

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

RAFAEL CARLOS SOARES LIMA

**AVALIAÇÃO TOPOLÓGICA DE
CRITICALIDADES EM REDES ELÉTRICAS DE
POTÊNCIA**

NITERÓI

2026

RAFAEL CARLOS SOARES LIMA

**AVALIAÇÃO TOPOLÓGICA DE
CRITICALIDADES EM REDES ELÉTRICAS DE
POTÊNCIA**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doutor em Computação. Área de concentração: Ciência da Computação

Orientador:

JULIO CESAR STACCHINI DE SOUZA

Coorientador:

MILTON BROWN DO COUTTO FILHO

NITERÓI

2026

Ficha catalográfica automática - SDC/BEE
Gerada com informações fornecidas pelo autor

L732a Lima, Rafael Carlos Soares
Avaliação Topológica de Criticalidades em Redes
Elétricas de Potência / Rafael Carlos Soares Lima. - 2026.
160 f.: il.

Orientador: Julio Cesar Stacchini De Souza.
Coorientador: Milton Brown Do Coutto Filho.
Tese (doutorado)-Universidade Federal Fluminense, Instituto
de Computação, Niterói, 2026.

1. Sistemas de Potência. 2. Estimação de Estado. 3.
Teoria dos Grafos. 4. Produção Intelectual. 5. Produção
intelectual. I. Stacchini De Souza, Julio Cesar, orientador.
II. Do Coutto Filho, Milton Brown, coorientador. III.
Universidade Federal Fluminense. Instituto de Computação.
IV. Título.

CDD - XXX

RAFAEL CARLOS SOARES LIMA

AVALIAÇÃO TOPOLÓGICA DE CRITICALIDADES EM REDES ELÉTRICAS DE
POTÊNCIA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de
Pós-Graduação em Computação da Universidade
Federal Fluminense como requisito parcial para
a obtenção do Grau de Doutor em Computação.
Área de concentração: Ciência da Computação.

Aprovada em Agosto de 2026.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Julio Cesar Stacchini de Souza, D.Sc. (Orientador) – UFF

Prof. Milton Brown Do Couto Filho, D.Sc. (Coorientador) – UFF

Prof. Fabio Protti, D.Sc. – UFF

Prof. Luiz Satoru Ochi, D.Sc., UFF

Prof. Antonio José Alves Simões Costa, D.Sc. – UFSC

Prof. Elizete Maria Lourenço, D.Sc. – UFPR

Niterói

2026

*A Deus e aos meus pais, Rosilene e Francisco,
pilares da minha vida
e fundamentais em cada uma de minhas conquistas.*

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, o Criador, Ser Supremo e regente de tudo o que existe, pois, sem Ele, minha vida e minhas conquistas não seriam possíveis.

Aos meus pais, Francisco José e Rosilene Maria, expresso minha mais profunda gratidão por serem os alicerces da minha trajetória, sempre presentes nos momentos em que mais precisei, oferecendo amor, apoio e incentivo incondicionais. Sem o empenho e os sacrifícios deles, o ensino superior não teria se tornado uma realidade em minha vida.

Aos meus orientadores, Professor Milton Brown Do Coutto Filho e Professor Julio Cesar Stacchini de Souza, agradeço pela orientação, disponibilidade, confiança e pelos valiosos conhecimentos compartilhados ao longo do doutorado, bem como pelos conselhos e incentivos fundamentais para o desenvolvimento desta pesquisa.

Ao Professor Fabio Protti, agradeço pelos ensinamentos, pelas discussões e pelo compartilhamento de materiais e conhecimentos relacionados à Teoria dos Grafos.

Aos meus amigos, agradeço pela amizade, pelos momentos de descontração e pelo apoio ao longo desta caminhada.

Por fim, agradeço à CAPES pela concessão da bolsa de estudos de pós-graduação, cujo suporte foi essencial para a realização desta pesquisa.

Resumo

A Estimação de Estado (EE) fornece dados em tempo real para a supervisão e o controle de Sistemas Elétricos de Potência (SEP). A redundância do plano de medição, estabelecida pela quantidade, localização e tipo de medidas, é um requisito precípua para a confiabilidade do processo de estimação. A análise de observabilidade destina-se a averiguar se, para uma dada configuração de rede, a EE pode ser realizada por completo. A análise de criticalidades, por sua vez, avalia vulnerabilidades estruturais associadas à indisponibilidade de medidas e a cenários de reconfiguração topológica. Do ponto de vista conceitual, ambas as análises são de natureza estrutural e combinatória, o que favorece o emprego de métodos topológicos fundamentados na Teoria dos Grafos, sobretudo em redes de grande porte, nas quais os métodos numéricos podem enfrentar limitações decorrentes do condicionamento da matriz de ganho. Esta tese aprimora a análise de observabilidade topológica ao combinar busca em profundidade, identificação de pontes e interseção de matroides, incorporando operações de contração de arestas para o processamento eficiente de medidas de injeção. A principal contribuição consiste na proposição de uma técnica original e não enumerativa para a identificação de medidas críticas, pares críticos e conjuntos críticos, por meio da construção de digrafos bipartidos auxiliares que caracterizam padrões topológicos indicativos de vulnerabilidades em planos de medição. As metodologias propostas posicionam-se como ferramentas alternativas ao método clássico de resíduos normalizados e como alternativa em cenários nos quais o condicionamento da matriz de ganho limita sua aplicabilidade direta. As metodologias foram avaliadas em sistemas IEEE de 14, 118 e 300 barras, uma rede da Polônia (CASE2383WP) e no sistema PEGASE com 9.241 barras. Os resultados demonstram elevado desempenho computacional, viabilizando a aplicação recorrente em redes de grande porte. As criticalidades identificadas mostraram-se consistentes com aquelas obtidas por técnicas topológicas e numéricas consolidadas na literatura.

Palavras-chave: estimação de estado, observabilidade topológica, criticalidades, teoria dos grafos, interseção de matroides, sistemas elétricos de potência.

Abstract

State Estimation (SE) provides the real-time database for the supervision and control of Electrical Power Systems (EPS). The redundancy of the measurement plan, determined by the quantity, placement, and type of measurements, is a key requirement for the reliability of the estimation process. Observability analysis aims to verify whether, for a given network configuration, SE can be fully performed. Criticality analysis, in turn, assesses structural vulnerabilities associated with measurement unavailability and network topology reconfiguration scenarios. From a conceptual standpoint, both analyses are structural and combinatorial in nature, which favors the use of topological methods grounded in Graph Theory, particularly in large-scale networks where numerical methods may face limitations arising from the conditioning of the gain matrix. This thesis enhances topological observability analysis by combining depth-first search, bridge identification, and matroid intersection, incorporating edge contraction operations for the efficient processing of injection measurements. The main contribution consists in proposing an original and non-enumerative technique for identifying critical measurements, critical pairs, and critical sets, through the construction of auxiliary bipartite digraphs that characterize topological patterns indicative of vulnerabilities in measurement plans. The proposed methodologies are positioned as alternative tools to the classical normalized residuals method and as an alternative in scenarios where the conditioning of the gain matrix limits its direct applicability. The methodologies were evaluated on IEEE test systems with 14, 118, and 300 buses, on a Polish transmission network (CASE2383WP), and on the PEGASE system with 9,241 buses. Results demonstrate high computational performance, enabling recurrent application in large-scale networks. The identified criticalities proved consistent with those obtained by established topological and numerical techniques in the literature.

Keywords: state estimation, topological observability, measurement criticalities, graph theory, matroid intersection, electrical power systems.

