

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

MURILO MARINHO HENRICHS

Recuperação da direção principal de
fraturamento de reservatórios petrolíferos a
partir de dados sísmicos e AVO

NITERÓI

2022

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

MURILO MARINHO HENRICHS

Recuperação da direção principal de
fraturamento de reservatórios petrolíferos a
partir de dados sísmicos e AVO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Computação. Área de concentração: Ciência da Computação.

Orientador:

PROF.DR.RICARDO LEIDERMAN

NITERÓI

2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BEE
Gerada com informações fornecidas pelo autor

H518r Henrichs, Murilo Marinho
Recuperação da direção principal de fraturamento de
reservatórios petrolíferos a partir de dados sísmicos e AVO
/ Murilo Marinho Henrichs. - 2022.
82 f.: il.

Orientador: Ricardo Leiderman.
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Computação, Niterói, 2022.

1. Meios equivalentes. 2. Propagação de ondas em meios
elásticos. 3. Método da Imersão Invariante. 4. Direção
principal de fraturamento e AVO. 5. Produção intelectual. I.
Leiderman, Ricardo, orientador. II. Universidade Federal
Fluminense. Instituto de Computação. III. Título.

CDD - XXX

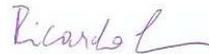
MURILO MARINHO HENRICHS

Recuperação da direção principal de fraturamento de reservatórios petrolíferos a partir de dados sísmicos e AVO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Computação. Área de concentração: Ciência da Computação.

Aprovada em de 2022.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Ricardo Leiderman - Orientador, UFF



Prof. Dr. André Maués Brabo Pereira, UFF



Prof. Dr. Daniel Alves Castello, UFRJ

Niterói

2022

Aos meus Pais, que tanto fizeram por mim.

Agradecimentos

No ano de 2020 o mundo passou pela maior crise sanitária do último século. Muitos de nós, perdemos pessoas que amamos e que continuam na nossa memória e em nossos corações. Estamos superando esse momento difícil e nos reinventando, acredito que alguns mudaram sua maneira de pensar sobre a vida, adquirindo uma nova perspectiva do que de fato é importante e essencial. Neste sentido eu agradeço a Deus, pela dádiva da vida e completar esse projeto sonhado por mim há alguns anos. Concluo esta etapa da minha jornada, agradecendo ainda à pessoas que de alguma forma se fizeram presente, apoiando e auxiliando de todo modo generoso. Agradeço ao meu orientador Ricardo Leiderman por sua atenção, paciência e cada discussão, meetings e encontros que tivemos. Sua sabedoria e técnica sempre me impressionaram e me causam admiração. Sempre generoso e humilde ao transmitir o conhecimento que acumulou durante anos de atividade, Prof. Ricardo Leiderman exerce com maestria o ofício de ensinar, orientar e pesquisar. Agradeço aos meus pais, Dalvina e Marcelo, por todo amor e apoio devotado à mim, a paciência nos momentos difíceis, vocês são minha origem, meu alicerce. Agradeço aos amigos mais que especiais, Humberto Medeiros, Ian Vilar, Vinicius Pessanha, Cássio Rodrigues e Adriano Guilherme que se fizeram presente em todos os momentos mesmo que por chamada de vídeo muitas vezes, suas amizades e momentos de descontração deixaram o caminho mais leve. Agradeço à Dominic Carvalho, minha companheira, que sempre me compreendeu e me apoiou nessa jornada, compartilhou comigo cada vitória e os respectivos fracassos. Agradeço aos colegas de trabalho, Felipe Sanche, Vitor Silos, Bruno Castro, André Barreto, Mateus Ramirez, Rafael Alves, Milena Siqueira e toda equipe pelo apoio. Por fim agradeço ao Programa de Pós-Graduação em computação da UFF, e todas as pessoas do IC/UFF que superam-se a cada dia diante dos desafios e fazem acontecer.

Resumo

No presente trabalho demonstramos uma metodologia para recuperar a direção principal de fraturamento de reservatórios de petróleo a partir de dados sísmicos e AVO. A teoria de meios equivalentes fornece um ponto de partida para modelar um meio anisotrópico equivalente a partir de um background isotrópico com fraturas. Representamos então o meio equivalente em um novo sistema de coordenadas cujo eixo x é paralelo ao topo do reservatório. Utilizando a teoria clássica de propagação de ondas e o Método da Imersão Invariante (especialmente para lidar com meios anisotrópicos), a metodologia proposta resolve exatamente o problema da reflexão de ondas P, SV, SH no topo do reservatório, sem a necessidade de usar aproximações das equações de Zoeppritz. A partir das amplitudes de deslocamento das ondas refletidas, aplicamos uma metaheurística para recuperar a direção principal de fraturamento. Validamos a metodologia usando dados sintéticos sem ruído e testamos sua robustez usando dados incompletos e ruidosos.

Palavras-chave: Meios equivalentes, propagação de ondas em meios elásticos, Método da Imersão invariante, Amplitude vs Offset, Direção principal de fraturamento.

Abstract

In the present work, we demonstrate a methodology to recover the main fracturing direction of petroleum reservoirs from seismic and AVO data. Equivalent media theory provides a starting point for modeling an equivalent anisotropic medium starting from an isotropic background with fractures. We then represent the equivalent medium in a new coordinate system whose x-axis is parallel to the reservoir's top. Using the classical theory of wave propagation and the Invariant Embedding Method (especially to deal with anisotropic media), the proposed methodology exactly solves the problem of reflection of P, SV, SH waves at the reservoir's top, without the need to use approximations of the Zoeppritz equations. From the displacement amplitudes of the reflected waves, we apply a metaheuristic to recover the main fracturing direction. We validate the methodology using noiseless synthetic data and further test its robustness using incomplete and noisy data.

Keywords: Equivalent media, wave propagation in elastic media, Invariant Embedding Method, Amplitude vs. Offset, Main Fracture Direction.

Lista de Figuras

1.1	Esquema de um estudo de AVO.	2
1.2	Esquema de um estudo de AVOAZ.	3
1.3	Tabela com aproximações das equações de Zoeppritz encontradas na literatura.	4
2.1	Composição de um meio Background isotrópico + fraturas.	7
2.2	Representação do meio equivalente em dois sistemas de coordenadas. Note que o sistema de coordenadas z' e x' corresponde ao sistema de coordenadas representado na figura 2.1	11
2.3	Transformação ortogonal genérica como uma rotação de ψ no eixo z , rotação de θ no eixo y' e rotação de ϕ no eixo x'' respectivamente.	12
2.4	Representação de uma onda que se propaga em uma interface com um semiespaço superior isotrópico I e um semiespaço inferior anisotrópico II.	13
2.5	Vetor número de onda e suas projeções nas direções x e z	17
2.6	Polarização de deslocamento de uma onda P.	18
2.7	Polarização de deslocamento da onda SV.	19
2.8	Polarização de deslocamento da onda SH.	20
2.9	Onda P incidente sobre o CMP, a onda P refletida chega ao receptor em que estamos fazendo a leitura e as ondas S's chegam a outro receptor.	30
2.10	Onda P incidente sobre o CCP, as ondas S's refletidas a partir do CCP chegam ao mesmo receptor que a onda P partindo do CMP.	30
3.1	Esquemas de aquisição sísmica considerados visto de cima. a) Esquema de aquisição sísmicas com seis linhas sísmicas. b) Esquema de aquisição com três linhas sísmicas. c) Esquema de aquisição com uma linha sísmica.	35

3.2	Fluxograma da geração dos meios equivalentes, representados em um outro sistema de coordenadas.	37
3.3	Fluxograma para a geração das amplitudes de deslocamento das onda P, SV e SH com os ângulos reais (de referência).	37
3.4	Fluxograma para a resolução do problema inverso.	38
4.1	Relação entre os ângulos θ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de três linhas sísmicas medindo as onda P, SV e SH.	40
4.2	Relação entre os ângulos ϕ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de três linhas sísmicas medindo as onda P, SV e SH.	40
4.3	Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 5%, para o caso de seis linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, e o erro médio absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.	42
4.4	Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 10%, para o caso de seis linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.	42
4.5	Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 20%, para o caso de seis linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.	43
4.6	Relação entre os ângulos θ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de seis linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P.	45
4.7	Relação entre os ângulos ϕ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de seis linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P.	45

4.8	Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 5%, para o caso de seis linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.	46
4.9	Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 10%, para o caso de seis linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.	46
4.10	Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 20%, para o caso de seis linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.	47
4.11	Gráfico dos resíduos sem ruído numérico, para o caso de seis linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P. As setas rosas indicam os mínimos locais.	48
4.12	Relação entre os ângulos θ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH.	49
4.13	Relação entre os ângulos ϕ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH.	50
4.14	Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruído numérico de 5%, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.	50
4.15	Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruído numérico de 10%, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.	51
4.16	Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruído numérico de 20%, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.	51

4.17	Relação entre os ângulos θ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de três linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P.	53
4.18	Relação entre os ângulos ϕ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de três linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P.	53
4.19	Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruído numérico de 5%, para o caso de três linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.	54
4.20	Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruído numérico de 10%, para o caso de três linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.	54
4.21	Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruído numérico de 20%, para o caso de três linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.	55
4.22	Gráfico dos resíduos sem ruído numérico, para o caso de três linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P. As setas rosas indicam os mínimos locais.	56
4.23	Relação entre os ângulos θ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso com uma linha sísmica medindo as onda P, SV e SH	57
4.24	Relação entre os ângulos ϕ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso com uma linha sísmica medindo as onda P, SV e SH.	58
4.25	Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 5%, para o caso com uma linha sísmica medindo as onda P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.	58

-
- 4.26 Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 10%, para o caso com uma linha sísmica medindo as onda P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais. 59
- 4.27 Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 20%, para o caso com uma linha sísmica medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais. 59
- 4.28 Gráfico dos resíduos sem ruído numérico, para o caso de uma linha sísmica medindo apenas a componente z da onda P. As setas rosas indicam os mínimos locais. 61

Lista de Tabelas

3.1	Tabela com os casos abordados de acordo com a quantidade de linhas sísmicas e as ondas medidas.	34
4.1	Tabela com os ângulos reais e recuperados para o caso de seis linhas sísmicas, três ondas e sem ruído.	39
4.2	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de seis linhas sísmicas, três ondas com 5% de ruído numérico.	41
4.3	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de seis linhas sísmicas, três ondas com 10% de ruído numérico.	41
4.4	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de seis linhas sísmicas, três ondas com 20% de ruído numérico.	41
4.5	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de seis linhas sísmicas, medindo a componente z da onda P com 5% de ruído numérico.	44
4.6	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de seis linhas sísmicas, medindo a componente z da onda P com 10% de ruído numérico.	44
4.7	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de seis linhas sísmicas, medindo a componente z da onda P com 20% de ruído numérico.	44
4.8	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH com 5% de ruído numérico.	48
4.9	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH com 10% de ruído numérico.	49

4.10	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH com 20% de ruído numérico.	49
4.11	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de três linhas sísmicas medindo a componente z da onda P com 5% de ruído numérico.	52
4.12	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de três linhas sísmicas medindo a componente z da onda P com 10% de ruído numérico.	52
4.13	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de três linhas sísmicas medindo a componente z da onda P com 20% de ruído numérico.	52
4.14	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de uma linha sísmica medindo as ondas P, SV e SH com 5% de ruído numérico.	56
4.15	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de uma linha sísmica medindo as ondas P, SV e SH com 10% de ruído numérico.	57
4.16	Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de uma linha sísmica medindo as ondas P, SV e SH com 20% de ruído numérico.	57
4.17	Tabela com os Erros Médios Absolutos para os casos de uma, três e seis linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, para um ângulo ϕ de 48,6°	60
4.18	Tabela com os Erros Médios Absolutos para os casos de uma, três e seis linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, para um ângulo θ de 81°	60

Sumário

1	Introdução	1
2	Formulação Matemática	7
2.1	Homogeneização	7
2.2	Representação do meio equivalente no novo sistema de coordenadas	10
2.3	Cálculo dos coeficientes de reflexão	13
2.3.1	Ondas planas e tensores de impedância em meios isotrópicos	15
2.3.2	Onda primária	17
2.3.3	Onda vertical secundária	18
2.3.4	Onda horizontal secundária	20
2.3.5	Tensor de impedância e a matriz M	20
2.3.6	Ondas planas e tensores de impedância em meios anisotrópicos . . .	23
2.3.6.1	Equação de Christoffel	23
2.3.6.2	Tensor de impedância e matriz M	25
2.3.7	Cálculo da Matriz de Reflexão	28
2.4	Cálculo das amplitudes de deslocamento	29
2.5	Formulação e resolução do problema inverso	33
3	Procedimento computacional	34
4	Resultados numéricos e discussões	39
4.1	Caso com seis linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH	39
4.2	Caso com seis linhas sísmicas medindo a componente z da onda P	43

4.3	Caso com três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH	48
4.4	Caso com três linhas sísmicas medindo a componente z da onda P	52
4.5	Caso com uma linha sísmica medindo as ondas P, SV e SH	56
4.6	Caso com uma linha sísmica medindo a componente z da onda P	60
5	Conclusão e trabalhos futuros	62
	Referências	64

Capítulo 1

Introdução

O estudo, caracterização e modelagem de reservatórios petrolíferos fraturados tem despertado cada vez mais o interesse da indústria do petróleo, justificado pelo fato de que fraturas naturais e/ou induzidas desempenham um papel importante na determinação do fluxo de fluido durante a produção, e conhecer a orientação das fraturas, bem como detectar as zonas onde são encontradas e estimar sua densidade é útil para o desenvolvimento e melhorias de projetos de extração de óleo e gás [32], [27] e [24]. Além disso reservatórios compactos e de baixa porosidade, desde que apresentem fraturas conectadas que levem a alta permeabilidade, podem produzir grandes quantidades de hidrocarbonetos [32], [27] e [24] [35].

Um meio fraturado pode ser modelado como a soma de um meio de fundo (background) com uma fratura, ou um conjunto de fraturas. Os modelos que surgem dessas combinações têm correspondência com o que observamos na natureza, fraturas alinhadas em uma direção preferencial.

Uma ferramenta para identificar a orientação de fraturas em reservatórios de óleo e gás, e conseqüentemente sua direção principal, é a análise da Amplitude vs Offset (AVO) de uma onda P incidente [9]. O estudo de AVO consiste em relacionar a amplitude das ondas sísmicas com a distância entre fonte e receptor. A figura 1.1 ilustra como é um estudo de AVO.

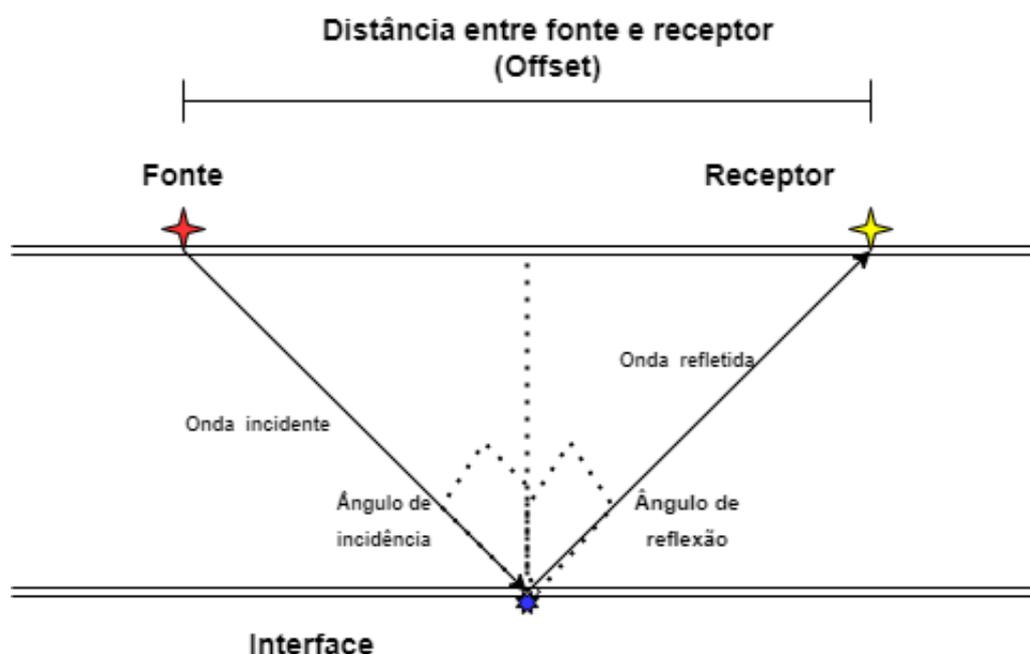


Figura 1.1: Esquema de um estudo de AVO.

Os primeiros autores a formularem o problema da reflexão e transmissão de ondas através de uma interface foram Cargill Gilston Knott, em 1899, que derivou as conhecidas equações de Knott resolvendo o problema por aproximações de potenciais, e Zoeppritz, que derivou as famosas equações de Zoeppritz neste artigo clássico. [16].

A análise de AVO baseada na variação dos coeficientes de reflexão e transmissão, de uma onda P incidente, com o ângulo de incidência, é sugerida como um indicador de anisotropia [10],[23],[34], [40], [36], [17], e [22]. A mesma pressupõe a aquisição e processamento de dados sísmicos, de maneira que as amplitudes relativas sejam preservadas para todos os offsets, em todos os tempos e para qualquer ponto de profundidade comum (CDP). A resposta de AVO revela a influência do fraturamento nas amplitudes sísmicas.

A evolução dos estudos em AVO levou a extensão do mesmo para a análise da amplitude vs Offset e o ângulo azimute que chamamos de AVOAZ. A figura 1.2 retirada de [33] ilustra o esquema de AVOAZ. A reflexão e transmissão das ondas sísmicas portanto não dependem apenas do ângulo de incidência nesse caso, como também do ângulo azimutal na interface.

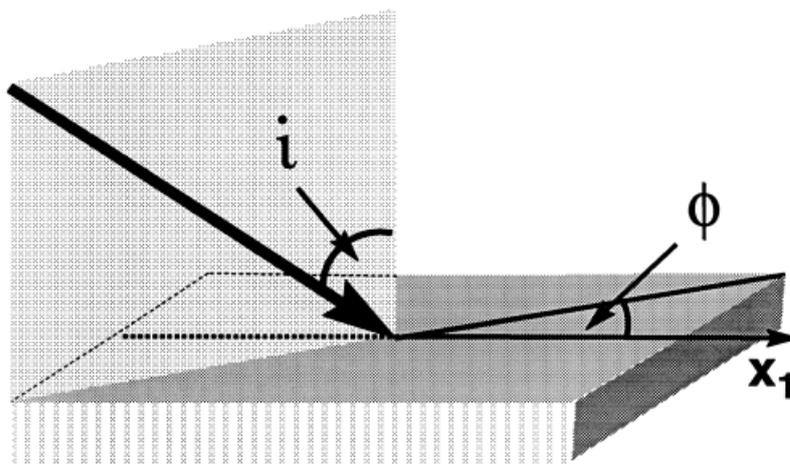


Figura 1.2: Esquema de um estudo de AVOAZ.

Na literatura disponível consultada pelo o autor deste trabalho, a caracterização de reservatórios fraturados é feita usando o modelo de fraturas citado, no qual um ou alguns tipos de simetrias são consideradas, valendo-se da teoria slip-linear que encontra-se neste artigo [26], e a partir delas são definidos os parâmetros de Thomsen para as fraturas [41], levando ao estado de anisotropia fraca. Por meio de análises de AVO e AVOAZ, inversões são feitas para recuperarem os parâmetros elásticos de Thomsen e o azimuth com a finalidade de estimar a densidade de fraturamento e orientação das fraturas ou conjuntos de fraturas. Vale salientar aqui que nas análises de AVO, a reflectividade (coeficientes de reflexão) é obtida através de aproximações e simplificações das equações de Zoeppritz [16], [3], [39], [13], [33] e [11]. A figura 1.3 a seguir contém uma tabela que mostra as simplificações das equações de Zoeppritz usadas pelos autores citados acima.

Autores	Equações de AVO	Aproximações
Aki & Richards, 1980	$R(i) \approx \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \theta) \frac{\Delta\alpha}{\alpha} - 4 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \theta \frac{\Delta\beta}{\beta}$ $+ \frac{1}{2} \left(1 - 4 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \theta \right) \frac{\Delta\rho}{\rho}$	$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \tan \theta \frac{\Delta\alpha}{\alpha}, \Delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 = \tan \vartheta \frac{\Delta\beta}{\beta}.$ $\alpha = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}, \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1, \beta = \frac{\beta_2 + \beta_1}{2}, \Delta\beta = \beta_2 - \beta_1.$ $\rho = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2}, \Delta\rho = \rho_2 - \rho_1.$ <p>Onde delta alfa denota a diferença nas propriedades elásticas através da interface</p>
Shuey, 1985	$R(\theta) \approx A + B \sin^2 \theta + C \tan^2 \theta \sin^2 \theta$	$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \right), B = B_0 A - \frac{\Delta\nu}{1-\nu^2}.$ $B_0 = D - 2(1+D) \frac{1-2\nu}{1-\nu}$ $D = \frac{\Delta\alpha/\alpha}{\Delta\alpha/\alpha + \Delta\rho/\rho}, C = \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ <p>Onde delta ni é a mudança e ni é a média da razão de Poisson através da interface</p>
Fatti et al, 1994	$R(\theta) \approx \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \theta) \frac{\Delta I_p}{I_p} - 4 \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \sin^2 \theta \frac{\Delta I_s}{I_s}$	$\frac{\Delta I_p}{I_p} = \frac{\Delta(\rho\alpha)}{\rho\alpha}, \frac{\Delta I_s}{I_s} = \frac{\Delta(\rho\beta)}{\rho\beta}$

Ruger, 2002	$R(\theta, \varphi) \approx A + (B_{\text{iso}} + B_{\text{aniso}}) \sin^2 \theta$ $+ (C_{\text{iso}} + C_{\text{aniso}}) \tan^2 \theta \sin^2 \theta$	$B_{\text{iso}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta\alpha}{\alpha} - \left(\frac{2\beta}{\alpha} \right)^2 \frac{\Delta G}{G} \right)$ $B_{\text{aniso}} = \frac{1}{2} \left(\Delta\delta^{(\nu)} + 2 \left(\frac{2\beta}{\alpha} \right)^2 \Delta\gamma \right) \cos^2 \varphi$ $C_{\text{iso}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ $C_{\text{aniso}} = \frac{1}{2} \left(\Delta\delta^{(\nu)} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \Delta\epsilon^{(\nu)} \cos^4 \varphi \right)$ <p>Onde temos os parâmetros de Thomsen para um meio de simetria horizontalmente isotrópico.</p>
Jon Downton, 2012	$R(\theta, \varphi) \approx A_{\text{iso}} + A_{\text{anisof}} + (B_{\text{iso}} + B_{\text{anisof}}) \sin^2 \theta$ $+ (C_{\text{iso}} + C_{\text{anisof}}) \tan^2 \theta \sin^2 \theta$	$A_{\text{anisof}} = -\frac{1}{4} \chi^2 \Delta_N$ $B_{\text{anisof}} = \frac{g}{2} \Delta_r - \frac{\chi}{4} \Delta_N$ $C_{\text{anisof}} = -\frac{1}{8} g \Delta_r - \frac{1}{8} (3g^2 - 4g + 2) \Delta_N$

Figura 1.3: Tabela com aproximações das equações de Zoeppritz encontradas na literatura.

