*). Em um grafo conexo \mathcal{G} , $\mathcal{G} - F$ resulta exatamente em duas componentes conexas, ou seja, $w(\mathcal{G} - F) = w(\mathcal{G}) + 1$ [46] [56]. Conseqüentemente, uma ligação não contém propriamente um conjunto desconectante. A Figura 3.27 evidencia dois co-ciclos F_1 e F_2 de um grafo \mathcal{G} .

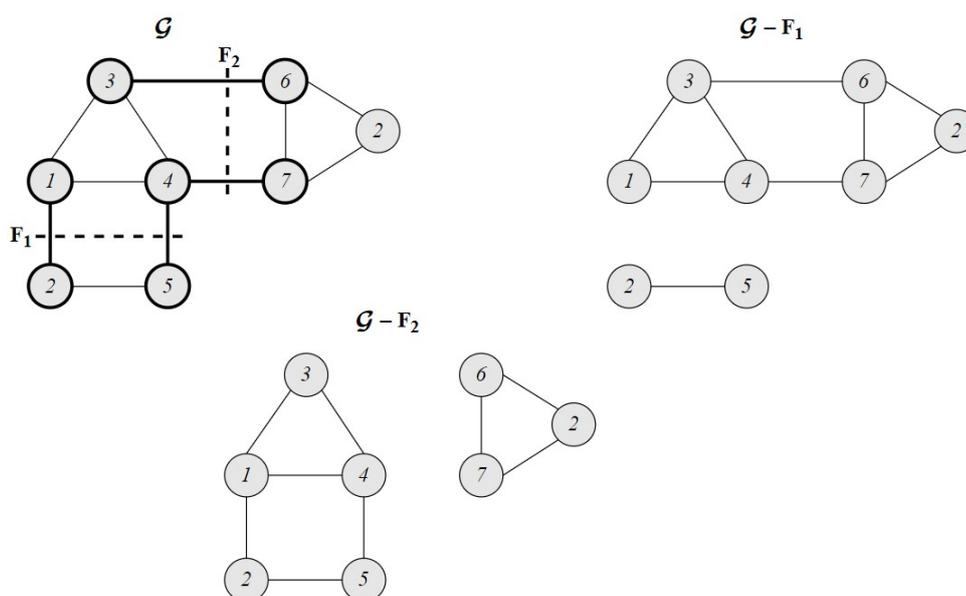


Figura 3.27: Dois co-ciclos de um grafo.

3.14 Árvores

Classifica-se como *acíclico* um grafo que não possui ciclos. Uma *árvore* \mathcal{T} é um grafo acíclico e conexo. Uma *floresta* \mathcal{F} caracteriza um conjunto de árvores. Assim sendo, todo grafo acíclico, não necessariamente conexo, é uma floresta. Uma *folha* é um vértice $v \in V(\mathcal{T})$ de grau unitário, ou seja, $d(v) = 1$. Alternativamente, se $d(v) > 1$, então v é chamado de *vértice interior*. A Figura 3.28 apresenta uma floresta formada por duas árvores.

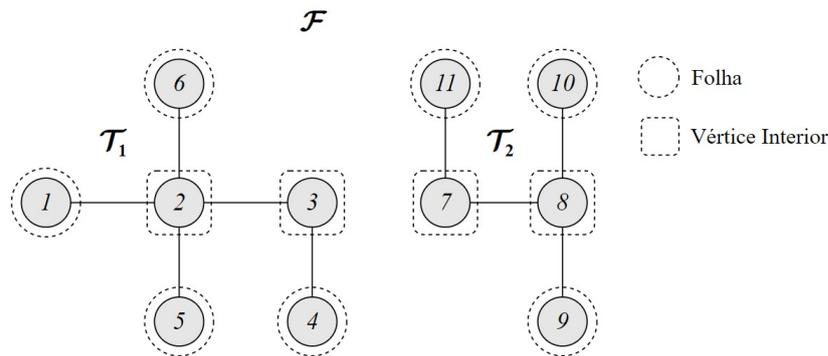


Figura 3.28: Uma floresta formada por duas árvores.

Toda árvore com n vértices contém exatamente $n - 1$ arestas [54]. Além disso, uma árvore não trivial (isto é, com $n > 1$ vértices) contém pelo menos duas folhas e, no máximo, $n - 1$ folhas [46].

Um subgrafo gerador acíclico e conexo de um grafo \mathcal{G} é denominado *árvore geradora* (em inglês, *spanning tree*). De acordo com essa definição, tem-se que todo grafo conexo possui uma árvore geradora [46]. A Figura 3.29 ilustra uma árvore geradora \mathcal{T} de um grafo \mathcal{G} .

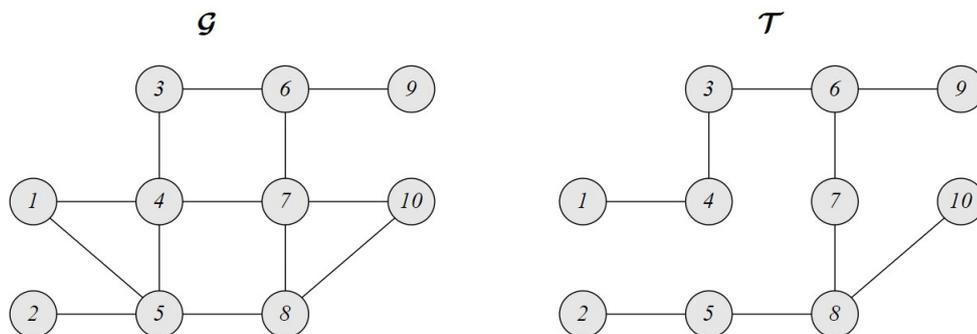


Figura 3.29: Uma árvore geradora de um grafo.

Observe que a inserção de qualquer aresta $e \in E(\mathcal{G}) \setminus E(\mathcal{T})$ em \mathcal{T} resulta na formação de um único ciclo, conforme estabelece um importante teorema concernente às árvores geradoras, cuja prova pode ser encontrada nas referências [46] e [56]. Vale ressaltar que esse teorema também é válido para multigrafos, em que um ciclo mínimo é composto de um par de arestas paralelas. A Figura 3.30 ilustra esse teorema, baseando-se no grafo simples ilustrado na Figura 3.6.

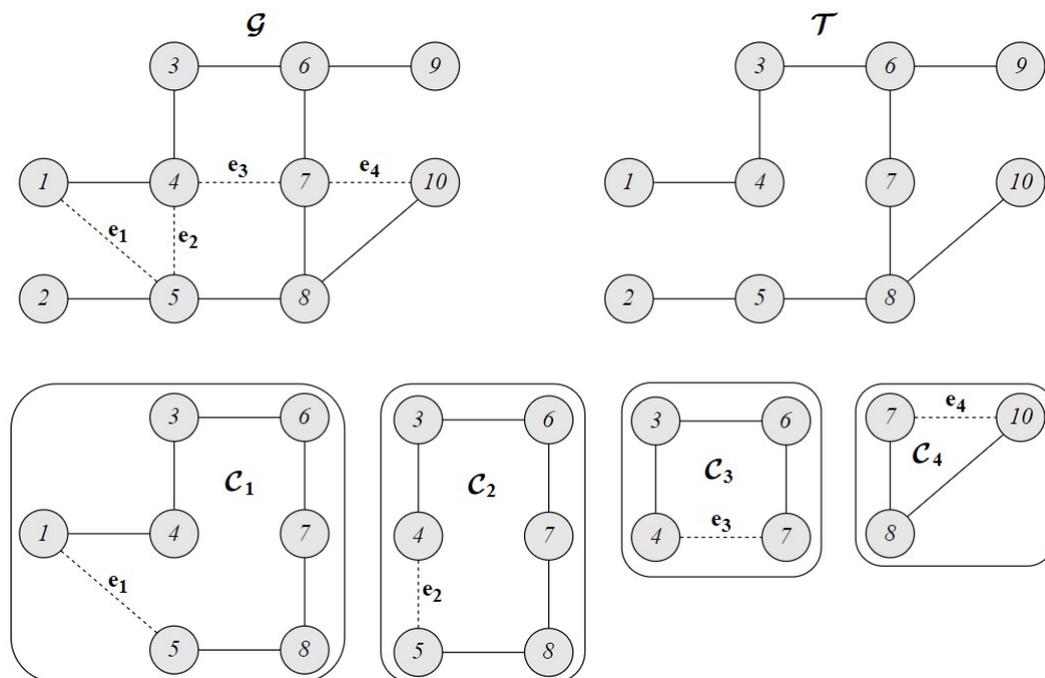


Figura 3.30: Formações de ciclo numa árvore geradora.

De acordo com a Figura 3.30, a inclusão uma única aresta de $E(\mathcal{G}) \setminus E(\mathcal{T}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ na árvore geradora \mathcal{T} resulta na formação de um único ciclo. A inserção da aresta e_1 , e_2 , e_3 ou e_4 resulta na formação do ciclo \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 ou \mathcal{C}_4 , respectivamente, em \mathcal{T} . Note que as arestas em $E(\mathcal{T})$ que não formam ciclos com as arestas pertencentes a $E(\mathcal{G}) \setminus E(\mathcal{T})$ são pontes [46]. Assim sendo, no exemplo corrente, as pontes $(2, 5)$ e $(6, 9)$ em \mathcal{G} , não integram os ciclos \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 , \mathcal{C}_3 e \mathcal{C}_4 .

Considere \mathcal{G} um grafo conexo cujas arestas possuem uma coloração, não necessariamente própria (i.e., arestas que compartilham extremos podem dispor de mesma cor). Basicamente, cada cor corresponde a um número natural. Uma *árvore geradora arco-íris* (em inglês, *rainbow spanning tree*) \mathcal{T} de \mathcal{G} representa um subgrafo gerador conexo e acíclico, cujas as arestas em $E(\mathcal{T})$ possuem cores distintas entre si [8] [10] [13] [30]. A Figura 3.31 ilustra um grafo \mathcal{G} com arestas coloridas e uma árvore geradora arco-íris \mathcal{T} de \mathcal{G} .

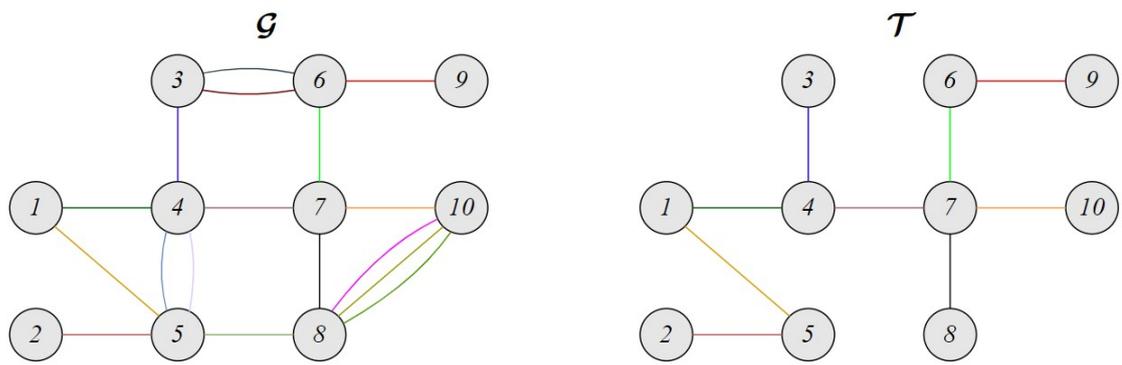


Figura 3.31: Uma árvore geradora arco-íris.

Importante ressaltar que nem todo grafo conexo colorido possui uma árvore geradora arco-íris. A Figura 3.32 exemplifica esse caso. Note que se torna impossível construir uma árvore geradora sem a inclusão das arestas e_1 e e_2 , que possuem a mesma cor.

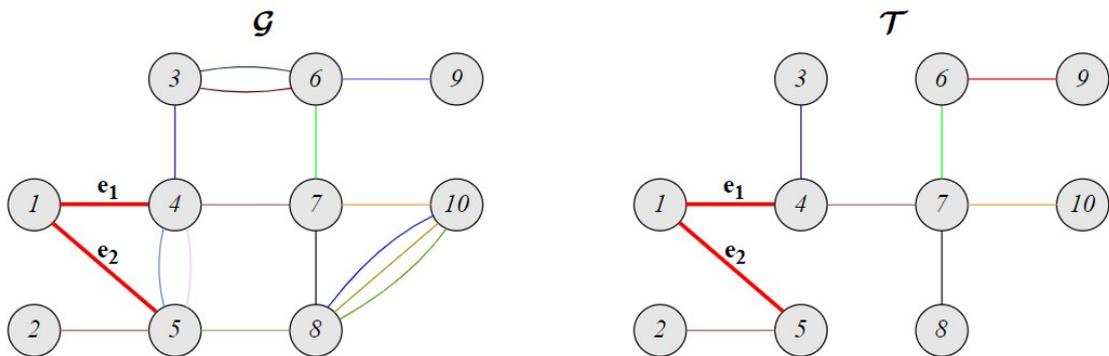


Figura 3.32: Uma árvore geradora com arestas de mesma cor.

Capítulo 4

Metodologia Proposta

Fundamentos teóricos necessários à construção da metodologia aqui proposta — que consiste na análise de observabilidade e de criticalidades de medidas integralmente por meio de grafos — foram apresentados anteriormente. Além da metodologia proposta, aborda-se aqui também a correspondência divisada entre as análises de observabilidade topológica e numérica. Em seguida, descreve-se a modelagem adotada para representação de um sistema de medição de uma rede elétrica por multigrafos. Por fim, os algoritmos implementados na Dissertação são descritos.

4.1 Considerações Iniciais

De acordo com o Capítulo 2, considera-se observável um SEP em que o processamento das medidas disponíveis, em uma determinada configuração da rede, conduz à estimação das tensões complexas em todas as barras da rede. Quando o sistema for classificado como inobservável, o plano de medição mostra-se deficiente, situação em que se busca identificar as ilhas observáveis da rede e alocar pseudomedidas adequadas à recuperação da observabilidade.

A análise de observabilidade numérica, usualmente efetivada através do modelo linear de estimação (descrito na Seção 2.4), verifica se a matriz de ganho $\bar{\mathbf{G}}$ é singular. Se ao término do processo de triangularização de $\bar{\mathbf{G}}$ não houver a indicação da presença de pivôs nulos ou, equivalentemente, o determinante de $\bar{\mathbf{G}}$ for diferente de zero, o posto da matriz jacobiana $\bar{\mathbf{H}}$ é máximo e igual à dimensão do vetor de estado $\boldsymbol{\theta}$. Portanto, considera-se o sistema *algebricamente observável* [36]. Essa análise vale-se de cálculos de ponto flutuante, o que a torna suscetível a erros de arredondamento e a mau condicionamento de matrizes.

O enfoque topológico para diagnóstico da observabilidade, diferentemente dos métodos numéricos, não necessita de cálculos de ponto flutuante. Nesse caso, a avaliação da observabilidade baseia-se exclusivamente em operações lógicas, necessitando, portanto, de dados sobre a conectividade da rede, localização e tipos das medidas [1]. Assim como a abordagem numérica, a análise de observabilidade topológica baseia-se no modelo linear de estimação, onde as medidas de potência são tomadas aos pares (ativo-reativo).

O grafo que representa uma rede elétrica, cujos vértices são as barras e as arestas os ramos, é denominado *grafo de rede* [47] [52]. Considere um SEP representado pelo grafo de rede \mathcal{G} , cujo plano de medição compõe-se de medidas ativas (ou reativas) contidas no conjunto M . Um sistema é topologicamente observável se existe uma árvore geradora \mathcal{T} de \mathcal{G} , cujas arestas são associadas a medidas de M tal que duas dessas arestas não correspondem a uma mesma medida [16] [36] [47]. Essa árvore geradora \mathcal{T} é denominada *árvore geradora observável* ou *árvore geradora de posto máximo*. Essas associações (ou atribuições) de elementos de M a arestas de \mathcal{G} possuem restrições quanto ao tipo de medida, que são baseadas na estrutura da matriz \bar{H} . Atribui-se uma medida $z \in M$ a uma aresta $e \in E(\mathcal{G})$ se [47]:

- z é uma medida de fluxo (potência ou corrente) que observa o ramo da rede correspondente à aresta e ; ou
- z é uma medida de injeção de potência que observa a barra da rede representada por um vértice que constitui um dos extremos da aresta e .

A Figura 4.1 ilustra uma rede elétrica de 6 barras e 7 ramos, composta por 5 medidas de fluxo de potência e 2 medidas de injeção de potência. O grafo de rede correspondente a essa rede e uma árvore geradora observável, indicando que esse sistema é topologicamente observável, são apresentados na Figura 4.2.

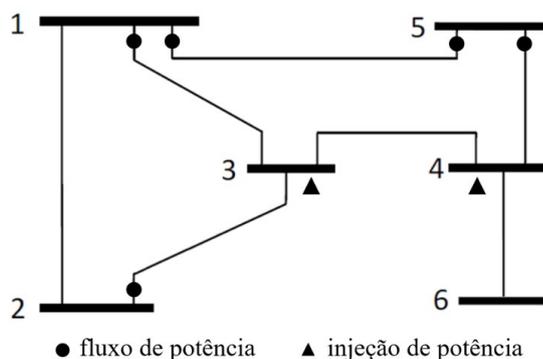


Figura 4.1: Uma rede de 6 barras composta de 7 medidas.