Lista de Figuras

1	Estrutura e principais etapas do processo de EE.	27
2	O problema das Sete Pontes de Königsberg. Adaptado de [25].	45
3	Modelagem do problema das Sete Pontes de Königsberg.	46
4	Representações geométricas distintas para o mesmo grafo. Adaptado de [55].	47
5	Representação de um multigrafo.	48
6	Exemplo de um subgrafo próprio $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$	49
7	Exemplo de um subgrafo gerador $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$	49
8	Subgrafo induzido $\mathcal{G}[X_v]$ de $\mathcal{G}$	49
9	Subgrafo induzido $\mathcal{G}[X_e]$ de $\mathcal{G}$	50
10	Complemento $\overline{\mathcal{G}}$ de um grafo simples $\mathcal{G}$	51
11	Caminho e ciclo com cordas.	52
12	Caminho e ciclo induzidos.	52
13	Representação geométrica de um digrafo.	53
14	Caminho e ciclo direcionados nos digrafos $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, respectivamente.	54
15	Ciclos direcionados triviais em um digrafo.	54
16	Exemplos de grafos bipartidos.	55
17	Matriz de adjacência referente a um multigrafo $\mathcal{M}$	56
18	Matriz de adjacência referente a um digrafo $\mathcal{D}$	56
19	Um grafo não direcionado e a lista de adjacência correspondente.	56
20	Um digrafo e a lista de adjacência correspondente.	57
21	Subconjuntos maximal e máximo concernentes aos conjuntos independentes.	58
22	Grafos desconexos.	59

23	Uma floresta $\mathcal{F}$ formada por duas árvores.	59
24	Uma árvore geradora $\mathcal{T}$ de um grafo não direcionado $\mathcal{G}$	60
25	Possíveis formações de ciclos na árvore geradora exemplo.	60
26	Uma árvore geradora arco-íris $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$	61
27	Uma árvore geradora $\mathcal{T}^*$ de $\mathcal{G}$ sem coloração arco-íris.	62
28	Um corte de vértices V' e uma articulação v de um grafo.	62
29	Um conjunto desconectante E' e uma ponte e de um grafo.	63
30	Um corte de arestas $[S, \overline{S}]$ de um grafo.	63
31	Exemplos de co-ciclos de um grafo.	64
32	Rede de 6 barras monitorada por 7 medidas.	66
33	Grafo de rede e uma árvore geradora observável referentes ao sistema de 6 barras e 7 medidas.	67
34	Representação de medidas de fluxo de potência e corrente de ramo num multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$	68
35	Representação de medida de injeção num multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$	69
36	Representação de medida de ângulo num multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$	69
37	Um sistema exemplo de 6 barras monitorado por 10 medidas.	70
38	Multigrafo de medições que modela o sistema exemplo.	70
39	Multigrafo $\mathcal{Z}_F$ referente ao sistema exemplo de 6 barras e 10 medidas. . . .	73
40	Uma floresta de profundidade $\mathcal{T}_F$ referente ao sistema exemplo de 6 barras e 10 medidas.	73
41	Contração de arestas de $\mathcal{Z}_P^0$ e $\mathcal{T}_P^0$ referentes à rede exemplo.	74
42	Estrutura do digrafo bipartido auxiliar $\mathcal{B}$	80
43	Conjunto resultante da diferença simétrica entre A e B (região azul). . . .	82
44	Árvore geradora observável referente à rede exemplo.	83
45	Exemplo de construção de $\mathcal{B}_{c_1}$ concomitante com a classificação de medidas. .	85
46	Digrafo $\mathcal{B}_{c_1}$ referente à rede exemplo de 6 barras e 10 medidas.	87

47	Efeito em cascata provocado pela remoção de m no padrão C2-XY.	89
48	Padrão C2-XY com as fontes a_1 e a_2 representando a medida redundante m	90
49	Ilustração do padrão C2-XY _p	91
50	Um C_2 identificado através do padrão C2-XX.	92
51	Possibilidades de combinações de arestas baseadas no padrão C2-XX.	93
52	Exemplo de ocorrência do padrão C2-ext.	94
53	Sistema IEEE 14 barras com 20 medidas.	101
54	$\mathcal{Z}_M$ referente ao IEEE 14 barras com 20 medidas.	102
55	Subgrafos $\mathcal{Z}_F$ e $\mathcal{Z}_P^0$ referentes ao IEEE 14 barras com 20 medidas.	103
56	Floresta de profundidade $\mathcal{T}_F$ oriunda de $\mathcal{Z}_F$	103
57	Instâncias de entrada da rotina de processamento das arestas de injeção para o sistema IEEE 14 barras com 20 medidas.	105
58	Instância $\mathcal{Z}_P^R$ referente ao sistema IEEE 14 barras com 20 medidas.	105
59	Uma árvore geradora observável $\mathcal{T}$ concernente ao sistema IEEE 14 barras e 20 medidas.	107
60	Uma co-árvore $\overline{\mathcal{T}}$ referente à árvore geradora observável oriunda do algoritmo.	107
61	Digrafo $\mathcal{B}_{c_1}$ referente ao sistema IEEE 14 barras e 20 medidas.	108
62	Digrafo $\mathcal{B}_{c_2}$ referente ao sistema IEEE 14 barras e 20 medidas.	110
63	Tempo total de execução das técnicas avaliadas nos planos de medição do sistema IEEE 118 barras (escala logarítmica).	124
64	Tempo total de execução das técnicas avaliadas nos planos de medição do sistema IEEE 300 barras (escala logarítmica).	124

Lista de Tabelas

1	Grau e vizinhança de cada vértice do grafo exemplo $\mathcal{G}$	47
2	Possibilidades de atribuição de medidas às arestas no sistema-exemplo. . .	67
3	Conjunto $FY[v_x]$ para cada vértice $v_x \in X$ do digrafo $\mathcal{B}_{c_1}$ referente ao sistema exemplo de 6 barras e 10 medidas.	87
4	Sequência de arestas de fluxo processadas para construção de $\mathcal{T}_F$	104
5	Ordem de processamento e tratamento das arestas de $\mathcal{Z}_P$	106
6	Conjunto $FY[v_x]$ para cada vértice $v_x \in X$	109
7	C_2s e $C_{conj}s$ identificados no sistema IEEE 14 barras e 20 medidas.	111
8	Resíduos normalizados da estimação linear do IEEE 14 barras e 20 medidas.	113
9	Caracterização dos planos de medição avaliados.	116
10	Medidas críticas (C_1s) identificadas nos sistemas IEEE 118 e 300 barras. .	119
11	Pares críticos (C_2s) identificados nos sistemas IEEE 118 e 300 barras. . .	119
12	Conjuntos críticos ($C_{conj}s$) identificados nos sistemas IEEE 118 e 300 barras.	120
13	Criticalidades identificadas no sistema CASE2383WP.	121
14	Criticalidades identificadas no sistema CASE9241PEGASE.	121
15	Tempo total de execução e speed-up em relação ao GraphCA nos sistemas IEEE 118 e 300 barras.	123
16	Decomposição do tempo de execução por etapa no plano representativo 300_E ($k = 18$) do sistema IEEE 300 barras.	126
17	Tempo total de execução e speed-up do GraphCA em relação ao ResCA nos sistemas CASE2383WP e CASE9241PEGASE.	127

-
- 18 Ocorrências dos padrões topológicos e contribuição da reciprocidade dos conjuntos críticos na identificação de C_2s pelo GraphCA, nos sistemas IEEE 118 e 300 Barras. 128
- 19 Ocorrências dos padrões topológicos e contribuição da reciprocidade dos conjuntos críticos na identificação de C_2s pelo GraphCA, nos sistemas CASE2383WP e CASE9241PEGASE. 129

Lista de Abreviaturas e Siglas

SEP	: Sistema Elétrico de Potência;
EE	: Estimação de Estado;
COS	: Centros de Operação de Sistema;
SGE	: Sistema de Gerenciamento de Energia;
SCADA	: Sistema de Supervisão e Aquisição de Dados;
UTR	: Unidade Terminal Remota;
DEI	: Dispositivo Eletrônico Inteligente;
PMU	: Unidade de Medição Fasorial;
EG	: Erros Grosseiros;
MQP	: Mínimos Quadrados Ponderados;
UM	: Unidades de Medição;
DFS	: Busca em Profundidade (<i>Depth-First Search</i>);
NB	: Número total de barras no sistema;
C_1	: Medida Crítica;
C_2	: Par Crítico;
C_{conj}	: Conjunto Crítico;
C_k	: k -tupla crítica;
PMU	: Unidade de Medição Fasorial (<i>Phasor Measurement Unit</i>);
PEGASE	: <i>Pan European Grid Advanced Simulation and State Estimation</i> ;
IEEE	: <i>Institute of Electrical and Electronics Engineers</i> .