Como reforçaremos a seguir o presente trabalho resolve o problema da reflexão e transmissão de ondas sísmicas em uma interface de maneira exata, com uma metodologia em que não há simplificações das equações de Zoeppritz sendo portanto esse o diferencial deste trabalho.

A proposta do presente trabalho é apresentar uma metodologia, e um programa de computador, para resolver um problema inverso que é :

Dados os coeficientes de reflexão, e por consequência as amplitudes de deslocamento, obtidos a partir dos dados sísmicos pelas análises de AVO, calcular a direção principal de fraturamento de um reservatório petrolífero.

A abordagem do problema é feita considerando um meio background isotrópico ao qual fraturas são introduzidas gerando um meio equivalente anisotrópico homogêneo, com a simetria transversalmente isotrópica, em que as fraturas são invariantes sob rotações em torno do eixo perpendicular à elas e assumindo o limite de longo comprimento de onda. O meio equivalente é representado em um novo sistema de coordenadas rotacionado em relação ao original. Propagamos ondas P que incidem em uma interface entre dois semi-espaços, o inferior anisotrópico e o superior isotrópico. Calculamos a reflexão das ondas e as amplitudes de deslocamento para cada ângulo de incidência correspondente a cada offset. O cálculo dos coeficientes de reflexão difere da literatura, como dito anteriormente, pois não utilizamos aproximações das equações de Zoeppritz e não tratamos a anisotropia da maneira convencional. Nós resolvemos o problema de maneira exata através da solução da equação de Navier com as condições de contorno na interface, nenhuma aproximação é feita. A matriz de reflexão é obtida em função dos tensores de impedância elásticos para os dois meios utilizando o método da imersão invariante [5], [7], [8], [14], [19], [6], [18]. O método da imersão invariante é indicado para problemas que envolvem camadas, laminações, estratificações, e no tratamento de meios anisotrópicos pois é incondicionalmente estável, relativamente simples no que tange à implementação, e mais eficiente do ponto de vista computacional pois ao invés de resolver as equações de Christoffel resolve um problema de auto valor que é computacionalmente menos custoso. Calculamos as amplitudes de deslocamento junto com a fase das ondas, dado sintético neste trabalho mas que em um cenário de levantamento sísmico em campo seria a leitura dos geofones ou hidrofones, os quais chamamos receptores.

A resolução do problema inverso é feita através da implementação de uma meta-heurística que consiste em varrer o espaço com combinações de pares de ângulos θ e ϕ , calcular as amplitudes de deslocamento para cada par, e comparar com os ângulos de referência. O par que melhor se ajustar aos de referência é considerado a solução do problema.

Implementamos a metodologia para seis casos de interesse, descritos na seção de procedimento computacional, dentre esses casos adicionamos ruído numérico a fim de testar

a robustez do nosso método.

O texto está estruturado da seguinte forma:

- Homogeneização, onde descrevemos como obtemos o meio anisotrópico equivalente. Que se encontra no capítulo 2 seção 2.1.
- Representação do meio equivalente no novo sistema de coordenadas. Que se encontra no capítulo 2 seção 2.2.
- O cálculo dos coeficientes de reflexão, utilizando o método da imersão invariante na obtenção dos tensores de impedância elásticos para os meios isotrópicos e anisotrópicos e o formalismo da Matriz de Propagação M. Que se encontra no capítulo 2 seção 2.3.
- Cálculo das amplitudes de deslocamento, onde descrevemos o procedimento para obtê-las a partir dos coeficientes de reflexão. Que se encontra no capítulo 2 seção 2.4.
- Formulação e resolução do problema inverso descrevendo a meta heurística utilizada. Que se encontra no capítulo 2 seção 2.5.
- Procedimento computacional desenvolvido para os casos abordados. Que se encontra no capítulo 3.
- Resultados numéricos e discussões para cada caso considerado. Que se encontra no capítulo 4.
- Conclusão e trabalhos futuros. Que se encontra no capítulo 5.

Capítulo 2

Formulação Matemática

2.1 Homogeneização

Meios fraturados podem ser modelados pela composição de um meio hospedeiro, que chamamos background, e fraturas [38]. A Fig. 2.1 ilustra a composição, note que o eixo z é perpendicular às fraturas. Dado um meio background isotrópico em que fraturas foram embutidas, no limite em que as distâncias entre elas é muito menor do que um comprimento de onda, a teoria dos meios efetivos, desenvolvida por Backus neste artigo [4] e aperfeiçoada por Schoenberg neste artigo [37], nos permite calcular os módulos elásticos efetivos de um meio homogêneo anisotrópico equivalente.

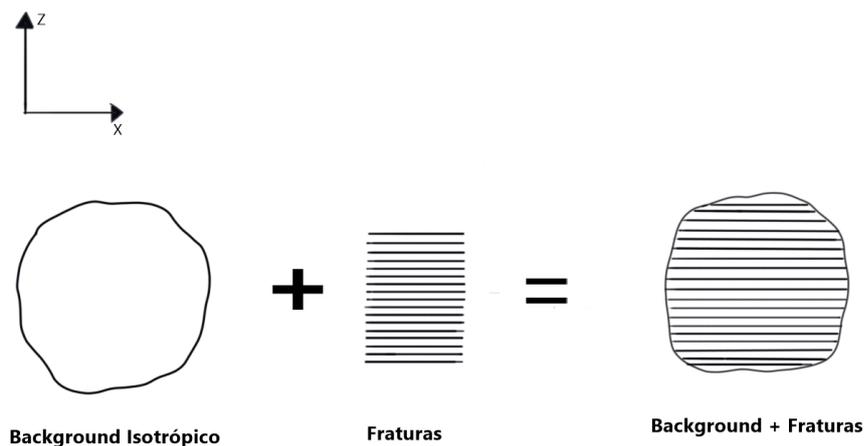


Figura 2.1: Composição de um meio Background isotrópico + fraturas.

A lei de Hooke generalizada estabelece as relações constitutivas do material, ou seja, as relações tensão-deformação $\sigma = \mathbf{C}\epsilon$, onde \mathbf{C} é a matriz de constantes elásticas que caracteriza o meio. O meio background isotrópico é representado pela seguinte matriz de constantes elásticas:

$$\mathbf{C}_{ISO} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

onde λ e μ são os parâmetros de Lamé.

Na teoria dos meios efetivos a matriz de constantes elásticas é subdividida em outras 3 matrizes, de tamanho 3x3 \mathbf{N} , \mathbf{P} e \mathbf{M} .

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{34} & c_{44} & c_{45} \\ c_{35} & c_{45} & c_{55} \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{36} & c_{46} & c_{56} \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{26} \\ c_{16} & c_{26} & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

E portanto, essas 3 matrizes, para um background isotrópico, têm as seguintes expressões:

$$\mathbf{N}_{ISO} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{P}_{ISO} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{M}_{ISO} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

O artigo [26] nos fornecem um modelo geral para fraturas longas e paralelas. O sistema de fraturas pode ter algumas simetrias especiais, aqui trabalharemos com a simetria transversalmente isotrópica. Esse caso de simetria ocorre quando o sistema de fraturas tem comportamento invariante com respeito ao eixo z , perpendicular a ele, e tem especial importância para os geofísicos, de acordo com artigo [12], por ser uma boa aproximação para folhelhos, que são 75% das bases sedimentares, tornando esse sistema bastante comum na sismologia de exploração. O sistema de fraturas é representado pela matriz \mathbf{Z} como:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_N & 0 & 0 \\ 0 & Z_T & 0 \\ 0 & 0 & Z_T \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Os parâmetros Z_N e Z_T são as complacências normal e tangencial de uma média das fraturas e suas dimensões são comprimento/tensão. Os processos para a medição em laboratório desses parâmetros podem ser encontrados nos artigos [42], [21], [28] e [25].

Calculamos as matrizes efetivas do meio equivalente (background + fraturas) usando as seguintes relações:

$$\mathbf{N}_e = \mathbf{N}_{ISO}(\mathbf{I} + \mathbf{Z}\mathbf{N}_{ISO})^{-1}, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{P}_e = (\mathbf{P}_{ISO}\mathbf{N}_{ISO}^{-1})\mathbf{N}_e, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_{ISO} - \mathbf{P}_{ISO}\mathbf{N}_{ISO}^{-1}\mathbf{P}_{ISO}^T + (\mathbf{P}_{ISO}\mathbf{N}_{ISO}^{-1})\mathbf{N}_e(\mathbf{N}_{ISO}^{-1}\mathbf{P}_{ISO}^T), \quad (2.11)$$

Obtendo assim, as matrizes efetivas do meio anisotrópico equivalente com as seguintes expressões:

$$\mathbf{N}_e = \begin{bmatrix} c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{33b}/(1 + E_N) & 0 & 0 \\ 0 & c_{44b}/(1 + E_T) & 0 \\ 0 & 0 & c_{44}/(1 + E_T) \end{bmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{P}_e = \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & 0 \\ c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{13b}/(1 + E_N) & 0 & 0 \\ c_{13b}/(1 + E_N) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{11} - 2c_{66} & 0 \\ c_{11} - 2c_{66} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{11} - 2c_{66b} & 0 \\ c_{11} - 2c_{66b} & c_{11} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66b} \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

$$c_{11} = c_{11b} - \frac{c_{13b}^2}{c_{33b}} \left[1 - \frac{1}{1+E_N} \right]. \quad (2.15)$$

Aqui, o subscrito b indica propriedade do meio de fundo isotrópico (background). $E_N \equiv c_{33b}Z_N$ e $E_T \equiv c_{44b}Z_T$. E_N e E_T são dois parâmetros adimensionais que são as complacências, normal e tangencial, respectivamente, do sistema de fraturas em relação à complacência do meio background. A Matriz efetiva \mathbf{C} será montada então, levando-se em conta a correspondência dos elementos de \mathbf{N}_e , \mathbf{P}_e e \mathbf{M}_e , equações 2.12 à 2.14, com os elementos de \mathbf{N} , \mathbf{P} e \mathbf{M} nas equações 2.2 à 2.4.

2.2 Representação do meio equivalente no novo sistema de coordenadas

Aqui faremos uma mudança do sistema de coordenadas, passando das coordenadas $x'y'z'$ para xyz (figura 2.2).

Em outras palavras, obteremos a representação da matriz \mathbf{C} neste novo sistema de coordenadas xyz , arbitrariamente rotacionado. Realizamos tal tarefa representando a matriz de constantes elásticas na notação tensorial, utilizando a regra para a contração indicial de Voigt:

$$(1, 1) \rightarrow 1; (2, 2) \rightarrow 2; (3, 3) \rightarrow 3; (2, 3) \rightarrow 4; (1, 3) \rightarrow 5; (1, 2) \rightarrow 6. \quad (2.16)$$

$$C_{i_1 i_2 j_1 j_2} = C_{ij}. \quad (2.17)$$

Sendo a contração do par (i,j) igual a contração do par (j,i).

Seguindo essa notação representamos a matriz de constantes elásticas \mathbf{C} na forma tensorial de acordo com [29] como:

$$\sigma_{ab} = C_{abcd} \epsilon_{cd}. \quad (2.18)$$

Sendo \mathbf{C} um tensor com simetria tripla:

$$C_{abcd} = C_{bacd} = C_{abdc} = C_{badc}. \quad (2.19)$$

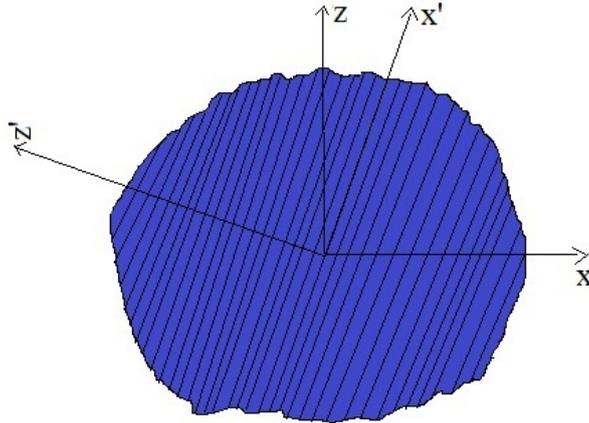


Figura 2.2: Representação do meio equivalente em dois sistemas de coordenadas. Note que o sistema de coordenadas z' e x' corresponde ao sistema de coordenadas representado na figura 2.1

Para obter a nova representação do tensor \mathbf{C} no novo sistema de eixos rotacionado, faz-se necessário definir uma matriz ortogonal, \mathbf{T} , composta pelos ângulos de Euler ϕ , θ , ψ , que representam rotações sobre os eixos x' , y' e z' respectivamente. Usando o desenvolvimento que pode ser encontrado nessa referência [30], obtemos:

$$\mathbf{T}_{\mathbf{x}}(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \text{sen}\phi \\ 0 & -\text{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{T}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad (2.21)$$

$$\mathbf{T}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \text{sen}\psi & 0 \\ -\text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Decompomos assim a matriz de rotação, \mathbf{T} , em:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_x(\phi) \cdot \mathbf{T}_y(\theta) \cdot \mathbf{T}_z(\psi). \quad (2.23)$$

Que corresponde a uma rotação de um ângulo ψ em torno do eixo z sucedida por uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo y' sucedida por uma rotação de um ângulo ϕ em torno do eixo x'' , conforme mostra a Fig. 2.3 retirada da referência [31]. Atentemo-nos ao fato de que esta não é uma operação comutativa, portanto a ordem das rotações tem que ser seguida conforme descrevemos.

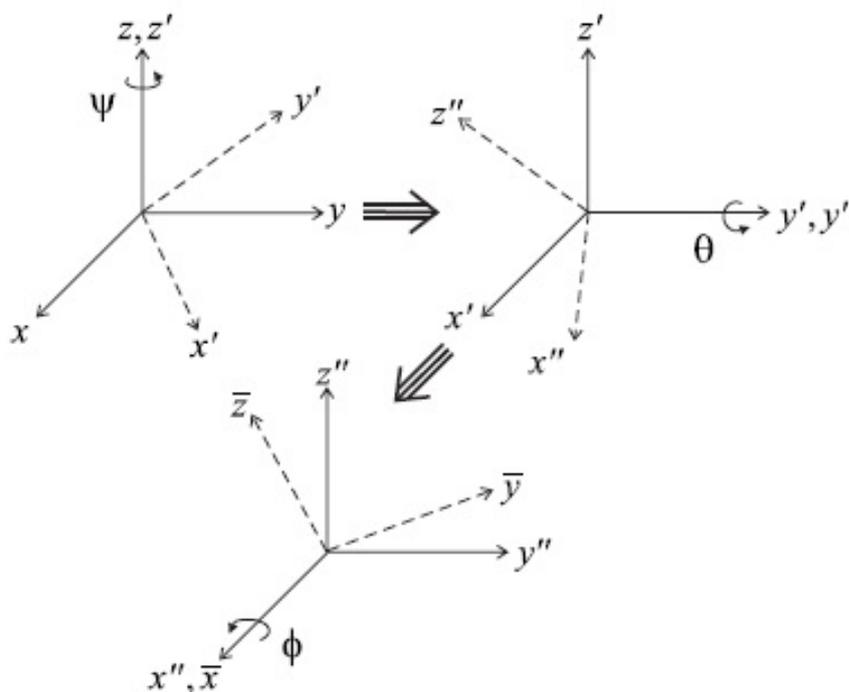


Figura 2.3: Transformação ortogonal genérica como uma rotação de ψ no eixo z , rotação de θ no eixo y' e rotação de ϕ no eixo x'' respectivamente.

Note que no caso tratado aqui, pela simetria assumida, o sistema de fraturas permanece

inalterado em relação às rotações no eixo z' da figura 2.2.

Dada a representação da matriz \mathbf{C} e da matriz de rotação \mathbf{T} na notação tensorial, o tensor de constantes elásticas no novo sistema de eixos cartesianos é obtida da seguinte forma:

$$\bar{C}_{klst} = C_{mnpq} T_{km} T_{ln} T_{sp} T_{tr}. \quad (2.24)$$

Onde \bar{C}_{klst} é a representação do tensor de constantes elásticas no sistema rotacionado.

Usando novamente a regra de contração indicial de Voigt 2.16 retornamos à notação matricial e obtemos a representação da matriz \mathbf{C} do sistema de eixos rotacionados. Estamos agora no sistema de coordenadas xyz da Fig. 2.2.

2.3 Cálculo dos coeficientes de reflexão

Nosso próximo passo é calcular a matriz com os coeficientes de reflexão como função do ângulo de incidência em uma interface entre um semiespaço superior isotrópico e um semiespaço inferior anisotrópico, que obtivemos anteriormente, conforme ilustra a Fig. 2.4. Note que essa interface representa o topo do reservatório fraturado.

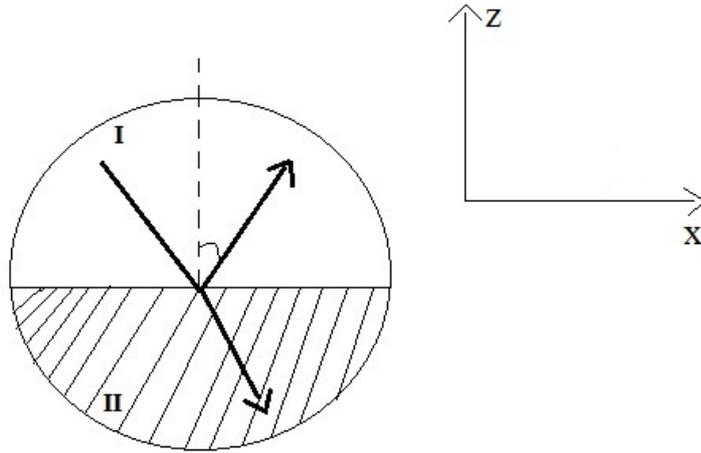


Figura 2.4: Representação de uma onda que se propaga em uma interface com um semiespaço superior isotrópico I e um semiespaço inferior anisotrópico II.

Definimos \mathbf{u} e \mathbf{t} :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Onde \mathbf{u} é o vetor de deslocamento e \mathbf{t} é o vetor de tração.

Nesta formulação, seguiremos a técnica da Imersão Invariante [15, 19, 6, 18, 20, 5, 8, 14, 7], onde decomparamos o vetor deslocamento \mathbf{u} e o vetor de tração \mathbf{t} em campos se propagando “para cima” e “para baixo”, de forma que:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2. \quad (2.27)$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2. \quad (2.28)$$

Nas equações acima, o subscrito 1 corresponde aos campos indo para cima, isto é, campos que se propagam (ou estão sendo atenuados) na direção vertical positiva de z , enquanto o subscrito 2 é associado aos campos indo para baixo, isto é, campos que se propagam (ou estão sendo atenuados) na direção vertical negativa de z .

São introduzidos também os tensores de impedância local \mathbf{Z}_1 e \mathbf{Z}_2 , que relacionam os campos de trações indo para cima e para baixo, aos campos de deslocamentos correspondentes.

$$\bar{\mathbf{t}}_1 = -i\omega\mathbf{Z}_1\bar{\mathbf{u}}_1. \quad (2.29)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_2 = -i\omega\mathbf{Z}_2\bar{\mathbf{u}}_2. \quad (2.30)$$

A barra em cima de \mathbf{u} e \mathbf{t} denota a transformada de Fourier da coordenada x , indicando que resolvemos o problema no domínio do número de onda na direção x . Nesse sentido, em \mathbf{u} e \mathbf{t} temos a contribuição das três ondas (wave triplet) que se propagam em direções diferentes, mas que têm a mesma projeção na direção x do vetor número de onda.

Os procedimentos para determinar os tensores de impedância local para meios isotrópicos e anisotrópicos são descritos a seguir.

2.3.1 Ondas planas e tensores de impedância em meios isotrópicos

Considere um meio sólido elástico homogêneo e isotrópico, sujeito a pequenas deformações.

$$\tau_{\alpha\beta,\beta} + \rho f_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha, \quad (2.31)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{\alpha\beta} + 2\mu \epsilon_{\alpha\beta}, \quad (2.32)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}). \quad (2.33)$$

Onde a equação (2.31) é a segunda lei de Newton do movimento aplicada ao contínuo, conhecida como equilíbrio do momento linear. A equação (2.32) é a relação constitutiva associada aos materiais isotrópicos, conhecida como Lei de Hooke generalizada. A equação (2.33) é o tensor de deformação relacionado à pequenas deformações. Nas equações acima, $\tau_{\alpha\beta}$ é o tensor de tensão, u_α é o vetor deslocamento, ρ é a densidade, f_α é a força do corpo por unidade de massa, $\epsilon_{\alpha\beta}$ é o tensor de deformação e λ e μ são os parâmetros de Lamé.