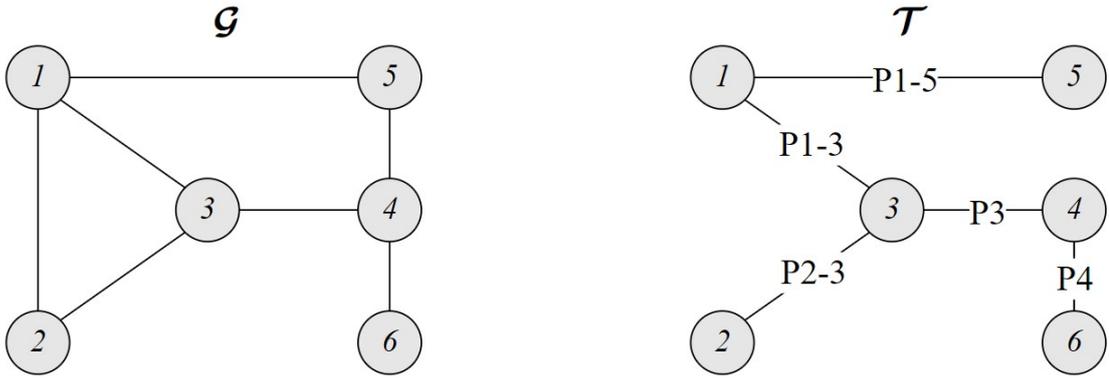


Figura 4.2: Grafo de rede e árvore geradora observável referente à rede anterior.

Na metodologia apresentada neste trabalho, as possibilidades de correspondência entre as arestas do grafo de rede e medidas ativas de um sistema são modeladas por um grafo denominado *multigrafo de medições*.

4.2 Multigrafo de Medições

Um multigrafo de medições é aquele que associa a topologia da rede elétrica ao sistema de medição usado para a EE. As arestas desse grafo são coloridas, sendo que cada cor corresponde a uma medida distinta. Salienta-se que, na implementação, essas cores correspondem a números inteiros que rotulam as arestas desse grafo. Se existir uma árvore geradora arco-íris (ou árvore geradora observável), então classifica-se o sistema como topologicamente observável. A quantidade de cores presentes na árvore geradora observável é análoga ao posto de \bar{H} , ou seja, para um sistema com n variáveis de estado ser topologicamente observável significa que existe uma árvore geradora observável de n cores no multigrafo de medições.

Considere um multigrafo de medições \mathcal{Z} e um grafo de rede \mathcal{G} referentes a um determinado sistema. Os conjuntos de vértices de \mathcal{Z} e de \mathcal{G} são iguais, ou seja, $V(\mathcal{Z}) = V(\mathcal{G})$. As arestas pertencentes a $E(\mathcal{Z})$ são assim definidas:

- Para cada medida de fluxo de potência P_{k-m} , no ramo $k-m$, há uma aresta, cuja coloração é diferente das demais, entre os vértices k e m pertencentes a $V(\mathcal{Z})$. Essas arestas são denominadas *arestas de fluxo* [52]. A Figura 4.3 ilustra a representação de duas medidas de fluxo de potência P_{1-2} e P_{2-1} , no ramo $1-2$, como arestas de fluxo.



Figura 4.3: Representação de medidas de fluxo de potência como arestas de fluxo.

- Para cada medida de injeção de potência P_k , na barra k , há um conjunto de arestas, cujas cores são iguais entre si e distintas das arestas referentes às demais medidas do sistema, com um extremo em k e outro extremo pertencente ao conjunto $N(k)$, que representa a vizinhança (referente às barras reais da rede) do vértice k . Denomina-se essas arestas como *arestas de injeção* [52]. A Figura 4.4 exemplifica a representação de uma medida de injeção P_1 , na barra 1, cujas barras adjacentes são 2, 3 e 4, como arestas de injeção.

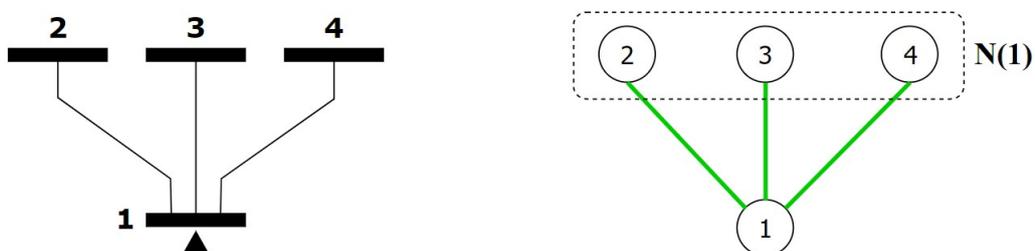


Figura 4.4: Representação de uma medida de injeção de potência como arestas de injeção.

- Para cada medida de corrente de ramo I_{k-m} , no ramo $k-m$, assim como as medidas de fluxo de potência, há uma aresta, cuja coloração é diferente das demais, entre os vértices k e m pertencentes a $V(\mathcal{Z})$. Nesta Dissertação, essas arestas serão denominadas arestas de fluxo. A Figura 4.5 mostra a representação de duas medidas de corrente de ramo I_{1-2} e I_{2-1} , no ramo 1-2, como arestas de fluxo.

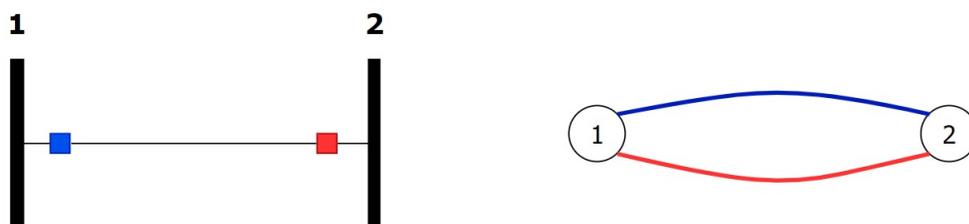


Figura 4.5: Representação de medidas de corrente como arestas de fluxo.

- Para cada medida de ângulo de fase de tensão A_k , na barra k , há uma aresta, cuja coloração difere das demais, entre o vértice k e um vértice 0, que não integra a rede elétrica e representa a referência do sistema. Isto significa que a medida de ângulo será representada tal como a de fluxo de potência P_{k-0} em um ramo imaginário $k-0$. Assim, as arestas representantes de medidas de ângulo serão denominadas arestas de fluxo. A Figura 4.6 exemplifica a representação de duas medidas de ângulo de fase de tensão A_1 e A_2 , respectivamente nas barras 1 e 2, como arestas de fluxo.

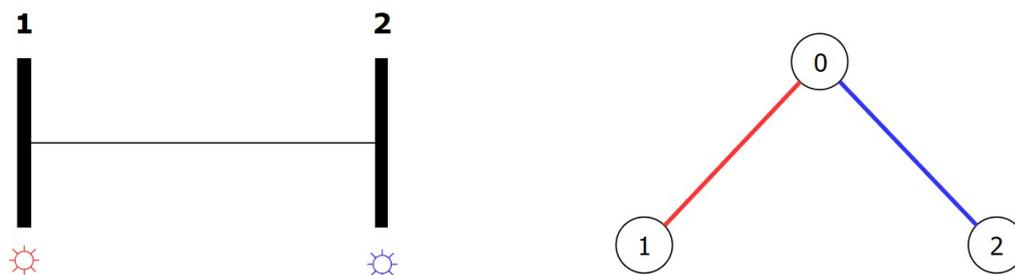


Figura 4.6: Representação de medidas de ângulo como arestas de fluxo.

A título de ilustração, considere o sistema de 6 barras, como mostra a Figura 4.7, composto por 10 medidas a saber: 4 de fluxo de potência, 2 de injeção de potência, 2 de fluxo de corrente e 2 de ângulo. O multigrafo de medições correspondente está representado na Figura 4.8. Observe que uma medida de injeção resulta apenas em arestas de injeção com extremos referentes às barras da rede.

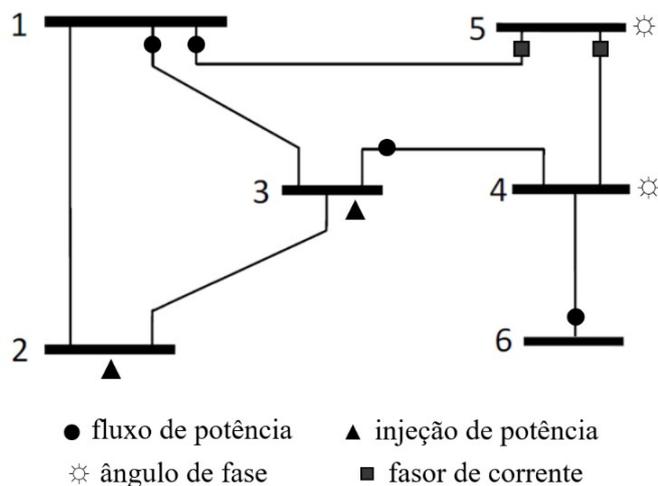


Figura 4.7: Uma rede de 6 barras composta de 10 medidas.

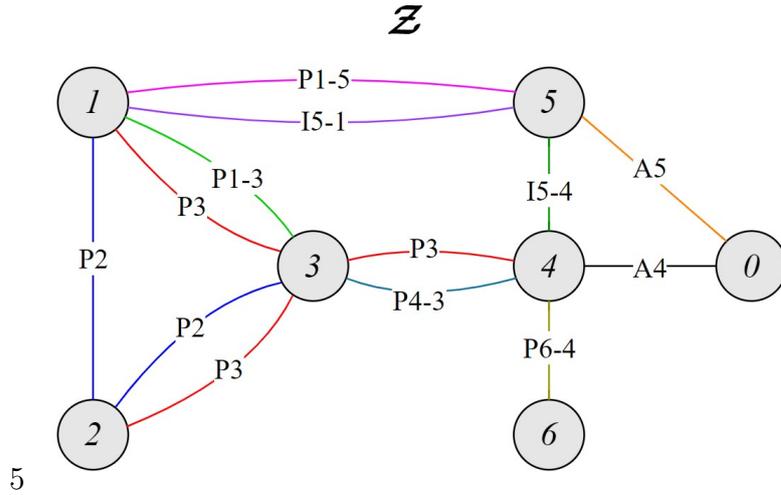


Figura 4.8: Multigrafo de medições referente a um sistema de 6 barras.

4.3 Algoritmo de Observabilidade Topológica

O multigrafo de medições trata-se de uma representação gráfica da instância de entrada do algoritmo para análise de observabilidade topológica, implementado na Dissertação. Esse algoritmo constrói uma árvore geradora observável (ou arco-íris), a partir do processamento das arestas de fluxo (associadas a medidas de fluxo de potência, fluxo de corrente e ângulo) e arestas de injeção (referentes a medidas de injeção de potência), que compõem o multigrafo de medições. Se o algoritmo retornar uma árvore geradora observável, então diz-se que o sistema é topologicamente observável. Por outro lado, classifica-se o sistema como inobservável se o algoritmo responder com uma floresta maximal com duas ou mais árvores arco-íris.

Seja um multigrafo de medições \mathcal{Z} de um sistema e uma floresta \mathcal{F} tal que $V(\mathcal{F}) = V(\mathcal{Z})$. Além disso, considere que a floresta \mathcal{F} seja totalmente desconexa, isto é, $w(\mathcal{F}) = |V(\mathcal{F})|$. O algoritmo implementado cria uma árvore geradora observável mediante a inserção de arestas de \mathcal{Z} em \mathcal{F} , respeitando as seguintes restrições:

- a inserção de uma aresta de fluxo $e_f \in E(\mathcal{Z})$ em \mathcal{F} não resulta em um ciclo \mathcal{C}_g em \mathcal{F} ; e
- a inserção de uma aresta de injeção $e_p \in E(\mathcal{Z})$ em \mathcal{F} não faz com que se forme um ciclo \mathcal{C}_g e/ou um par de arestas de mesma coloração \mathcal{C}_c em \mathcal{F} . Note que os conflitos de coloração serão sempre entre arestas de injeção, sendo uma pertencente a \mathcal{F} e outra não.

Em suma, a inserção de uma aresta de fluxo de \mathcal{Z} em \mathcal{F} não pode acarretar na formação de um ciclo, pois, pela definição, uma floresta consiste de um subgrafo acíclico. A inserção de uma aresta de injeção de \mathcal{Z} em \mathcal{F} não pode formar um ciclo e/ou ocasionar a repetição de uma cor, visto que se busca uma árvore geradora arco-íris. Note que as restrições concernentes às arestas de fluxo e às arestas de injeção não coincidem. Assim sendo, o algoritmo implementado é dividido em duas etapas:

- processamento de arestas de fluxo; e
- processamento de arestas de injeção.

4.3.1 Etapa 1 do Algoritmo de Observabilidade Topológica

Na etapa 1, constrói-se uma floresta maximal arco-íris através da inserção de arestas de fluxo $e_f \in E(\mathcal{Z})$ em \mathcal{F} . Ressalta-se que a única restrição, aludida anteriormente, consiste em não formar ciclo (\mathcal{C}_g) em \mathcal{F} , sendo, portanto, aplicável uma estratégia gulosa. Há trabalhos semelhantes na literatura especializada que recomendam o uso do algoritmo de Kruskal [37] para o processamento das arestas de fluxo. Todavia, a implementação desenvolvida na Dissertação baseia-se no algoritmo de busca em profundidade (em inglês, *depth-first search*) [55], que, se comparado com o algoritmo de Kruskal, possui menor complexidade computacional e mais fácil implementação.

Seja A_f o conjunto composto de todas as arestas de fluxo pertencentes a \mathcal{Z} . Define-se \mathcal{G}_f como um grafo cujos conjuntos de vértices e arestas são $V(\mathcal{G}_f) = V(\mathcal{Z})$ e $E(\mathcal{G}_f) = A_f$, respectivamente. Observe que \mathcal{G}_f é obtido da remoção de todas as arestas de injeção pertencentes a \mathcal{Z} . A Figura 4.9 ilustra o grafo \mathcal{G}_f referente ao multigrafo de medições ilustrado na Figura 4.8.

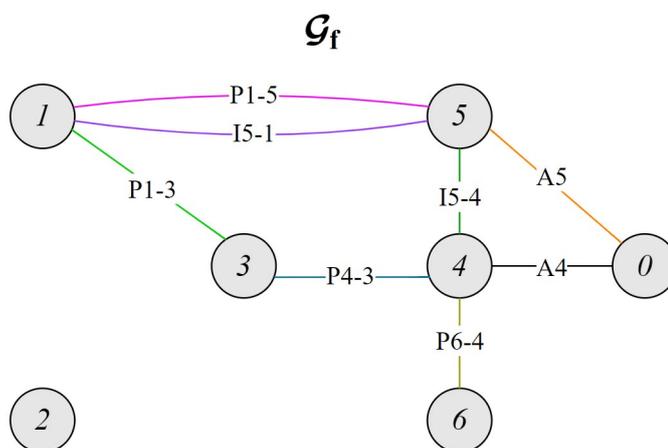


Figura 4.9: Grafo \mathcal{G}_f referente a um multigrafo de medições \mathcal{Z} .

Na prática, o grafo \mathcal{G}_f é uma lista de adjacências, apresentada na entrada do algoritmo para o processamento de arestas de fluxo, cujo pseudocódigo é apresentado a seguir, no Algoritmo 1.

Algoritmo 1: Etapa 1 do Algoritmo de Observabilidade Topológica

Entrada: Um grafo \mathcal{G}_f , onde $V(\mathcal{G}_f) = V(\mathcal{Z})$ e $E(\mathcal{G}_f) = A_f$.

Saída: Uma floresta maximal arco-íris \mathcal{F} de \mathcal{G}_f .

1 **início**

2 $\mathcal{F} : V(\mathcal{F}) \leftarrow V(\mathcal{G}_f)$ e $E(\mathcal{F}) \leftarrow \emptyset$; // Inicialização de \mathcal{F} .

3 **para cada** $v \in V(\mathcal{G}_f)$ **faça**

4 $v.visitado \leftarrow false$;

5 **para cada** $v \in V(\mathcal{G}_f)$ **faça**

6 **se** $v.visitado = false$ **então**

7 $VisitatarVertice(\mathcal{F}, \mathcal{G}_f, v)$;

8 **retorna** \mathcal{F}, A_f ;

9 **procedimento** $VisitatarVertice(\mathcal{F}, \mathcal{G}_f, v)$

10 $v.visitado \leftarrow true$;

11 **para cada** $w \in \mathcal{G}_f.N(v)$ **faça**

12 **se** $w.visitado = false$ **então**

13 $\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T} + (v, w)$;

14 $VisitatarVertice(\mathcal{F}, \mathcal{G}_f, w)$;

No Algoritmo 1, note que o grafo \mathcal{F} é inicializado sem arestas e com o mesmo conjunto de vértices de \mathcal{G}_f (linha 2). À medida que os vértices de \mathcal{G}_f são recursivamente visitados (linhas 7 e 14), as arestas de \mathcal{G}_f percorridas são inseridas em \mathcal{T} (linha 13). Como a busca em profundidade implementada é orientada estritamente por vértices, tem-se que as arestas com extremos visitados são ignoradas, o que garante a inexistência de ciclos em \mathcal{F} . O algoritmo termina quando todos os vértices de \mathcal{G}_f são visitados (marcados como *true*), retornando uma floresta maximal arco-íris \mathcal{F} . Se \mathcal{F} é uma árvore geradora observável, então o sistema é dado como topologicamente observável. Caso contrário, executa-se a etapa 2, que consiste no processamento de arestas de injeção. A complexidade desse algoritmo é $O(n + m)$ [55], sendo n e m a quantidade de vértices e de arestas de \mathcal{G}_f , respectivamente. Uma implementação simples do algoritmo de Kruskal tem complexidade $O(m \log m + n^2)$ [37], enquanto que uma implementação sofisticada, baseada na estrutura

denominada *Union-Find*, tem complexidade $O(m \log n)$ [19].

A execução do Algoritmo 1 no grafo \mathcal{G}_f ilustrado na Figura 4.9 resultou na formação da floresta maximal arco-íris \mathcal{F} representada na Figura 4.10. Nesse caso, os vértices foram visitados na sequência $0 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2$. Essa sequência depende tão somente do vértice escolhido como raiz da busca e não compromete negativamente o resultado. Além disso, a floresta maximal arco-íris de um grafo não é necessariamente única.