Sumário

1	Introdução	12
1.1	Contexto do Estudo	12
1.2	Motivações e Objetivos	15
1.3	Contribuições	16
1.4	Estado da Arte	17
1.5	Publicações	23
1.6	Estrutura	23
2	Observabilidade e Criticalidades	25
2.1	Estimação de Estado	25
2.2	Estrutura da Estimação de Estado	26
2.3	Formulação Clássica da Estimação de Estado em SEP	28
2.4	Detecção e Identificação de Erros Grosseiros	31
2.5	Análise de Observabilidade	34
2.6	Criticalidades	37
2.6.1	Definições e Terminologia	38
2.6.2	Identificação Numérica de Criticalidades	41
2.7	Aspectos Computacionais do Cálculo da Matriz $\tilde{\Omega}$	43
3	Teoria dos Grafos	45
3.1	Sete Pontes de Königsberg	45
3.2	Definições Iniciais	47

3.3	Subgrafos	48
3.4	Notações e Manipulações Estruturais em Grafos	50
3.5	Caminhos e Ciclos	51
3.6	Digrafos	53
3.7	Bipartição em Grafos	55
3.8	Matrizes e Listas de Adjacência de Grafos	55
3.9	Subconjuntos Maximais e Minimais	57
3.10	Grafos Conexos e Componentes Conexas	58
3.11	Árvores e Florestas	59
3.12	Árvores Geradoras Arco-Íris	61
3.13	Cortes, Articulações e Co-ciclos	62
4	Metodologias	65
4.1	Premissas	65
4.2	Multigrafo de Medições	68
4.3	Análise de Observabilidade Topológica	70
4.3.1	Processamento de Arestas de Fluxo	71
4.3.2	Processamento de Arestas de Injeção	74
4.4	Criticalidades de Medidas por Grafos	83
4.4.1	Busca por Medidas Críticas	83
4.4.2	Busca por Pares e Conjuntos Críticos	88
4.4.2.1	Padrão C2-XY: Fontes Representam uma Única Medida Redundante	89
4.4.2.2	Padrão C2-XYp: Vizinhaça de Entrada Própria Representa uma Única Medida Redundante	90
4.4.2.3	Padrão C2-XX: Igualdade entre Vizinhaças de Entrada Reduzidas	91

4.4.2.4	Padrão C2-ext: Vizinhança de Entrada Própria como Sub-conjunto de C_{conj}	93
4.4.2.5	Implementação para Identificação dos Padrões C2-XY, C2-XYp, C2-XX e C2-ext	95
5	Resultados	99
5.1	Redes Elétricas Estudadas	99
5.2	Planos de Medição Avaliados	100
5.3	Caso Ilustrativo: Sistema IEEE 14 barras e 20 medidas	101
5.4	Configuração Experimental	114
5.5	Aderência das Criticalidades Identificadas	118
5.6	Desempenho Computacional	122
5.6.1	Sistemas IEEE 118 e 300 Barras	122
5.6.2	Redes de Grande Porte: CASE2383WP e CASE9241PEGASE	126
5.7	Ocorrências dos Padrões Topológicos do GraphCA	127
5.8	Discussão Integrada	129
6	Conclusões	131
	REFERÊNCIAS	135
	Apêndice A - PLANOS DE MEDIÇÃO E PARTICIONAMENTO DE REDE	143
A.1	Considerações sobre o Regime Experimental Adotado	143
A.2	Motivações da Abordagem	144
A.3	Particionamento do Grafo de Rede	146
A.4	Lógica de Geração do Plano de Medição	148
A.4.1	Alocação Inicial para Observabilidade Topológica	148
A.4.2	Alocação de Medidas Redundantes	149
	Apêndice B - CONCEITOS BÁSICOS DE MATROIDES	151

B.1	Definição de Matroide	151
B.2	Matroide Gráfico	152
B.3	Matroide de Partição	153
B.4	Interseção de Matroides	153

1 Introdução

1.1 Contexto do Estudo

A energia elétrica é um pilar essencial da sociedade moderna, sustentando desde o conforto doméstico até as atividades industriais e comerciais. Com o aumento constante de sua demanda, tornou-se imperativo o desenvolvimento de uma infraestrutura robusta para gerar, transmitir e distribuir eletricidade de forma confiável. O Sistema Elétrico de Potência (SEP) é o conjunto de instalações e equipamentos que cumpre essa função, garantindo que a energia elétrica chegue aos consumidores com segurança e estabilidade.

O SEP compreende três estágios fundamentais: geração, transmissão e distribuição. A geração ocorre em usinas que convertem fontes primárias de energia (como carvão, gás natural, energia solar, força dos ventos e das águas) em energia elétrica. No contexto brasileiro, destaca-se a predominância da energia hidrelétrica, que aproveita o significativo potencial hídrico do país. A transmissão, por sua vez, é responsável por transportar a energia gerada até os grandes centros de consumo, sob alta tensão para minimizar as perdas elétricas. Finalmente, a distribuição entrega a eletricidade às unidades consumidoras finais. A operação eficiente do SEP depende de uma supervisão rigorosa, conduzida em tempo real pelos Centros de Operação de Sistema (COS), que operam de forma centralizada e remota para assegurar a continuidade e a qualidade do fornecimento.

No núcleo dos COS, o Sistema de Gerenciamento de Energia (SGE) integra ferramentas computacionais sofisticadas que monitoram o estado operativo do SEP. Esse estado reflete o equilíbrio entre geração e consumo de energia elétrica, respeitando limites operacionais, como a capacidade das usinas ou a potência máxima das linhas de transmissão. Perturbações nesse equilíbrio, ou o descumprimento desses limites, podem desencadear falhas graves, como interrupções generalizadas no fornecimento. A fim de descrever com precisão o estado operativo, utilizam-se os fasores de tensão nodal, associados à configuração topológica oriunda dos sensores de chaves seccionadoras e disjuntores da rede elétrica.

As informações necessárias para obtenção dos fasores de tensão nodal e, consequentemente, do estado do SEP são obtidas por meio de medidas coletadas em tempo real. Tradicionalmente, essas medidas (como fluxos de potência, injeções de potência e magnitudes de tensão) são coletadas por Unidades Terminais Remotas (UTRs) e Dispositivos Eletrônicos Inteligentes (DEIs), transmitidas aos COS por meio do Sistema de Supervisão e Aquisição de Dados (SCADA). Um adicional moderno é o uso de Unidades de Medição Fasorial (PMUs), que fornecem sincrofasores (medições precisas das magnitudes e ângulos de fase das tensões e correntes em tempo real). Apesar de sua superioridade técnica, as PMUs enfrentam barreiras econômicas que restringem sua implementação em larga escala, especialmente em sistemas com orçamentos limitados. Independentemente da tecnologia adotada, as medidas coletadas estão sujeitas a erros estatisticamente pequenos, bem como a erros grosseiros (EGs), decorrentes de falhas em equipamentos, erros de calibração, instalação inadequada ou interferências externas, como ataques cibernéticos.

A Estimação de Estado (EE) desempenha um papel central no SGE, processando essas medidas para determinar o estado mais provável do SEP. Formulada classicamente como um problema de Mínimos Quadrados Ponderados (MQP), a EE reduz inconsistências nos dados brutos provenientes do SCADA, fornecendo estimativas confiáveis que servem como base para análises do SEP, incluindo previsão de carga, avaliação de segurança operacional e planejamento estratégico. A eficácia da EE depende de um conjunto redundante de medidas, estrategicamente distribuídas pela rede, que assegure a cobertura adequada do sistema. Para alcançar esse objetivo, o plano de medição deve satisfazer quatro requisitos fundamentais [29]:

- *Observabilidade*, que garante a capacidade de estimar o estado de toda a rede;
- *Confiabilidade*, que permite detectar, identificar e substituir medidas portadoras de EGs;
- *Qualidade*, que assegura um grau adequado de precisão das estimativas em relação aos valores reais; e
- *Robustez*, que mantém os requisitos anteriores mesmo diante de perdas de dados de medição ou de reconfigurações topológicas da rede elétrica.

Contudo, implementar um sistema de supervisão que atenda plenamente a esses requisitos demanda investimentos significativos. Em busca de competitividade no mercado de energia, as empresas frequentemente reduzem gastos com infraestrutura de monitoramento, comprometendo o desempenho da EE e resultando em estimativas imprecisas que

afetam a confiabilidade das decisões operacionais. Nesse contexto, justificam-se as análises de observabilidade e de criticalidades, que fornecem informações sobre a funcionalidade e desempenho do processo de EE num dado sistema, considerando os requisitos supracitados. Essas análises são aplicáveis à execução corrente da EE, bem como ao projeto de novos sistemas de monitoramento ou ao reforço daqueles já em funcionamento.