Usando as três equações (2.31), (2.32) e (2.33), nós podemos escrever a equação de Navier, que é a equação governante, em termos do deslocamento:

$$(\lambda + \mu)u_{\beta,\beta\alpha} + \mu u_{\alpha,\beta\beta} + \rho f_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha. \quad (2.34)$$

Ou, em notação vetorial:

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \rho\mathbf{f} = \rho\ddot{\mathbf{u}}. \quad (2.35)$$

As equações (2.34) e (2.35) são compostas por três equações diferenciais parciais escalares acopladas, que em coordenadas cartesianas, podem ser escritas como:

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \rho f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.36)$$

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \rho f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (2.37)$$

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + \rho f_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2.38)$$

Considerando que não há forças de corpo:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x & f_y & f_z \end{bmatrix}^T = 0. \quad (2.39)$$

As equações (2.34) e (2.35) podem ser resolvidas com a Decomposição de Helmholtz, ao qual se introduz uma função potencial escalar ϕ e uma função potencial vetorial $\boldsymbol{\psi}$ como mostra a equação 2.40.

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}. \quad (2.40)$$

Onde:

$$\nabla \cdot \phi = 0. \quad (2.41)$$

Substituindo as equações 2.40 e 2.41 na equação 2.35 na ausência de forças de corpo obtemos duas equações onda, uma escalar e uma vetorial, 2.42 e 2.43 respectivamente.

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{C_L^2} \ddot{\phi} = 0, \quad (2.42)$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} - \frac{1}{C_T^2} \ddot{\boldsymbol{\psi}} = 0. \quad (2.43)$$

Onde, C_L e C_T , definidas mais adiante em 2.47 e 2.51, são as velocidades de propagação da onda P e S respectivamente.

A solução dessas equações leva a superposição de 3 ondas diferentes, P, SV e SH que se propagam desacopladamente. Elas são chamadas ondas planas, nos quais todos os pontos pertencentes ao plano normal à direção de propagação tem o mesmo deslocamento.

2.3.2 Onda primária

O campo de deslocamento indo para cima, representado pelo subscrito "1", relacionado a onda P, é dado pela seguinte expressão:

$$\bar{\mathbf{u}}_{P_1} = \begin{bmatrix} A \sin(\theta_1) e^{i(k_{x_1} x + k_{z_1} z - \omega t)} \\ 0 \\ A \cos(\theta_1) e^{i(k_{x_1} x + k_{z_1} z - \omega t)} \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

E o campo de deslocamentos indo para baixo, representado pelo subscrito "2":

$$\bar{\mathbf{u}}_{P_2} = \begin{bmatrix} D \sin(\theta_4) e^{i(k_{x_4} x - k_{z_4} z - \omega t)} \\ 0 \\ -D \cos(\theta_4) e^{i(k_{x_4} x - k_{z_4} z - \omega t)} \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Onde A e D são as amplitudes das ondas, k_{x_α} e k_{z_α} são as projeções do vetor número de onda \mathbf{k} nas direções x e z, respectivamente, como indicado na Fig. 2.5, ω é a frequência temporal e θ_1 e θ_4 são ângulos de propagação genéricos.

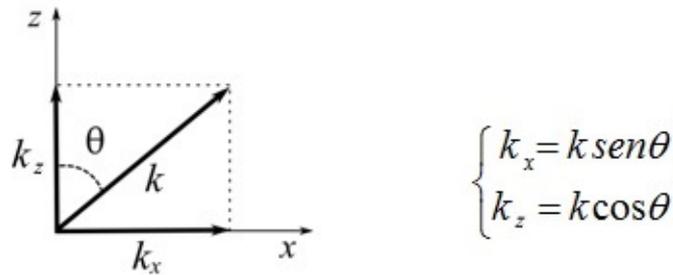


Figura 2.5: Vetor número de onda e suas projeções nas direções x e z.

O vetor \mathbf{k} sempre aponta na direção de propagação, e o número de onda longitudinal, k_L , é dado por:

$$k_L = \frac{\omega}{c_L}. \quad (2.46)$$

Onde c_L é velocidade de propagação longitudinal, ou velocidade de propagação da onda P, e é dado por:

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \quad (2.47)$$

A ondas P têm uma velocidade de propagação maior e são conhecidas como ondas longitudinais, porque a polarização do deslocamento está na direção de propagação da onda, como mostrado na Fig.2.6:

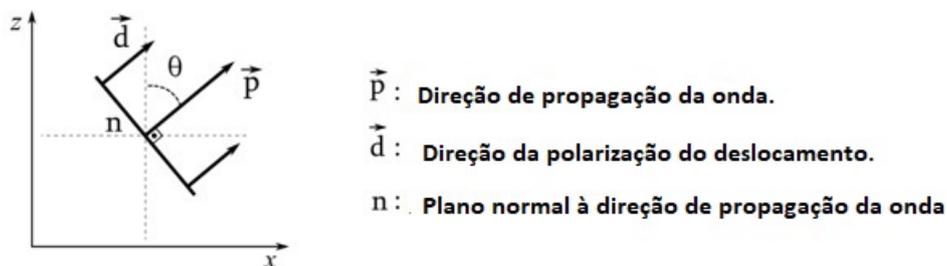


Figura 2.6: Polarização de deslocamento de uma onda P.

A onda P é uma onda compressiva, pois gera somente deformações normais na direção de propagação. Nesse sentido, apenas estas ondas se propagam em fluidos acústicos ideais, uma vez que estes não suportam deformações de cisalhamento.

2.3.3 Onda vertical secundária

O campo de deslocamento indo para cima, subscrito "1", relacionado à onda SV, é dado pela seguinte expressão:

$$\vec{u}_{SV_1} = \begin{bmatrix} -B \cos(\theta_2) e^{i(k_{x_2}x + k_{z_2}z - \omega t)} \\ 0 \\ B \sin(\theta_2) e^{i(k_{x_2}x + k_{z_2}z - \omega t)} \end{bmatrix}. \quad (2.48)$$

E o campo de deslocamento indo para baixo, representado pelo subscrito "2":

$$\bar{\mathbf{u}}_{SV_2} = \begin{bmatrix} E \cos(\theta_5) e^{i(k_{x_5}x - k_{z_5}z - \omega t)} \\ 0 \\ E \sin(\theta_5) e^{i(k_{x_5}x - k_{z_5}z - \omega t)} \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Onde B e E são as amplitudes das ondas, k_{x_α} e k_{z_α} são as projeções do vetor número de onda \mathbf{k} nas direções x e z, respectivamente, ω é a frequência temporal e θ_2 e θ_5 são ângulos de propagação genéricos.

O número de onda transversal, k_T , é dado por:

$$k_T = \frac{\omega}{c_T}. \quad (2.50)$$

Onde c_T é a velocidade de propagação transversal, ou a velocidade de propagação da onda secundária, e é dado por:

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2.51)$$

A onda SV se propaga com uma velocidade menor que a da onda P, e por isso, é chamada de secundária. Ela é conhecida como onda transversal e o acrônimo "V" indica que esses tipos de ondas tem polarização de deslocamento no plano xz e perpendicular à direção de propagação da onda, como mostra a Fig.2.7:

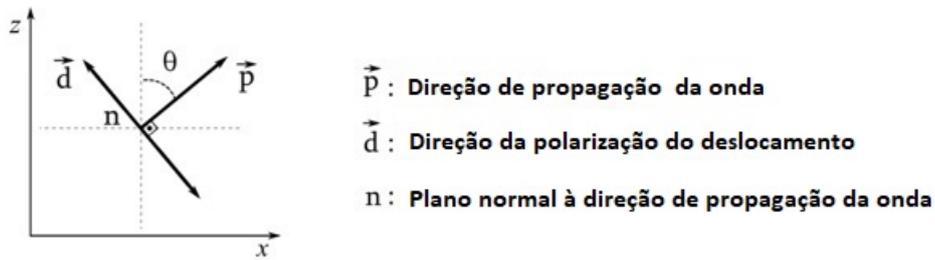


Figura 2.7: Polarização de deslocamento da onda SV.

A onda SV é uma onda de cisalhamento, porque gera somente deformações de cisalhamento na direção de propagação. Nesse sentido, elas não se propagam em fluídos acústicos ideais, uma vez que estes não suportam deformações de cisalhamento.

2.3.4 Onda horizontal secundária

O campo de deslocamento indo para cima, representado pelo subscrito "1", relacionado a onda SH, é dado pela seguinte expressão:

$$\bar{\mathbf{u}}_{SH_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ Ce^{i(k_x x_3 + k_{z3} z - \omega t)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

E o campo de deslocamento indo para baixo, representado pelo subscrito "2":

$$\bar{\mathbf{u}}_{SH_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ Fe^{i(k_x x_6 - k_{z6} z - \omega t)} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Onde C e F são as amplitudes das ondas, k_{x_α} e k_{z_α} são as projeções do vetor número de onda \mathbf{k} nas direções x e z, respectivamente, e ω é a frequência temporal.

As ondas SH se propagam com a mesma velocidade que as ondas SV. O acrônimo "H" indica que esses tipos de onda tem polarização de deslocamento na direção y, normal ao plano de propagação xz, como mostrado na Fig.2.8:

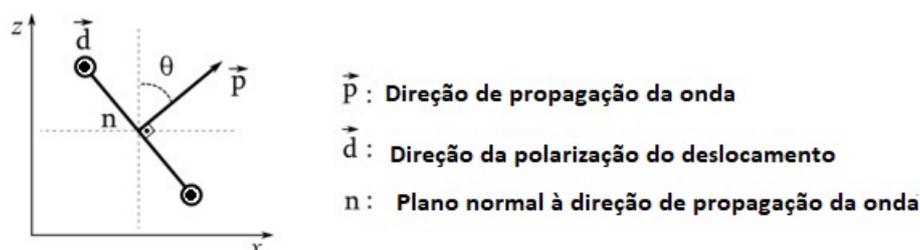


Figura 2.8: Polarização de deslocamento da onda SH.

Onda SH é também uma onda de cisalhamento e se propaga somente em sólidos.

2.3.5 Tensor de impedância e a matriz M

Suponha que temos duas ondas planas, dadas pela superposição das ondas P, SV e SH, se propagando nas direções positiva e negativa de z (ondas "indo" para cima e para baixo, conforme mencionado anteriormente) e que nós estamos resolvendo o problema no domínio

da frequência temporal. Assumindo $x=0$, temos os seguintes vetores de deslocamento indo para cima e para baixo:

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = \bar{\mathbf{u}}_{P_1} + \bar{\mathbf{u}}_{SV_1} + \bar{\mathbf{u}}_{SH_1} = \begin{bmatrix} A \sin(\theta_1) e^{ik_{z_1} z} - B \cos(\theta_2) e^{ik_{z_2} z} \\ C e^{ik_{z_3} z} \\ A \cos(\theta_1) e^{ik_{z_1} z} + B \sin(\theta_2) e^{ik_{z_2} z} \end{bmatrix}. \quad (2.54)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_2 = \bar{\mathbf{u}}_{P_2} + \bar{\mathbf{u}}_{SV_2} + \bar{\mathbf{u}}_{SH_2} = \begin{bmatrix} D \sin(\theta_4) e^{-ik_{z_4} z} + E \cos(\theta_5) e^{-ik_{z_5} z} \\ F e^{-ik_{z_6} z} \\ -D \cos(\theta_4) e^{-ik_{z_4} z} + E \sin(\theta_5) e^{-ik_{z_5} z} \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

E calculando os vetores de tração pelas equações (2.32) e (2.33), nós obtemos:

$$\bar{\mathbf{t}}_1 = \bar{\mathbf{t}}_{P_1} + \bar{\mathbf{t}}_{SV_1} + \bar{\mathbf{t}}_{H_1}, \quad (2.56)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_{1_x} = i\mu(A \sin(\theta_1) k_{z_1} e^{ik_{z_1} z} + A \cos(\theta_1) k_x e^{ik_{z_1} z} - B \cos(\theta_2) k_{z_2} e^{ik_{z_2} z} + B \sin(\theta_2) k_x e^{ik_{z_2} z}), \quad (2.57)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_{1_y} = i\mu C k_{z_3} e^{ik_{z_3} z}, \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{t}}_{1_z} = & i\lambda(A \sin(\theta_1) k_x e^{ik_{z_1} z} + A \cos(\theta_1) k_{z_1} e^{ik_{z_1} z} - B \cos(\theta_2) k_x e^{ik_{z_2} z} + B \sin(\theta_2) k_{z_2} e^{ik_{z_2} z}) \\ & + 2i\mu(A \cos(\theta_1) k_{z_1} e^{ik_{z_1} z} + B \sin(\theta_2) k_{z_2} e^{ik_{z_2} z}), \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_2 = \bar{\mathbf{t}}_{P_2} + \bar{\mathbf{t}}_{SV_2} + \bar{\mathbf{t}}_{H_2}, \quad (2.60)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_{2_x} = i\mu(-D \sin(\theta_4) k_{z_4} e^{-ik_{z_4} z} - D \cos(\theta_4) k_x e^{-ik_{z_4} z} - E \cos(\theta_5) k_{z_5} e^{-ik_{z_5} z} + E \sin(\theta_5) k_x e^{-ik_{z_5} z}), \quad (2.61)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_{2_y} = -i\mu F k_{z_6} e^{-ik_{z_6} z}, \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{t}}_{2z} = & \lambda(D \sin(\theta_4)k_x e^{-ik_{z_4}z} + D \cos(\theta_4)k_{z_4} e^{-ik_{z_4}z} + E \cos(\theta_5)k_x e^{-ik_{z_5}z} - E \sin(\theta_5)k_{z_5} e^{-ik_{z_5}z}) \\ & + 2i\mu(D \cos(\theta_4)k_{z_4} e^{-ik_{z_4}z} - E \sin(\theta_5)k_{z_5} e^{-ik_{z_5}z}). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Esses vetores podem ser reescritos em uma decomposição de matrizes:

$$\bar{\mathbf{u}}_\alpha(z) = \mathbf{A}_\alpha \Phi_\alpha(z) \mathbf{C}_\alpha, \alpha = 1, 2, \quad (2.64)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_\alpha(z) = -i\mathbf{L}_\alpha \Phi_\alpha(z) \mathbf{C}_\alpha, \alpha = 1, 2. \quad (2.65)$$

Onde C_1 e C_2 são vetores de amplitude:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

E os operadores $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \Phi_1(z)$ e $\Phi_2(z)$ são dados por:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \sin(\theta_1) & -\cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos(\theta_1) & \sin(\theta_2) & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \sin(\theta_4) & \cos(\theta_5) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\cos(\theta_4) & \sin(\theta_5) & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} -\mu(\sin(\theta_1)k_{z_1} + \cos(\theta_1)k_x) & \mu(\cos(\theta_2)k_{z_2} - \sin(\theta_2)k_x) & 0 \\ 0 & 0 & -\mu k_{z_3} \\ -\lambda(\cos(\theta_1)k_{z_1} + \sin(\theta_1)k_x) - 2\mu \cos(\theta_1)k_{z_1} & \lambda(-\sin(\theta_2)k_{z_2} + \cos(\theta_2)k_x) - 2\mu \sin(\theta_2)k_{z_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \mu(\sin(\theta_4)k_{z_4} + \cos\theta_4k_x) & \mu(\cos(\theta_5)k_{z_5} - \sin(\theta_5)k_x) & 0 \\ 0 & 0 & \mu k_{z_6} \\ -\lambda(\cos(\theta_4)k_{z_4} + \sin(\theta_4)k_x) - 2\mu\cos(\theta_4)k_{z_4} & \lambda(-\sin(\theta_5)k_{z_5} + \cos(\theta_5)k_x) + 2\mu\sin(\theta_5)k_{z_5} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

$$\Phi_1(z) = \begin{bmatrix} e^{ik_{z_1}z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik_{z_2}z} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_{z_3}z} \end{bmatrix}, \quad (2.72)$$

$$\Phi_2(z) = \begin{bmatrix} e^{-ik_{z_4}z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-ik_{z_5}z} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-ik_{z_6}z} \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Finalmente, os operadores matriciais $\mathbf{M}_1(z)$, $\mathbf{M}_2(z)$, \mathbf{Z}_1 , \mathbf{Z}_2 podem então ser escritos como:

$$\bar{\mathbf{u}}_\alpha(z) = \mathbf{M}_\alpha(z)\bar{\mathbf{u}}_\alpha(z), \alpha = 1, 2, \quad (2.74)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_\alpha(z) = -i\omega\mathbf{Z}_\alpha\bar{\mathbf{u}}_\alpha(z), \alpha = 1, 2, \quad (2.75)$$

Onde $\mathbf{M}_1(z)$ e $\mathbf{M}_2(z)$ propagam, respectivamente, os campos de deslocamento para cima e para baixo no sólido. Os operadores \mathbf{Z}_1 e \mathbf{Z}_2 são os tensores de impedância, que relacionam os campos de tração aos de deslocamento e depende somente do material. Esses operadores podem ser calculados como:

$$\mathbf{M}_\alpha(z) = \mathbf{A}_\alpha \cdot \Phi_\alpha(z) \cdot [\mathbf{A}_\alpha]^{-1}, \alpha = 1, 2, \quad (2.76)$$

$$\mathbf{Z}_\alpha = \frac{1}{\omega} \mathbf{L}_\alpha \cdot [\mathbf{A}_\alpha]^{-1}, \alpha = 1, 2. \quad (2.77)$$

2.3.6 Ondas planas e tensores de impedância em meios anisotrópicos

2.3.6.1 Equação de Christoffel

Considere um meio sólido elástico e anisotrópico, sujeito a pequenas deformações:

$$\tau_{ij,j} = \rho \ddot{U}_i, \quad (2.78)$$

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}, \quad (2.79)$$

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2}(U_{k,l} + U_{l,k}). \quad (2.80)$$

Onde a equação (2.78) é a segunda Lei de Newton do movimento aplicado ao continuum, com nenhuma força do corpo, conhecida como equilíbrio do momento linear. A equação (2.79) é a relação constitutiva associada a materiais anisotrópicos, conhecida como Lei de Hooke generalizada. A equação (2.80) é o tensor de deformação relacionado a pequenas deformações. Nas equações acima, τ_{ij} é o tensor de tensão, U_i é o vetor deslocamento, ρ é a densidade, C_{ijkl} é o tensor elástico de quarta ordem e ϵ_{kl} é o tensor de deformação.

Usando as três equações, (2.78), (2.79) e (2.80), nós podemos escrever a equação governante em termos do deslocamento:

$$\frac{1}{2} C_{ijkl} (U_{k,jl} + U_{l,jk}) = \rho \ddot{U}_i. \quad (2.81)$$

Note que C_{ijkl} é simétrico com respeito a k e l e assim k e l são permutáveis. Isso reduz o número total de parâmetros elásticos de 81 para 36:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}, \quad (2.82)$$

$$\frac{1}{2} C_{ijkl} (U_{k,jl} + U_{l,jk}) = C_{ijkl} U_{l,jk}. \quad (2.83)$$

Através dessa simetria, o tensor elástico pode ser escrito como uma matriz 6x6, onde:

$$C_{ijkl} \rightarrow C_{nm}; \quad n = 1, \dots, 6 \quad e \quad m = 1, \dots, 6, \quad (2.84)$$

$$se \quad i = j : n = i; \quad se \quad i \neq j : n = 9 - (i + j), \quad (2.85)$$

$$se \quad k = l : m = k; \quad se \quad k \neq l : m = 9 - (k + l), \quad (2.86)$$

Essa representação do tensor elástico é extremamente útil para algumas aplicações.

Vamos assumir ondas planas harmônicas como candidatas para solução:

$$U_i = A_i e^{i(k_j x_j - \omega t)}. \quad (2.87)$$

Onde ω é frequência temporal, k_j é o número de onda na direção j , e a segunda derivada no tempo pode ser escrita como:

$$\ddot{U}_i = \omega^2 U_i. \quad (2.88)$$

E as derivadas espaciais:

$$U_{l,jk} = k_j k_k U_l. \quad (2.89)$$

Então a equação de Christoffel para o meio anisotrópico pode ser escrita substituindo as equações (2.88) e (2.89) em (2.81):

$$(\rho\omega^2 \delta_{il} - C_{ijkl} k_j k_k) U_l = 0. \quad (2.90)$$

E o tensor acústico de Christoffel é dado por:

$$\Lambda_{il} = C_{ijkl} n_j n_k. \quad (2.91)$$

Onde n_j e n_k são cossenos diretores da normal para frente de onda.

E finalmente, combinando as equações (2.90), (2.91) e a relação $k = \frac{\omega}{c}$ leva a um problema clássico de autovalor-autovetor, fornecendo-nos três equações homogêneas cujas soluções são três raízes reais representando três velocidades de fase distintas:

$$(\Lambda_{il} - \rho c^2 \delta_{il}) U_l = 0. \quad (2.92)$$

2.3.6.2 Tensor de impedância e matriz M

Levando em conta a equação (2.80) e usando como solução ondas planas harmônicas no tempo, que tem o plano xz como plano de propagação, pode-se escrever:

$$\mathbf{U}(x, z, t) = \mathbf{u}(x, z) e^{-i\omega t}, \quad (2.93)$$

$$\mathbf{T}(x, z, t) = \mathbf{t}(x, z)e^{-i\omega t}. \quad (2.94)$$

Onde o vetor deslocamento \mathbf{u} e o vetor de tração \mathbf{t} tem a forma:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad (2.95)$$

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.96)$$

E o vetor de estado pode ser definido como:

$$\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(z, k_x) \\ i\mathbf{t}(z, k_x) \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

Onde k_x é o número de onda na direção x.