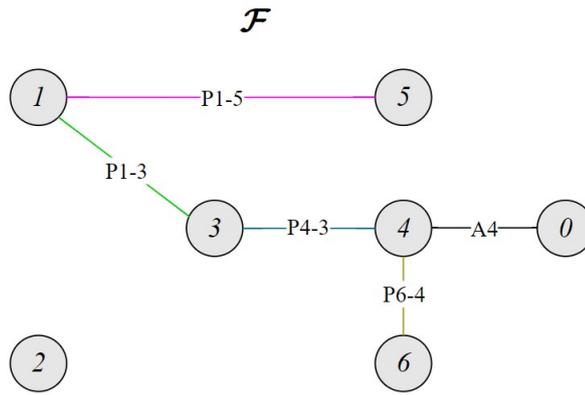


Figura 4.10: Uma floresta maximal arco-íris \mathcal{F} de \mathcal{G}_f .

Note que a floresta maximal arco-íris \mathcal{F} da Figura 4.10 não é uma árvore geradora observável, sendo, portanto, necessário processar as arestas de injeção que constituem o multigrafo de medições \mathcal{Z} .

4.3.2 Etapa 2 do Algoritmo de Observabilidade Topológica

Na etapa 2, busca-se expandir a floresta maximal arco-íris \mathcal{F} , obtida na etapa anterior, mediante a inserção de arestas de injeção $e_p \in E(\mathcal{Z})$. Conforme mencionado anteriormente, a inserção de uma aresta de injeção não pode resultar em ciclos e na repetição de cores em \mathcal{F} . A existência de duas restrições impede a aplicação de uma estratégia gulosa, o que torna essa etapa a mais complexa do algoritmo. A implementação adotada baseia-se no algoritmo de interseção de matróides proposto por Edmonds em [28]. O uso desse algoritmo para solução de parte do problema da observabilidade topológica foi originalmente proposto por Quintana et al. em [47].

Seja A_p o conjunto composto de todas as arestas de injeção de $e_f \in \mathcal{Z}$ cujos extremos não são adjacentes em \mathcal{F} . Assim sendo, as entradas do algoritmo implementado consistem na floresta maximal arco-íris \mathcal{F} e no conjunto A_p . Mostra-se o pseudocódigo da referida metodologia no Algoritmo 2.

Algoritmo 2: Etapa 2 do Algoritmo de Observabilidade Topológica

Entrada: Uma floresta maximal arco-íris \mathcal{F} , obtido da etapa 1, e A_p .

Saída: Uma árvore geradora (ou floresta maximal) observável \mathcal{T} de \mathcal{Z} .

1 **início**

```

2    $\mathcal{T} : V(\mathcal{T}) \leftarrow V(\mathcal{F})$  e  $E(\mathcal{T}) \leftarrow E(\mathcal{F});$  // Inicialização de  $\mathcal{T}$ .
3    $\mathcal{B} : V(\mathcal{B}) \leftarrow A_p$  e  $E(\mathcal{B}) \leftarrow \emptyset;$  // Inicialização de  $\mathcal{B}$ , um digrafo bipartido auxiliar.
4    $I \leftarrow \emptyset;$  // Conjunto de arestas  $e_p \in A_p$  que integram  $\mathcal{T}$ .
5   enquanto  $|E(\mathcal{T})| < |V(\mathcal{T})| - 1$  faça // Enquanto  $\mathcal{T}$  não é árvore geradora.
6      $S_{ciclo} \leftarrow \emptyset;$  // Conjunto de arestas  $e_p \notin I$ , cuja inserção não forma ciclo em  $\mathcal{T}$ .
7      $S_{cor} \leftarrow \emptyset;$  // Conjunto de arestas  $e_p \notin I$ , cuja inserção não repete cor em  $\mathcal{T}$ .
8      $E(\mathcal{B}) \leftarrow \emptyset;$  // Remoção de todos os arcos de  $\mathcal{B}$ .
9      $InserirAresta \leftarrow false;$ 
10    para cada  $e_p \in A_p \setminus I$  faça
11       $InserirAresta \leftarrow false;$ 
12      se  $\mathcal{T} + e_p$  tem um ciclo  $\mathcal{C}_c$  então // Repete cor.
13         $e_{cor} \leftarrow E(\mathcal{C}_c) \setminus \{e_p\};$   $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} + (e_{cor}, e_p);$ 
14      senão // Não repete cor.
15         $S_{cor} \leftarrow S_{cor} \cup \{e_p\};$   $InserirAresta \leftarrow true;$ 
16      se  $\mathcal{T} + e_p$  tem um ciclo  $\mathcal{C}_g$  então // Forma ciclo.
17        para cada  $e_{ciclo} \in (E(\mathcal{C}_g) \cap I) \setminus \{e_p\}$  faça  $\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} + (e_p, e_{ciclo});$ 
18      senão // Não forma ciclo.
19        se  $InserirAresta = true$  então // Não repete cor e não forma ciclo.
20           $S_{cor} \leftarrow S_{cor} \setminus \{e_p\};$   $I \leftarrow I \cup \{e_p\};$   $\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T} + e_p;$ 
21          se  $|E(\mathcal{T})| = |V(\mathcal{T})| - 1$  então retorna  $\mathcal{T};$ 
22          senão quebrar o laço da linha 10;
23        senão  $S_{ciclo} \leftarrow S_{ciclo} \cup \{e_p\};$  // Não forma ciclo, mas repete cor.
24    se  $InserirAresta = false$  então
25       $\mathcal{P} \leftarrow$  menor caminho possível entre  $s \in S_{cor}$  e  $t \in S_{ciclo}$  em  $\mathcal{B};$ 
26      se  $\mathcal{P} = \emptyset$  então retorna  $\mathcal{T};$  // Retorna floresta maximal desconexa.
27      senão
28         $E(\mathcal{T}) \leftarrow E(\mathcal{T}) \setminus I;$  // Remove as arestas pertencentes a  $I$  de  $\mathcal{T}$ .
29         $I \leftarrow I \Delta V(\mathcal{P});$  // Diferença simétrica entre  $I$  e vértices em  $\mathcal{P}$ .
30         $E(\mathcal{T}) \leftarrow E(\mathcal{T}) \cup I;$  // Adiciona o novo conjunto de arestas  $I$  em  $\mathcal{T}$ .
31  retorna  $\mathcal{T}$ 

```

Na implementação, o conjunto A_p é tratado como um vetor composto apenas pelas arestas de injeção $e_p \in E(\mathcal{Z})$ não paralelas às arestas de fluxo $e_f \in E(\mathcal{Z})$. Considerando o multigrafo de medições \mathcal{Z} ilustrado na Figura 4.8, apenas as seguintes arestas de injeção integrariam A_p :

- (1, 2) referente à medida de injeção $P2$;
- (2, 3) referente à medida de injeção $P2$; e
- (2, 3) referente à medida de injeção $P3$.

Note que, no processo de construção de uma árvore geradora observável, as arestas de fluxo são prioritárias em relação às arestas de injeção, pois possuem menos restrições.

No Algoritmo 2, a máxima expansão de \mathcal{T} depende da ordem em que as arestas de injeção são examinadas. Assim sendo, uma determinada ordenação de A_p poderá impossibilitar a construção de uma árvore geradora observável \mathcal{T} , comprometendo negativamente a avaliação da observabilidade topológica de um sistema. Para contornar esse problema, um digrafo bipartido auxiliar \mathcal{B} é construído consoante ao processamento das arestas de injeção. Cada vértice $v \in V(\mathcal{B})$ representa uma aresta de injeção $e_p \in A_p$. Como \mathcal{B} é bipartido, o conjunto de vértices $V(\mathcal{B})$ subdivide-se em dois subconjuntos disjuntos: $X \subseteq V(\mathcal{B})$, que corresponde às arestas de injeção incluídas em \mathcal{T} ; e $Y = V(\mathcal{B}) \setminus X$, que representa as arestas de injeção não pertencentes a \mathcal{T} . A partição de vértices de \mathcal{B} varia no decorrer da execução do Algoritmo 2, sendo que, inicialmente, tem-se $X = \emptyset$ e $Y = A_p$.

Conforme pode ser observado no Algoritmo 2, se a inclusão de uma aresta de injeção $e_f \in A_p$ corrente:

- não repetir cor (linha 14) e não formar ciclo (linha 18) em \mathcal{T} , então e_f é inserida em \mathcal{T} (linha 20). Se \mathcal{T} não é árvore geradora observável, então retorna-se para o laço da linha 5;
- não repetir cor e formar um ciclo \mathcal{C} (linha 16) em \mathcal{T} , então e_f é inserida na conjunto S_{cor} (linha 15). Além disso, cria-se um arco em \mathcal{B} para cada aresta de injeção e_{ciclo} em \mathcal{C} distinta de e_p , cujo extremo inicial é e_p e extremo final e_{ciclo} (linha 17); ou
- repetir cor (linha 12) e não formar um ciclo em \mathcal{T} , então e_f é inserida na conjunto S_{ciclo} (linha 23). Adicionalmente, cria-se um único arco em \mathcal{B} de extremo inicial é e_{ciclo} e extremo final e_p (linha 13), onde e_{ciclo} é a aresta de injeção pertencente a \mathcal{T} de mesma cor que e_p (i.e., referem-se a uma mesma medida de injeção).

Os conjuntos S_{cor} e S_{ciclo} são subconjuntos disjuntos de Y , ou seja, a partição do conjunto de vértices de \mathcal{B} correspondentes às arestas de injeção não pertencentes a \mathcal{T} , conforme ilustrado na Figura 4.11.

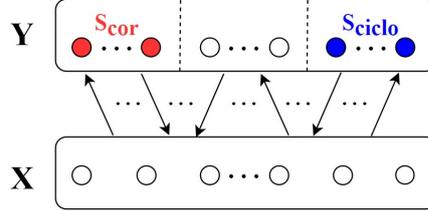


Figura 4.11: Subconjuntos S_{cor} e S_{ciclo} da partição Y em \mathcal{B} .

Se o processamento das arestas de injeção não resultar na formação de uma árvore geradora observável, examina-se o digrafo bipartido auxiliar \mathcal{B} , com o propósito de verificar se a floresta arco-íris \mathcal{T} obtida é efetivamente máxima em quantidade de arestas.

Busca-se um caminho mínimo \mathcal{P} em \mathcal{B} , cuja origem seja um elemento de S_{cor} e destino um elemento de S_{ciclo} (linha 25). Se esse caminho não existir, então conclui-se que a floresta arco-íris \mathcal{T} é máxima e o sistema inobservável (\mathcal{Z} não possui uma árvore geradora observável). Caso contrário, o caminho mínimo \mathcal{P} indica um possível remanejamento das arestas de injeção escolhidas para integrar \mathcal{T} que resulta no incremento de, no máximo, uma unidade à cardinalidade do conjunto de arestas $E(\mathcal{T})$. Sabendo-se que I é o conjunto composto de arestas de injeção que integram a floresta corrente \mathcal{T} , a expansão de \mathcal{T} , em uma única aresta, obtém-se por:

- remoção das arestas de injeção pertencentes a I em \mathcal{T} (linha 28); e
- inclusão das arestas de injeção pertencentes a $I \Delta V(P)$ em \mathcal{T} (linha 30).

A operação entre conjuntos $A \Delta B$ é denominada *diferença simétrica*. A diferença simétrica dos conjuntos A e B compreende todos os elementos pertencentes exclusivamente a A ou a B , mas não a ambos. A Figura 4.12 ilustra o conjunto resultante da diferença simétrica entre os conjuntos A e B (região cinza).

Se a expansão da floresta \mathcal{T} resultar numa árvore geradora observável, o sistema é dado como topologicamente observável. Caso contrário, as arestas de injeção $e_p \in A_p \setminus I$ são reprocessadas, a fim de obter uma árvore geradora observável. Note que a ordem de processamento das arestas de injeção influencia o desempenho do Algoritmo 2. A complexidade desse algoritmo é da ordem de $O(A_p^3 n)$, onde n representa a quantidade de vértices de \mathcal{Z} [45].

O Capítulo 5 apresentará detalhes da análise de observabilidade topológica (Algoritmos 1 e 2) aplicada ao sistema IEEE de 14 barras.

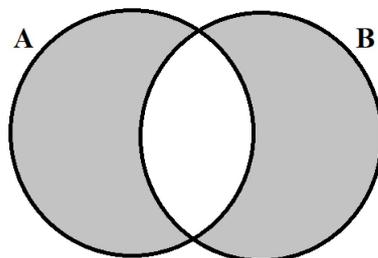


Figura 4.12: Conjunto resultante da diferença simétrica entre A e B (região cinza).

Considerando o multigrafo de medições \mathcal{Z} e a floresta maximal arco-íris \mathcal{F} apresentados nas Figuras 4.8 e 4.10, respectivamente, aplicação do Algoritmo 2 resulta em uma árvore geradora observável \mathcal{T} exemplificada na Figura 4.13. Assim sendo, tem-se que o sistema de 6 barras, supervisionado por 10 medidas, ilustrado na Figura 4.7 é topologicamente observável. Ressalta-se que a árvore geradora observável não é única, sendo dependente da ordem de processamento das arestas de fluxo e de injeção.

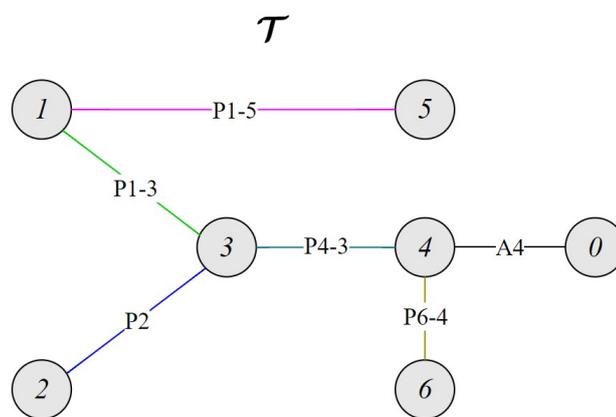


Figura 4.13: Árvore observável referente a um sistema de 6 barras e 10 medidas.

4.4 Análise Topológica de Criticalidades

As subseções seguintes abordam metodologias estritamente topológicas, baseadas na teoria dos grafos, buscando a identificação de medidas críticas (C_{meds}) e k -tuplas críticas de medidas ($C_{k\text{-tuplas}}$).

4.4.1 Identificação de Medidas Críticas

Uma aresta de fluxo ou injeção $e_c \in E(\mathcal{Z})$ refere-se a uma medida crítica, se e somente se, pertencer a todas as árvores geradoras observáveis possíveis de um multigrafo de medições \mathcal{Z} [52]. Consequentemente, a aresta e_c integra a árvore geradora observável \mathcal{T} , proveniente da análise de observabilidade topológica (Algoritmos 1 e 2). O algoritmo proposto para identificação de C_{meds} fundamenta-se nessa proposição.

O procedimento para identificação de C_{meds} baseia-se na metodologia proposta por Simões et al. em [52], que consiste na construção de um digrafo bipartido \mathcal{B}_0 cujos vértices representam as arestas de um multigrafo de medições \mathcal{Z} . O conjunto de vértices $V(\mathcal{B}_0)$ é particionado em dois subconjuntos disjuntos: $X \subseteq V(\mathcal{B}_0)$, constituído de vértices que representam as arestas da árvore geradora observável \mathcal{T} obtida do algoritmo de observabilidade topológica; e $Y = V(\mathcal{B}_0) \setminus X$, formado por vértices que representam as arestas que não estão em \mathcal{T} . O digrafo \mathcal{B}_0 indica as possibilidades de remanejamento de arestas para construção de árvores geradoras observáveis distintas de \mathcal{T} .

Os caminhos direcionados em \mathcal{B}_0 com origem em Y e destino em X , cujos vértices estão alternativamente em Y e X , são denominados *sequências de permutação* (em inglês, *exchange sequences*) [52]. Note que uma sequência de permutação possui essencialmente comprimento ímpar. Dada uma sequência de permutação \mathcal{P} em \mathcal{B}_0 , adicionando-se e removendo-se de \mathcal{T} as arestas representadas por vértices $v \in E(\mathcal{P})$ em Y e em X , respectivamente, resultará em uma árvore geradora observável \mathcal{T}^* tal que $V(\mathcal{T}^*) = V(\mathcal{T})$ e $E(\mathcal{T}^*) \neq E(\mathcal{T})$. Os vértices de X que não compõem nenhuma sequência de permutação de \mathcal{B}_0 representam arestas correspondentes a C_{meds} .

No algoritmo implementado, o digrafo \mathcal{B}_0 é declarado como totalmente desconexo, i.e., sem arcos. Para criação de arcos em \mathcal{B}_0 , processam-se as arestas $e \in E(\mathcal{Z}) \setminus E(\mathcal{T})$ representadas em Y . Se a inclusão de e em \mathcal{T} : resultar em um ciclo \mathcal{C}_c , que representa uma par de arestas de mesma cor em \mathcal{T} , então cria-se um arco em \mathcal{B}_0 com extremo inicial em $e_{\text{cor}} \in E(\mathcal{C}_c) \setminus \{e\}$ e com extremo final em e ; ou resultar em um ciclo \mathcal{C}_g em \mathcal{T} , então criam-se arcos em \mathcal{B}_0 com extremo inicial em e e extremos finais $e_{\text{ciclo}} \in E(\mathcal{C}_g) \setminus \{e\}$. Note que o processo é análogo ao de construção do digrafo \mathcal{B} .

Seja $M(\cdot)$, a função que retorna a medida referenciada por uma aresta de \mathcal{Z} . As entradas do algoritmo implementado consistem no multigrafo de medições \mathcal{Z} , na árvore geradora observável \mathcal{T} e na função $M(\cdot)$. No Algoritmo 3, apresenta-se o pseudocódigo para identificação de C_{meds} de um sistema.

Algoritmo 3: Algoritmo para Identificação de C_{meds}

Entrada: \mathcal{Z} , \mathcal{T} e $M(\cdot)$ referentes ao sistema avaliado.