A análise de observabilidade verifica se o conjunto de medidas disponíveis é suficiente para estimar o estado de todo o SEP, fornecendo uma resposta binária (“observável” ou “inobservável”). Em casos de inobservabilidade, torna-se necessária a identificação das denominadas *ilhas observáveis*, isto é, sub-regiões da rede em que o estado pode ser estimado de forma independente. O conhecimento dessas ilhas favorece a alocação eficiente de pseudomedidas, derivadas de dados históricos, para restaurar a observabilidade do sistema. Essa análise pode ser conduzida por abordagens: numéricas, baseadas em cálculos de ponto flutuante com as matrizes do processo de estimação; topológicas, que aplicam operações lógicas baseadas em Teoria dos Grafos; ou híbridas, que combinam as abordagens anteriores. A análise topológica é particularmente vantajosa para a identificação de ilhas observáveis e de regiões que requerem pseudomedidas, devido à natureza estrutural do problema da observabilidade.

A análise de criticalidades, por outro lado, identifica vulnerabilidades de um sistema, mapeando cenários de inobservabilidade causados por indisponibilidades imprevistas de elementos como ramos da rede, Unidades de Medição (UMs) ou medidas individuais. Um elemento é classificado como *crítico* quando sua indisponibilidade resulta na perda da observabilidade do sistema, ou seja, na incapacidade de estimar o estado operativo completo do SEP com base nas medidas remanescentes. Define-se uma *k-tupla crítica* como um conjunto *minimal* de *k* elementos cuja indisponibilidade *simultânea* provoca a inobservabilidade do sistema, ou seja, a perda conjunta dos *k* elementos compromete a observabilidade, ao passo que a indisponibilidade de qualquer subconjunto próprio não. O índice *k* denota, assim, a cardinalidade do conjunto: 1-tupla corresponde a uma *medida crítica* e 2-tupla corresponde a um *par crítico*. Uma estrutura relacionada é o *conjunto crítico*, formado por pares críticos que compartilham medidas entre si, de modo que a indisponibilidade de qualquer um de seus elementos torna críticos os demais. Diferentemente da *k-tupla*, cuja cardinalidade é fixa, a de um conjunto crítico não é pré-determinada, dependendo das relações de dependência entre as medidas que compõem o plano de medição. O conhecimento das criticalidades é crucial para avaliar a robustez do sistema e a resiliência da EE frente a EGs e perda de medidas.

A presente pesquisa investiga a observabilidade e as criticalidades em sistemas elétricos de potência sob a perspectiva da Teoria dos Grafos. Busca-se aprimorar abordagens topológicas consolidadas na literatura para a análise de observabilidade, bem como propor técnicas qualitativas para identificação de criticalidades em planos de medição, contemplando medidas críticas e conjuntos críticos. As metodologias desenvolvidas posicionam-se como ferramentas auxiliares ao tratamento numérico clássico, fornecendo validação cruzada independente do paradigma de ponto flutuante e constituindo, por prescindirem da matriz de ganho, uma alternativa estrutural não sujeita às limitações que o condicionamento dessa matriz impõe à aplicabilidade direta da abordagem por resíduos normalizados.

Nesse contexto, formula-se a seguinte questão central de pesquisa: como identificar, por meio de metodologias topológicas não enumerativas fundamentadas na Teoria dos Grafos, as criticalidades de um plano de medição (medidas críticas, pares críticos e conjuntos críticos), com desempenho computacional adequado em sistemas de transmissão de grande porte, caracterizando-se, ainda, as condições estruturais sob as quais os resultados assim obtidos coincidem com os da abordagem numérica clássica e aquelas em que deles divergem?

1.2 Motivações e Objetivos

A Teoria dos Grafos, reconhecida por sua vasta aplicabilidade a diversos problemas práticos, vem apresentando uma notável expansão impulsionada pelos avanços computacionais recentes. O desenvolvimento de algoritmos e bibliotecas robustas, como *NetworkX* e *Graph-tool*, viabilizou implementações eficientes de operações estruturais em grafos de grande porte, incluindo buscas em profundidade, identificação de pontes, cálculo de fluxos máximos e contrações de supernós. Esse arcabouço computacional torna oportuna a retomada do estudo de métodos topológicos voltados à análise de observabilidade e identificação de criticalidades em SEP, que, após um período de menor atenção, ressurgem como alternativas promissoras frente às limitações práticas das abordagens numéricas tradicionais em sistemas de grande porte.

Adicionalmente, a identificação de criticalidades de cardinalidade superior a 1 (particularmente pares críticos e conjuntos críticos) constitui uma lacuna persistente na literatura. As abordagens existentes restringem-se, em sua maioria, a enumerações exaustivas, computacionalmente onerosas em sistemas de médio e grande porte, ou a heurísticas cuja

aplicabilidade se limita a casos específicos. Diante desse cenário, justifica-se a proposição de uma técnica topológica eficiente para identificação de pares críticos e conjuntos críticos, cujo regime de aplicabilidade é claramente delimitado e cujo desempenho é avaliado em sistemas representativos da operação real.

A partir dessas motivações, define-se como objetivo geral desta pesquisa o desenvolvimento e o refinamento de metodologias topológicas, fundamentadas em Teoria dos Grafos, para análise de observabilidade e identificação de criticalidades em planos de medição de SEPs, com aplicabilidade demonstrada em sistemas de transmissão de grande porte.

Como objetivos específicos, destacam-se:

- aprimorar a metodologia consolidada para análise de observabilidade topológica, incorporando operações estruturais que promovam ganhos de eficiência computacional, objetivando viabilizar sua aplicação recorrente em sistemas de grande porte sujeitos a reconfigurações topológicas frequentes;
- refinar a metodologia de identificação de medidas críticas, caracterizando os padrões topológicos indicativos desse tipo de medida em um digrafo auxiliar que evidencia as redundâncias do plano de medição;
- propor uma técnica topológica original e computacionalmente eficiente para identificação de pares críticos e conjuntos críticos de medidas, de natureza parcialmente heurística e com regime de aplicabilidade explicitamente caracterizado; e
- avaliar comparativamente as metodologias propostas frente a abordagens topológicas e numéricas consolidadas na literatura, considerando redes elétricas de diferentes portes e níveis de redundância.

As metodologias desenvolvidas foram implementadas em linguagem *Python*, utilizando a biblioteca *NetworkX* para o tratamento de grafos.

1.3 Contribuições

Dentre as principais contribuições desta pesquisa, destacam-se:

- a elucidação da dualidade existente entre propriedades matemáticas de grafos e as especificidades das análises de observabilidade e de criticalidades em sistemas elétricos supervisionados, evidenciando a correspondência entre conceitos estruturais

(como conectividade, ciclos, cortes e co-ciclos) e vulnerabilidades de planos de medição;

- o aprimoramento de uma técnica topológica para análise de observabilidade que alia a simplicidade da Busca em Profundidade (*Depth-First Search*) à robustez da interseção de matroides. A abordagem é otimizada por operações de contração de arestas e pré-processamento por pontes, reduzindo o espaço de busca e permitindo a identificação direta da observabilidade em casos específicos;
- o refinamento da metodologia de identificação de medidas críticas, bem como a caracterização dos padrões topológicos indicativos desse tipo de medida, considerando um grafo auxiliar que evidencia redundâncias de um plano de medição;
- a proposição de uma técnica não enumerativa, original e computacionalmente eficiente, para identificação de pares críticos e conjuntos críticos de medidas, com regime de validade estrutural caracterizado e desempenho experimentalmente avaliado em sistemas de transmissão representativos; e
- a realização de uma análise comparativa entre as metodologias propostas e técnicas topológicas e numéricas consolidadas na literatura, com avaliação em redes elétricas de diferentes portes e caracterização dos cenários nos quais as abordagens topológicas oferecem vantagens práticas.