Das definições das equações (2.93) e (2.94), a equação (2.80) e usando a transformada de Fourier no vetor de estado, pode ser mostrado que:

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{\xi}(z, k_x) = i\hat{\mathbf{N}}(k_x)\bar{\xi}(z, k_x). \quad (2.98)$$

Onde $\hat{\mathbf{N}}$ é a transformada da matriz de estado de sexta ordem, definida pela equação (2.99), enquanto a dependência temporal é cancelada por aparecer em ambos os lados da equação.

$$\hat{\mathbf{N}}(k_x) = \begin{bmatrix} -k_x \mathbf{X2}^{-1} \mathbf{X1} & -\mathbf{X2}^{-1} \\ -\omega^2 \rho \mathbf{I} + k_x^2 \mathbf{Y1} - k_x^2 \mathbf{Y2} \mathbf{X2}^{-1} \mathbf{X1} & -k_x \mathbf{Y2} \mathbf{X2}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.99)$$

E os operadores $\mathbf{X1}$, $\mathbf{X2}$, $\mathbf{Y1}$ e $\mathbf{Y2}$ são representados pelas seguintes matrizes:

$$\mathbf{X1} = \begin{bmatrix} C_{51} & C_{56} & C_{55} \\ C_{41} & C_{46} & C_{45} \\ C_{31} & C_{36} & C_{35} \end{bmatrix}, \quad (2.100)$$

$$\mathbf{X2} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{54} & C_{53} \\ C_{45} & C_{44} & C_{43} \\ C_{35} & C_{34} & C_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

$$\mathbf{Y1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{16} & C_{15} \\ C_{61} & C_{66} & C_{65} \\ C_{51} & C_{56} & C_{55} \end{bmatrix}, \quad (2.102)$$

$$\mathbf{Y2} = \begin{bmatrix} C_{15} & C_{14} & C_{13} \\ C_{65} & C_{64} & C_{63} \\ C_{55} & C_{54} & C_{53} \end{bmatrix}. \quad (2.103)$$

A matriz de estado $\hat{\mathbf{N}}$ tem um importante papel no cálculo dos tensores de impedância, uma vez que os autovalores representam os números de onda k_{zi} e os autovetores os vetores de polarização relacionados as ondas desacopladas se propagando no meio. Devido as propriedades da matriz de estado, os autovalores aparecem em pares com sinais opostos, dividindo em grupos de três ondas indo para cima(direção positiva do eixo z) e três ondas indo para baixo(direção negativa do eixo z). Note que esta formulação é compatível com a equação de Christoffel.

Similarmente ao caso isotrópico, as matrizes de propagação \mathbf{M}_α e os tesores de impedância \mathbf{Z}_α são calculados da seguinte forma:

$$\mathbf{M}_\alpha(z) = \mathbf{A}_\alpha \cdot \Phi_\alpha(z) \cdot [\mathbf{A}_\alpha]^{-1}, \alpha = 1, 2, \quad (2.104)$$

$$\mathbf{Z}_\alpha = \frac{1}{\omega} \mathbf{L}_\alpha \cdot [\mathbf{A}_\alpha]^{-1}, \alpha = 1, 2. \quad (2.105)$$

E os operadores Φ_α , \mathbf{A}_α , \mathbf{L}_α são calculados através dos autovalores e autovetores(k_{zi} e \mathbf{v}_i) e a matriz de estado $\hat{\mathbf{N}}$, onde os subscritos 1, 2 e 3 se referem a ondas indo para cima e 4, 5 e 6 se referem a ondas indo para baixo.

$$\Lambda_{\hat{\mathbf{N}}} = \begin{bmatrix} k_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{z2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{z3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{z4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{z5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{z6} \end{bmatrix}, \quad (2.106)$$

$$\mathbf{V}_{\hat{\mathbf{N}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_5 & \mathbf{v}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} & a_{211} & a_{212} & a_{213} \\ a_{121} & a_{122} & a_{123} & a_{221} & a_{222} & a_{223} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133} & a_{231} & a_{232} & a_{233} \\ l_{111} & l_{112} & l_{113} & l_{211} & l_{212} & l_{213} \\ l_{121} & l_{122} & l_{123} & l_{221} & l_{222} & l_{223} \\ l_{131} & l_{132} & l_{133} & l_{231} & l_{232} & l_{233} \end{bmatrix}, \quad (2.107)$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} e^{ik_{z1}z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik_{z2}z} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_{z3}z} \end{bmatrix}, \quad (2.108)$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} e^{ik_{z4}z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{ik_{z5}z} & 0 \\ 0 & 0 & e^{ik_{z6}z} \end{bmatrix}, \quad (2.109)$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{111} & a_{112} & a_{113} \\ a_{121} & a_{122} & a_{123} \\ a_{131} & a_{132} & a_{133} \end{bmatrix}, \quad (2.110)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{211} & a_{212} & a_{213} \\ a_{221} & a_{222} & a_{223} \\ a_{231} & a_{232} & a_{233} \end{bmatrix}, \quad (2.111)$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} l_{111} & l_{112} & l_{113} \\ l_{121} & l_{122} & l_{123} \\ l_{131} & l_{132} & l_{133} \end{bmatrix}, \quad (2.112)$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} l_{211} & l_{212} & l_{213} \\ l_{221} & l_{222} & l_{223} \\ l_{231} & l_{232} & l_{233} \end{bmatrix}. \quad (2.113)$$

2.3.7 Cálculo da Matriz de Reflexão

Estamos então em condições de determinar os coeficientes de reflexão. Usamos a condição de contorno da continuidade de \mathbf{u} e \mathbf{t} através da interface:

$$\bar{\mathbf{u}}^+ = \bar{\mathbf{u}}^-, \quad (2.114)$$

$$\bar{\mathbf{t}}^+ = \bar{\mathbf{t}}^-. \quad (2.115)$$

Onde os superescritos + e - indicam os valores das variáveis de campo imediatamente acima e abaixo da interface, respectivamente.

Usando as equações (2.29) e (2.30) na equação (2.115) obtemos:

$$\bar{\mathbf{u}}_2^- = [\mathbf{Z}_2^{II}]^{-1}[\mathbf{Z}_1^I \bar{\mathbf{u}}_1^+ + \mathbf{Z}_2^I \bar{\mathbf{u}}_2^+]. \quad (2.116)$$

Substituindo (2.116) em (2.114) e reorganizando os termos obtemos:

$$\bar{\mathbf{u}}_1^+ = (\mathbf{Z}_1^I - \mathbf{Z}_2^{II})^{-1}(\mathbf{Z}_2^{II} - \mathbf{Z}_2^I)\bar{\mathbf{u}}_2^+. \quad (2.117)$$

Definimos assim $(\mathbf{Z}_1^I - \mathbf{Z}_2^{II})^{-1}(\mathbf{Z}_2^{II} - \mathbf{Z}_2^I)$ como a Matriz de Reflexão \mathbf{R} .

$$\mathbf{R} = (\mathbf{Z}_1^I - \mathbf{Z}_2^{II})^{-1}(\mathbf{Z}_2^{II} - \mathbf{Z}_2^I). \quad (2.118)$$

A equação (2.118) nos fornece a Matriz de Reflexão como função dos ângulos de incidência.

2.4 Cálculo das amplitudes de deslocamento

Para calcular as amplitudes de deslocamento das ondas que chegam a um determinado receptor, devemos considerar que uma onda P incidente, com um ângulo de incidência de θ_0 com a direção normal à interface, é dividida em um triplet de ondas P, SV e SH "indo" para cima e "indo" para baixo e que a onda P indo para cima é refletida com ângulo de reflexão θ_0 , que é igual ao ângulo de incidência, porém as ondas SV e SH são refletidas com ângulos de reflexão diferentes de θ_0 e são portanto direcionadas para um receptor diferente daquele em que estamos fazendo a leitura. O ponto na interface em que a onda P incide e é refletida em direção ao receptor desejado é chamado de common-midpoint (CMP).

Afim de calcular as ondas S's que chegam ao receptor no qual estamos efetuando a leitura, precisamos nos ater ao ângulo em que a onda P incidente faz com o common-conversion-point (CCP). O CCP é o ponto na interface em que uma onda P incide e as ondas SV e SH são refletidas em direção ao receptor em que chega a onda P refletida partindo do CMP.

A figura 2.9 ilustra a situação com a onda P incidindo sobre o CMP. A figura 2.10 ilustra a situação da onda P incidindo tanto no CMP como no CCP.

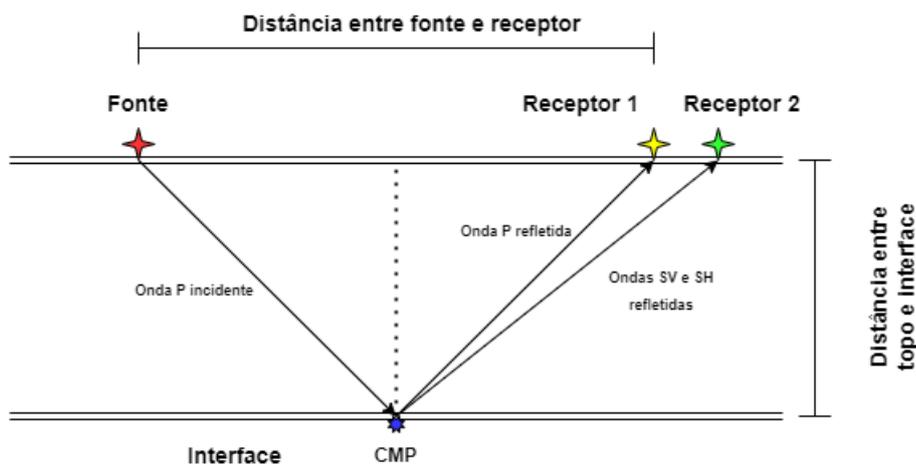


Figura 2.9: Onda P incidente sobre o CMP, a onda P refletida chega ao receptor em que estamos fazendo a leitura e as ondas S’s chegam a outro receptor.

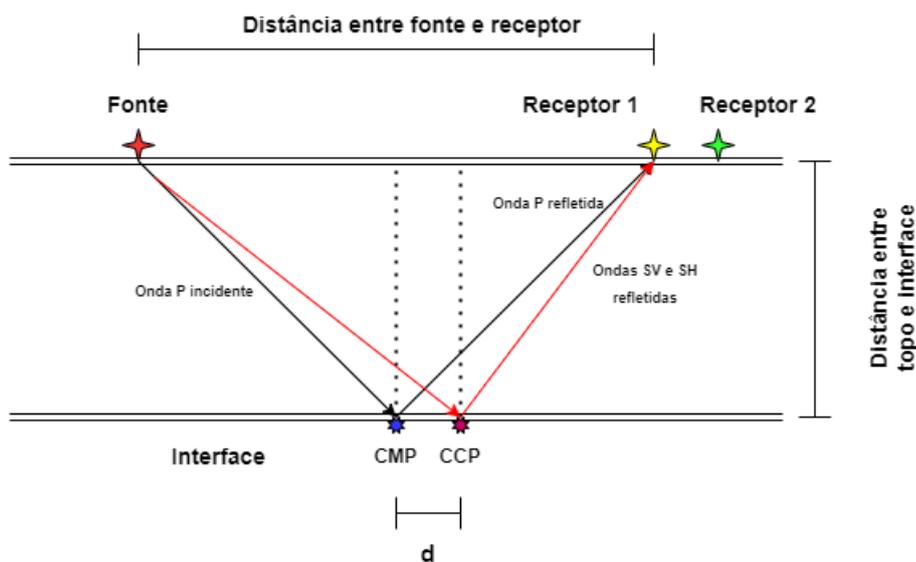


Figura 2.10: Onda P incidente sobre o CCP, as ondas S’s refletidas a partir do CCP chegam ao mesmo receptor que a onda P partindo do CMP.

Tendo em vista esses fatos, dividimos o cálculo das amplitudes de deslocamento das ondas P, SV e SH em duas partes. Uma parte considerando a onda P incidindo sobre o CMP e outra parte considerando a onda P incidindo sobre o CCP.

A parte do cálculo das amplitudes da onda P incidindo sobre o CMP é mostrado a seguir.

Conhecemos a onda P incidente no topo reservatório para cada ponto do eixo x:

$$\mathbf{u}_{P_2topo} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_0)e^{i(k_x x - k_{z_0} z)} \\ 0 \\ -\cos(\theta_0)e^{i(k_x x - k_{z_0} z)} \end{bmatrix}. \quad (2.119)$$

Note que θ_0 é o ângulo de incidência da onda em relação ao eixo normal a interface no ponto de CMP, k_{z_0} é a projeção do vetor de onda da onda p incidente na direção z, z é a distância do topo do reservatório até a interface e as amplitudes de deslocamento incidentes foram normalizadas. Na seção anterior calculamos a matriz de reflexão através da equação 2.118. Com essas informações podemos calcular a amplitude de deslocamento da onda P refletida no topo do reservatório.

Aplicamos a Transformada de Fourier na onda p incidente no topo do reservatório e a levamos para a interface no ponto de CMP utilizando a matriz de propagação $\mathbf{M}_2(z)$:

$$\bar{\mathbf{u}}_{P_2interface} = \mathbf{M}_2(z)\bar{\mathbf{u}}_{P_2topo}. \quad (2.120)$$

Calculamos o campo de onda refletido transformado na interface, no CMP, através da multiplicação da matriz de reflexão com a onda p incidente transformada, na interface:

$$\bar{\mathbf{u}}_{1interface} = \mathbf{R}\bar{\mathbf{u}}_{P_2interface}. \quad (2.121)$$

Levamos o campo de onda refletido do CMP até o topo do reservatório com a matriz de propagação $\mathbf{M}_1(z)$:

$$\bar{\mathbf{u}}_{1topo} = \mathbf{M}_1(z)\bar{\mathbf{u}}_{1interface}. \quad (2.122)$$

Como a informação importante para a geofísica são as amplitudes da onda refletida, as calculamos manipulando a equação 2.64 aplicando a inversa do operador \mathbf{A}_1 em ambos lados da equação de tal forma que se torna:

$$\bar{\mathbf{C}}_1 = \mathbf{A}_1^{-1}\bar{\mathbf{u}}_1. \quad (2.123)$$

Onde $\bar{\mathbf{C}}_1$ é o vetor transformado com as amplitudes de deslocamento da onda P refletida.

Por fim aplicamos a Transformada Inversa de Fourier nas amplitudes de deslocamento refletidas, $\bar{\mathbf{C}}_1$. O mesmo método é utilizado para todos os offsets escolhidos.

A parte do cálculo das amplitudes das ondas SV e SH, com a onda P incidindo sobre o CCP, é mostrado a seguir.

Conhecemos a onda P incidente no topo reservatório para cada ponto do eixo x:

$$\mathbf{u}_{P_2topo} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_1)e^{i(k_x x - k_{z_1} z)} \\ 0 \\ -\cos(\theta_1)e^{i(k_x x - k_{z_1} z)} \end{bmatrix}. \quad (2.124)$$

O θ_1 é o ângulo de incidência da onda P em relação ao eixo normal à interface no CCP. Calculado através de uma trigonometria simples como:

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{C_L}{C_T} \frac{(x/2 - d)}{\sqrt{(x/2 - d)^2 + z^2}}\right). \quad (2.125)$$

Onde x é a distância entre a fonte e o receptor em que se está efetuando a medida, z é a distância entre fonte/receptor e a interface, C_L e C_T são as velocidades de propagação das ondas P e S's e d é a distância horizontal entre o CMP e o CCP dado por:

$$d = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \right) x. \quad (2.126)$$

Onde γ é $\frac{C_L}{C_T}$.

O k_{z_1} é a projeção do vetor de onda da onda p incidente na direção z, e as amplitudes de deslocamento incidentes foram normalizadas.

Calculamos a matriz de reflexão através da equação 2.118. Com essas informações podemos calcular as amplitudes de deslocamento das ondas SV e SH refletidas no topo do reservatório.

Aplicamos a Transformada de Fourier na onda P incidente no topo do reservatório e a levamos para a interface no ponto de CCP de acordo com a equação 2.120.

Calculamos o campo de onda refletido transformado na interface, no CCP, através da multiplicação da matriz de reflexão com a onda p incidente transformada na interface conforme mostrado na equação 2.121.

Levamos o campo de onda refletido do CMP até o topo do reservatório com a equação 2.122

Calculamos as amplitudes de deslocamento das ondas S's com equação 2.123.

Por fim aplicamos a Transformada Inversa de Fourier nas amplitudes de deslocamento refletidas, para as ondas S's. O mesmo método é utilizado para todos os offsets escolhidos.

2.5 Formulação e resolução do problema inverso

Aqui formulamos e resolvemos o problema inverso. O problema é formulado da seguinte maneira: Dado as amplitudes de deslocamento refletidas para diferentes ângulos de incidência, recupere a direção principal de fraturamento do reservatório.

Para resolver tal problema, adotamos a seguinte estratégia:

Varremos os pares de ângulo θ e ϕ para cada ângulo de incidência considerado, e calculamos a amplitude de deslocamento refletida conforme os passos introduzidos ao longo do texto. Então, comparamos cada amplitude de deslocamento obtida na varredeura com a medida. A direção de fraturamento cujas amplitudes de deslocamento melhor se ajustam às amplitudes de deslocamento medidas é considerada a solução do problema.

Capítulo 3

Procedimento computacional

A formulação matemática descrita na seção anterior foi implementada para contemplar 6 casos de interesse. O primeiro caso, o mais geral, simulando seis linhas de aquisição sísmica e medindo a amplitude de deslocamento das ondas P, SV e SH que chegam aos respectivos offsets. O segundo caso é do mesmo modo que o primeiro, porém medindo apenas a componente z da onda P que chega aos respectivos offsets. O terceiro, simulando três linhas e medindo as as três ondas. O quarto, é assim como o terceiro, porém medindo apenas a componente z da onda P. O quinto, simulando uma linha e medindo as três ondas. Finalmente o sexto, é assim como o quinto, porém medindo apenas a componente z da onda P. A tabela 3.1 ilustra os casos abordados.

Caso	Quantidade de linhas sísmicas medidas	Ondas medidas
1	6	P, SV e SH
2	6	componente z da onda P
3	3	P, SV e SH
4	3	componente z da onda P
5	1	P, SV e SH
6	1	componente z da onda P

Tabela 3.1: Tabela com os casos abordados de acordo com a quantidade de linhas sísmicas e as ondas medidas.

Descreveremos em detalhe o primeiro caso, o mais geral, os casos subsequentes são abordados a partir deste. Criamos uma linha sísmica de referência paralela ao eixo horizontal. As outras 5 linhas sísmicas foram criadas utilizando uma rotina para rotacionar a matriz de constantes elásticas, representada no novo sistema de coordenadas, em torno do eixo z de acordo com os seguintes ângulos : 15°, 30°, 45°, 60 ° e 90° respectivamente. A figura 3.1 são vistas de cima que mostram os esquemas de aquisição sísmicas considerados na nossa implementação, para o

esquema com três linhas sísmicas os ângulos de rotação em torno do eixo z são de 45° e 60° .

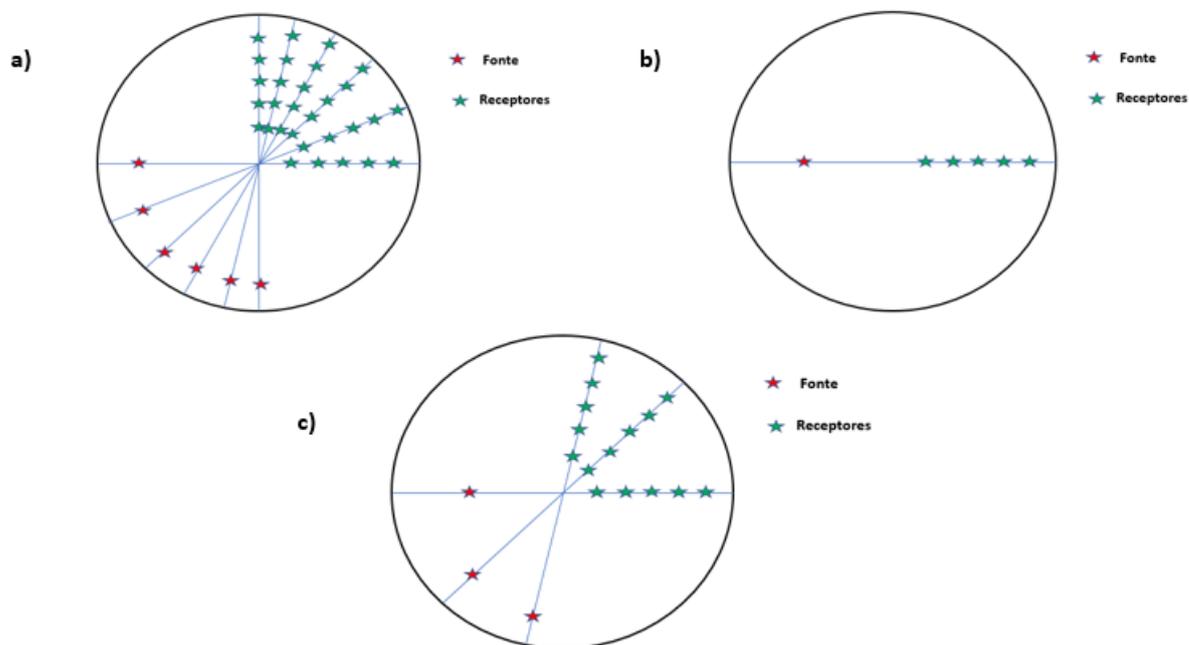


Figura 3.1: Esquemas de aquisição sísmica considerados visto de cima. a) Esquema de aquisição sísmicas com seis linhas sísmicas. b) Esquema de aquisição com três linhas sísmicas. c) Esquema de aquisição com uma linha sísmica.