Saída: Um conjunto contendo as C_{meds} do sistema avaliado.

1 **início**

2 $\mathcal{B}_0 : V(\mathcal{B}_0) \leftarrow E(\mathcal{Z})$ e $E(\mathcal{B}_0) \leftarrow \emptyset$; // Inicialização de \mathcal{B}_0 .

3 $Crit \leftarrow \emptyset$; // Inicialização do conjunto que armazenará as C_{meds} do sistema.

4 $Q \leftarrow E(\mathcal{T})$; // Inic. do conj. que armazenará as arestas de \mathcal{T} referentes a possíveis C_{meds} .

5 $W \leftarrow \emptyset$; // Inicialização do conjunto que armazenará as medidas não críticas.

6 **para cada** $e \in E(\mathcal{Z}) \setminus E(\mathcal{T})$ **faça**

7 **se** $\mathcal{T} + e$ tem um ciclo \mathcal{C}_c **então** // Repete cor em \mathcal{T} .

8 $e_{cor} \leftarrow E(\mathcal{C}_c) \setminus \{e\}$; $\mathcal{B}_0 \leftarrow \mathcal{B}_0 + (e_{cor}, e)$;

9 **senão** // $M(e)$ é inserido em W , pois não integra \mathcal{T} .

10 **se** $M(e) \notin W$ **então** $W \leftarrow W \cup \{M(e)\}$;

11 **se** $\mathcal{T} + e$ tem um ciclo \mathcal{C}_g **então** // Forma ciclo em \mathcal{T} .

12 **para cada** $e_{ciclo} \in E(\mathcal{C}_g) \setminus \{e\}$ **faça**

13 $\mathcal{B}_0 \leftarrow \mathcal{B}_0 + (e, e_{ciclo})$;

 // $M(e_{ciclo})$ é inserido em W , pois e_{ciclo} é vizinho de saída de e e $M(e) \in W$.

14 **se** $M(e) \in W$ e $M(e_{ciclo}) \notin W$ **então**

15 $W \leftarrow W \cup \{M(e_{ciclo})\}$;

16 $Q \leftarrow Q \setminus \{e_{ciclo}\}$;

17 **para cada** $e \in Q$ **faça**

 // Se e não possui vizinhança de entrada, então $M(e)$ é C_{med} .

18 **se** $|\mathcal{B}_0.N^+(e)| = 0$ **então** $Crit \leftarrow Crit \cup M(e)$;

19 **senão**

20 $L \leftarrow \emptyset$; // Inic. do conjunto que agrupará as arestas e_y tal que $M(e_y) \notin W$.

21 **para cada** $e_y \in \mathcal{B}_0.N^+(e)$ **faça**

22 **se** $M(e_y) \in W$ **então**

23 quebrar o laço da linha 21;

24 **senão** $L \leftarrow L \cup \{e_y\}$;

 // Se qualquer vizinho de entrada e_y de e refere-se a medida não pertencente a W ,

 então $M(e)$ é C_{med} .

25 **se** $|L| = |\mathcal{B}_0.N^+(e)|$ **então** $Crit \leftarrow Crit \cup M(e)$;

26 **retorna** $Crit$;

De acordo com o Algoritmo 3, W representa o conjunto destinado a armazenar as medidas (ou cores) não críticas de um sistema. Note que, ao término do algoritmo, todas as medidas que não integram \mathcal{T} estarão em W . Além disso, W incorporará as medidas em \mathcal{T} substituíveis por medidas cujas arestas associadas são representadas por vértices em Y . Entre as linhas 11 e 16 ocorrem os processos de criação de arcos em \mathcal{B}_0 e de inclusão de medidas não críticas em W . O conjunto Q destina-se a armazenar as arestas de \mathcal{T} que podem referir-se a C_{meds} .

No Algoritmo 3, a busca por C_{meds} , a partir do conhecimento de \mathcal{B}_0 e W , ocorre entre as linhas 17 e 25. Para cada aresta e pertencente ao conjunto $Q \subset X$, verifica-se se o vértice correspondente em \mathcal{B}_0 não possui vizinhos de entrada referentes a medidas em W . Em caso afirmativo, conclui-se que o vértice de X referente à aresta e não compõe nenhuma sequência de permutação de \mathcal{B}_0 e, portanto, a medida $M(e)$ é uma C_{med} . Observe que, se o grau de entrada de uma aresta e em Q é zero em \mathcal{B}_0 , então conclui-se diretamente (sem a necessidade de verificar a vizinhança de entrada do referido vértice) que $M(e)$ é uma C_{med} (linha 18).

Na prática, o conjunto W pode ser implementado como um dicionário, cujas chaves são as medidas do sistema e cujos valores são binários, indicando se determinada medida pertence ou não a W . Isso resultará numa busca em tempo constante por uma medida em W .

A Figura 4.14 ilustra o digrafo bipartido \mathcal{B}_0 referente ao multigrafo de medições \mathcal{Z} e à árvore geradora observável \mathcal{T} ilustradas nas Figuras 4.8 e 4.13, respectivamente.

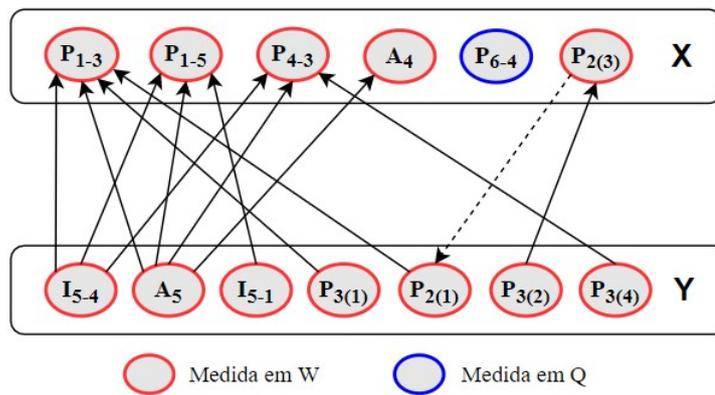


Figura 4.14: Grafo \mathcal{B}_0 de um sistema de 6 barras e 10 medidas.

De acordo com o digrafo \mathcal{B}_0 da Figura 4.14, a medida de fluxo de potência P_{6-4} é uma C_{med} , pois possui uma aresta em \mathcal{T} não envolvida em sequências de permutação (i.e., não possui vizinho de entrada associado a uma medida em W).

4.4.2 Identificação de K-Tuplas Críticas de Medidas

Conforme mencionado anteriormente, a coloração de arestas de um multigrafo de medições \mathcal{Z} representa o plano de medição de um sistema. Sabe-se que a árvore geradora observável obtida do algoritmo de observabilidade topológica não é única. A quantidade de árvores geradoras (não necessariamente observáveis) cresce exponencialmente com o tamanho do grafo base. Assim, pode-se inferir que a enumeração das árvores geradoras observáveis de um multigrafo de medições torna-se inviável para redes elétricas de grandes dimensões.

Na modelagem adotada, uma $C_{k\text{-tupla}}$ é um conjunto minimal de cores cuja remoção de \mathcal{Z} resulta na desconstrução de todas as árvores geradoras observáveis existentes em \mathcal{Z} . Recorde-se que cada cor presente em \mathcal{Z} se refere a uma determinada medida. Cada medida de fluxo de potência, de corrente de ramo e de ângulo de fase possui apenas uma aresta de fluxo correspondente em \mathcal{Z} e, portanto, a relação entre arestas de fluxo e cores dessas medidas é biunívoca. À vista disso, supondo um sistema composto apenas por essas medidas, o processo de identificação de $C_{k\text{-tuplas}}$ de um sistema reduz-se ao problema de busca por cortes minimais de arestas (co-ciclos ou ligações) em um multigrafo.

Uma medida de injeção de potência P_k , instalada em uma barra k da rede, é representada por um conjunto de arestas em \mathcal{Z} , cuja cardinalidade corresponde à quantidade de barras adjacentes a k . Consequentemente, a relação entre arestas de injeção e cores dessas medidas é sobrejetora. Por conseguinte, quando o plano de medição de um sistema engloba medidas de injeção de potência, compromete-se a dualidade existente entre os problemas de identificação de $C_{k\text{-tuplas}}$ e de cortes minimais de arestas em um multigrafo.

O algoritmo implementado consiste na remoção sistemática de um conjunto de cores do multigrafo de medições \mathcal{Z} e, posteriormente, na execução do algoritmo de observabilidade topológica. Se a remoção de um conjunto de k cores de \mathcal{Z} resulta na perda da observabilidade topológica e, além disso, é minimal, então trata-se de uma $C_{k\text{-tupla}}$. Salienta-se que as cores correspondentes às C_{meds} de um sistema são desconsideradas, pois, de acordo com as definições apresentadas na Seção 2.5, não podem integrar $C_{k\text{-tuplas}}$ com $k \geq 2$.

Considere Λ como o conjunto composto por todas as cores de \mathcal{Z} referentes a medidas não críticas e λ como o conjunto das cores pertencentes à árvore geradora observável \mathcal{T}_1 de \mathcal{Z} , oriunda de uma análise de observabilidade topológica preliminar à busca por $C_{k\text{-tuplas}}$. As cores em \mathcal{Z} são representadas por números inteiros positivos. Neste manuscrito, denotar-se-á um conjunto de k cores distintas de Λ por C_k . Sejam $\vartheta(\cdot)$ e $\psi(\cdot)$, as

funções que retornam o conjunto de arestas e de medidas, respectivamente, correspondentes a um dado C_k . Os dados de entrada do algoritmo implementado para identificação de $C_{k-tuplas}$ são: multigrafo de medições \mathcal{Z} , conjunto de medidas críticas $Crit$, valor de cardinalidade máxima desejada k_{max} , conjuntos Λ e λ . Segue o pseudocódigo do Algoritmo 4.

Algoritmo 4: Algoritmo para Identificação de $C_{k-tuplas}$

Entrada: \mathcal{Z} , $Crit$, k_{max} , Λ e λ .

Saída: Uma lista contendo as $C_{k-tuplas}$ do sistema avaliado..

1 início

2 $ktuplas \leftarrow \emptyset$; // Inic. da lista que agrupará as $C_{k-tuplas}$ do sistema.

3 $k \leftarrow 1$; // Contador do processo, que indica cardinalidade da $C_{k-tupla}$ procurada.

4 enquanto $k \leq k_{max}$ **faça** // Enquanto o contador k não atingir a cardinalidade desejada.

5 $k \leftarrow k + 1$;

6 $\Gamma \leftarrow \emptyset$; // Lista que reunirá conjuntos de cardinalidade $k - 1$ com cores de Λ .

7 **para cada** $cor \in \lambda$ **faça** // Para cada cor presente em \mathcal{T} .

8 $\Gamma \leftarrow Combinations(\Lambda \setminus \{cor\}, k - 1)$;

9 **para cada** $C_{k-1} \in \Gamma$ **faça** // Para cada conjunto em Λ de cardinalidade $k - 1$.

10 $C_k \leftarrow C_{k-1} \cup \{cor\}$;

11 **se** $C_k \notin ktuplas$ **então**

12 $\mathcal{Z}^* \leftarrow \mathcal{Z}$;

13 **para cada** $e \in \vartheta(C_k)$ **faça**

14 $\mathcal{Z}^* \leftarrow \mathcal{Z}^* - e$

15 **se** \mathcal{Z}^* não **é** topologicamente observável **então**

16 $ktuplas \leftarrow ktuplas \cup \psi(C_k)$

17 retorna $ktuplas$;

Observe que o Algoritmo 4 requer a análise prévia da observabilidade topológica (Algoritmos 1 e 2) e o conhecimento, de antemão, das C_{meds} (Algoritmo 3) do sistema. O procedimento $Combinations^1(\Lambda \setminus \{cor\}, k - 1)$, presente na linha 8 do Algoritmo 4, é responsável por gerar uma lista de combinações, de cardinalidade $k - 1$, dos elementos pertencentes a $\Lambda \setminus \{cor\}$, que será armazenada na variável Γ .

A árvore geradora observável \mathcal{T}_1 , obtida da análise de observabilidade topológica pre-

¹Detalhes sobre implementações possíveis do procedimento podem ser encontrados em [35] e [42].

liminar à execução do Algoritmo 4, é aproveitada para construção do conjunto λ , que, conforme mencionado anteriormente, agrupa as cores que constituem \mathcal{T}_1 .

Considere Υ como o conjunto de todas as árvores geradoras observáveis possíveis de um multigrafo de medições \mathcal{Z} . Na modelagem topológica, uma $C_{k\text{-tupla}}$ pode ser interpretada como um conjunto minimal de cores cuja remoção resulta na desconstrução de todas as árvores geradoras observáveis em Υ . Baseando-se nisso, os conjuntos C_k gerados no Algoritmo 4 envolvem, obrigatoriamente, uma cor em λ (linha 7), pois a árvore geradora observável \mathcal{T}_1 também deverá ser desconstruída. Como exemplo, para a identificação de $C_{k\text{-tuplas}}$ presentes no sistema de 6 barras da Figura 4.7, visando a redução do espaço de busca, cada combinação C_k gerada no Algoritmo 4 sempre incluirá, ao menos, uma das cores (ou medidas) presentes na árvore geradora observável \mathcal{T} da Figura 3.31.

No Algoritmo 4, \mathcal{Z}^* representa o multigrafo de medições sem as arestas cujas cores estão em C_k . Se a aplicação do algoritmo de observabilidade topológica sobre \mathcal{Z}^* não retornar uma árvore geradora observável (linha 15), então o conjunto de medidas em $\psi(C_k)$ representa uma $C_{k\text{-tupla}}$, que será incluída na lista *ktuplas*. Adicionalmente, a linha 11 garante a minimalidade do conjunto C_k a ser verificado.

O problema de busca por $C_{k\text{-tuplas}}$ é estritamente combinatório. A quantidade combinações de cores (ou medidas) geradas cresce com o tamanho de \mathcal{Z} , sendo, portanto, impossível identificar todas as criticalidades de medidas de um sistema em tempo polinomial.

Considere um sistema observável composto apenas por medidas de fluxo de potência, corrente de ramo e ângulo de fase de tensões nodais, cuja multigrafo de medições é \mathcal{Z}_f . Como \mathcal{Z}_f possui apenas arestas de fluxo, basta a aplicação do Algoritmo 1 para avaliação da observabilidade topológica e obtenção de \mathcal{T}_1 . Conforme mencionado anteriormente, a correspondência entre cores (ou medidas) e arestas de fluxo é biunívoca, o que resulta em uma dualidade entre os problemas de busca por $C_{k\text{-tuplas}}$ e cortes de arestas minimais. Assim sendo, uma $C_{k\text{-tupla}}$ refere-se a um conjunto minimal de arestas cuja remoção de \mathcal{Z}_f resulta em um multigrafo de medições \mathcal{Z}_f^* com exatamente duas componentes conexas. De fato, \mathcal{Z}_f^* desconexo impossibilita a existência de uma árvore geradora qualquer. Assim sendo, torna-se suficiente verificar se \mathcal{Z}_f^* é conexo na linha 15 do Algoritmo 4, o que pode ser efetuado por uma simples busca em profundidade (ou mesmo uma busca em largura).

O Algoritmo 5 apresenta o pseudocódigo, baseado na busca em profundidade, para identificação da conectividade de \mathcal{Z}_f^* , que pode ser empregado para identificação de $C_{k\text{-tuplas}}$ em sistemas cujo multigrafo de medições associado dispõe apenas de arestas de fluxo. Esse algoritmo possui complexidade $O(n + m)$ [55], sendo n e m a quantidade de vértices e de arestas de \mathcal{Z}_f^* , respectivamente.

Algoritmo 5: Verificação da conectividade de \mathcal{Z}_f^*

Entrada: Um multigrafo de medições \mathcal{Z}_f^* .

Saída: Valor lógico, indicando se \mathcal{Z}_f^* é conexo (*true*) ou não (*false*).

1 **início**

2 **para cada** $v \in V(\mathcal{Z}_f^*)$ **faça**

3 $v.visitado \leftarrow false$;

4 $v \leftarrow$ vértice aleatório em $V(\mathcal{Z}_f^*)$;

5 VisitarVertice(\mathcal{Z}_f^*, v);

6 **para cada** $v \in V(\mathcal{Z}_f^*)$ **faça**

7 **se** $v.visitado = false$ **então**

8 **retorna** *false*; // \mathcal{Z}_f^* é desconexo (sistema não observável).

9 **retorna** *true*; // \mathcal{Z}_f^* é conexo (sistema observável).

10 **procedimento** VisitarVertice(\mathcal{Z}_f^*, v)

11 $v.visitado \leftarrow true$;

12 **para cada** $w \in \mathcal{G}_f.N(v)$ **faça**

13 **se** $w.visitado = false$ **então**

14 $\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T} + (v, w)$;

15 VisitarVertice($\mathcal{F}, \mathcal{G}_f, w$);

Capítulo 5

Testes e Resultados

No presente capítulo, avaliam-se os resultados dos algoritmos propostos para as análises de observabilidade e criticalidades, quando aplicados aos planos de medição estabelecidos nas redes elétricas dos sistemas IEEE 14, 30 e 118 barras. De modo a facilitar o entendimento do leitor, detalha-se a execução do algoritmo de observabilidade topológica por meio da sua aplicação ao sistema IEEE 14 barras. Salienta-se que a avaliação de desempenho dos referidos algoritmos foi deixada para pesquisas futuras, quando espera-se ter havido a consolidação dos resultados da eficácia da metodologia aqui proposta.

5.1 Sistemas Avaliados

Os algoritmos para análise de observabilidade topológica, identificação de medidas críticas e tuplas críticas foram implementados em linguagem *Python*, agregados à biblioteca *NetworkX* [33] para representação gráfica dos resultados. Outras ilustrações foram desenvolvidas através do aplicativo *JGraph* [7].

As redes do IEEE 14, 30 e 118 barras, comumente empregadas em estudos na área de análise de redes elétricas de potência, foram tomadas como base para avaliação de planos de medição através da aplicação dos algoritmos apresentados no Capítulo 4.