1.4 Estado da Arte

A EE, como ferramenta de suporte ao operador para controle e monitoramento do SEP, foi inicialmente proposta por Fred C. Schweppe e seu grupo de pesquisa em 1970 [60] [61] [62], formulada como um problema de MQP. Desde então, estudos abordaram a análise de observabilidade, ao passo que a identificação de criticalidades de elementos de rede permaneceu pouco explorada sob a ótica da Teoria dos Grafos.

O primeiro método baseado na topologia da rede para a análise de observabilidade foi proposto por Clements e Wollenberg em 1975 [20]. A abordagem dispensa cálculos em ponto flutuante, apoiando-se em heurísticas derivadas da estrutura do plano de medição e das leis de Kirchhoff para concluir sobre a observabilidade do sistema. Embora pioneiro, o método pode classificar como inobservável um sistema efetivamente observável, limitação atribuída à sua natureza heurística.

Em 1980, um arcabouço teórico consistente para o problema da observabilidade topológica, distinguindo-o dos conceitos de observabilidade algébrica e numérica, foi introduzido por Krumpholz et al. [44]. Nesse artigo, propuseram uma técnica baseada na Teoria dos Grafos para análise de observabilidade. Esse trabalho demonstrou que a observabilidade topológica de um SEP depende da existência de uma árvore geradora de posto máximo (ou árvore geradora observável), cujas arestas correspondem a medidas únicas do sistema. O procedimento proposto para obtenção dessa árvore opera em duas etapas: na primeira, processa-se sequencialmente as medidas de fluxo de potência do sistema avaliado, construindo uma floresta maximal com arestas correspondentes à área de abrangência dessas medidas; a segunda, baseando-se no algoritmo de Dinic [26] para o problema do fluxo máximo em redes, expande a floresta maximal corrente, oriunda da primeira etapa, através do processamento das denominadas medidas de injeção de fronteira. Essas medidas estão localizadas em barras da rede conectadas a ramos com fluxo não monitorado. Após o processamento de todas as medidas de fluxo e injeções de fronteira, verifica-se se a floresta maximal resultante é uma árvore geradora de posto máximo. Em caso afirmativo, o sistema é observável; caso contrário, é inobservável. Apesar da clareza conceitual, a implementação dessa heurística é complexa.

Em 1981, Clements et al. [17] estenderam a metodologia proposta em [44], com o objetivo de identificar, qualitativamente, medidas críticas e regiões de espalhamento de resíduos causados por erros em medidas não críticas. O estudo mostrou que uma medida crítica obrigatoriamente estará representada em uma árvore geradora observável qualquer, resultante da análise topológica de observabilidade. Além disso, comprovou-se que erros grosseiros em medidas críticas não podem ser detectados. Para a identificação das regiões de espalhamento de resíduos, utilizou-se o algoritmo de Tarjan [69], que busca componentes biconexas e, conseqüentemente, articulações (barras pertencentes a múltiplas componentes biconexas) na modelagem estrutural da rede. O trabalho destacou que o espalhamento de resíduos é limitado por medidas de injeção críticas e barras não monitoradas. Contudo, a identificação de medidas críticas sob a perspectiva dos grafos permaneceu pouco clara.

No ano seguinte, Clements et al. [18] apresentaram um procedimento para identificação de ilhas observáveis em sistemas inobserváveis. A estratégia é baseada numa poda sistemática da floresta maximal de posto máximo proveniente da análise de observabilidade topológica proposta em [44]. Especificamente, desconsideram-se todos os ramos da rede não monitorados por medidas, incidentes em medidas de injeção e que não formam ciclos com ramos pertencentes a uma floresta maximal de posto máximo F . Além disso,

os ramos que formam ciclos com ramos de F são considerados pertencentes às ilhas. No ano seguinte, Clements et al. [19] demonstraram que o conhecimento dessas ilhas favorece a alocação eficiente de pseudomedidas, visando o restabelecimento da observabilidade topológica de todo o sistema. No trabalho de Horisberger [40], sugeriu-se o uso de árvores de decisão como alternativa para o mapeamento das ilhas observáveis.

Quintana, Simões Costa e Mandel [56], em 1982, mostraram que é mais prático implementar um algoritmo que identifica uma árvore geradora observável em um grafo de medidas, em vez de analisar a própria rede e atribuir sistematicamente medidas aos ramos que a compõem. Um grafo de medidas é aquele formado por todas as arestas associadas a medidas de fluxo e de injeção de potência. A estratégia proposta para a etapa de processamento de medidas de fluxo é baseada no algoritmo de Kruskal [45] para construção de uma floresta maximal. Quanto à etapa de processamento das medidas de injeção, Simões Costa et al. tomaram por base a teoria de matroides, aplicando um algoritmo de interseção de matroides formulado por Frank [36]. Basicamente, essa segunda etapa identifica a interseção entre um matroide gráfico e um matroide de partição. O matroide gráfico representa a restrição atinente à inexistência de ciclos na floresta ou árvore geradora de posto máximo, enquanto que o matroide de partição caracteriza a impossibilidade de duas ou mais arestas desse subgrafo se referirem à mesma medida. Embora a teoria envolvida seja de difícil entendimento, o algoritmo proposto por Simões Costa et al. é de fácil implementação. Em contraste com a abordagem de Krumpholz et al. [44], o método proposto por Simões Costa et al. é comprovadamente exato no contexto estrito da observabilidade topológica.

Um algoritmo simples proposto por Van Cutsem [72] consistia em enumerar todas as possibilidades de correlação entre medidas e ramos da rede, a fim de obter uma árvore geradora observável. No entanto, essa estratégia possui um elevado custo computacional, uma vez que o número de árvores geradoras cresce exponencialmente com o tamanho do grafo de origem [12], sendo, portanto, inviável do ponto de vista prático.

Em 1986, Bargiela et al. [7] introduziram uma modelagem baseada na construção de um grafo em níveis, composto por três conjuntos independentes de vértices: o primeiro, é composto por vértices representantes de medidas do sistema; o segundo conjunto consiste de vértices relacionados a ramos da rede; por fim, o terceiro representa as barras da rede. As arestas do grafo em níveis representam as possibilidades de árvores geradoras da rede. Estabelecendo uma restrição unitária de fluxo para cada vértice representante de cada ramo da rede, aplica-se o algoritmo para a solução do problema de fluxo máximo.

Após a aplicação do algoritmo, obtém-se, nos caminhos saturados, a indicação de uma floresta de posto máximo da rede. Se a floresta é uma árvore geradora, então o sistema é topologicamente observável.

Em 1987, Simões Costa e Mandel [65] apresentaram modificações estruturais no algoritmo de determinação da observabilidade topológica previamente proposto em [56], visando melhorar a eficiência computacional na etapa de processamento das arestas de injeção. A primeira modificação consiste na redução do espaço de busca, desconsiderando as arestas de injeção que aparecem em paralelo com arestas de fluxo, uma vez que estas últimas são prioritárias na solução final. A segunda modificação atua sobre o processamento das medidas de injeção. No algoritmo original, sempre que uma aresta de injeção era incorporada à floresta, as estruturas auxiliares eram reinicializadas e o processamento reiniciado desde a primeira aresta. Na versão proposta, tais estruturas passam a ser atualizadas de forma incremental, incluindo o grafo auxiliar (grafo de troca inerente à interseção de matroides), o que permite que o processamento prossiga a partir da aresta seguinte, sem reinício. Além disso, o artigo discute a aplicação de um método enumerativo para a identificação de medidas críticas, bem como o tratamento de sistemas com planos de medição deficientes mediante a determinação de ilhas observáveis e a alocação de pseudomedidas.

A publicação de Simões Costa et al. de 1990 [64] retomou o algoritmo de análise de observabilidade topológica proposto em [56], detalhando os fundamentos teóricos de matroides dos tipos gráfico e de partição. A maior contribuição dessa publicação é a proposição de um algoritmo, inspirado na estratégia de interseção de matroides, para identificação de medidas críticas. Adicionalmente, apresenta-se, de forma preliminar, uma metodologia para identificação de conjuntos críticos.

Em [49], Mori et al. abordaram a análise de observabilidade topológica como um problema de árvore geradora de custo mínimo em grafos com peso nas arestas. Basicamente, pesos unitários são atribuídos aos ramos da rede não associados a medidas e, posteriormente, busca-se uma árvore geradora de custo zero. A existência dessa árvore geradora confirma a observabilidade topológica do sistema. No caso de inobservabilidade (custo diferente de zero), a estratégia possibilita a identificação direta de ilhas observáveis e ramos da rede onde a inserção de pseudomedidas retoma a observabilidade.