Para cada par de ângulos θ e ϕ , que são os ângulos de referência do modelo, escolho 5 ângulos de incidência que correspondem aos 5 offsets posicionados na respectiva linha sísmica. Usando a formulação matemática da seção anterior calculamos as amplitudes de deslocamento das ondas P, SV e SH, para cada par θ e ϕ e para cada ângulo de incidência no topo do reservatório para a respectiva linha sísmica. Portanto obtemos no total seis amplitudes de deslocamento das ondas P, SV e SH, uma para cada linha sísmica.

O programa foi projetado para comportar a introdução de ruído numérico a fim de avaliar qual seria o comportamento e a robustez da solução para cada caso abordado. A adição de ruído é feita tomando o máximo valor absoluto, das partes real e imaginária, de cada amplitude de deslocamento de cada onda e multiplicando esses valores por algum número entre 0 e 1, ou seja, obtendo uma porcentagem da amplitude de deslocamento, e multiplicando por algum número obtido através de um gerador de números aleatórios que segue uma distribuição normal, gerando assim, novas amplitudes de deslocamento ,para cada onda, contendo ruído.

Executamos a rotina que introduz ruído, para o caso geral, e por usarmos um gerador de números aleatórios, cada vez que se executa a rotina obtemos diferentes valores amplitudes de deslocamento. A métrica que utilizamos para avaliar a qualidade do sinal é a Relação Sinal Ruído

(SNR) (equação 3.1). Para obter esse valor de maneira mais criteriosa repetimos o procedimento de execução da rotina para cada ângulo de incidência, ou seja, cinco vezes, o colocamos em um vetor e tiramos a média para cada par θ e ϕ e então salvamos o seu resultado em uma matriz contendo todas as relações sinal ruído do caso abordado.

$$\text{SNR}_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{A_{\text{signal}}}{A_{\text{ruído}}} \right). \quad (3.1)$$

Pelo caráter aleatório do ruído numérico nos dados sintéticos de referência, executamos o programa vinte e cinco vezes para nos certificarmos da robustez do mesmo em encontrar a solução do problema.

Tendo obtido todas as amplitudes de deslocamento para todas as ondas dos dados sintéticos de referência, implementamos o procedimento descrito na seção anterior para resolver o problema inverso. Discretizamos o espaço com θ e ϕ variando de 0 até π de $\pi/100$ em $\pi/100$ e guardamos os valores das amplitudes de deslocamento de cada onda, para cada linha sísmica e para cada par de ângulos em um array multidimensional.

Por fim, com o intuito de otimizar o tempo de computação dos demais casos, salvamos as amplitudes sem ruído em um arquivo de modo que ele possa ser importado a posteriori. Isso é útil pois os vetores salvos contém a informação de qual par de ângulos θ e ϕ e qual ângulo de incidência estamos nos referindo ou queremos acessar, em outras palavras mapeia todos os dados sintéticos em arrays multidimensionais, que depois serão usados em todos os outros casos.

Nos outros cinco casos, a metodologia seguida foi praticamente a mesma, diferenciando-se apenas em termos de linhas sísmicas computadas e/ou amplitudes de deslocamento de ondas medidas. Uma vez que salvamos todos os dados sintéticos em arquivos, cada um dos casos restantes os importa e os usa. Isso faz com que o tempo de execução do programa, que no caso mais geral leva cerca de um dia, seja reduzido para alguns minutos.

As figuras 3.2, 3.3 e 3.4, a seguir, ilustram todo o workflow implementado. Começa com o fluxograma da geração dos meios equivalentes, representados em um outro sistema de coordenadas, seguido do fluxograma para a geração das amplitudes de deslocamento das ondas P, SV e SH com os ângulos reais (de referência), e por o fluxograma para a resolução do problema inverso.

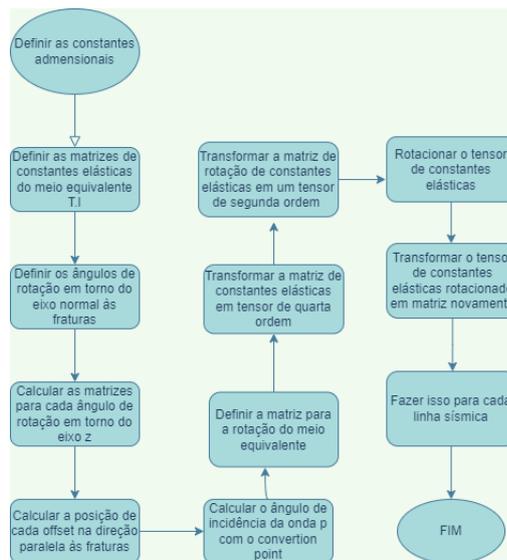


Figura 3.2: Fluxograma da geração dos meios equivalentes, representados em um outro sistema de coordenadas.

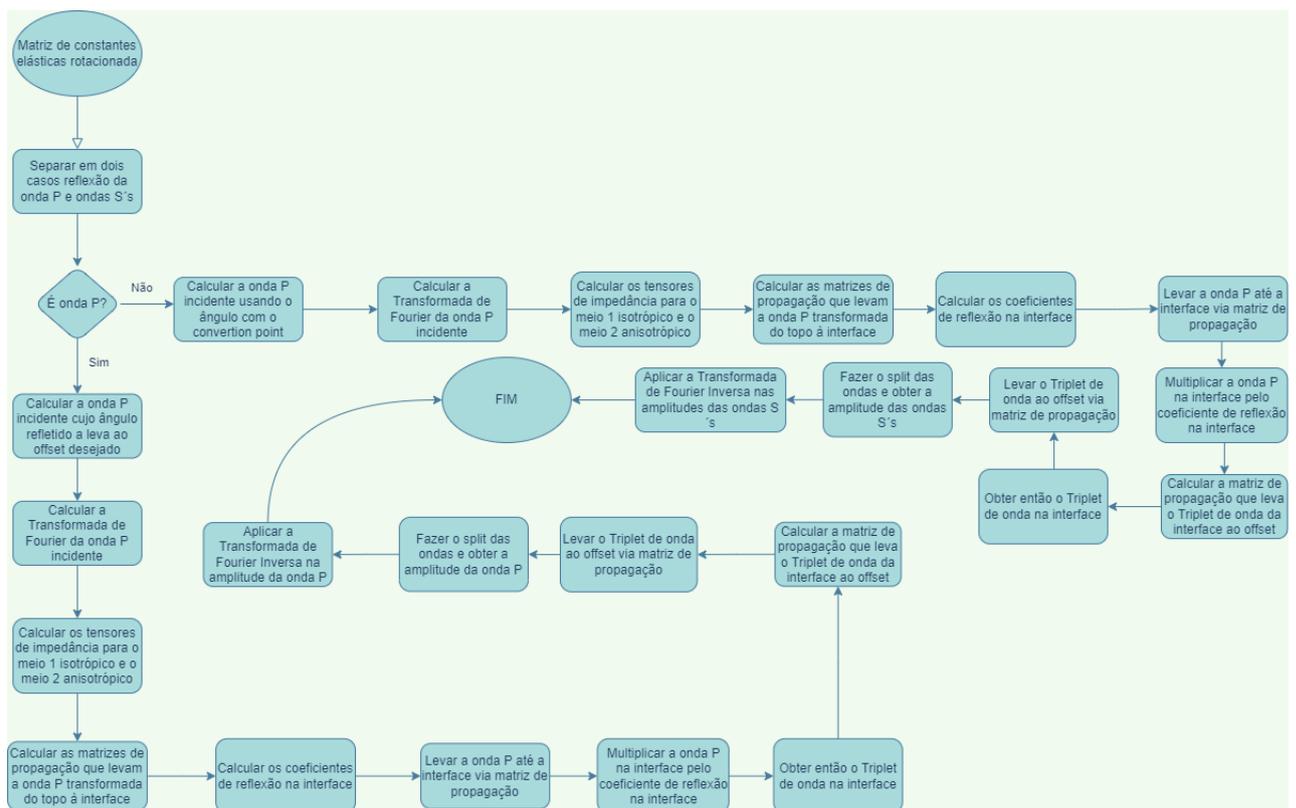


Figura 3.3: Fluxograma para a geração das amplitudes de deslocamento das onda P, SV e SH com os ângulos reais (de referência).

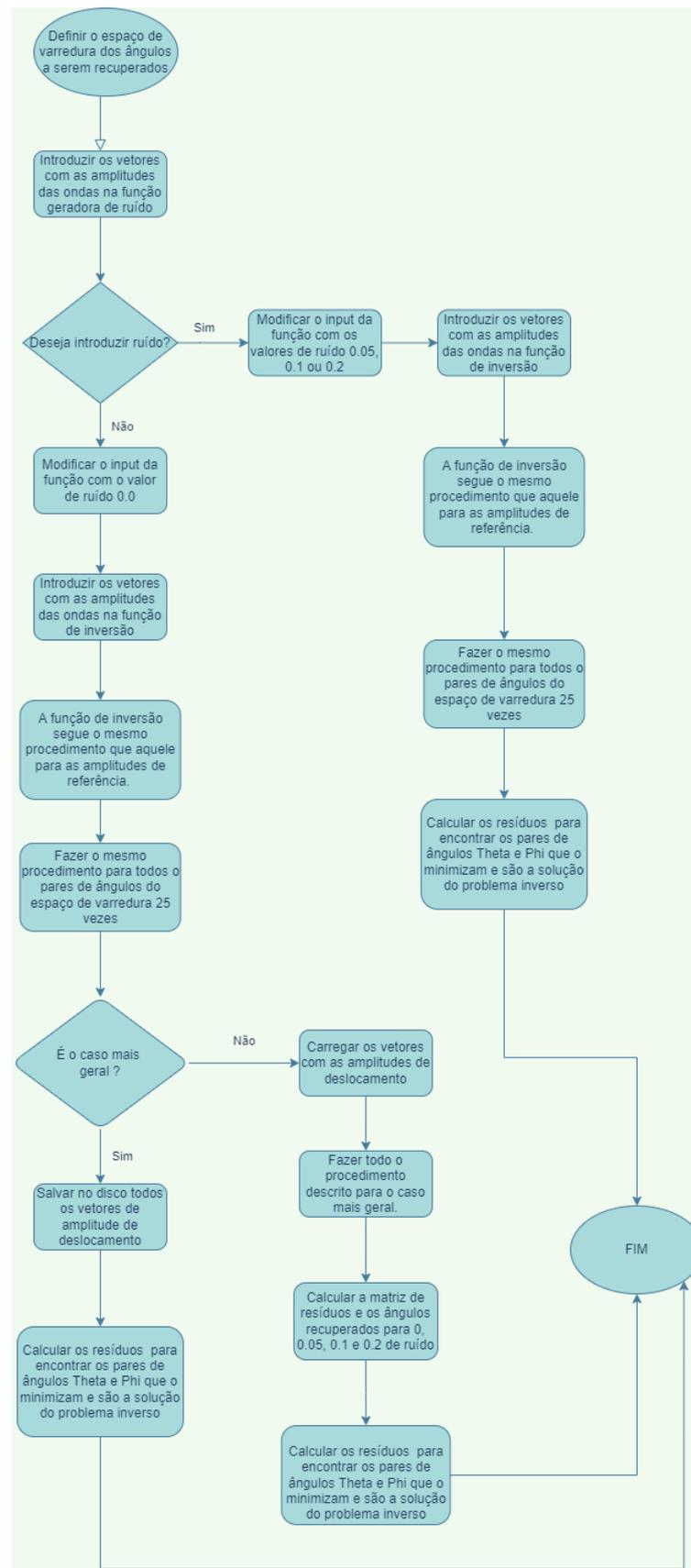


Figura 3.4: Fluxograma para a resolução do problema inverso.

Capítulo 4

Resultados numéricos e discussões

Os resultados numéricos serão apresentados para os casos abordados, conforme descrevemos na seção anterior de procedimentos computacionais.

4.1 Caso com seis linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH

Começamos com o caso principal, onde consideramos um sistema de aquisição com seis linhas sísmicas e medimos as amplitudes de deslocamento das três ondas, P, SV e SH que chegam aos respectivos offsets. A tabela 4.1 mostra os ângulos reais e os recuperados para o caso abordado sem nenhum ruído numérico introduzido. Conforme esperado, podemos ver que o programa recupera exatamente os ângulos reais de fraturamento.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$
81°	48,6°	81°	48,6°
63°	18°	63°	18°
77,4°	131,4°	77,4°	131,4°
66,6°	100,8°	66,6°	100,8°
39,6°	117°	39,6°	117°

Tabela 4.1: Tabela com os ângulos reais e recuperados para o caso de seis linhas sísmicas, três ondas e sem ruído.

A figura 4.1 mostra a relação dos ângulos θ reais e recuperados para os casos com 5%, 10% e 20 % de ruído para os cinco ângulos reais. O programa teve vinte e cinco rodadas, os resultados plotados mostram a variabilidade dos ângulos recuperados em relação aos ângulos reais considerando todas as rodadas do programa.

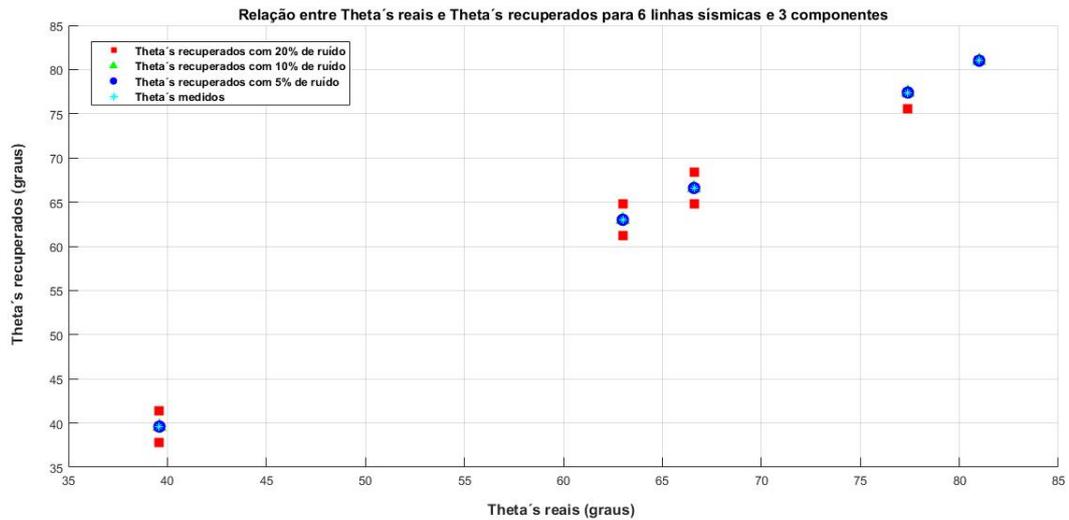


Figura 4.1: Relação entre os ângulos θ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de três linhas sísmicas medindo as onda P, SV e SH.

Observa-se que os ângulos θ aparentam não sofrer variabilidade significativa com ruídos de 5% e 10% e sofrem alguma ou nenhuma com ruídos de 20%.

A figura 4.2 mostra a relação dos ângulos ϕ reais e recuperados para os casos com 5%, 10% e 20 % de ruído para os cinco ângulos reais. Os resultados plotados mostram a variabilidade dos ângulos recuperados em relação aos ângulos reais considerando todas as rodadas do programa.

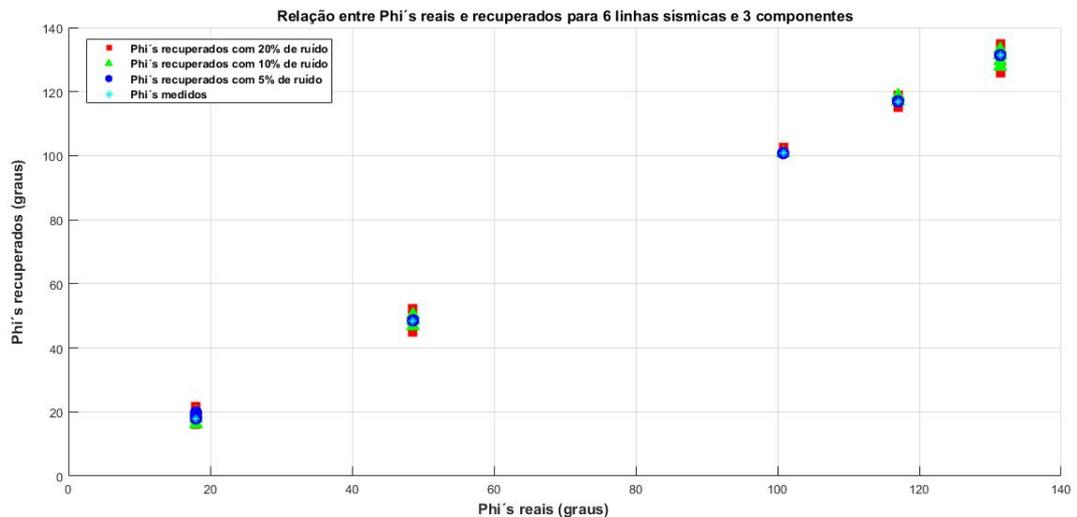


Figura 4.2: Relação entre os ângulos ϕ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de três linhas sísmicas medindo as onda P, SV e SH.

Observa-se que os ângulos ϕ aparentam não sofrer variabilidade significativa com ruídos de 5% e sofrem alguma com ruídos de 10% 20%.

As tabelas 4.2, 4.3 e 4.4 mostram os pares de ângulos θ e ϕ recuperados para o caso considerando ruído numérico de 5%, 10% e 20 % bem como as respectivas razões Sinal-Ruído para cada par de ângulos. Os pares de ângulos recuperados mostrados nas tabelas são uma média dos ângulos recuperados nas vinte e cinco rodadas do programa. As razões Sinal-Ruído foram obtidas conforme mencionado na seção de procedimentos computacionais e o valor que consta nas tabelas é referente a uma média das vinte e cinco rodadas do programa e das seis linhas de aquisição sísmicas consideradas.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	81°	48,6°	29,8008
63°	18°	63°	18,1°	30,4337
77,4°	131,4°	77,4°	131,4°	29,8763
66,6°	100,8°	66,6°	100,8°	30,4819
39,6°	117°	39,6°	117°	29,4630

Tabela 4.2: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de seis linhas sísmicas, três ondas com 5% de ruído numérico.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	81°	48,8°	24,1538
63°	18°	63°	17,9°	24,4291
77,4°	131,4°	77,4°	131,2°	24,8759
66,6°	100,8°	66,6°	100,8°	24,6489
39,6°	117°	39,6°	117,1°	24,0309

Tabela 4.3: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de seis linhas sísmicas, três ondas com 10% de ruído numérico.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	81°	48,8°	17,5580
63°	18°	62,9°	18,4°	19,1603
77,4°	131,4°	77,2°	130,7°	17,3491
66,6°	100,8°	66,7°	100,9°	18,7576
39,6°	117°	39,5°	117°	18,0102

Tabela 4.4: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de seis linhas sísmicas, três ondas com 20% de ruído numérico.

As figuras 4.3, 4.4 e 4.5 mostram um par de ângulos escolhidos, θ de 81° e ϕ de $48,6^\circ$, para os quais plotamos a relação entre eles e os ângulos recuperados pelo programa com 5%, 10% e 20 % de ruído numérico respectivamente.

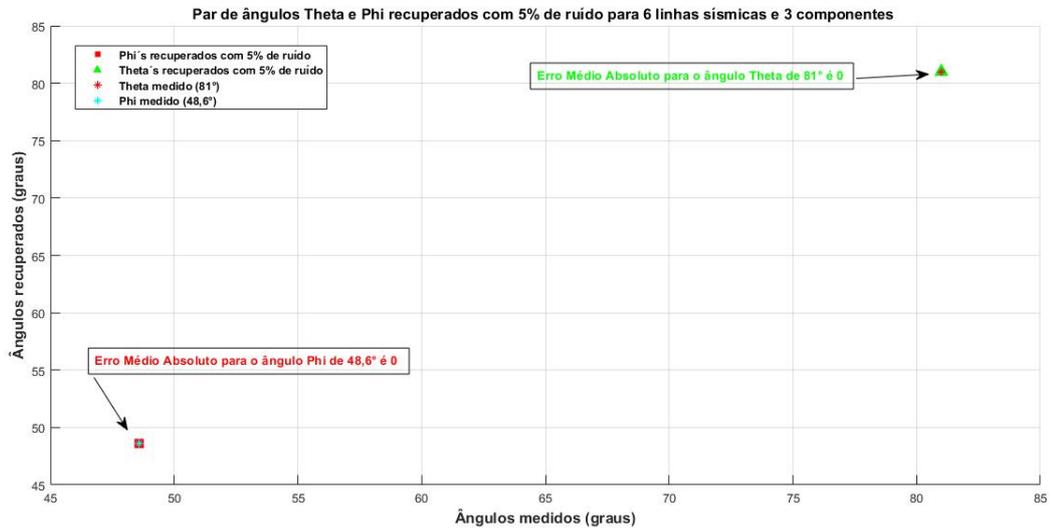


Figura 4.3: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 5%, para o caso de seis linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, e o erro médio absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.