Inicialmente, mostra-se um exemplo detalhado de aplicação do algoritmo de observabilidade topológica sobre o sistema de 14 barras ilustrado na Figura 5.1. O plano de medição desse sistema é composto por 18 medidas: 9 medidas de fluxo de potência, 4 medidas de injeção de potência, 3 medidas de corrente de ramo e 2 medidas de ângulo.

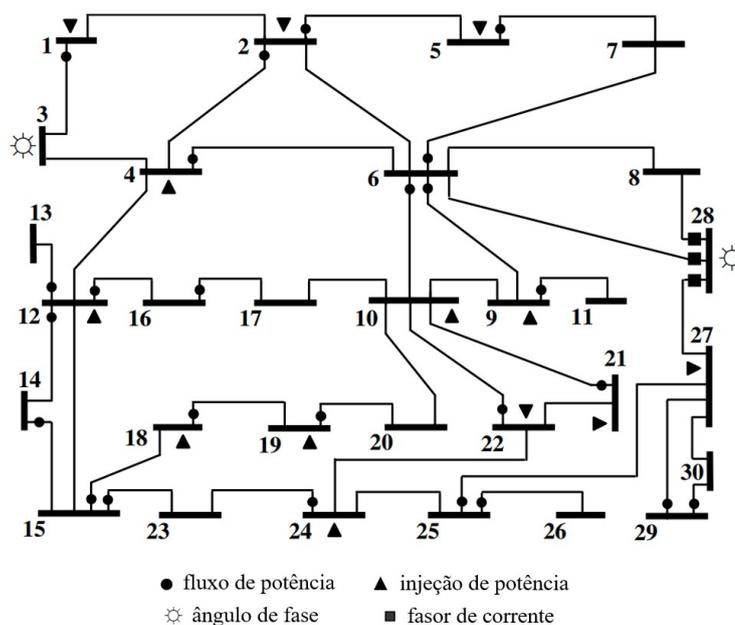


Figura 5.3: Sistema de 30 barras e 43 medidas. Adaptado de [4].

3. IEEE 118 barras e 176 medidas, representado na Figura 5.4, cujo plano de medição compreende somente medidas de fluxo de potência, o que possibilitará a aplicação do Algoritmo 5 para identificação de $C_{k\text{-tuplas}}$. As criticalidades desse sistema foram identificadas e confrontadas com os resultados da observabilidade algébrica encontrados em [43].

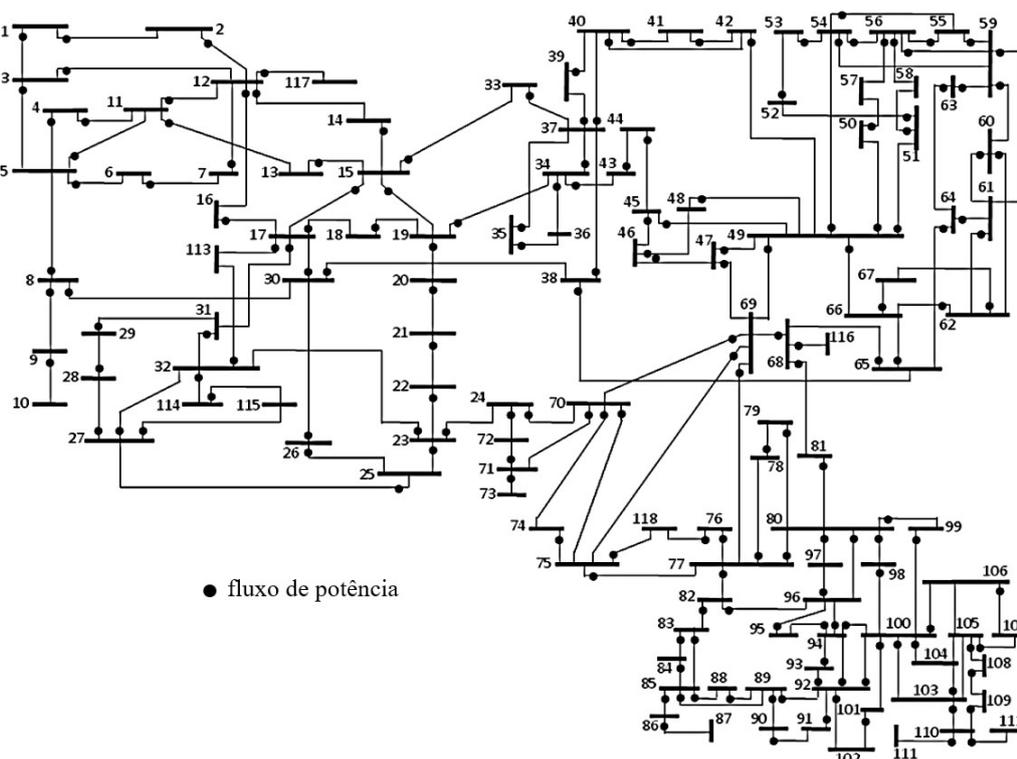


Figura 5.4: Sistema de 118 barras e 176 medidas de fluxo de potência.

5.2 Sistema de 14 Barras e 18 Medidas

Nesta seção, apresentar-se-á um exemplo detalhado de aplicação do algoritmo de observabilidade topológica para análise do sistema de 14 barras e 18 medidas ilustrado na Figura 5.1.

A Figura 5.5 ilustra o multigrafo de medições \mathcal{Z} correspondente ao plano de medição em questão.

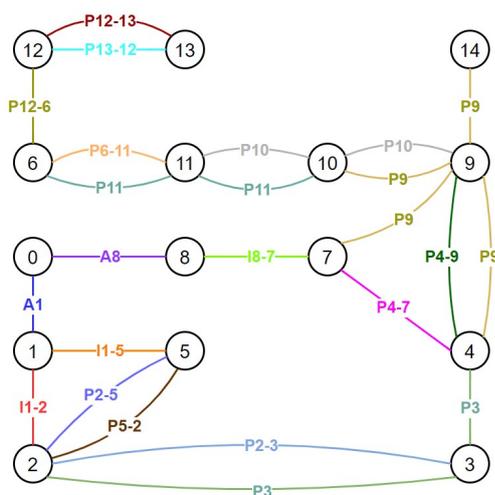


Figura 5.5: Grafo \mathcal{Z} do sistema de 14 barras e 18 medidas.

Inicialmente, processam-se as arestas de fluxo para obtenção da floresta maximal \mathcal{F} em \mathcal{G}_f . Se \mathcal{F} não for uma árvore geradora observável (ou arco-íris) \mathcal{T} , então as arestas de injeção, com extremos distintos das arestas de fluxo, serão processadas. A Figura 5.6 apresenta o grafo \mathcal{G}_f do sistema.

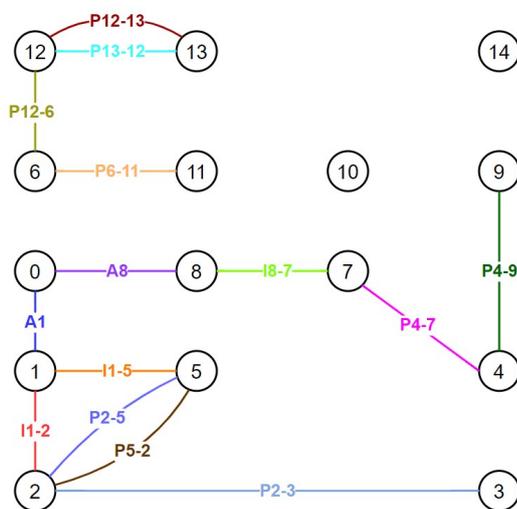


Figura 5.6: Grafo \mathcal{G}_f do sistema de 14 barras e 18 medidas.

O Algoritmo 1, baseado em uma busca em profundidade, encontrou a floresta maximal \mathcal{F} de \mathcal{G}_f da Figura 5.7. Observe que o grafo \mathcal{G}_f possui 4 componentes conexas, o que possibilita antever que 4 arestas de injeção correspondentes a medidas distintas (ou cores distintas) deverão integrar \mathcal{F} , a fim de garantir a observabilidade topológica do sistema.

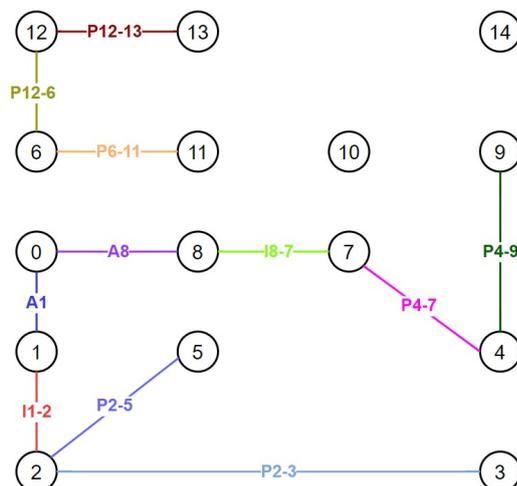


Figura 5.7: Floresta \mathcal{F} de \mathcal{G}_f do sistema de 14 barras e 18 medidas.

A Tabela 5.1 indica a sequência de arestas de fluxo exploradas para obtenção de \mathcal{F} . Nesse caso, as raízes da busca em profundidade foram, sequencialmente, os vértices: 0, 6, 10 e 14. A própria natureza do algoritmo de busca em profundidade impossibilita a formação de ciclos no processo de construção de \mathcal{F} .

Tabela 5.1: Sequência de arestas de fluxo exploradas.

Ordem	Aresta	Medida	Situação	Ordem	Aresta	Medida	Situação
1	(0, 1)	A_1	Inserida	8	(8, 7)	I_{8-7}	Inserida
2	(1, 2)	I_{1-2}	Inserida	9	(7, 4)	P_{4-7}	Inserida
3	(2, 3)	P_{2-3}	Inserida	10	(4, 9)	P_{4-9}	Inserida
4	(2, 5)	P_{2-5}	Inserida	11	(6, 11)	P_{6-11}	Inserida
5	(2, 5)	P_{5-2}	Ignorada	12	(6, 12)	P_{12-6}	Inserida
6	(1, 5)	I_{1-5}	Ignorada	13	(12, 13)	P_{12-13}	Inserida
7	(0, 8)	A_8	Inserida	14	(12, 13)	P_{13-12}	Ignorada

Como \mathcal{F} não é uma árvore geradora observável, aplica-se o Algoritmo 2 para avaliação das arestas de injeção que não compartilham extremos com arestas de fluxo, registradas na Tabela 5.2, que indica a ordem de processamento dessas. Salienta-se que esse ordenamento é arbitrário.

Tabela 5.2: Ordenamento escolhido para processamento das arestas de injeção.

Ordem	1	2	3	4	5	6	7
Aresta	(3, 4)	(9, 7)	(9, 10)	(9, 14)	(10, 9)	(10, 11)	(11, 10)
Medida	$P_{3(4)}$	$P_{9(7)}$	$P_{9(10)}$	$P_{9(14)}$	$P_{10(9)}$	$P_{10(11)}$	$P_{11(10)}$

O digrafo bipartido auxiliar \mathcal{B} , definido inicialmente como $V(\mathcal{B}) = \{P_{3(4)}, P_{9(7)}, P_{9(10)}, P_{9(14)}, P_{10(9)}, P_{10(11)}, P_{11(10)}\}$ e $E(\mathcal{B}) = \emptyset$, está representado na Figura 5.8. Além disso, declara-se $S_{cor} = \emptyset$, $S_{ciclo} = \emptyset$ e $I = \emptyset$. Doravante, a floresta \mathcal{F} será denotada por \mathcal{T} . Dessa forma, examinando-se cada aresta de injeção, obedecendo o ordenamento indicado na Tabela 5.2, tem-se que:

- $\mathcal{T} + P_{3(4)}$ tem um único ciclo $C = \{P_{2-3}, I_{1-2}, A_1, A_8, I_{8-7}, P_{4-7}\}$, ilustrado na Figura 5.9, e, portanto, não integrará \mathcal{T} . Lembre-se que a rejeição de uma aresta de injeção não é definitiva, pois poderá haver um remanejamento de arestas de injeção mediante a análise de \mathcal{B} , podendo resultar na inclusão a posteriori dessa aresta em \mathcal{T} . Como $\mathcal{T} + P_{3(4)}$ não possui par de arestas com mesma coloração, então inclui-se $P_{3(4)}$ em S_{cor} , ou seja, $S_{cor} = \{P_{3(4)}\}$.

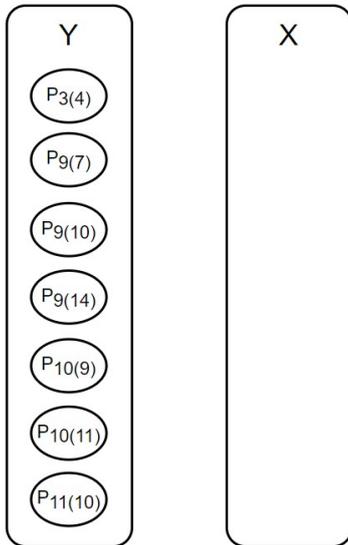


Figura 5.8: Digrafo auxiliar \mathcal{B} inicial.

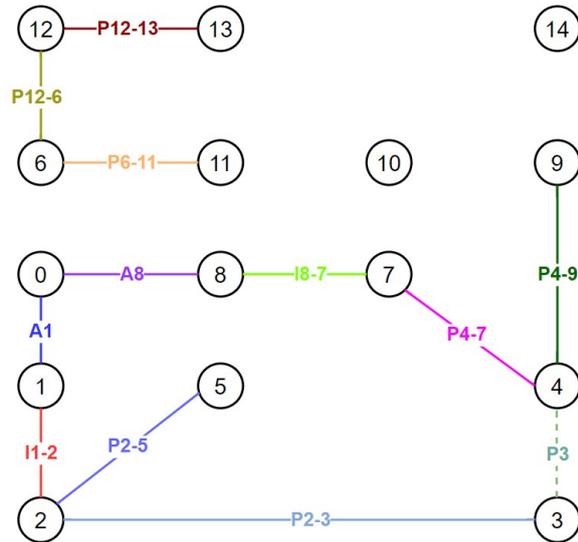


Figura 5.9: Grafo hipotético $\mathcal{T} + P_{3(4)}$, para avaliação de $P_{3(4)}$.

- $\mathcal{T} + P_{9(7)}$ tem um único ciclo $C = \{P_{4-7}, P_{4-9}\}$, ilustrado na Figura 5.10, e, portanto, não integrará \mathcal{T} . Como $\mathcal{T} + P_{9(7)}$ não possui par de arestas com mesma coloração, então: $S_{cor} = \{P_{3(4)}, P_{9(7)}\}$.

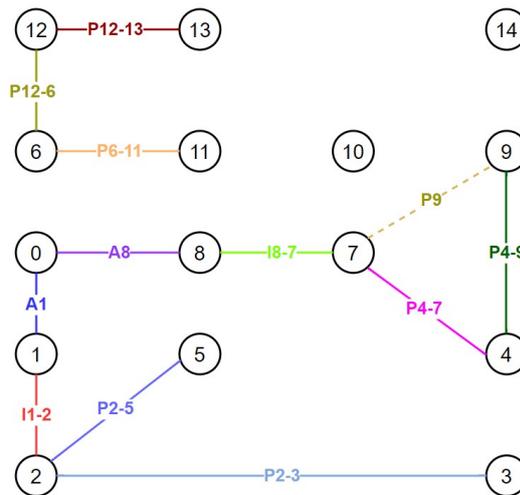


Figura 5.10: Grafo hipotético $\mathcal{T} + P_{9(7)}$, para avaliação de $P_{9(7)}$.

- $\mathcal{T} + P_{9(10)}$ não tem ciclo e não possui repetição de cores. Assim sendo, a aresta de injeção $P_{9(10)}$ integrará \mathcal{T} e, conseqüentemente, tem-se $I = \{P_{9(10)}\}$. Por conseguinte, $P_{9(10)}$ passará a integrar a partição X de \mathcal{B} . As arestas de injeção processadas outrora e não incluídas em \mathcal{T} serão reprocessadas, a fim de atualizar S_{cor} , S_{ciclo} e as adjacências de \mathcal{B} . O reprocessamento das arestas de injeção $P_{3(4)}$ e $P_{9(10)}$ resulta em $S_{cor} = \{P_{3(4)}\}$ (a aresta de injeção $P_{9(10)}$ foi removida de S_{cor}) e no digrafo \mathcal{B} da Figura 5.11. Os conjuntos de arcos $[X, Y]$ e $[Y, X]$ representam, respectivamente, as restrições de repetição de cores e de formação de ciclos entre as arestas de injeção pertencentes e não pertencentes a \mathcal{T} . A floresta \mathcal{T} resultante da inclusão de $P_{9(10)}$ está representada na Figura 5.12.

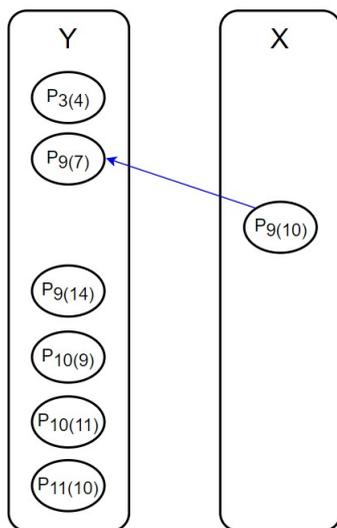


Figura 5.11: Digrafo auxiliar \mathcal{B} obtido da inclusão de $P_{9(10)}$.