Em relação à metodologia descrita em [44], Nucera e Gilles apresentaram melhorias em [50]. Eles propuseram reduzir o espaço de busca na etapa de processamento das medidas de injeção, com base na identificação preliminar de regiões observadas por medidas

de fluxo. O trabalho detalha o conceito da técnica de camadas para busca por caminhos aumentantes, utilizado no algoritmo de Dinic [26], para o processamento das medidas de injeção. A implementação desenvolvida concentra-se na análise de sistemas com observabilidade global comprometida, com o objetivo de evidenciar as ilhas observáveis.

A incorporação da modelagem de dispositivos de chaveamento, como disjuntores e chaves seccionadoras, na análise de observabilidade topológica foi proposta por Simões Costa et al. [63], com o objetivo de expandir as abordagens topológicas desenvolvidas em [56] e [64]. Ademais, esse trabalho abordou a generalização do problema de criticalidades sob a perspectiva topológica, abrangendo o conceito de *restrições críticas*.

Outros estudos exploraram métodos híbridos que integram abordagens numéricas e topológicas, com destaque para o trabalho de Korres et al. [42]. Por meio de operações matriciais, matemática simbólica e Teoria dos Grafos, eles propuseram um método robusto para avaliar a observabilidade da rede, consoante a identificação de medidas críticas e conjuntos críticos.

Bretas et al. [10] propuseram um método estritamente qualitativo para a identificação de medidas críticas em sistemas elétricos observáveis, fundamentado na técnica de atribuição de medidas a ramos da rede, conforme desenvolvido por Krumpholz et al. [44]. Com o objetivo de mitigar a explosão combinatória inerente ao problema, o plano de medição é segmentado em dois conjuntos distintos: um contendo medidas de fluxo e outro abrangendo medidas de injeção. A análise é estruturada em duas fases: inicialmente, identificam-se as medidas críticas de injeção em sub-redes medidas observáveis; posteriormente, em sub-redes induzidas por conjuntos de ramos redundantes, determinam-se as medidas críticas de fluxo. Nesse contexto, os ramos redundantes referem-se àqueles associados a duas ou mais medidas redundantes do sistema ou que configuram ciclos topológicos na rede elétrica. Salienta-se que o método proposto parte da premissa que o sistema é topologicamente observável.

Cipriani [15], em 2010, propôs a incorporação de sincrofasores de tensão e de corrente, fornecidos por PMUs, à análise topológica de observabilidade e criticalidade, viabilizando o tratamento conjunto desses dados e das medidas convencionais do SCADA. Para tanto, adotou o algoritmo de interseção de matroides de Quintana, Simões Costa e Mandel [56] e a abordagem parcialmente enumerativa para identificação de medidas críticas e conjuntos críticos de Simões Costa, Piazza e Mandel [64].

Até o momento, esta seção revisou trabalhos que, de forma qualitativa, analisaram a observabilidade e, em alguns casos, identificaram criticalidades de medidas com car-

dinalidade máxima igual a dois, abrangendo medidas críticas e conjuntos críticos. A exploração de criticalidades com cardinalidade superiores oferece uma avaliação mais robusta da capacidade de observação e da depuração de erros grosseiros em sistemas de medição. Contudo, tanto na abordagem topológica quanto na numérica, observa-se escassez de estudos dedicados à identificação de tuplas críticas com cardinalidade maior que um, o que evidencia uma lacuna significativa na literatura.

No contexto das metodologias fundamentadas na Teoria dos Grafos, tem-se a publicação de Sou et al. em 2012 [67]. Eles apresentaram duas metodologias para identificação de potenciais tuplas críticas de baixa cardinalidade em regiões especificadas da rede elétrica. Uma das metodologias utiliza o algoritmo de Ford-Fulkerson [35], que calcula o fluxo máximo e o corte mínimo entre um par de vértices (fonte e terminal) sobre o grafo de abstração da rede. O grupo de medidas que cobrem os ramos pertencentes ao corte mínimo identificado constitui uma mesma tupla crítica. Nessa metodologia, a presença de medidas de injeção no sistema torna o método uma heurística. Como alternativa, eles apresentaram um método exato baseado na representação do problema como programação linear inteira mista; todavia, possui custo computacional consideravelmente elevado.

Em uma abordagem híbrida, Resende et al. [57] propuseram uma metodologia para análise de observabilidade em sistemas de potência supervisionados por medidas convencionais e fasoriais. O método baseia-se em um modelo linearizado e processa os subproblemas de potência ativa e reativa de forma independente, sem realizar o pareamento das observações. Para o diagnóstico estrutural, os autores empregaram matrizes de incidência unimodulares, compostas exclusivamente por inteiros, com o objetivo de minimizar instabilidades numéricas e desvincular a análise da dependência de parâmetros elétricos representados em ponto flutuante. Para avaliar a observabilidade do sistema, empregam-se os algoritmos de Prim e Kruskal, combinados ao algoritmo *Single Measurement Spanning Tree* (SMST), com o objetivo de construir uma árvore geradora observável. A identificação de medidas críticas e de conjuntos críticos é realizada por meio da remoção sistemática de colunas dessas matrizes, seguida da verificação da observabilidade por meio do determinante da matriz de Gram.

A revisão apresentada evidencia três aspectos centrais que orientam o desenvolvimento desta pesquisa. Primeiro, o estudo de métodos topológicos para análise de observabilidade alcançou maturidade teórica significativa ao longo das últimas décadas, embora a aplicação a sistemas de grande porte e a integração com operações estruturais modernas permaneçam pouco exploradas. Segundo, a identificação topológica de medidas críticas

dispõe de fundamentação consolidada, mas demanda refinamento metodológico para otimizar o desempenho computacional e viabilizar o tratamento sistemático de medidas de injeção de potência, evidenciando com precisão os padrões topológicos que caracterizam tais criticalidades. Terceiro, a busca por criticalidades de cardinalidade superior (especialmente pares e conjuntos críticos) constitui uma lacuna persistente na literatura, com soluções existentes restritas a abordagens enumerativas de elevado custo computacional ou a heurísticas de aplicabilidade limitada. As metodologias propostas neste trabalho endereçam esses três aspectos, com particular ênfase na proposição de uma técnica heurística eficiente para identificação de pares críticos e conjuntos críticos em sistemas de grande porte.

1.5 Publicações

A seguir, enumeram-se as publicações relacionadas ao estudo em questão:

- Soares Lima, R. C.; Do Coutto Filho, M. B.; Stacchini de Souza, J. C.; Protti, F. “Topological Approach for Identifying Critical Measurements and Sets in State Estimation”, *IEEE Latin America Trans.*, [S. l.], v. 20, n. 1, p. 100–107, 2021.
- Soares Lima, R. C.; Do Coutto Filho, M. B.; Stacchini de Souza, J. C.; Protti, F. “Identificação Topológica de Fragilidades na Supervisão de Redes Elétricas”, *Anais do Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional*, 2022, Juiz de Fora.
- Soares Lima, R. C.; Do Coutto Filho, M. B.; Stacchini de Souza, J. C. et al., “Educational Tool for Power System State Estimation Teaching and Learning,” *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 38, no. 6, pp. 5885-5895, Nov. 2023.
- Soares Lima, R. C.; Do Coutto Filho, M. B.; Stacchini de Souza, J. C. et al. “Ferramenta Computacional para Ensino e Aprendizagem sobre Estimação de Estado em Sistemas Elétricos de Potência”, *Anais do Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, 2025, São João del-Rei.