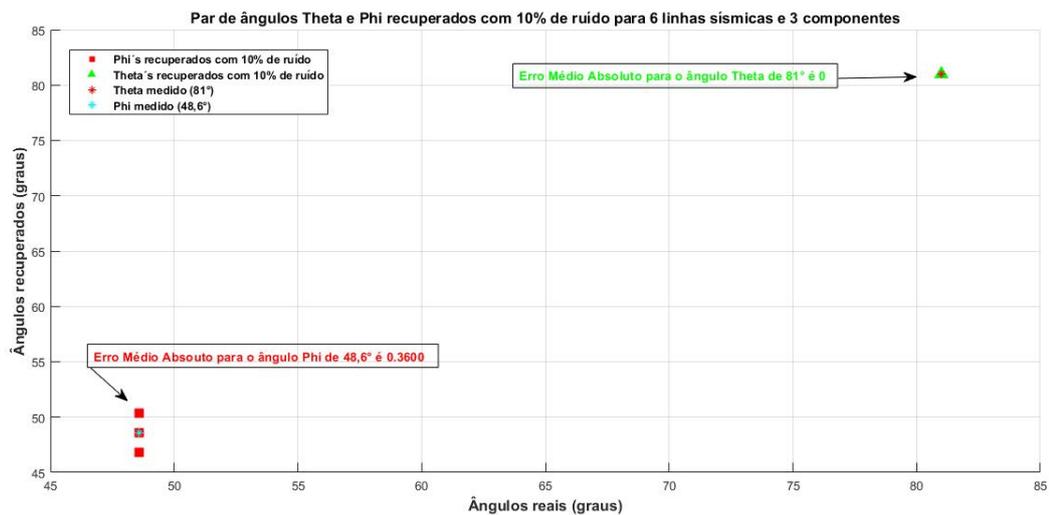


Figura 4.4: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 10%, para o caso de seis linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.

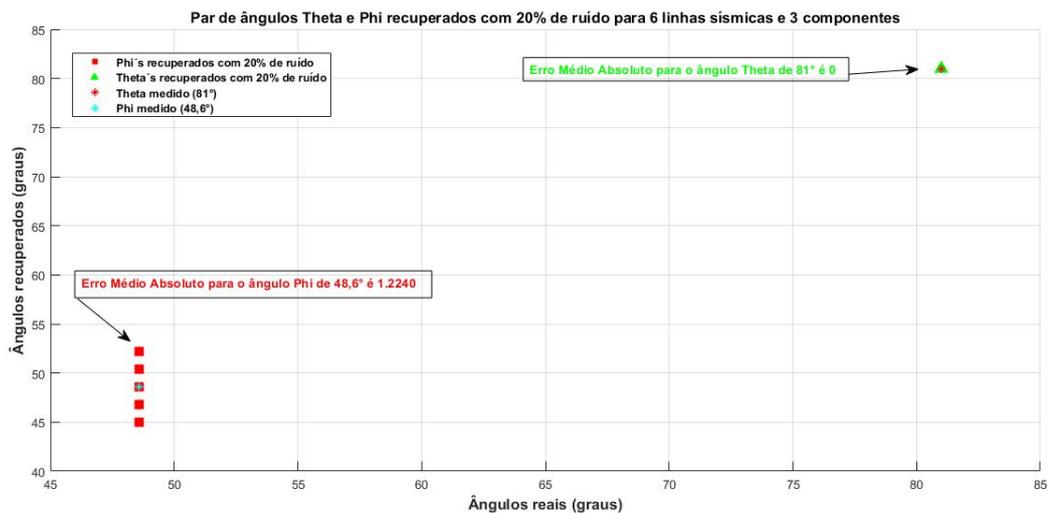


Figura 4.5: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 20%, para o caso de seis linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.

A métrica usada para avaliar a distância entre os valores reais e os valores recuperados é o Erro Médio Absoluto (EMA) 4.1. Onde y_i é o valor recuperado, x_i é o valor real e n é o número de ângulos recuperados. Essa métrica será usada para avaliar todos os casos e foi escolhida pois reduz a possibilidade de outliers.

$$\mathbf{EMA} = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|}{n}. \quad (4.1)$$

Os resultados para o caso de seis linhas sísmicas e três ondas mostram que com 5% de ruído o programa recupera quase que exatamente os ângulos reais. O plot para o par de ângulos theta de 81° e phi de 48,6° mostra que o programa recupera exatamente os valores reais para esses ângulos, o Erro Médio Absoluto é zero para ambos. Com 10% e 20% de ruído observamos que o programa se comporta muito bem recuperando valores muito próximos dos reais. Os gráficos para o par theta 81° e phi 48,6° mostram que o ângulo ϕ é mais sensível ao ruído que o ângulo θ e que o Erro Absoluto Médio aumenta conforme o ruído aumenta.

4.2 Caso com seis linhas sísmicas medindo a componente z da onda P

O segundo caso considerado é com seis linhas sísmicas medindo somente a componente z da onda P. As tabelas 4.5, 4.6 e 4.6 mostram os ângulos recuperados e as respectivas razões

Sinal-Ruído para 5%, 10% e 20% de ruído.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	81,7°	86,6°	29,8680
63°	18°	63,1°	57,7°	29,5019
77,4°	131,4°	77,5°	88,9°	30,0374
66,6°	100,8°	66,4°	90,1°	29,0707
39,6°	117°	39,7°	91,4°	30,7132

Tabela 4.5: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de seis linhas sísmicas, medindo a componente z da onda P com 5% de ruído numérico.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	80°	96,8°	24,7940
63°	18°	64,4°	92,5°	23,7020
77,4°	131,4°	77,2°	88,8°	24,3159
66,6°	100,8°	66,9°	90,2°	23,8765
39,6°	117°	39,3°	88,4°	24,2332

Tabela 4.6: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de seis linhas sísmicas, medindo a componente z da onda P com 10% de ruído numérico.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	83,8°	87,4°	17,9043
63°	18°	67,6°	94,3°	17,9102
77,4°	131,4°	78°	96°	17,9419
66,6°	100,8°	67,7°	89,9°	17,5746
39,6°	117°	37,6°	90,9°	17,3322

Tabela 4.7: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de seis linhas sísmicas, medindo a componente z da onda P com 20% de ruído numérico.

A figura 4.6 mostra a relação dos ângulos θ reais e recuperados para os casos com 5%, 10% e 20 % de ruído, para os cinco ângulos reais, para o caso de seis linhas sísmicas medindo a componente z da onda P.

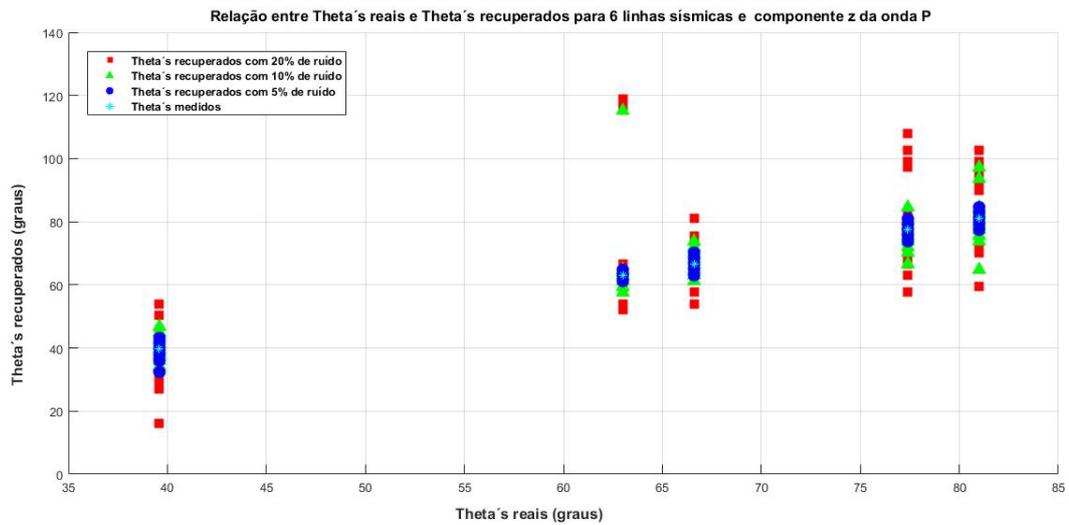


Figura 4.6: Relação entre os ângulos θ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de seis linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P.

A figura 4.7 mostra a relação dos ângulos ϕ reais e recuperados para os casos com 5%, 10% e 20 % de ruído para os cinco ângulos reais para o caso de seis linhas sísmicas medindo a componente z da onda P.

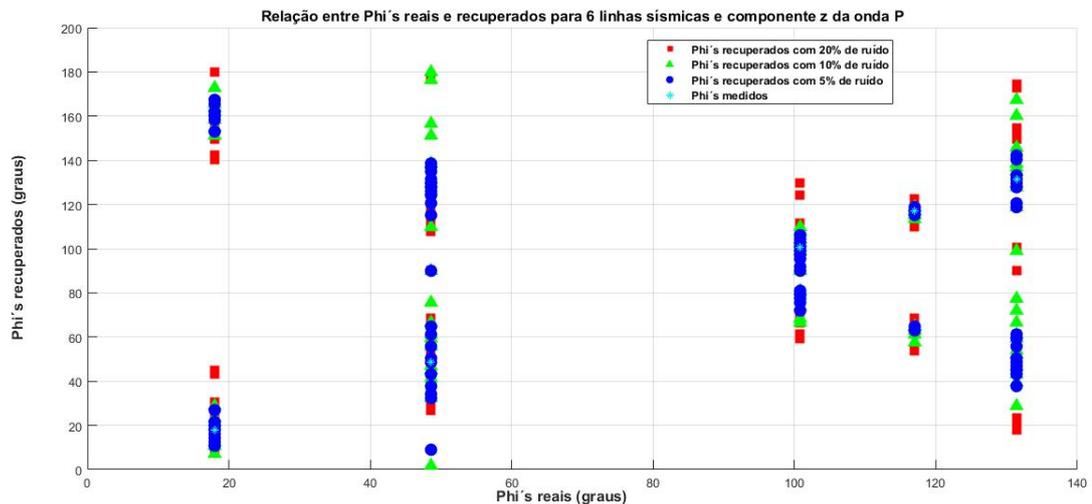


Figura 4.7: Relação entre os ângulos ϕ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de seis linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P.

As figuras 4.8, 4.9 e 4.10 mostram um par de ângulos escolhidos, θ de 81° e ϕ de $48,6^\circ$, para os quais plotamos a relação entre eles e os ângulos recuperados pelo programa com 5%, 10% e

20 % de ruído numérico respectivamente.



Figura 4.8: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 5%, para o caso de seis linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.



Figura 4.9: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 10%, para o caso de seis linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.

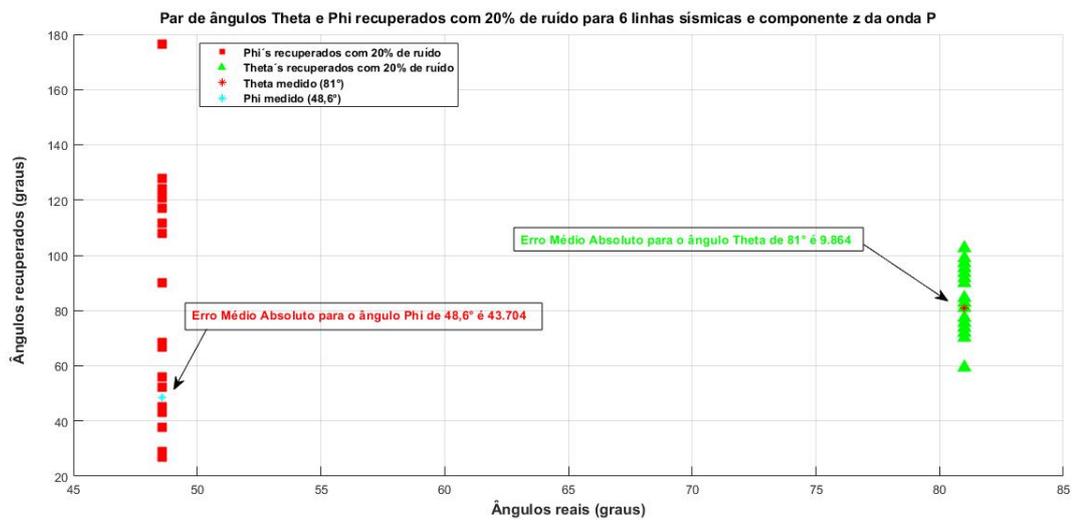


Figura 4.10: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 20%, para o caso de seis linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.

Os resultados sugerem que medindo apenas a componente z, em um levantamento sísmico monocomponente, o programa recupera apenas o ângulo θ de maneira satisfatória. O ângulo ϕ é muito sensível a essa abordagem e não apresenta os resultados esperados. Observamos que o EMA, para os resultados, do ângulo recuperado ϕ , em que se introduziu mais ruído, de 20%, é menor que para os resultados em que foram introduzidos ruídos menores, de 5% e 10%. Isso pode estar acontecendo pois o problema se torna mal posto, e não apresenta solução única conforme mostra a figura 4.11 que é um plot, em forma de mapa de calor, dos resíduos sem ruído numérico.

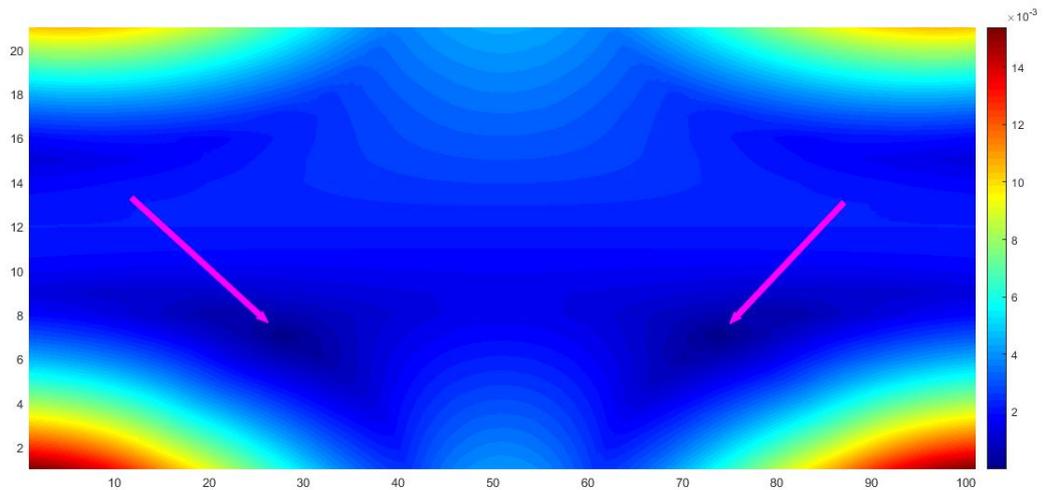


Figura 4.11: Gráfico dos resíduos sem ruído numérico, para o caso de seis linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P. As setas rosas indicam os mínimos locais.

4.3 Caso com três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH

O terceiro caso considerado é com três linhas sísmicas medindo as onda P, SV e SH que chegam aos respectivos medidores. As tabelas 4.8, 4.9 e 4.10 mostram os ângulos recuperados e as respectivas razões Sinal-Ruído para 5%, 10% e 20% de ruído.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	81°	48,7°	15,7458
63°	18°	63°	17,6°	14,4250
77,4°	131,4°	77,3°	131°	15,5730
66,6°	100,8°	66,6°	100,8°	15,6936
39,6°	117°	39,6°	117°	14,6379

Tabela 4.8: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH com 5% de ruído numérico.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	81,1°	48°	12,4145
63°	18°	63,1°	17,7°	12,1974
77,4°	131,4°	77,5°	131,6°	11,4259
66,6°	100,8°	66,7°	100,8°	12,0933
39,6°	117°	39,6°	117°	12,2185

Tabela 4.9: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH com 10% de ruído numérico.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	80,8°	48,7°	8,9914
63°	18°	63,1°	17,4°	9,6916
77,4°	131,4°	77,5°	132,5°	8,7208
66,6°	100,8°	66,8°	100,9°	9,1661
39,6°	117°	39,7°	116,8°	9,1191

Tabela 4.10: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH com 20% de ruído numérico.

A figura 4.12 mostra a relação dos ângulos θ reais e recuperados para os casos com 5%, 10% e 20 % de ruído para os cinco ângulos reais.

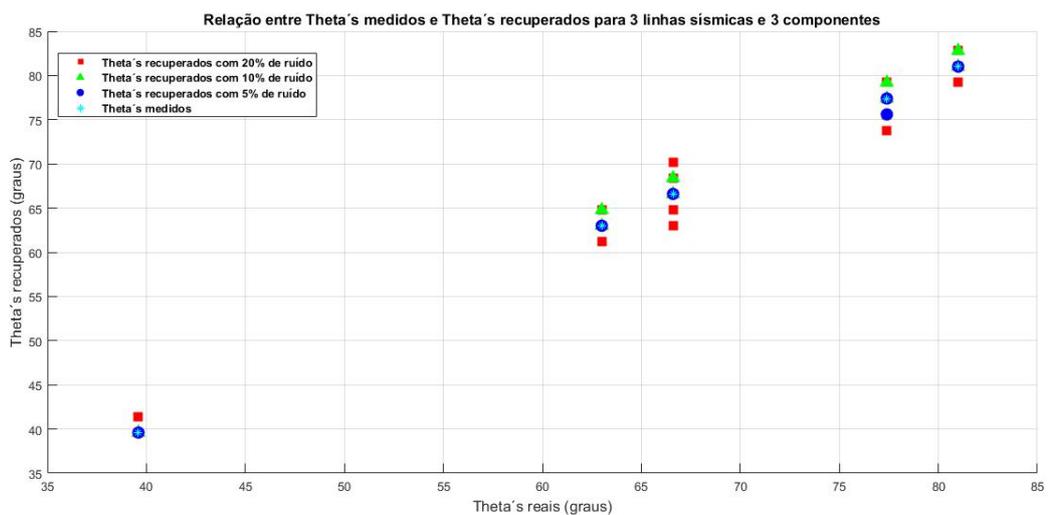


Figura 4.12: Relação entre os ângulos θ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH.

A figura 4.13 mostra a relação dos ângulos ϕ reais e recuperados para os casos com 5%, 10% e 20 % de ruído para os cinco ângulos reais.

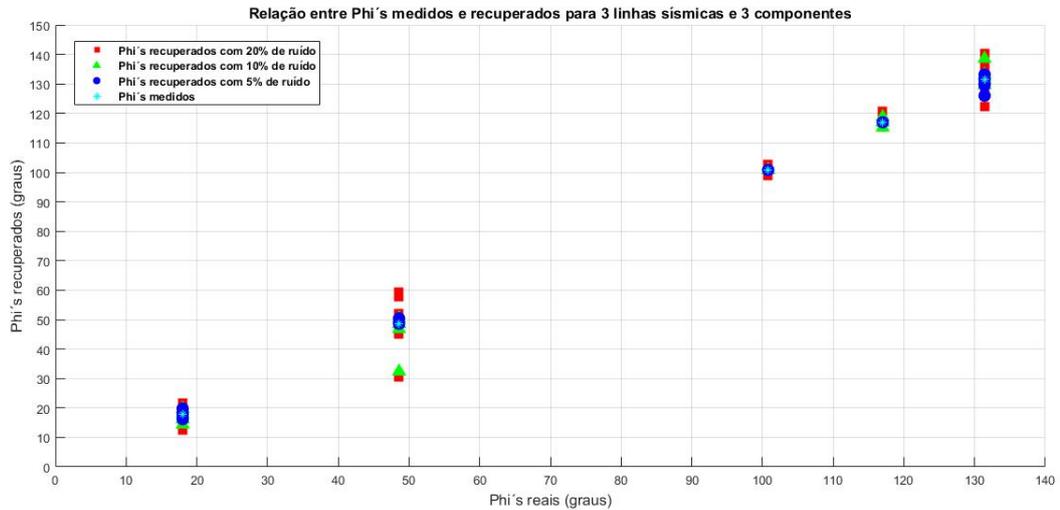


Figura 4.13: Relação entre os ângulos ϕ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH.

As figuras 4.14, 4.15 e 4.16 mostram um par de ângulos escolhidos, θ de 81° e ϕ de 48,6°, para os quais plotamos a relação entre eles e os ângulos recuperados pelo programa com 5%, 10% e 20 % de ruído numérico respectivamente.

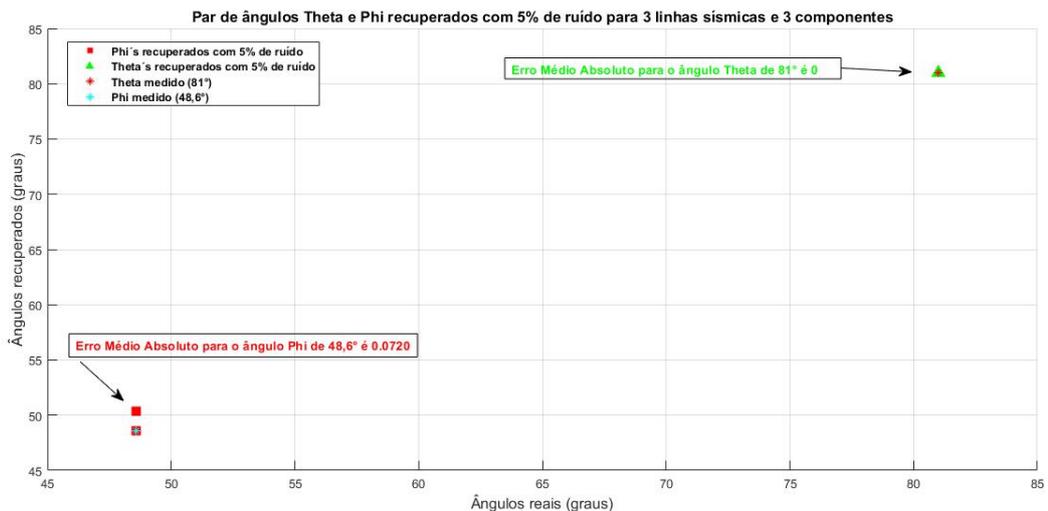


Figura 4.14: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruído numérico de 5%, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.