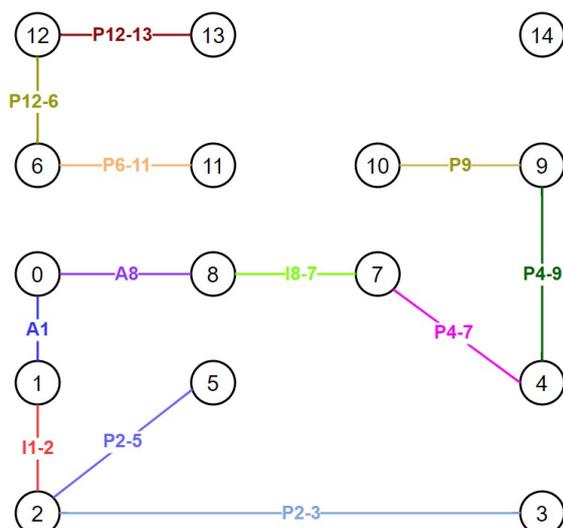


Figura 5.12: Grafo \mathcal{T} resultante da inclusão de $P_{9(10)}$.

- $\mathcal{T} + P_{9(14)}$ possui par de arestas de mesma cor, conforme pode observado na Figura 5.14, logo $P_{9(14)}$ não poderá integrar \mathcal{T} . Como $P_{9(14)}$ conflita na coloração com $P_{9(10)} \in I$, cria-se um arco $(P_{9(10)}, P_{9(14)})$ em \mathcal{B} , conforme ilustrado na Figura 5.13. Ademais, $\mathcal{T} + P_{9(14)}$ não forma ciclo, resultando em $S_{ciclo} = \{P_{9(14)}\}$.

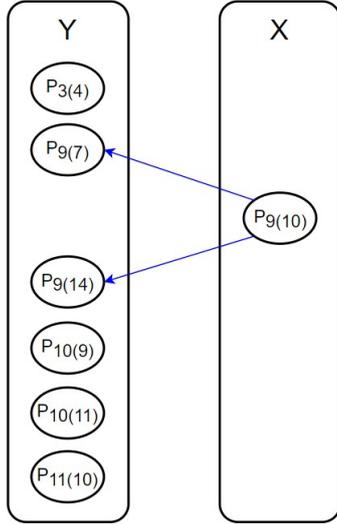


Figura 5.13: Criação do arco $(P_{9(10)}, P_{9(14)})$ em \mathcal{B} .

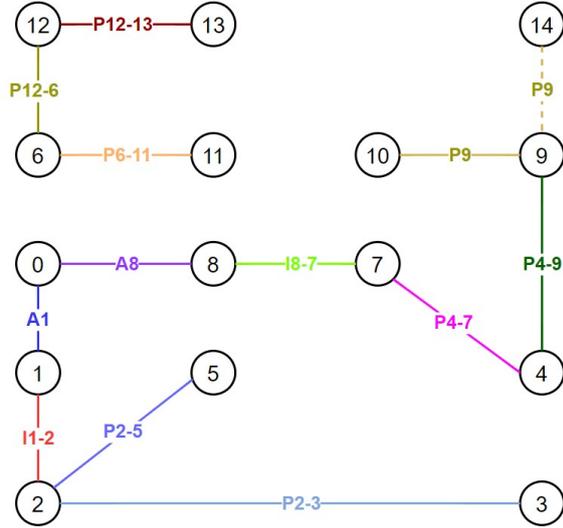


Figura 5.14: Grafo hipotético $\mathcal{T} + P_{9(14)}$, para avaliação de $P_{9(14)}$.

- $\mathcal{T} + P_{10(9)}$ tem um único ciclo $C = \{P_{9(10)}, P_{10(9)}\}$, ilustrado na Figura 5.16, por isso $P_{10(9)}$ não pertencerá a \mathcal{T} . Note que $P_{10(9)}$ forma ciclo com $P_{9(10)} \in I$ e, portanto, deve-se criar o arco $(P_{10(9)}, P_{9(10)})$ em \mathcal{B} , conforme apresentado na Figura 5.15. Como $\mathcal{T} + P_{10(9)}$ não possui cores repetidas, então: $S_{cor} = \{P_{3(4)}, P_{10(9)}\}$.

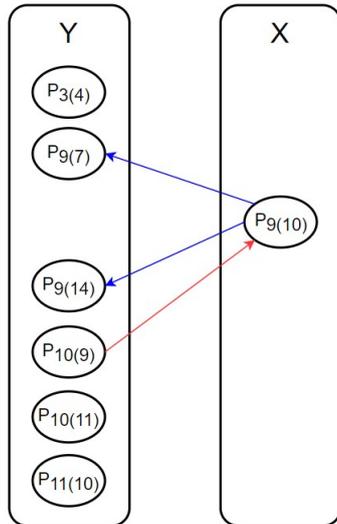


Figura 5.15: Criação do arco $(P_{10(9)}, P_{9(10)})$ em \mathcal{B} .

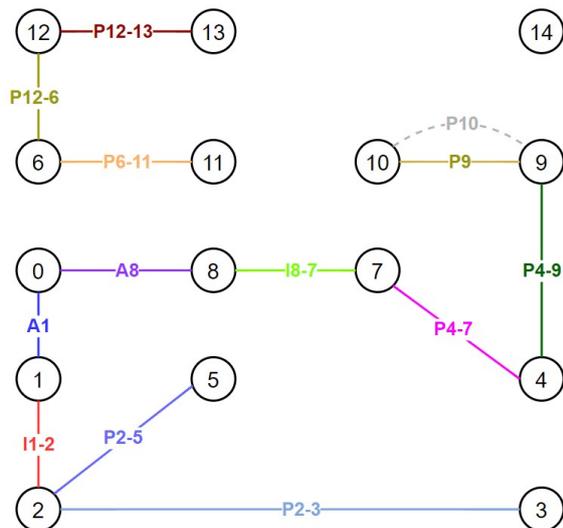


Figura 5.16: Grafo hipotético $\mathcal{T} + P_{10(9)}$, para avaliação de $P_{10(9)}$.

- $\mathcal{T} + P_{10(11)}$ não tem ciclo e não possui repetição de cores. Conseqüentemente, a aresta de injeção $P_{10(11)}$ será incluída em \mathcal{T} , como indica a Figura 5.18, e, portanto, tem-se $I = \{P_{9(10)}, P_{10(11)}\}$. Como uma aresta de injeção foi inserida em \mathcal{T} , reprocessa-se $P_{3(4)}$, $P_{9(7)}$, $P_{9(14)}$ e $P_{10(9)}$, pois foram rejeitadas anteriormente, resultando em $S_{cor} = \{P_{3(4)}\}$, $S_{ciclo} = \{P_{9(14)}\}$ e no digrafo \mathcal{B} da Figura 5.17.

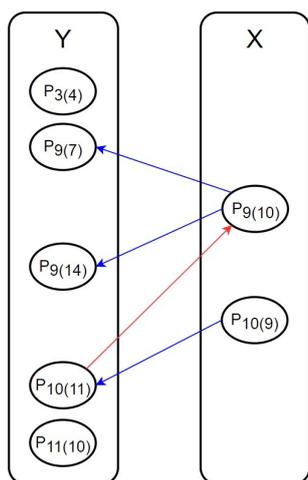


Figura 5.17: Digrafo auxiliar \mathcal{B} obtido da inclusão de $P_{10(11)}$.

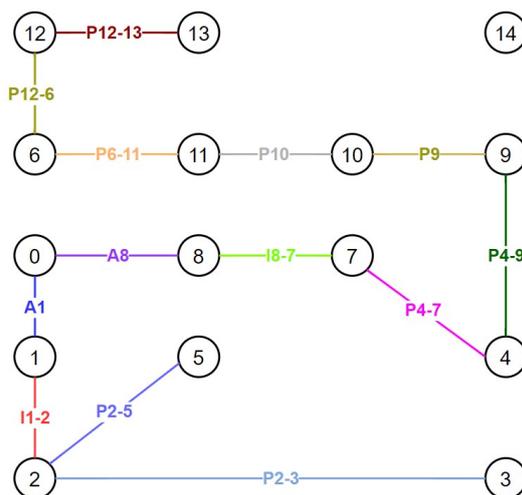


Figura 5.18: Grafo \mathcal{T} resultante da inclusão de $P_{10(11)}$.

- $\mathcal{T} + P_{11(10)}$, conforme mostrado na Figura 5.19, apresenta um único ciclo $C = \{P_{10(11)}, P_{11(10)}\}$, o que impossibilita a inserção de $P_{11(10)}$ em \mathcal{T} . Como $P_{11(10)}$ forma ciclo com $P_{10(11)} \in I$, então cria-se o arco $(P_{11(10)}, P_{10(9)})$ em \mathcal{B} , como se vê na Figura 5.15. Além disso, $\mathcal{T} + P_{11(10)}$ não possui par de cores, resultando em $S_{cor} = \{P_{3(4)}, P_{11(10)}\}$.

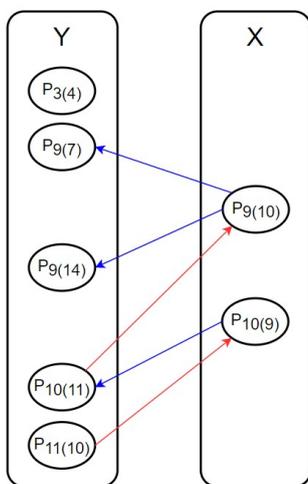


Figura 5.19: Criação do arco $(P_{11(10)}, P_{10(9)})$ em \mathcal{B} .

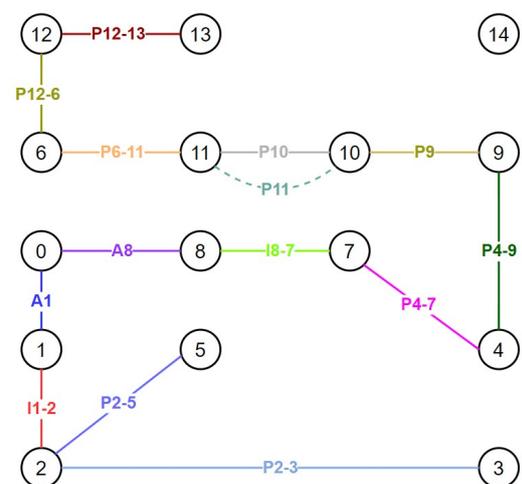


Figura 5.20: Grafo hipotético $\mathcal{T} + P_{11(10)}$, para avaliação de $P_{11(10)}$.

A Figura 5.21 apresenta a floresta arco-íris \mathcal{T} proveniente do processamento das arestas de injeção. Ainda não se pode afirmar que o sistema é inobservável, pois torna-se necessário examinar o digrafo auxiliar \mathcal{B} .

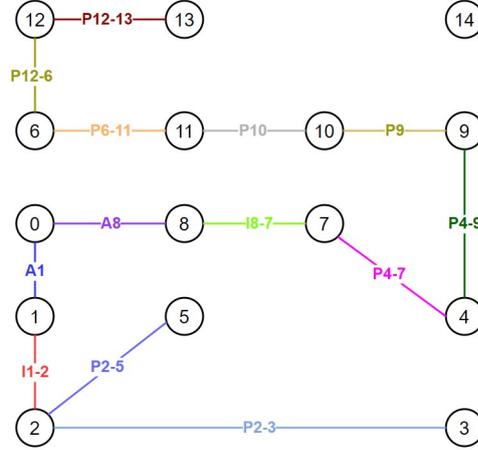


Figura 5.21: Grafo \mathcal{T} obtido do processamento das arestas de injeção.

Conforme mencionado anteriormente, busca-se um caminho mínimo em \mathcal{B} , cuja partida s e cujo destino t pertencem a S_{cor} e a S_{ciclo} , respectivamente. No caso em questão, tem-se $S_{cor} = \{P_{3(4)}, P_{11(10)}\}$ e $S_{ciclo} = \{P_{9(14)}\}$. Examinando-se digrafo \mathcal{B} da Figura 5.19, identifica-se um caminho direcionado $P = \{P_{11(10)}, P_{10(9)}, P_{10(11)}, P_{9(10)}, P_{9(14)}\}$, cuja partida é $P_{11(10)} \in S_{cor}$ e cujo destino é $P_{9(14)} \in S_{ciclo}$. Esse caminho em \mathcal{B} é evidenciado na Figura 5.22.

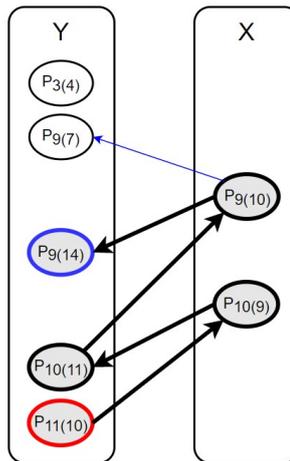


Figura 5.22: Caminho direcionado P em \mathcal{B} .

Sabendo-se que $I = \{P_{9(10)}, P_{10(11)}\}$, a operação de diferença simétrica entre I e P é efetuada, resultando em $I^* = I \triangle P = \{P_{9(14)}, P_{10(11)}, P_{11(10)}\}$. O grafo \mathcal{T} resultante da remoção e inserção das arestas de injeção em I e I^* , respectivamente, encontra-se na Figura 5.23.

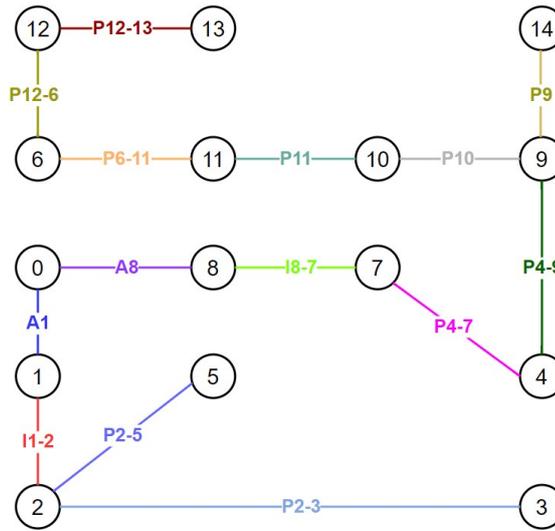


Figura 5.23: Árvore observável referente ao sistema de 14 barras e 18 medidas.

Como o grafo \mathcal{T} representa uma árvore geradora observável, conclui-se que o sistema da Figura 5.1 é topologicamente observável. Note que a ordem de processamento das arestas de injeção impactam no desempenho do algoritmo de observabilidade topológica.

A título de exemplo, processando-se as arestas de injeção de acordo com o ordenamento indicado na Tabela 5.3, obtém-se uma árvore geradora observável \mathcal{T} sem a necessidade de avaliação do digrafo auxiliar \mathcal{B} . Nesse caso, as arestas de injeção $P_{9(14)}$, $P_{10(9)}$ e $P_{11(10)}$, por não violarem as restrições outrora estabelecidas, integrariam \mathcal{T} . Consequentemente, o algoritmo indicaria a observabilidade topológica do sistema sem processar as arestas de injeção $P_{3(4)}$, $P_{9(7)}$, $P_{9(10)}$ e $P_{10(11)}$. Apenas uma inspeção visual possibilita uma identificação rápida do melhor ordenamento de arestas de injeção, contudo, tratando-se de sistemas de grande porte, isso torna-se inviável.

Tabela 5.3: Ordenamento ideal para processamento das arestas de injeção.

Ordem	1	2	3	4	5	6	7
Aresta	(9, 14)	(10, 9)	(11, 10)	(3, 4)	(9, 7)	(9, 10)	(10, 11)
Medida	$P_{9(14)}$	$P_{10(9)}$	$P_{11(10)}$	$P_{3(4)}$	$P_{9(7)}$	$P_{9(10)}$	$P_{10(11)}$

5.3 Sistema de 14 Barras e 20 Medidas

O sistema de 14 barras em questão foi objeto de estudo em [6], que se destinou a identificar criticalidades de medidas mediante abordagem numérica. A Figura 5.24 exhibe o multigrafo de medições \mathcal{Z} correspondente a esse sistema.

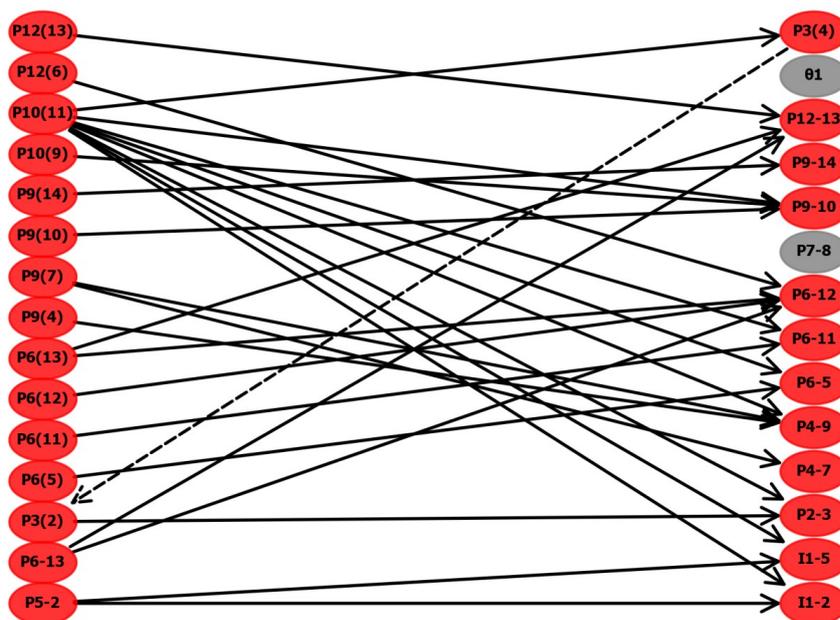


Figura 5.26: Digrafo \mathcal{B}_0 referente ao sistema de 14 barras e 20 medidas.

Por fim, a Tabela 5.4 registra as quantidades de $C_{k\text{-tuplas}}$ identificadas, de cardinalidade 2 a 5 ($2 \leq k \leq 5$), que comprometem a observabilidade topológica do sistema. Adicionalmente, mostram-se as quantidades de combinações de cores (ou medidas) geradas e testadas para cada ordem.