1.6 Estrutura

Este capítulo estabeleceu o contexto teórico e prático da EE como pilar fundamental para a supervisão, controle e gestão eficiente do SEP, delineou os objetivos centrais desta pesquisa e realizou uma revisão das principais contribuições acadêmicas pertinentes ao tema. A

seguir, apresenta-se uma descrição sucinta da organização dos capítulos subsequentes que estruturam este manuscrito:

- O Capítulo 2 fundamenta os princípios teóricos da EE, com ênfase no método dos MQP aplicado ao SEP, detalhando os procedimentos para análise de observabilidade e identificação de criticalidades por meio de um modelo linearizado de estimador, além de explorar as propriedades essenciais das criticalidades em redes elétricas supervisionadas, que sustentam as análises subsequentes;
- O Capítulo 3 introduz as definições e terminologias fundamentais da Teoria dos Grafos, indispensáveis para a compreensão rigorosa da metodologia proposta e para a interpretação dos resultados desta pesquisa, estabelecendo a base conceitual para as abordagens topológicas;
- O Capítulo 4 descreve minuciosamente as metodologias desenvolvidas para a análise de observabilidade e identificação de criticalidades utilizando a Teoria dos Grafos, elucidando a correspondência entre as abordagens topológicas e numéricas;
- O Capítulo 5 mostra os resultados obtidos da aplicação das metodologias propostas, oferecendo uma validação empírica das técnicas desenvolvidas; e
- Por fim, o Capítulo 6 consolida as conclusões principais desta investigação, refletindo sobre suas implicações teóricas e práticas, e propõe direções para futuras pesquisas.

2 Observabilidade e Criticalidades

O capítulo precedente contextualizou o problema abordado, apontando as motivações, os objetivos e o estado da arte, além de apresentar o escopo das principais contribuições do presente trabalho. Este capítulo apresenta as definições básicas da Estimação de Estado (EE) em Sistemas Elétricos de Potência (SEP). Inicialmente, discute-se a formulação clássica do problema de EE, estruturada pela técnica estatística dos Mínimos Quadrados Ponderados, amplamente utilizada na literatura. Em seguida, são abordadas as técnicas de análise de observabilidade, essenciais para validar a plena funcionalidade do processo de estimação. Por fim, exploram-se as criticalidades de medidas, destacando sua relevância no contexto de avaliação da robustez de um plano de medição, tópico central para os objetivos desta pesquisa.

2.1 Estimação de Estado

Desde que foi introduzida como um problema de Mínimos Quadrados Ponderados por Fred C. Schweppe [60] [61] [62], a EE em SEP tem sido amplamente estudada. Ao longo das décadas, diversos aprimoramentos têm sido realizados, com o objetivo de assegurar a confiabilidade de seus resultados [28]. Esses avanços visam atender às exigências crescentes de confiabilidade no controle e na supervisão de redes elétricas modernas, a fim de garantir maior segurança e eficiência operacionais.

Na prática, a EE é um importante módulo presente no Sistema de Gerenciamento de Energia (SGE), responsável por processar dados brutos oriundos de telemedições redundantes, que monitoram grandezas elétricas do SEP como fluxos de potência nas linhas de transmissão, injeções de potência e magnitude de tensão nas barras (raramente, magnitude de corrente nas linhas de transmissão), suscetíveis a ruídos e falhas (e.g., erros em medições, perda temporária de telemetria, etc.). O propósito da EE é gerar uma base de dados confiável, em tempo real, com as melhores estimativas das tensões fasoriais nas barras do sistema, que representam fielmente as condições operacionais do SEP.

Uma vez estimadas as tensões fasoriais nas barras, o SGE é capaz de calcular outras variáveis essenciais, como fluxos e injeções de potência, que fornecem uma visão abrangente do sistema, incluindo o carregamento das linhas de transmissão, a geração de energia em diferentes pontos da rede e outros dados operacionais críticos. Além disso, a EE desempenha o papel de filtro de dados, transformando medições brutas em informações depuradas e confiáveis, prontas para serem utilizadas por outras funcionalidades do SGE, garantindo a atualização precisa e em tempo real da base de dados sobre as condições operativas da rede.

2.2 Estrutura da Estimação de Estado

A função de EE processa as telemedições coletadas pelo sistema SCADA (Supervisory Control and Data Acquisition). Na etapa inicial, um algoritmo de pré-filtragem compara os dados brutos de medidas analógicas com os limites operacionais da rede, eliminando medidas flagrantemente incorretas que poderiam comprometer os resultados do estimador. Simultaneamente, o Configurador de Rede processa as medidas lógicas, que indicam o estado (aberto ou fechado) de chaves e disjuntores de subestações, possibilitando a construção do **modelo barra-ramo**, que representa a topologia da rede elétrica.

Após esse pré-processamento, os dados resultantes são transferidos para o estimador, estruturado em três etapas fundamentais:

1. **Análise de Observabilidade.** Destina-se a verificar se a base de dados de medições disponíveis combinada com o modelo barra-ramo permite estimar os fasores de tensão de todas as barras do sistema. Quando a análise de observabilidade classifica o sistema como observável, pode-se executar o estimador. Em caso de inobservabilidade, identificam-se as *ilhas observáveis*, possibilitando a identificação das *pseudomedidas* necessárias ao restabelecimento da observabilidade. Uma pseudomedida refere-se a uma informação adicional incorporada à base de dados de medições. A incerteza associada a uma pseudomedida depende do grau de previsibilidade da carga na barra correspondente.
2. **Estimação de Estado.** Processo central da EE destinado a calcular o estado mais provável da rede com base em dados de medições redundantes e no modelo barra-ramo. A formulação analítica do problema, baseada no método dos *Mínimos Quadrados Ponderados*, é comumente empregada e busca minimizar a soma ponderada dos quadrados dos resíduos (diferenças entre os valores de grandezas elétricas

medidas e calculadas através das tensões fasoriais nodais estimadas). Com a estimativa de estado, torna-se possível determinar outras grandezas do sistema, inclusive aquelas não monitoradas diretamente.

3. **Processamento de Erros Grosseiros (EG)**. Detecta e identifica, quando possível, medidas com erros grosseiros que não foram tratados na etapa de pré-filtragem. O processo, cujo desempenho depende do grau de redundância do plano de medição, analisa os resíduos gerados pelo estimador de estado. Nesse contexto, justifica-se a análise de criticalidades, que indica as limitações dessa etapa.

A Figura 1 ilustra a interdependência dessas etapas, contextualizando-as no processo completo de EE.

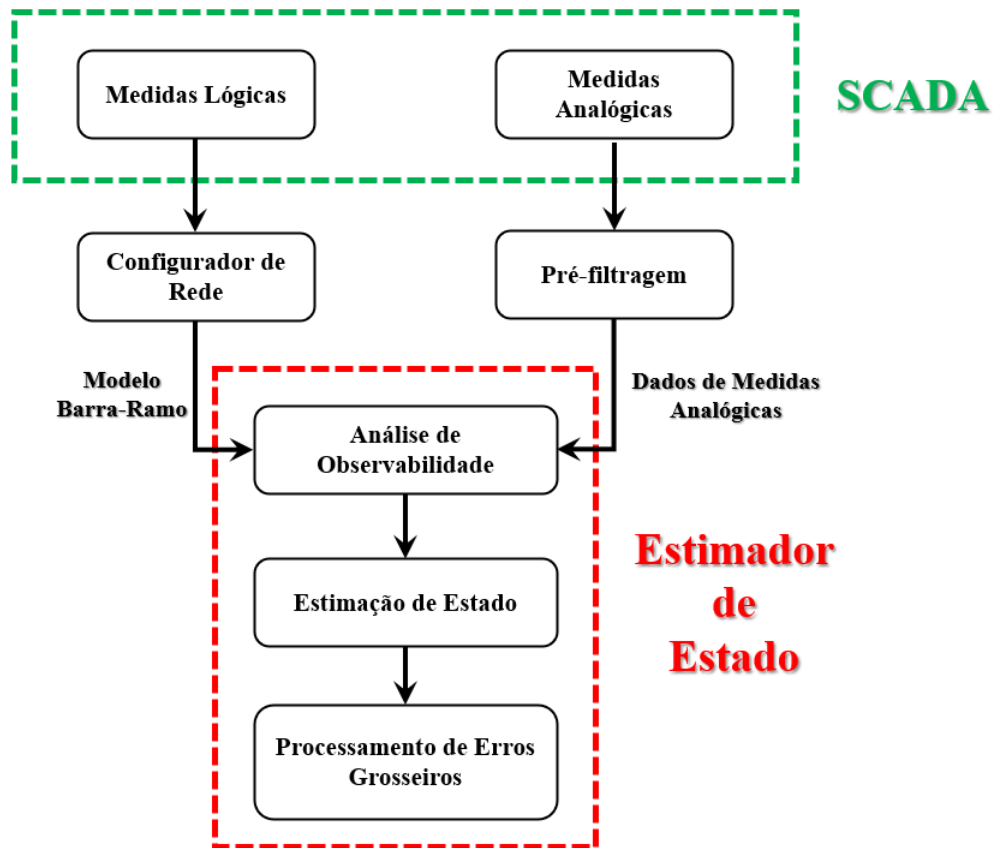


Figura 1: Estrutura e principais etapas do processo de EE.