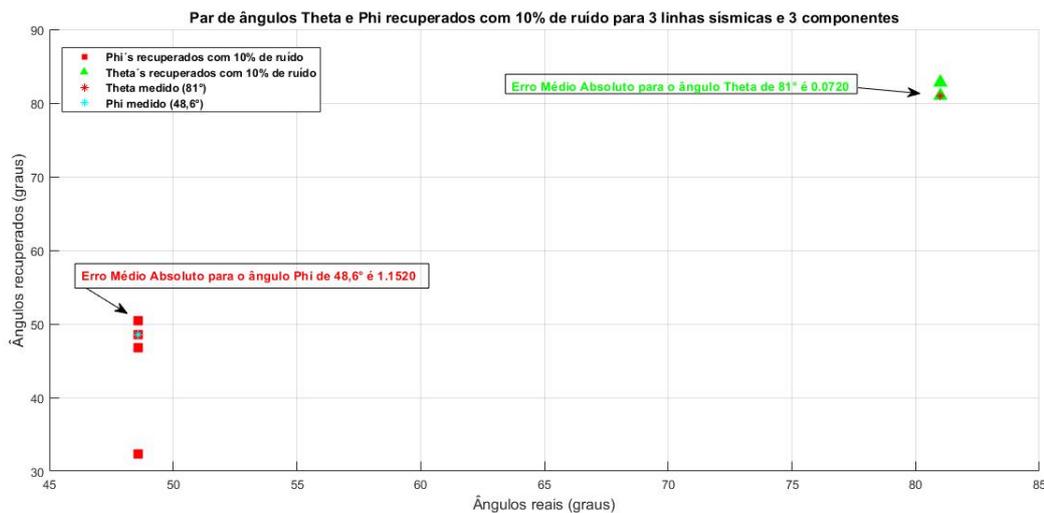


Figura 4.15: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruído numérico de 10%, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.

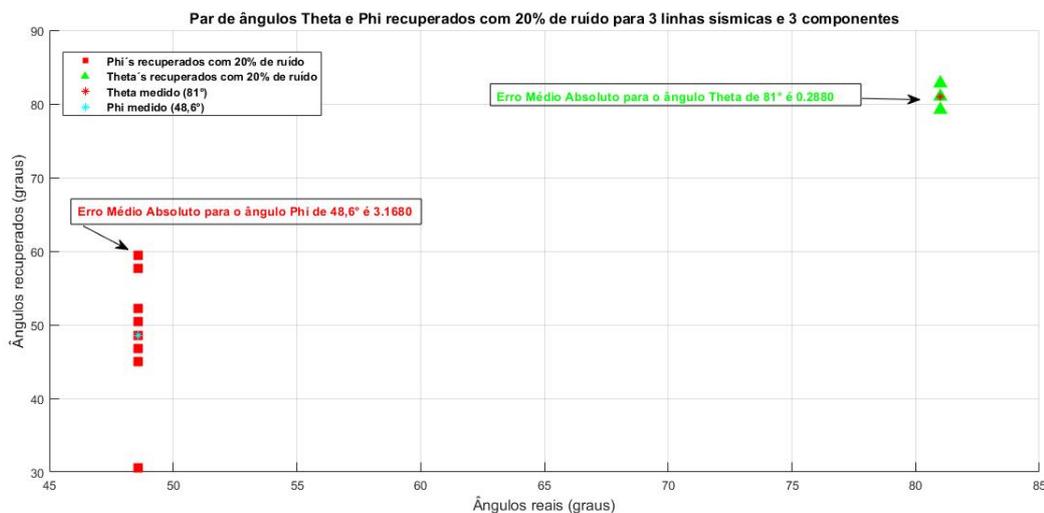


Figura 4.16: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruído numérico de 20%, para o caso de três linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.

Os resultados demonstram que para três linhas sísmicas, medindo as ondas P, SV e SH, o programa se mostra robusto na recuperação dos ângulos de fraturamento, e conforme o esperado, de acordo com a métrica adotada, EMA, quando o ruído aumenta o EMA também aumenta. E podemos notar que os valores do Erro Médio Absoluto são maiores que para o caso com seis linhas sísmicas. Novamente observamos que o ângulo ϕ sofre uma variabilidade maior que o

ângulo θ .

4.4 Caso com três linhas sísmicas medindo a componente z da onda P

O quarto caso considerado é com três linhas sísmicas medindo apenas componente z da onda P. As tabelas 4.8, 4.9 e 4.10 mostram os ângulos recuperados e as respectivas razões Sinal-Ruído para 5%, 10% e 20% de ruído.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	80,6°	87,6°	15,1568
63°	18°	62,3°	70,4°	14,7918
77,4°	131,4°	77,3°	89,5°	14,9235
66,6°	100,8°	65,8°	88,8°	14,6811
39,6°	117°	39,4°	91,6°	15,2681

Tabela 4.11: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de três linhas sísmicas medindo a componente z da onda P com 5% de ruído numérico.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	81,9°	89,4°	11,9336
63°	18°	65,3°	89,1°	12,1741
77,4°	131,4°	77,9°	92,7°	12,1804
66,6°	100,8°	65,4°	90,8°	11,9939
39,6°	117°	40,6°	92,0°	12,2330

Tabela 4.12: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de três linhas sísmicas medindo a componente z da onda P com 10% de ruído numérico.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	86,0°	98,8°	8,7512
63°	18°	72,8°	102,7°	9,0924
77,4°	131,4°	76,0°	92,7°	9,1610
66,6°	100,8°	59,5°	93,6°	8,7760
39,6°	117°	41,2°	89,6°	9,0830

Tabela 4.13: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de três linhas sísmicas medindo a componente z da onda P com 20% de ruído numérico.

A figura 4.17 mostra a relação dos ângulos θ reais e recuperados para os casos com 5%, 10% e 20 % de ruído para os cinco ângulos reais.

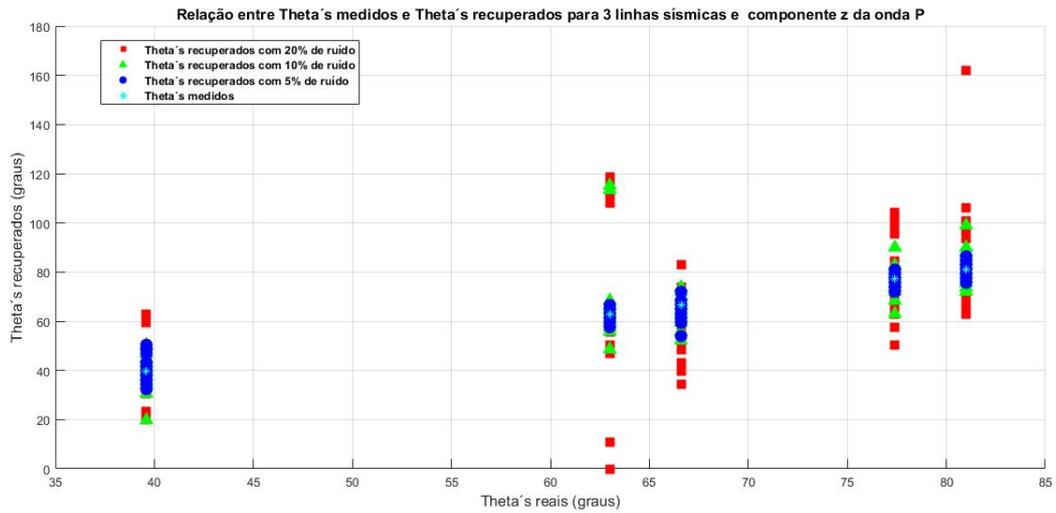


Figura 4.17: Relação entre os ângulos θ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de três linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P.

A figura 4.18 mostra a relação dos ângulos ϕ reais e recuperados para os casos com 5%, 10% e 20 % de ruído para os cinco ângulos reais.

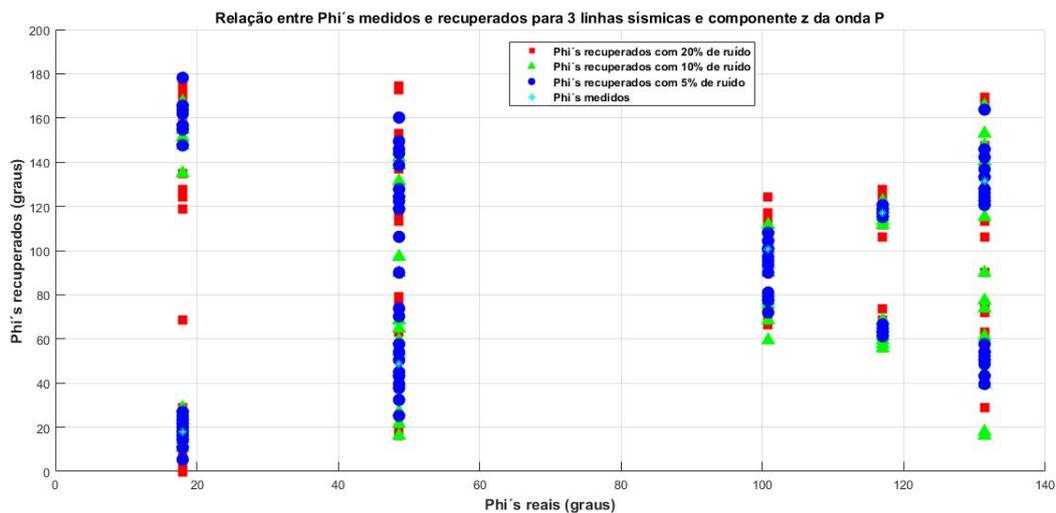


Figura 4.18: Relação entre os ângulos ϕ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso de três linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P.

As figuras 4.19, 4.20 e 4.21 mostram um par de ângulos escolhidos, θ de 81° e ϕ de $48,6^\circ$,

para os quais plotamos a relação entre eles e os ângulos recuperados pelo programa com 5%, 10% e 20 % de ruído numérico respectivamente.

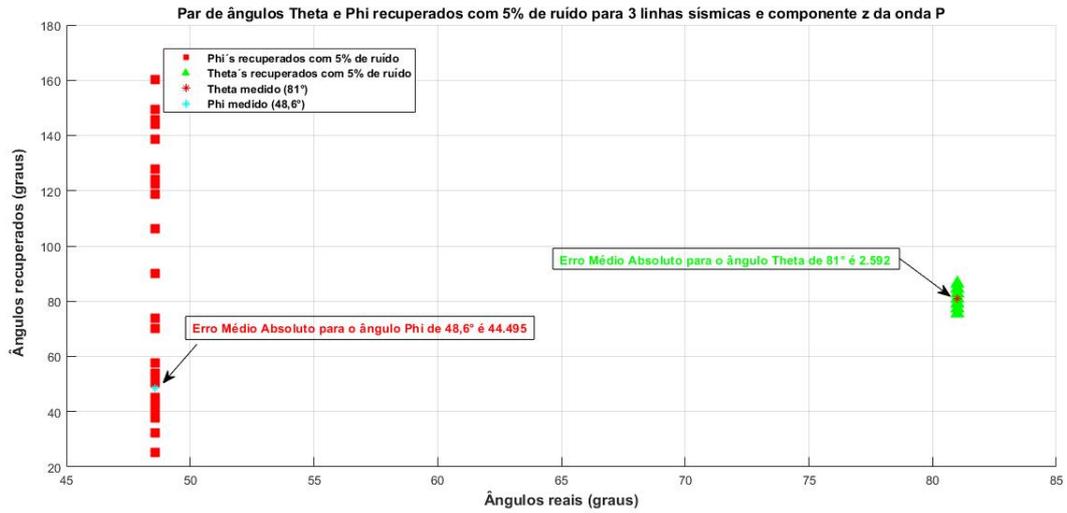


Figura 4.19: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruído numérico de 5%, para o caso de três linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.

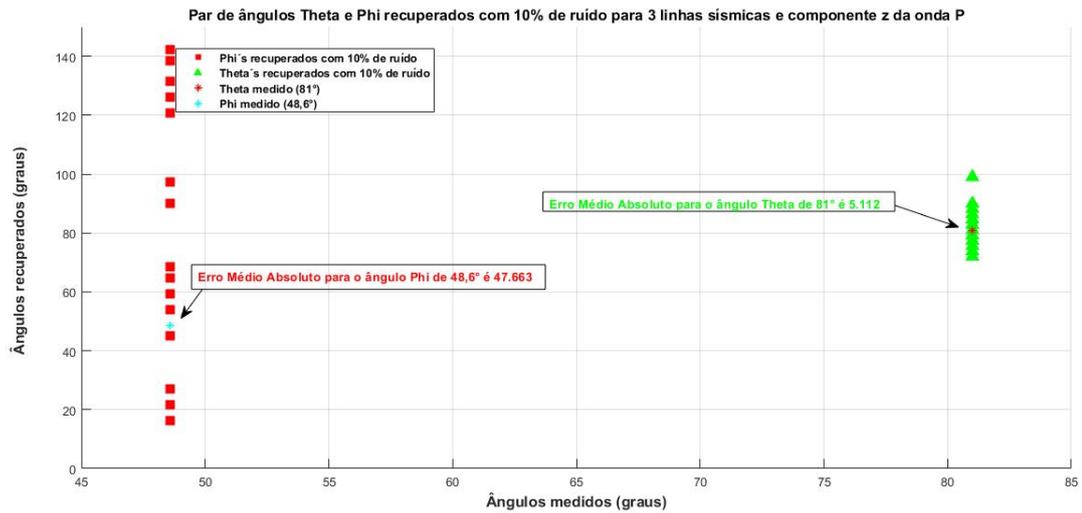


Figura 4.20: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruído numérico de 10%, para o caso de três linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.



Figura 4.21: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruído numérico de 20%, para o caso de três linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.

Assim como no caso de seis linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P, os resultados mostram que apenas o ângulo θ é recuperado de maneira satisfatória o ângulo ϕ continua muito sensível a essa abordagem e não apresenta os resultados esperados. Observamos que o EMA, para os resultados em que se introduziu mais ruído, de 20%, é menor que para os resultados em que foram introduzidos ruídos menores, de 5% e 10%. A figura 4.22 mostra que o problema se torna mal posto e que a solução não é única. É possível notar que o EMA para o ângulo θ aumenta conforme aumentamos o nível de ruído introduzido nos dados, e que é maior para esse caso do que para o de seis linhas sísmicas, apontando como esperado que quanto mais linhas sísmicas melhor posto é o problema e conseqüentemente melhores são os resultados.

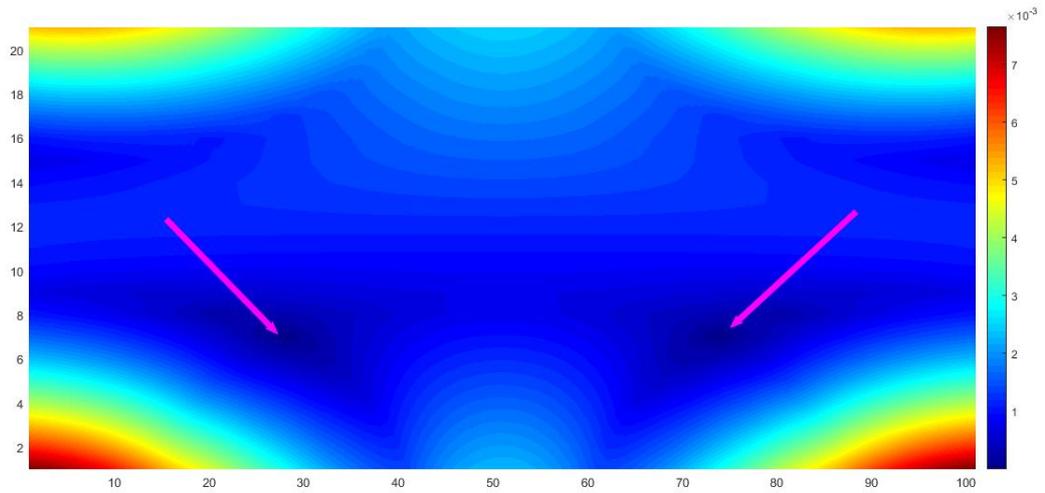


Figura 4.22: Gráfico dos resíduos sem ruído numérico, para o caso de três linhas sísmicas medindo apenas a componente z da onda P. As setas rosas indicam os mínimos locais.

4.5 Caso com uma linha sísmica medindo as ondas P, SV e SH

O quinto caso considerado é com uma linha sísmica medindo as ondas P, SV e SH que chegam aos respectivos offsets. As tabelas 4.14, 4.15 e 4.16 mostram os ângulos recuperados e as respectivas razões Sinal-Ruído para 5%, 10% e 20% de ruído.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	81°	48,2°	4,9050
63°	18°	63°	18,3°	5,0228
77,4°	131,4°	77,4°	131,7°	4,8159
66,6°	100,8°	66,6°	100,8°	5,1906
39,6°	117°	39,7°	117°	4,8355

Tabela 4.14: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de uma linha sísmica medindo as ondas P, SV e SH com 5% de ruído numérico.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	81°	48,2°	3,7804
63°	18°	63,1°	18,1°	4,0003
77,4°	131,4°	77,4°	131,1°	3,9087
66,6°	100,8°	66,6°	101°	4,3698
39,6°	117°	39,5°	117°	4,1880

Tabela 4.15: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de uma linha sísmica medindo as ondas P, SV e SH com 10% de ruído numérico.

θ_{real}	ϕ_{real}	$\theta_{recuperado}$	$\phi_{recuperado}$	Razão Sinal-Ruído
81°	48,6°	80,8°	48,4°	2,9660
63°	18°	62,9°	17,9°	3,3043
77,4°	131,4°	77,5°	132,3°	3,1417
66,6°	100,8°	66°	101,1°	2,9885
39,6°	117°	40,9°	117,6°	2,8048

Tabela 4.16: Tabela com os ângulos reais e recuperados e razão Sinal-Ruído, para o caso de uma linha sísmica medindo as ondas P, SV e SH com 20% de ruído numérico.

A figura 4.23 mostra a relação dos ângulos θ reais e recuperados para os casos com 5%, 10% e 20 % de ruído para os cinco ângulos reais.

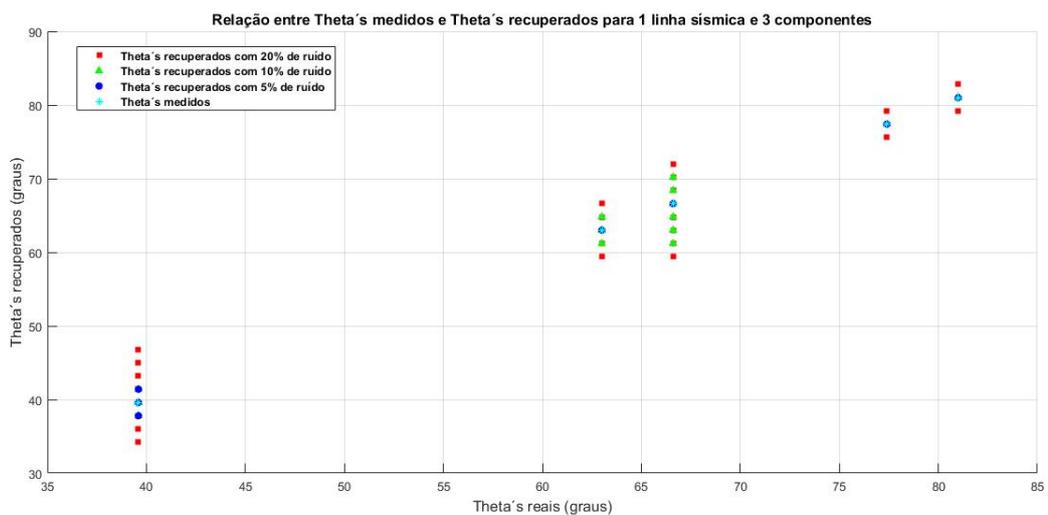


Figura 4.23: Relação entre os ângulos θ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso com uma linha sísmica medindo as onda P, SV e SH

A figura 4.24 mostra a relação dos ângulos ϕ reais e recuperados para os casos com 5%, 10% e 20 % de ruído para os cinco ângulos reais.

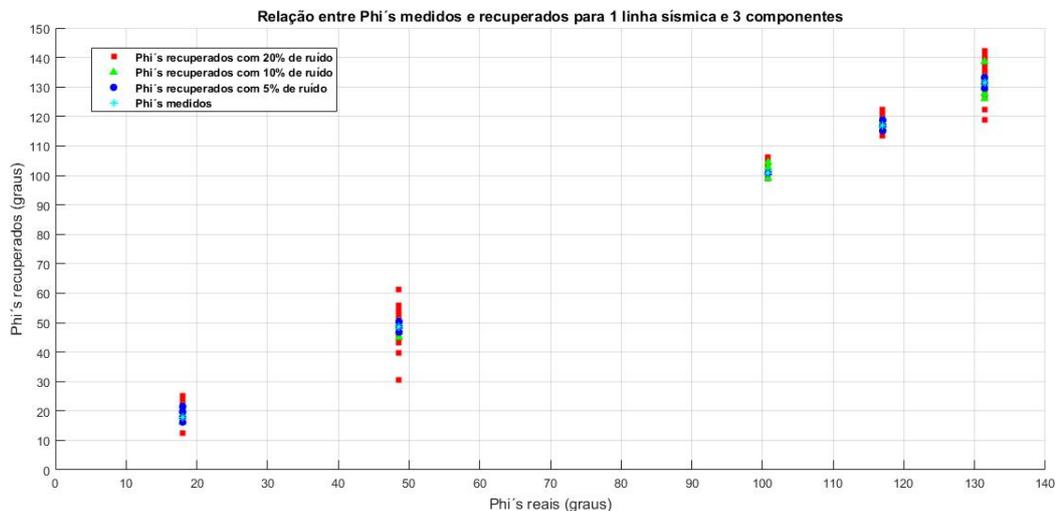


Figura 4.24: Relação entre os ângulos ϕ reais e medidos considerando ruídos numéricos de 5%, 10% e 20 %, para o caso com uma linha sísmica medindo as onda P, SV e SH.