Tabela 5.4: $C_{k\text{-tuplas}}$ identificadas no sistema de 14 barras e 20 medidas.

k	Combinações	Quantidades
2	143	7
3	806	40
4	3055	46
5	8567	28

As quantidades de criticalidades identificadas, relacionadas na Tabela 5.4, coincidem com as provenientes do estudo em [6].

5.4 Sistema de 30 Barras e 43 Medidas

Uma análise de criticalidades foi desenvolvida sobre o sistema de 30 barras da Figura 5.3 em [4], fundamentando-se nas propriedades numéricas de observabilidade. A Figura 5.27 ilustra o multigrafo de medições \mathcal{Z} do referido sistema.

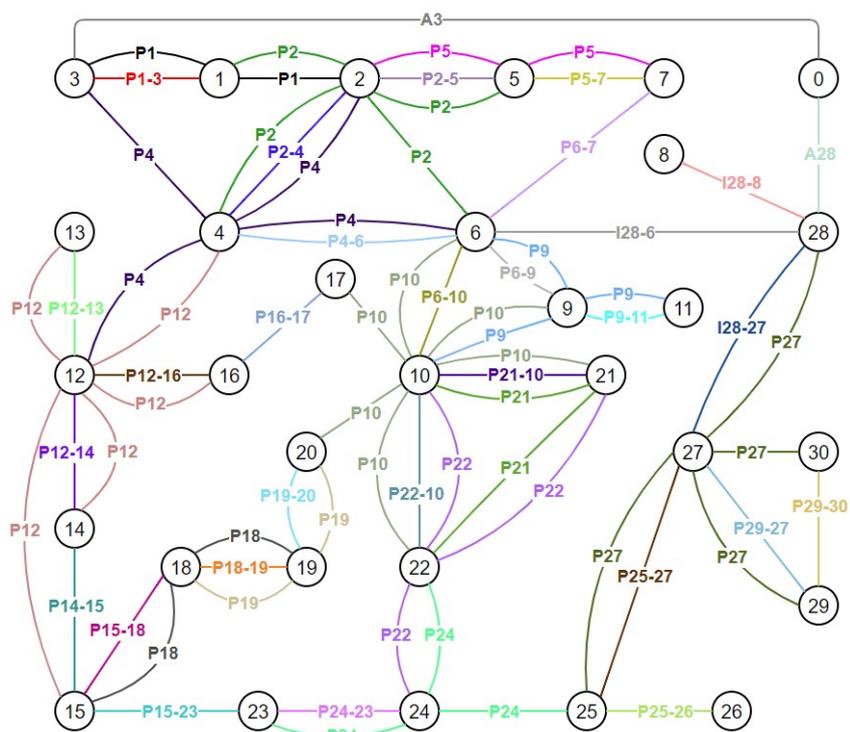


Figura 5.27: Grafo \mathcal{Z} do sistema de 30 barras e 43 medidas.

A execução do algoritmo de observabilidade topológica identificou uma árvore geradora observável \mathcal{T} da Figura 5.28, o que prova que o sistema é topologicamente observável. Observe que a árvore encontrada não possui arestas de injeção.

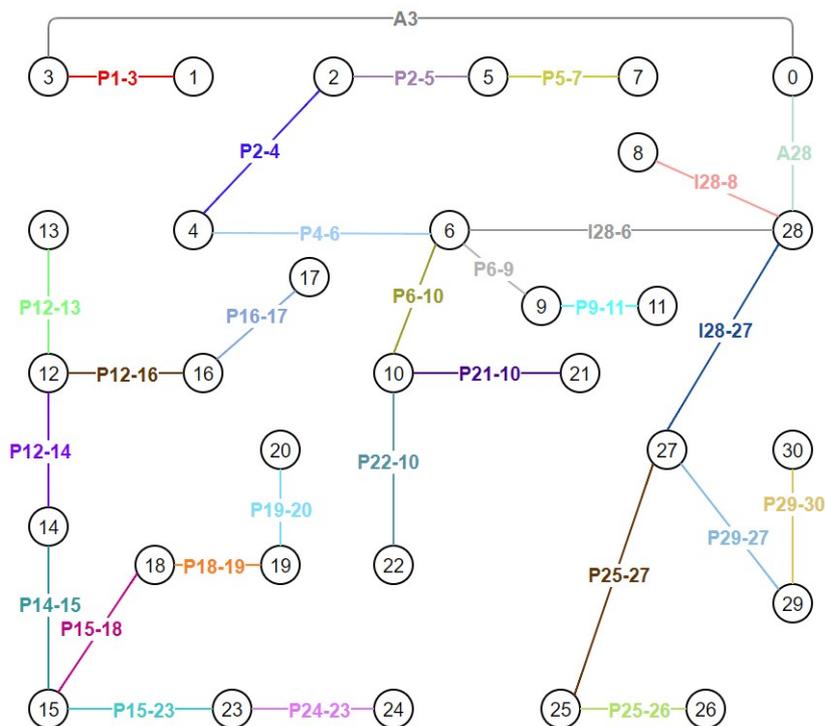


Figura 5.28: Árvore observável referente ao sistema de 30 barras e 43 medidas.

O digrafo bipartido \mathcal{B}_0 , obtido do algoritmo de busca por C_{meds} , está representado na Figura 5.29. Pode-se concluir que as medidas P_{25-26} e I_{28-8} (vértices cinzas) são C_{meds} , pois suas arestas correspondentes não estão envolvidas em sequências de permutação com arestas não pertencentes à árvore geradora observável da Figura 5.28.

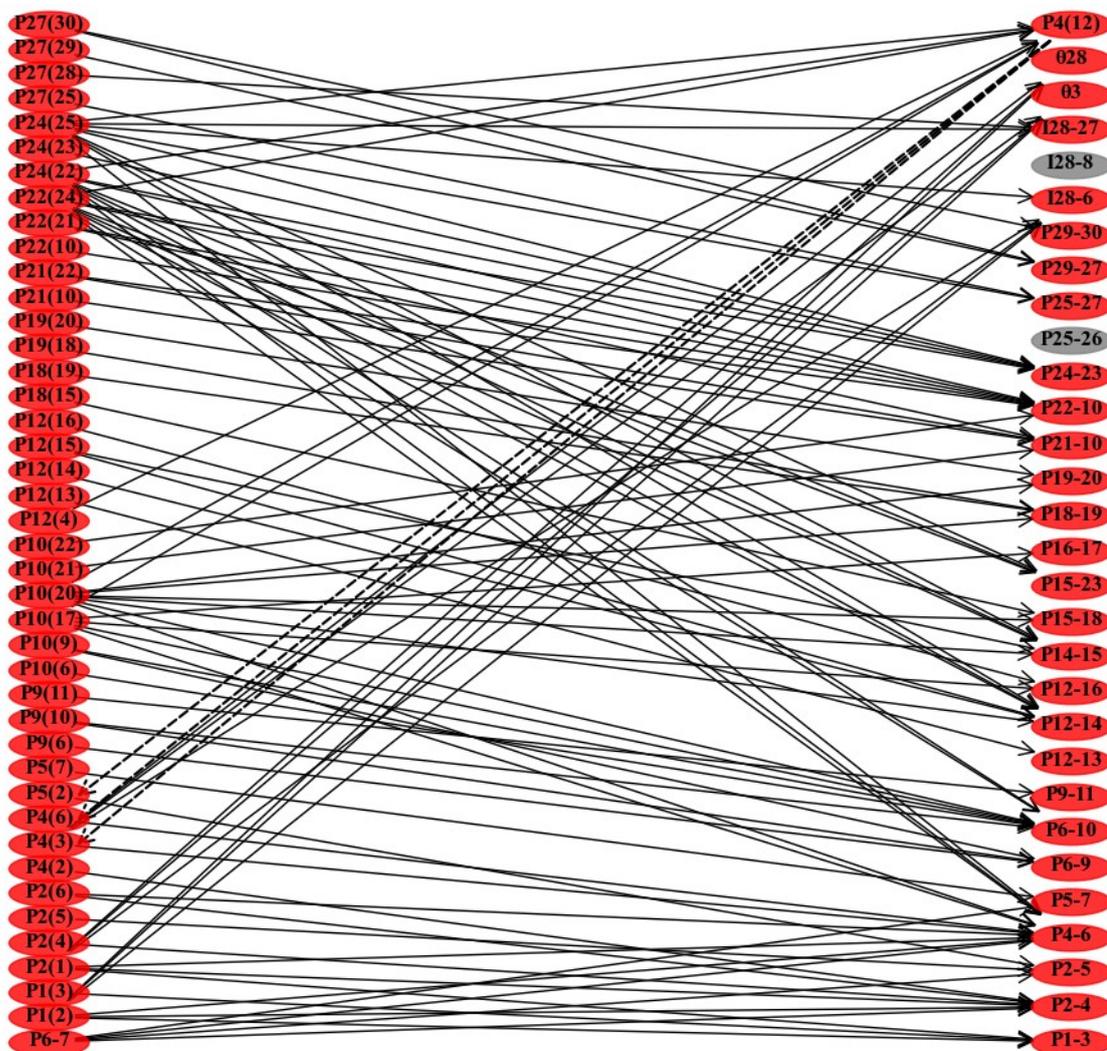


Figura 5.29: Digrafo \mathcal{B}_0 referente ao sistema de 30 barras e 43 medidas.

Por último, as quantidades de combinações de cores (medidas) avaliadas e de C_k -tuplas identificadas nesse sistema, de cardinalidade 2 a 4 ($2 \leq k \leq 4$), estão relacionadas na Tabela 5.5. Os resultados obtidos estão em conformidade com os explicitados em [4].

Tabela 5.5: C_k -tuplas identificadas no sistema de 30 barras e 43 medidas.

k	Combinações	Quantidades
2	754	7
3	10440	32
4	100775	136

5.5 Sistema de 118 Barras e 176 Medidas

O sistema de medição da rede de 118 barras considerado, tal como em [43], apresenta apenas medidas de fluxo, situação adequada para a aplicação do Algoritmo 5, que basicamente avalia a conectividade de um multigrafo de medições \mathcal{Z} , após remoção de um conjunto de cores (medidas). O estudo de criticalidades desse sistema se deu em [43]. A Figura 5.30 ilustra o grafo \mathcal{Z} que modela o sistema corrente.

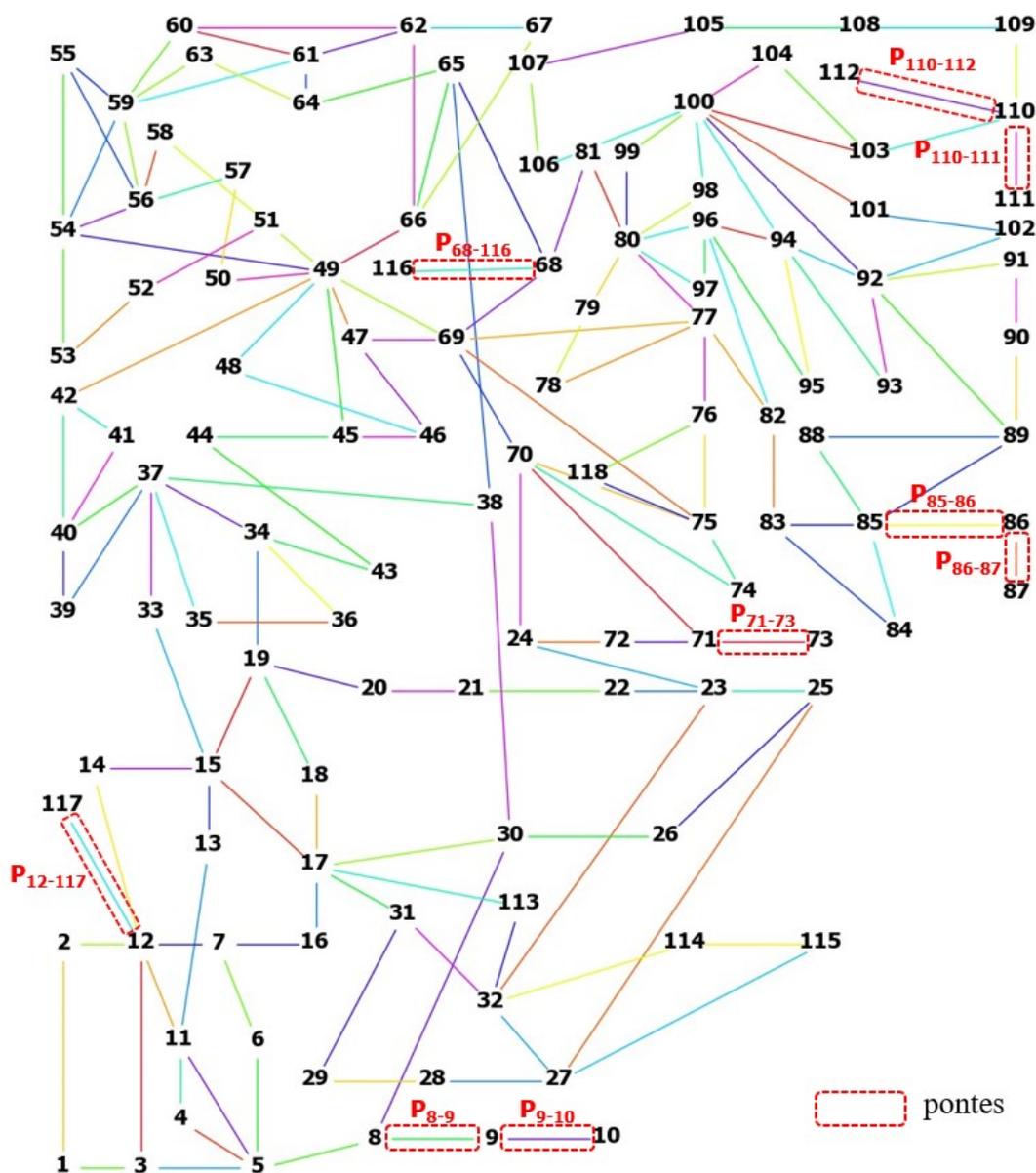
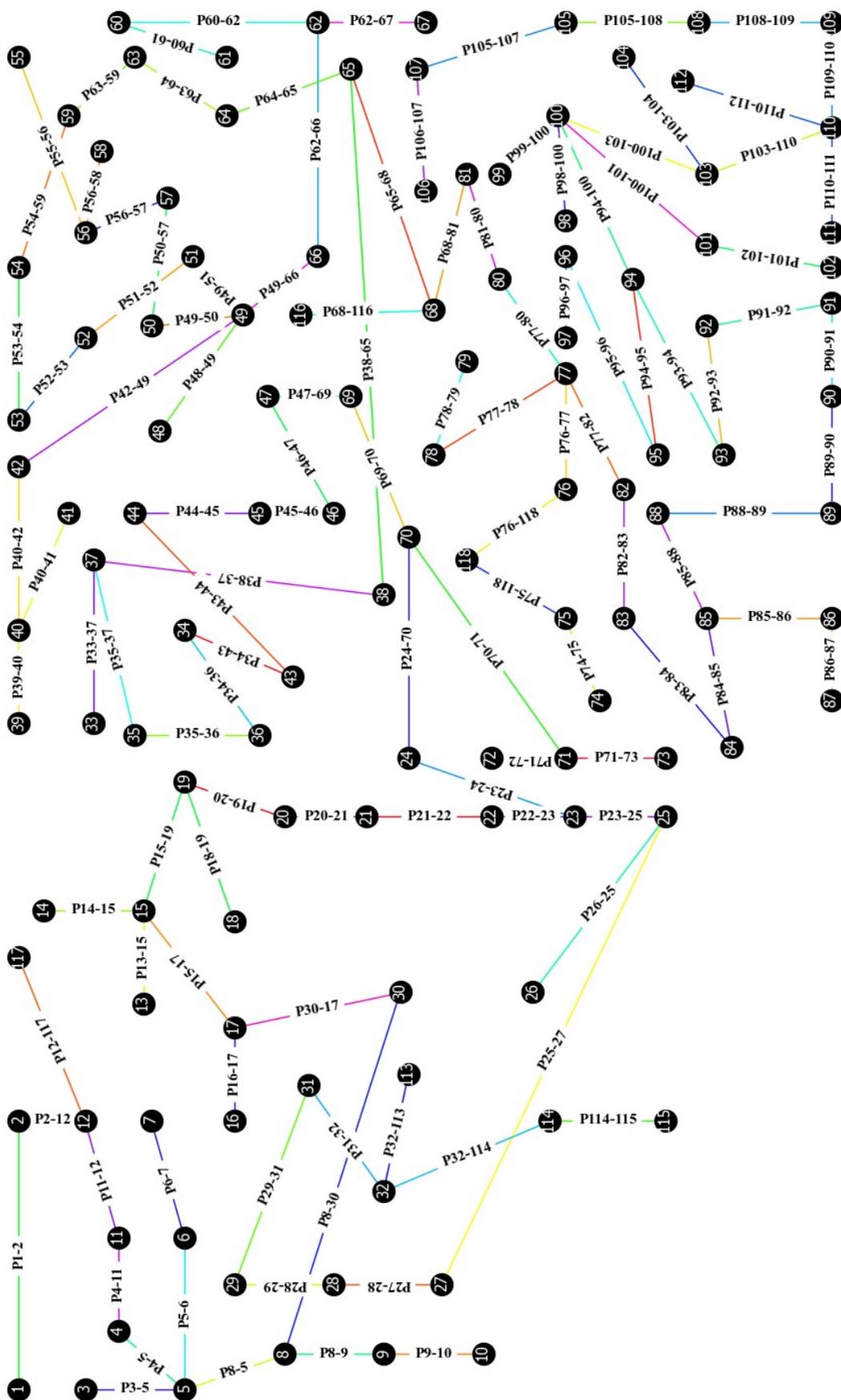


Figura 5.30: Grafo \mathcal{Z} do sistema de 118 barras e 176 medidas.

O algoritmo de observabilidade topológica retornou a árvore geradora observável representada na Figura 5.31. Consequentemente, o sistema avaliado é topologicamente observável.