As figuras 4.25, 4.26 e 4.27 mostram um par de ângulos escolhidos, θ de 81° e ϕ de $48,6^\circ$, para os quais plotamos a relação entre eles e os ângulos recuperados pelo programa com 5%, 10% e 20 % de ruído numérico respectivamente.

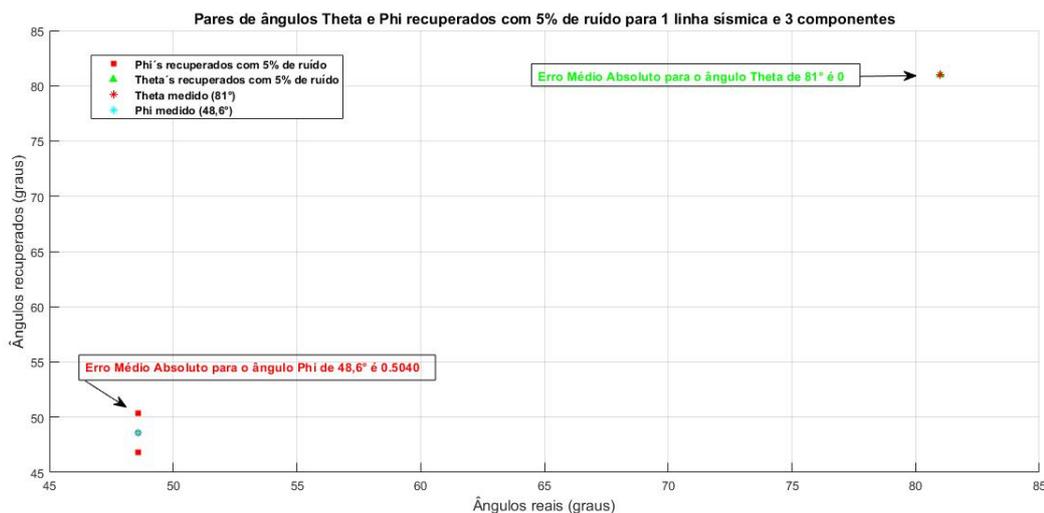


Figura 4.25: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 5%, para o caso com uma linha sísmica medindo as onda P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.

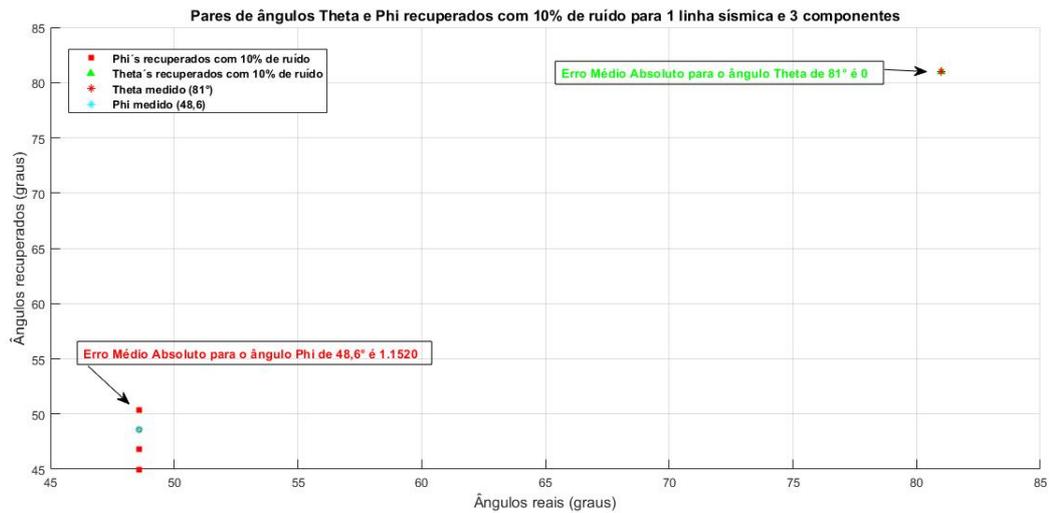


Figura 4.26: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 10%, para o caso com uma linha sísmica medindo as ondas P, SV e SH, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.

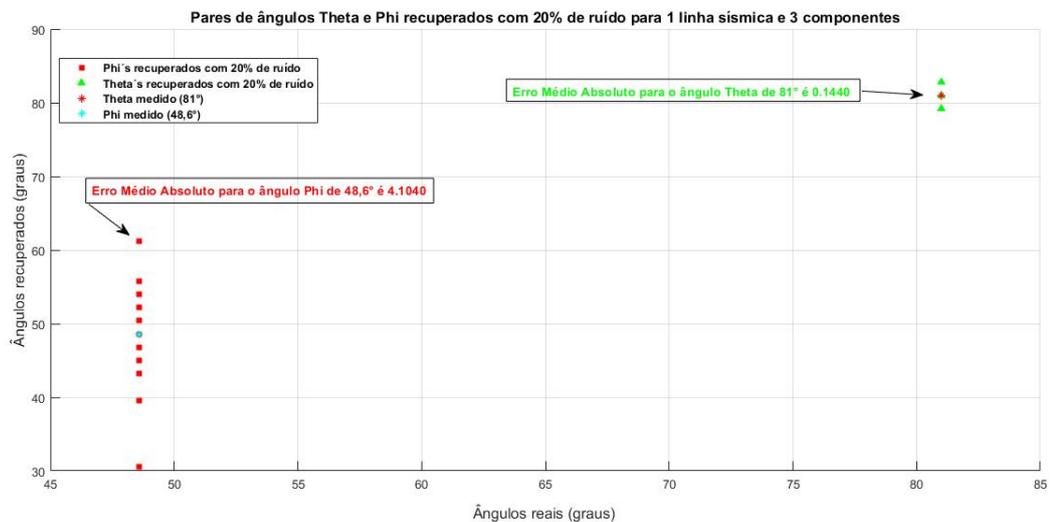


Figura 4.27: Relação entre um par de ângulos θ e ϕ reais e recuperados considerando ruídos numéricos de 20%, para o caso com uma linha sísmica medindo apenas a componente z da onda P, e o Erro Médio Absoluto como métrica de distância entre valores recuperados e os reais.

Os resultados demonstram que para uma linha sísmica, medindo as ondas P, SV e SH, o programa continua se mostrando robusto na recuperação dos ângulos de fraturamento, e conforme o esperado, de acordo com a métrica adotada, EMA, quando o ruído aumenta o EMA também

aumenta. As tabelas 4.18 e 4.17 mostram os comparativos entre os Erros Médios Absolutos para os três casos, medindo as três ondas, para os ângulos ϕ de $48,6^\circ$ e θ de 81° . Observamos para o ângulo ϕ , que aumentando o número de linhas sísmicas o Erro Médio Absoluto diminui e portanto conseguimos resultados melhores, recuperando os ângulos mais próximos dos reais enquanto que para o ângulo θ , em certa medida, alguns resultados para uma linha sísmica foram até melhores que para três linhas, indicando que os maiores ganhos nos resultados se dão na comparação entre o caso com seis linhas e os outros dois. Como nos outros casos, com mais linhas sísmicas e medindo as três ondas, observamos que o ângulo ϕ sofre uma variabilidade maior que o ângulo θ .

Ruído	EMA(Uma linha)	EMA(Três linhas)	EMA(Seis linhas)
5%	0,504	0,0720	0
10%	1,1520	1,1520	0,3600
20%	4,1040	3,1680	1,2240

Tabela 4.17: Tabela com os Erros Médios Absolutos para os casos de uma, três e seis linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, para um ângulo ϕ de $48,6^\circ$

Ruído	EMA(Uma linha)	EMA(Três linhas)	EMA(Seis linhas)
5%	0	0	0
10%	0	0,0720	0
20%	0,1440	0,2800	0

Tabela 4.18: Tabela com os Erros Médios Absolutos para os casos de uma, três e seis linhas sísmicas medindo as ondas P, SV e SH, para um ângulo θ de 81°

4.6 Caso com uma linha sísmica medindo a componente z da onda P

O último caso abordado é com uma linha sísmica e medindo somente a componente z da onda P, não vamos nos ater aos seus resultados pois aqui o problema se mostra extremamente mal posto, visto que de acordo com a figura 4.28, o plot dos resíduos mostra que o problema admite várias soluções neste caso.

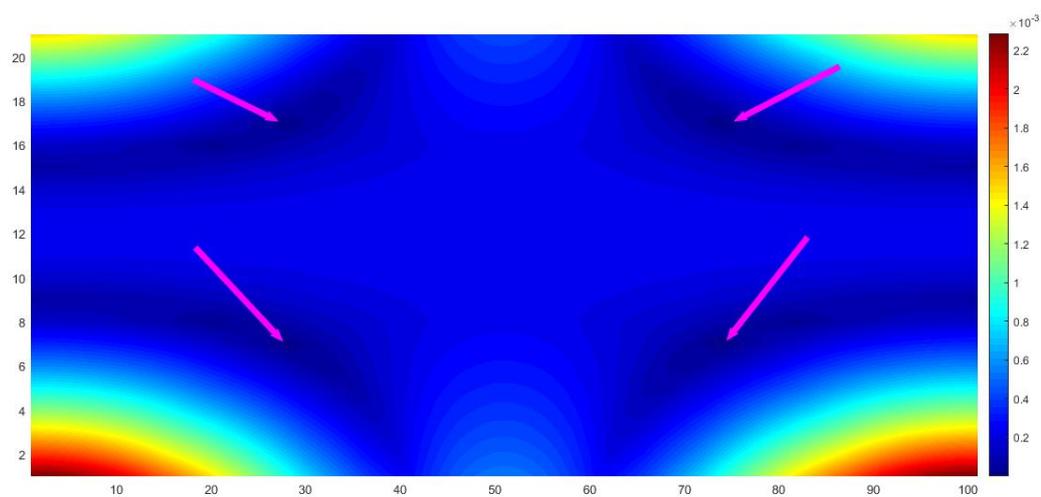


Figura 4.28: Gráfico dos resíduos sem ruído numérico, para o caso de uma linha sísmica medindo apenas a componente z da onda P. As setas rosas indicam os mínimos locais.

Capítulo 5

Conclusão e trabalhos futuros

De acordo com os resultados apresentados na última seção, demonstramos que a metodologia apresentada e o programa construído a partir dela, obtiveram êxito em resolver o problema inverso de recuperar a direção principal de fraturamento a partir de dados sísmicos e AVO. A seguir sintetizamos os principais objetivos alcançados, bem como o que podemos extrair ao final.

- O método da imersão invariante nos forneceu principalmente uma maneira robusta de lidar com meios anisotrópicos, uma vez que a formulação do problema a partir dele, nos permitiu obter a reflexão das ondas P, SV e SH (que deve ser considerada quando se está tratando com anisotropia) resolvendo exatamente as equações , com as condições de contorno de interface, enquanto a abordagem tradicional baseia-se em aproximações das equações de Zoeppritz. Vale salientar que o uso dessa abordagem nos coloca em posição de apenas resolver um problema de auto valor que é numericamente estável e eficiente do ponto de vista computacional.
- O programa mostrou robustez ao recuperar, quase que exatamente, os ângulos principais de fraturamento para o caso de seis linhas sísmicas e medindo as três ondas P, SV e SH, mesmo com 20% de ruído numérico introduzido. O problema nesse caso é bem posto e tem solução única.
- O programa mostrou mais uma vez sua robustez para os casos de uma e três linhas sísmicas medindo as três ondas P, SV e SH. Os resultados foram satisfatórios indicando que o problema continua bem posto sob essas condições e mesmo na adição de ruído numérico de 5%, 10% e 20%.
- Abordamos os casos de três e seis linhas sísmicas, considerando apenas a reflexão da componente z da onda P, que seria compatível com a situação de sísmica monocomponente. Os resultados mostraram que somente o ângulo θ é recuperado de maneira satisfatória, mesmo na presença de ruído, mas o ângulo ϕ demonstra uma variabilidade muito grande e

não deve ser considerado. A nossa hipótese é que o problema nessas circunstâncias se torna mal posto, vimos nas figuras 4.22 e 4.11, que mostram os gráficos dos resíduos sem ruído numérico, que a solução do problema não é única. Isso pode explicar essa discrepância nos resultados para o ângulo ϕ .

- No caso de uma linha sísmica medindo somente a componente z da onda P, mostramos, através da figura 4.28, que o problema se torna tão mal posto que admite pelo menos quatro soluções diferentes. Por esse motivo os resultados não foram considerados.
- De acordo com as tabelas 4.18 e 4.17, é possível concluir, por meio da métrica do Erro Médio Absoluto, que o ganho real na recuperação dos ângulos de fraturamento, para sísmica multicomponente, ou seja, medindo as três ondas P, SV e SH, é obtido quando se considera seis linhas sísmicas. Não há grande diferença entre os resultados para os casos de uma e três linhas sísmicas. Mas ainda assim podemos concluir que aumentar o número de linhas sísmicas na aquisição melhora os resultados, conforme o esperado.

Como sugestão de trabalhos futuros, o autor indica alguns caminhos que podem ser explorados.

- Considerar outras simetrias na construção da matriz de constantes elásticas que representam o meio anisotrópico equivalente. As simetrias sugeridas seriam a ortorrômbica e monoclinica. Como bons pontos de partida o autor indica os artigos [1] e [2].
- Utilizar outras metodologias para representação do meio equivalente homogêneo anisotrópico em outro sistema de coordenadas. O autor indica que ao invés de usar os ângulos de Euler, usem Euler-Rodrigues ou Quaternions.
- Investigar o uso e as implicações dos parâmetros adimensionais de complacência normal e tangencial, Z_N e Z_T , do sistema de fraturas. O autor indica o artigo [42].
- Investigar a causa do problema se tornar mal posto quando consideramos apenas a medida da componente z da onda P.
- Optimizar a geração dos sísmicos sintéticos usados para resolver o problema inverso. O autor sugere paralelizar os códigos fonte usados, em CPU e em GPU, e se coloca à disposição de disponibilizá-los a quem os pedir com a intenção de trabalhar nesse sentido.
- Testar a solução do problema inverso utilizando dados reais.
- Adaptar o programa para calcular densidade de fraturamento.

Referências

- [1] A. BAKULIN, V. G. E. I. T. Estimation of fracture parameters from reflection seismic data—part ii: Fractured models with orthorhombic symmetry. *The Leading Edge* 65 (2000), 1803–1817.
- [2] A. BAKULIN, V. G. E. I. T. Estimation of fracture parameters from reflection seismic data—part iii: Fractured models with monoclinic symmetry. *The Leading Edge* 65 (2000), 1818–1830.
- [3] AKI, K.; RICHARDS, P. G. Quantitative seismology: Theory and methods. *W.H. Freeman and Company* 1 (1980).
- [4] BACKUS, G. E. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering. *J. Geophys. Res.* 67 (1962), 4427–4440.
- [5] BELLMAN, R.; KALABA, R. Functional equations, wave propagation, and invariant imbedding. *J. Math. Mech* 8 (1959), 683.
- [6] BRAGA, A. M. B. *Wave propagation in anisotropic layered composites*. Tese de Doutorado, Stanford University, Stanford, California, 1990.
- [7] BRAGA, A. M. B.; BARBONE, P. E.; HERRMANN, G. Wave propagation in fluid-loaded laminated cylindrical shells. *Appl. Mech. Rev.* 43 (1990), 359–365.
- [8] BRAGA, A. M. B.; HERRMANN, G. “plane waves in anisotropic layered composites,” in wave propagation in structural composites. *edited by A. K. Mal and T. C. T. Ting (ASME-AMD, New York)* 90 (1988), 81–98.
- [9] CASTAGNA, J. P. Avo analysis-tutorial and review: in offset 0 dependent reflectivity. *Theory and Practice of AVO Analysis* (1993), 8–36.
- [10] CRAMPIN, S.; MACGONIGLE, R.; BAMFORD, D. Estimating crack parameters form observations of p-wave velocity anisotropy. *Geophysics* 46 (1980), 345–360.
- [11] DOWNTON, J.; ROURE., B.; HUNT., L. Azimuthal fourier coefficients. *CSEG Recorder* 36 (2011), 22–36.
- [12] FAR, M. E. *Seismic Characterization of Naturally Fractured Reservoirs*. Tese de Doutorado, Faculty of the Department of Earth and Atmospheric Sciences, University of Houston, 2011.
- [13] FATTI, J.; SMITH, G.; VAIL, P.; STRAUSS, P.; LEVITT, P. Detection of gas in sandstone reservoirs using avo analysis: A 3-d seismic case history using the geostack technique. *Geophysics* 59 (1994), 1362–1376.
- [14] HONEIN, B.; BRAGA, A. M. B.; BARBONE, P. E.; HERRMANN, G. Active suppression of sound reflected from a piezoelectric plate. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 3 (1992), 209–223.
- [15] KENNETT, L. N. Seismic wave propagation in stratified media. In *Cambridge University Press, London* (1983).

- [16] K.ZOEPPRITZ. On the reflection and propagation of seismic waves. *Göttinger Nachrichten I* (1919), 66.
- [17] LEFEUVRE, F. Fracture related anisotropy detection and analysis: “and if the p-waves were enough? *64th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys.Expanded Abstracts* (1994), 942–944.
- [18] LEIDERMAN, R.; BARBONE, P. E.; BRAGA, A. M. B. Reconstructing the adhesion stiffness distribution in a laminated elastic plate: Exact and approximate inverse scattering solutions. *J. Acoust. Soc. Am.* 122 (2007), 1906–1916.
- [19] LEIDERMAN, R.; BRAGA, A. M.; BARBONE, P. E. Scattering of ultrasonic waves by defective adhesion interfaces in submerged laminated plates. *Journal of the Acoustical Society of America* 118 (2005), 2154–2166.
- [20] LEIDERMAN, R.; FIGUEROA, J. C.; BRAGA, A. M. B.; ROCHINHA, F. A. Scattering of ultrasonic guided waves by heterogeneous interfaces in elastic multi-layered structures. *Wave Motion* 63 (2016), 68–82.
- [21] LUBBE, R., S. J. W. M. . M. C. Laboratory estimates of normal and shear fracture compliance. *Geophys. Prospect.* 56 (2008), 239–247.
- [22] LYNN, H.; SIMON, K.; M. LAYMAN, R. S.; BATES, C.; JONES, M. . Use of anisotropy in p-wave and s-wave data for fracture characterization in a naturally fractured gas reservoir. *The Leading Edge* 14 (1995), 887–893.
- [23] MALLICK, S.; FRAZER, L. N. Reflection/transmission coefficients and azimuthal anisotropy in marine seismic studies. *Geophys. J. Internat.* 105 (1991), 241–252.
- [24] MARIA, A. P.; RICHARD, L.; GIBSON; TOKSÖZ, M. N. Detection of fracture orientation using azimuthal variation of p-wave avo responses. *Geophysics* 64 (1999), 1253–1265.
- [25] MEHDI E. FAR, JOSE J. S. DE FIGUEIREDO, R. R. S. J. P. C. D.-H. H.; DYAU, N. Measurements of seismic anisotropy and fracture compliances in synthetic fractured media. *Geophys. J. Int.* 197 (2014), 1845–1857.
- [26] M.SCHOENBERG; J.DOUMA. Elastic wave propagation in media with parallel fractures and aligned cracks. *Geophysical Prospecting* 36 (1988), 571–590.
- [27] NELSON, R. A. Geologic analysis of naturally fractured reservoirs. *Gulf Publishing Company, Houston* (1985).
- [28] PYRAK-NOLTE, L.J., M. L.; COOK, N. Anisotropy in seismic velocities and amplitudes from multiple parallel fractures. *Journal of Geophysical Research* 95 (1990), 11345–11358.
- [29] RAND, O.; ROVENSKI, V. Analytical methods in anisotropic elasticity. pp. 69–70.
- [30] RAND, O.; ROVENSKI, V. Analytical methods in anisotropic elasticity. In *Fundamentals of Anisotropic Elasticity and Analytical Methodologies, 1.7 appendix: Coordinate Systems*, pp. 47–49.
- [31] RAND, O.; ROVENSKI, V. Analytical methods in anisotropic elasticity. In *Fundamentals of Anisotropic Elasticity and Analytical Methodologies, 1.7 appendix: Coordinate Systems*, p. 48.
- [32] REISS, L. The reservoir engineering aspects of fractured formations. *Editions Technip, Paris* (1980).
- [33] RÜGER, A. Reflection coefficients and azimuthal avo analysis in anisotropic media. *SEG geophysical monograph series number 10: Soc. Expl. Geophys* (2002).

-
- [34] RÜGER, A.; TSVANKIN, I. Azimuthal variation of avo response for fractured reservoirs. *65th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts* (1995), 1103–1106.
- [35] RÜRGER, A.; TSVANKIN, I. Azimuthal variation of avo response for fractured reservoirs. *65th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts* (1995), 1103–1106.
- [36] SAYERS, C. M.; RICKETT, J. Azimuthal variation in avo response for fractured gas sands. *Geophys. Prosp. 45* (1997), 165–182.
- [37] SCHOENBERG, M. Elastic wave behavior across linear slip interfaces. *Journal of the Acoustical Society of America 68* (1980), 1516–1521.
- [38] SCHOENBERG, M.; MUIR, F. A calculus for finely layered anisotropic media. *Geophysics 54* (1989), 581–589.
- [39] SHUEY, R. T. a simplification of the Zoeppritz equations. *Geophysics 50* (1985), 609–614.
- [40] STRAHILEVITZ, R.; GARDNER, G. H. F. Fracture detection using p-wave avo. *65th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts* (1995), 723–724.
- [41] THOMSEN, L. Weak elastic anisotropy. *Geophysics 51* (1986), 1954–1966.
- [42] WORTHINGTON, M. Interpreting seismic anisotropy in fractured reservoirs. *First Break 26* (2008), 57–63.