Como o sistema é composto apenas de medidas de fluxo de potência, as C_{meds} consistem nas pontes do multigrafo de medições \mathcal{Z} . O algoritmo implementado classificou as medidas P_{8-9} , P_{9-10} , P_{12-117} , P_{68-116} , P_{71-73} , P_{85-86} , P_{86-87} , $P_{110-111}$ e $P_{110-112}$ como C_{meds} . A Figura 5.30 indica todas as pontes do multigrafo de medições do sistema, que coincidem com as C_{meds} identificadas. O digrafo bipartido \mathcal{B}_0 desse sistema não será apresentado, devido ao seu tamanho.

Analisando-se estritamente a conectividade do multigrafo de medições, tem-se as quantidades de combinações de cores (medidas) testadas e de $C_{k\text{-tuplas}}$ identificadas, de cardinalidade 2 a 3 ($2 \leq k \leq 3$), relacionadas na Tabela 5.6. Os resultados obtidos condizem com os apresentados em [43].

Tabela 5.6: $C_{k\text{-tuplas}}$ identificadas no sistema de 118 barras e 176 medidas.

k	Combinações	Quantidades
2	13689	91
3	860691	56

A remoção de uma $C_{k\text{-tupla}}$ qualquer desse sistema de 118 barras sempre resultará na formação de duas componentes conexas no multigrafo de medições resultante \mathcal{Z}^* , pois, por não conter medidas de injeção de potência, a relação entre cores (medidas) e arestas é biunívoca. Nesse caso, as $C_{k\text{-tuplas}}$ são medidas associadas a arestas pertencentes a co-ciclos (ligações ou cortes minimais) de \mathcal{Z} .

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

Ao longo de seus cinquenta anos, a Estimação de Estado em sistemas de potência tornou-se reconhecida por seu papel na construção de uma base de dados imprescindíveis à operação de redes elétricas de potência.

As análises de observabilidade e, mais recentemente, de criticalidades se caracterizam por avaliar se os requisitos essenciais à produção de resultados abrangentes e confiáveis pela Estimação de Estado estão presentes a cada nova execução desta tarefa.

As referidas análises podem ser realizadas por métodos numéricos e topológicos. A abordagem que explora a natureza estrutural da capacidade de observação de uma rede elétrica, i.e., aquela que considera apenas a topologia e a disposição dos diferentes tipos de medidas ao longo da rede, favorece a aplicabilidade de métodos topológicos.

Diversas propriedades estabelecidas pela inter-relação entre os elementos da rede participantes do processo de Estimação de Estado são evidenciadas por estudos de observabilidade e criticalidades com base na teoria dos grafos. Constata-se que são escassas as publicações científicas referentes a abordagem puramente topológica, com a representação do problema em estudo por grafos.

A fim de apresentar um tratamento novo para análises de observabilidade e criticalidades, esta Dissertação apresentou uma metodologia que retoma a abordagem topológica via grafos. Em termos de medidas a processar, são consideradas não apenas as convencionais fornecidas pelo sistema SCADA, mas também aquelas oriundas de unidades de medição fasorial, estas até então não incluídas em estudos puramente topológicos.

Na abordagem desenvolvida, as redes elétricas supervisionadas são representadas por multigrafos coloridos em arestas, denominados multigrafos de medições. A análise da observabilidade topológica proposta se fundamenta na busca por uma árvore geradora

observável (arco-íris) em um multigrafo de medições. Um processo de busca por criticalidades de medidas inovador consiste na remoção sistemática de cores desse multigrafo, em que cada cor correspondente a uma medida distinta pertencente ao plano de medição avaliado.

O algoritmo de observabilidade topológica proposto realiza o processamento das arestas de fluxo e de injeção pertencentes a um multigrafo de medições, a fim de construir uma árvore geradora observável. Mostrou-se possível processar as arestas de fluxo por uma simples busca em profundidade, cuja complexidade computacional cresce linearmente com o tamanho da instância em análise. O tratamento das arestas de injeção demanda uma implementação mais elaborada que se baseia no teorema de interseção de matróides. A ordem de processamento das arestas de injeção pode influir na análise, o que torna imperativo o uso de um digrafo bipartido auxiliar. Isto faz com que o algoritmo tenha uma implementação mais intrincada, porém o torna robusto.

O procedimento proposto para identificação de medidas críticas de um sistema se baseia na identificação das arestas que integram todas as árvores geradoras observáveis possíveis do multigrafo de medições correspondente. A estratégia adotada para identificação de tuplas críticas de medidas se resume a execuções do algoritmo de observabilidade topológica sobre multigrafos de medições procedentes de remoções sistemáticas de cores (medidas). Se a remoção de um conjunto de cores de um multigrafo de medições impossibilitar a obtenção de uma árvore geradora observável, então identifica-se assim uma tupla crítica de medidas. A análise topológica de criticalidades de um sistema que não contenha medidas de injeção reduz-se ao problema de busca por co-ciclos (ligações ou cortes de arestas minimais) em multigrafos.

Devido à aplicabilidade da teoria dos grafos a inúmeros problemas do mundo real, o desenvolvimento de algoritmos topológicos tem crescido recentemente, por força também dos avanços tecnológicos na área da computação, que se traduzem em ferramentas eficientes para análises em grafos.

Concluiu-se que o tratamento puramente topológico facilita o desenvolvimento de heurísticas para a análise de criticalidades de ordem superior a dois, o que corresponde à obtenção da solução de um problema combinatório, computacionalmente difícil, e que antes do presente trabalho ainda não havia sido abordado por métodos topológicos encontrados na literatura. Resultados de estudos de simulação com diversas redes de potência referenciadas pelo IEEE indicaram a aplicabilidade da metodologia proposta.

Complementarmente, os seguintes pontos merecem destaque:

- os métodos topológicos se distinguem dos métodos numéricos por possibilitar um tratamento simples e eficiente das medidas de fluxo de potência, de corrente de ramo e de ângulo de tensão fasorial;
- a ordem de processamento das arestas de injeção deve ser feita com cuidado, pois pode degradar o desempenho das análises de observabilidade e de criticalidades;
- a predominância das medidas de fluxo de potência, de corrente de ramo e de ângulo de tensão fasorial frente às medidas de injeção favorece a aplicação de métodos topológicos; e
- os métodos topológicos favorecem a representação gráfica dos resultados, contribuindo para a visualização de criticalidades de elementos de rede.

Como tópicos a serem explorados em pesquisas futuras sobre o tema aqui desenvolvido, divisam-se:

- melhorias no algoritmo de observabilidade topológica, sobretudo no processamento de arestas de injeção;
- avaliação topológica das criticalidades, envolvendo o conceito de corte minimal em grafos, o que pode resultar no desenvolvimento de metodologias eficientes para a estimação hierarquizada;
- estudos comparativos sobre a eficácia e eficiência dos enfoques topológico e numérico;
- avaliação do suposto caráter conservador do método topológico para análise de observabilidade;
- aplicação de computação paralela e em ambientes com unidades de processamento gráfico (GPUs);
- proposição de métricas para mensurar o grau de observabilidade de um sistema, baseadas na caracterização topológica da rede e/ou multigrafo de medições; e
- aplicação de medidas de centralidade em grafos para melhorias no ordenamento de arestas de injeção no algoritmo de observabilidade topológica.

Referências

- [1] ABUR, A., GOMEZ-EXPOSITO, A. *Power System State Estimation: Theory and Implementation*, vol. 24. Marcel Decker, New York, N.J., janeiro de 2004.
- [2] ALDOUS, J., BEST, S., WILSON, R. *Graphs and Applications: An Introductory Approach*. The Open University. Springer London, 2003.
- [3] AUGUSTO, A. A. *Avaliação da Capacidade de Observação do Estado Operativo de Redes Elétricas*. Tese de Doutorado, Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, 2016.
- [4] AUGUSTO, A. A., DO COUTTO FILHO, M. B., STACCHINI DE SOUZA, J. C., GUIMARAENS, M. A. R. Branch-and-Bound Guided Search for Critical Elements in State Estimation. *IEEE Transactions on Power Systems* 34, 3 (maio de 2019), 2292–2301.
- [5] AUGUSTO, A. A., DO COUTTO FILHO, M. B., STACCHINI DE SOUZA, J. C., MIRANDA, V. Probabilistic assessment of state estimation capabilities for grid observation. *IET Generation, Transmission Distribution* 10, 12 (2016), 2933–2941.
- [6] AUGUSTO, A. A., FILHO, M. B. D. C., DE SOUZA, J. C. S. Low-cardinality critical k-tuples in measurement sets for state estimation. In *2013 IEEE Grenoble Conference* (2013), p. 1–6.
- [7] BAGGA, J. S., HEINZ, A. Jgraph - a java based system for drawing graphs and running graph algorithms. In *Graph Drawing* (2001), vol. 2265 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, p. 459–460.
- [8] BALOGH, J., LIU, H., MONTGOMERY, R. Rainbow spanning trees in properly coloured complete graphs. *Discrete Applied Mathematics* 247 (2018), 97–101.
- [9] BARGIELA, A., IRVING, M. R., STERLING, M. J. H. Observability determination in power system state estimation using a network flow technique. *IEEE Transactions on Power Systems* 1, 2 (1986), 108–112.
- [10] BENZING, F., POKROVSKIY, A., SUDAKOV, B. Long directed rainbow cycles and rainbow spanning trees. *European Journal of Combinatorics* 88 (2020), 103102.
- [11] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. *Graph Theory*, vol. 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer London, London, 2008.
- [12] CHAKRABORTY, M., CHOWDHURY, S., CHAKRABORTY, J., MEHERA, R., PAL, R. K. Algorithms for generating all possible spanning trees of a simple undirected connected graph: an extensive review. *Complex & Intelligent Systems* 5, 3 (outubro de 2019), 265–281.

-
- [13] CHARTRAND, G., OKAMOTO, F., ZHANG, P. Rainbow trees in graphs and generalized connectivity. *Networks* 55, 4 (2010), 360–367.
- [14] CHARTRAND, G., ZHANG, P. *A First Course in Graph Theory*. Dover books on mathematics. Dover Publications, 2012.
- [15] CLEMENTS, K. A., DAVIS, P. W. Multiple bad data detectability and identifiability, a geometric approach. *IEEE Power Engineering Review PER-6*, 7 (1986), 73–73.
- [16] CLEMENTS, K. A., KRUMPHOLZ, G. R., DAVIS, P. W. Power system state estimation residual analysis: An algorithm using network topology. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems PAS-100*, 4 (1981), 1779–1787.
- [17] CLEMENTS, K. A., KRUMPHOLZ, G. R., DAVIS, P. W. Power system state estimation with measurement deficiency: An algorithm that determines the maximal observable subnetwork. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems PAS-101*, 9 (1982), 3044–3052.
- [18] CLEMENTS, K. A., KRUMPHOLZ, G. R., DAVIS, P. W. Power system state estimation with measurement deficiency: an observability/measurement placement algorithm. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems PAS-102*, 7 (julho de 1983), 2012–2020.
- [19] CORMEN, T., LEISERSON, C., STEIN, R. *Algoritmos: teoria e prática*. Elsevier Editora, 2012.
- [20] CUTSEM, T. V., GAILLY, P. J. A simple algorithm for power system observability analysis and related functions. In *Proc. CIGRE-IFAC Symposium, Florence* (1983), p. Paper No. 101–0.
- [21] CUTSEM, T. V., RIBBENS-PAVELLA, M., MILI, L. Hypothesis testing identification: A new method for bad data analysis in power system state estimation. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems PAS-103*, 11 (1984), 3239–3252.
- [22] DEO, N. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Dover Publications, 2017.
- [23] DINITZ, Y. Algorithm for solution of a problem of maximum flow in networks with power estimation. *Soviet Math. Dokl.* 11 (1970), 1277–1280.
- [24] DO COUTTO FILHO, M. B., STACCHINI DE SOUZA, J. C., DE OLIVEIRA, F. M. F., SCHILLING, M. T. Identifying critical measurements sets for power system state estimation. In *2001 IEEE Porto Power Tech Proceedings (Cat. No.01EX502)* (2001), vol. 3, p. 6 pp. vol.3.
- [25] DO COUTTO FILHO, M. B., STACCHINI DE SOUZA, J. C., GLOVER, J. Roots, achievements, and prospects of power system state estimation: A review on handling corrupted measurements. *International Transactions on Electrical Energy Systems* 29 (abril de 2019), e2779.
- [26] DO COUTTO FILHO, M. B., STACCHINI DE SOUZA, J. C., SCHILLING, M. Handling critical data and observability. *Electric Power Components and Systems* 35, 5 (maio de 2007), 553–573.

- [27] DO COUTTO FILHO, M. B., STACCHINI DE SOUZA, J. C., VILLAVICENCIO TAFUR, J. E. Quantifying observability in state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems* 28, 3 (2013), 2897–2906.
- [28] EDMONDS, J. Matroid intersection. In *Discrete Optimization I*, P. Hammer, E. Johnson, and B. Korte, Eds., vol. 4 of *Annals of Discrete Mathematics*. Elsevier, 1979, p. 39 – 49.
- [29] FORD, JR., L. R., FULKERSON, D. R. Maximal flow through a network. *Can. J. Math.* 8 (1956), 399–404.
- [30] FU, H.-L., LO, Y.-H., PERRY, K., RODGER, C. On the number of rainbow spanning trees in edge-colored complete graphs. *Discrete Mathematics* 341, 8 (2018), 2343–2352.
- [31] GIBBONS, A. *Algorithmic Graph Theory*. Cambridge University Press, 1985.
- [32] GOLDBARG, E., GOLDBARG, M. *Grafos: Conceitos, Algoritmos e Aplicações*. Elsevier, 2012.
- [33] HAGBERG, A. A., SCHULT, D. A., SWART, P. J. Exploring network structure, dynamics, and function using NetworkX. In *Proceedings of the 7th Python in Science Conference* (Pasadena, CA, 2008), p. 11–15.
- [34] KORRES, G. N., CONTAXIS, G. C. Identification and updating of minimally dependent sets of measurements in state estimation. *IEEE Transactions on Power Systems* 6, 3 (1991), 999–1005.
- [35] KREHER, D., STINSON, D. *Combinatorial Algorithms: Generation, Enumeration, and Search*. CRC Press, 1999.
- [36] KRUMPHOLZ, G. R., CLEMENTS, K. A., DAVIS, P. W. Power system observability: A practical algorithm using network topology. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems PAS-99*, 4 (1980), 1534–1542.
- [37] KRUSKAL, J. B. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society* 7, 1 (1956), 48–50.
- [38] LONDON, J. B. A., ALBERTO, L. F. C., BRETAS, N. G. Network observability: identification of the measurements redundancy level. In *PowerCon 2000. 2000 International Conference on Power System Technology. Proceedings (Cat. No.00EX409)* (2000), vol. 2, p. 577–582 vol.2.
- [39] MONTICELLI, A. *Fluxo de Carga em Redes de Energia Eletrica*. E. Blucher, 1983.
- [40] MONTICELLI, A. *State Estimation in Electric Power Systems*. Springer US, Boston, MA, 1999.
- [41] MORI, H., TSUZUKI, S. A fast method for topological observability analysis using a minimum spanning tree technique. *IEEE Transactions on Power Systems* 6, 2 (1991), 491–500.

- [42] NIJENHUIS, A., WILF, H. *Combinatorial Algorithms for Computers and Calculators*. Computer science and applied mathematics. Academic Press, 1978.
- [43] NISHIO DA SILVA JUNIOR, A. Ambientes de gpu para identificação concorrente de criticalidades em sistemas de medição. Dissertação de Mestrado, Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, 2021.
- [44] NUCERA, R. R., GILLES, M. L. Observability analysis: a new topological algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems* 6, 2 (1991), 466–475.
- [45] PAPADIMITRIOU, C., STEIGLITZ, K. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover Books on Computer Science. Dover Publications, 1998.
- [46] PROTTI, F. Notas de Aula de Teoria dos Grafos. Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, agosto de 2015.
- [47] QUINTANA, V. H., SIMOES-COSTA, A., MANDEL, A. Power system topological observability using a direct graph-theoretic approach. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems PAS-101*, 3 (1982), 617–626.
- [48] SARMA, S., DUTT, N. Minimal sparse observability of complex networks: Application to MPSoC sensor placement and run-time thermal estimation & tracking. In *Proceedings of the 18th Conference and Exhibition on Design, Automation and Test in Europe* (2014), IEEE, p. 1–6.
- [49] SCHWEPPE, F. C., ROM, D. B. Power system static-state estimation, part ii: Approximate model. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems PAS-89*, 1 (1970), 125–130.
- [50] SCHWEPPE, F. C., WILDES, J. Power system static-state estimation, part i: Exact model. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems PAS-89*, 1 (1970), 120–125.
- [51] SIMOES-COSTA, A., LOURENCO, E. M., CLEMENTS, K. A. Power system topological observability analysis including switching branches. *IEEE Transactions on Power Systems* 17, 2 (2002), 250–256.
- [52] SIMOES-COSTA, A., PIAZZA, T., MANDEL, A. Qualitative methods to solve qualitative problems in power system state estimation. *Power Systems, IEEE Transactions on* 5 (setembro de 1990), 941–949.
- [53] SOU, K. C., SANDBERG, H., JOHANSSON, K. H. Computing critical k -tuples in power networks. *IEEE Transactions on Power Systems* 27, 3 (agosto de 2012), 1511–1520. Conference Name: IEEE Transactions on Power Systems.
- [54] SZWARCFITER, J. L. *Teoria Computacional de Grafos: Os Algoritmos*. Elsevier Brasil, 2018.
- [55] TARJAN, R. Depth-first search and linear graph algorithms. In *12th Annual Symposium on Switching and Automata Theory* (1971), p. 114–121.
- [56] WEST, D. B. *Introduction to Graph Theory*, 2 ed. Prentice Hall, setembro de 2011.