2.3 Formulação Clássica da Estimação de Estado em SEP

Conhecendo-se perfeitamente a configuração topológica e os parâmetros elétricos da rede, bem como os dados provenientes de um plano de medição com grau de redundância adequado, torna-se possível determinar os fasores de tensão de todas as barras da rede. Esses fasores de tensão permitem obter o valor teórico das grandezas elétricas do SEP, monitoradas diretamente ou não. Devido à sua importância, as tensões fasoriais são chamadas de *variáveis de estado*, e o conjunto dessas variáveis é denominado *estado* do sistema. Denomina-se *resíduo* a diferença entre o valor medido e o valor teórico de uma grandeza elétrica observada.

A formulação clássica do problema de EE em SEP, amplamente abordada na literatura, fundamenta-se na técnica de Mínimos Quadrados Ponderados. Essa abordagem busca determinar o estado do sistema por meio da minimização da soma ponderada dos quadrados dos resíduos, em que as medições mais precisas têm maior influência na estimação. A relação entre as medições e o estado de um sistema é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{e} \quad (2.1)$$

Onde:

- $\mathbf{z}$: representa o vetor das quantidades observadas (fluxo de potência em ramos, injeção de potência e magnitude de tensão nas barras, etc.), com dimensão $(m \times 1)$, onde m é a quantidade de medidas do sistema;
- $\mathbf{h}$: denota o vetor de funções não-lineares, com dimensão $(m \times 1)$, que relacionam diretamente o estado do sistema às quantidades medidas, retornando os valores verdadeiros (ou teóricos) dessas observações;
- $\mathbf{x}$: corresponde ao *vetor de estado*, que compreende as tensões complexas nas barras da rede elétrica, expressas em termos de suas magnitudes e ângulos de fase. Sua dimensão é $(n \times 1)$, onde n representa o número de variáveis de estado do sistema, dado por $n = 2NB - 1$, sendo NB o número total de barras no sistema;
- $\mathbf{e}$: é o vetor que modela os erros de medição (erros de comunicação, imprecisão de medidores, etc.), com dimensão $(m \times 1)$.

Na modelagem dos erros de medição, assumem-se algumas propriedades estatísticas fundamentais para viabilizar o processo de EE. Considera-se que os erros de medição são estatisticamente não-correlacionados e seguem uma *distribuição normal* (*Gaussiana*), com média zero ($E(\mathbf{e}) = 0$) e *matriz de covariância* $\mathbf{R}$. Essa hipótese implica que os erros de medição são independentes entre si e possuem variâncias conhecidas.

Dado que os erros de medição não apresentam correlação, a matriz de covariância $\mathbf{R}$ torna-se diagonal, com dimensão $(m \times m)$. Os elementos diagonais de $\mathbf{R}$ correspondem às variâncias individuais dos erros de medição, conforme expressado por:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_m^2 \end{pmatrix}$$

Note que a matriz $\mathbf{R}$ desempenha um papel crítico no processo de ponderação das medições, permitindo que dados mais confiáveis (com variâncias menores) exerçam maior influência na estimativa do estado do sistema.

A estimação do estado do sistema, formulada como um problema dos Mínimos Quadrados Ponderados (MQP), consiste na minimização da função objetivo expressa como:

$$\min_{\hat{\mathbf{x}}} J(\hat{\mathbf{x}}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})]^\top \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] \quad (2.2)$$

Denomina-se por *vetor de resíduos* a quantidade $\mathbf{r} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$, que contém as diferenças entre os valores medidos e seus correspondentes teóricos. A minimização de $J(\hat{\mathbf{x}})$ requer técnicas iterativas, devido à natureza não-linear das funções em $\mathbf{h}$.

O *vetor de estado estimado* $\hat{\mathbf{x}}$, que minimiza a função objetivo (2.2), deve satisfazer a condição de otimalidade de primeira ordem, estabelecida como:

$$\left. \frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}} \Rightarrow \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{H}^\top(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] = 0 \quad (2.3)$$

Onde:

- $\mathbf{H} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}}$: é a *matriz Jacobiana* do processo de estimação, de dimensão $(m \times n)$, formado pelas derivadas parciais das funções não-lineares pertencentes ao vetor $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ calculadas no ponto $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$.

A função não-linear $\mathbf{g}$ pode ser expandida em série de Taylor em torno de uma estimativa inicial $\mathbf{x}_k$, ignorando os termos de ordem superior. Essa aproximação linear permite resolver o sistema dado em (2.3) de forma iterativa, utilizando o método de Gauss-Newton, e é dada por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{G}(\mathbf{x}_k)^{-1} \mathbf{H}^\top(\mathbf{x}_k) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)] \quad (2.4)$$

Onde:

- $\mathbf{x}_k$: é o vetor que representa a estimativa de estado na k -ésima iteração;
- $\mathbf{x}_{k+1}$: é o vetor que representa a estimativa de estado atualizada para a $(k+1)$ -ésima iteração;
- $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \partial \mathbf{g}(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x} = \mathbf{H}^\top(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{x})$: é a *matriz de Ganho* (ou *informação*), cuja dimensão é $(n \times n)$. Essa matriz é esparsa, o que viabiliza a aplicação de técnicas de esparsidade. Além disso, trata-se de uma matriz simétrica e positiva definida [1], o que propicia a sua fatoração.

Ao definir $\Delta \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ e multiplicar ambos os lados de (2.4) pela matriz $\mathbf{G}(\mathbf{x}_k)$, obtém-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_k) \Delta \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{H}^\top(\mathbf{x}_k) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)] \quad (2.5)$$

Denomina-se a expressão (2.5) como *Equação Normal de Gauss*, que descreve o sistema linear a ser resolvido iterativamente para determinar a atualização do vetor de estado em cada iteração. O termo $\Delta \mathbf{x}_{k+1}$ representa a correção aplicada à estimativa de estado corrente, enquanto o lado direito da equação incorpora a influência das medições disponíveis, ponderadas pelas incertezas associadas. A equação normal constitui uma etapa central no método de Gauss-Newton, garantindo que o estado mais provável do sistema seja obtido após a convergência do processo iterativo.

Em síntese, a formulação da EE como um problema de Mínimos Quadrados Ponderados baseia-se na resolução iterativa do sistema linear descrito em (2.5). Para iniciar o processo iterativo, é necessário fornecer uma estimativa inicial para o vetor de estado $\mathbf{x}$. Comumente, utiliza-se a abordagem de *flat start*, na qual o vetor inicial é definido com magnitudes unitárias para as tensões nodais e ângulos de fase iguais a zero.

O procedimento completo para a EE do sistema pode ser sumarizado nos seguintes passos [47]:

1. Inicialmente, define-se o contador de iterações como $k = 0$;
2. Arbitrar uma estimativa inicial para o vetor de estado $\mathbf{x}_0$ (*flat start*);
3. Calcular as matrizes Jacobiana $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$ e de Ganho $\mathbf{G}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{H}^\top(\mathbf{x}_k) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}(\mathbf{x}_k)$;
4. Calcular o lado direito da Equação Normal de Gauss $\mathbf{t}_k = \mathbf{H}^\top(\mathbf{x}_k) \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)]$;
5. Resolver o sistema linear $\mathbf{G}(\mathbf{x}_k) \Delta \mathbf{x}_k = \mathbf{t}_k$ para obtenção do valor de correção $\Delta \mathbf{x}_k$ para o vetor de estado corrente $\mathbf{x}_k$;
6. Atualizar o vetor de estado corrente, obtendo-se $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \Delta \mathbf{x}_k$;
7. Avaliar convergência: se a condição de convergência $\max |\Delta \mathbf{x}_k| \leq \epsilon$ (usualmente, adota-se $\epsilon = 10^{-4} pu$), então calcular as grandezas de interesse com o vetor de estado estimado $\hat{\mathbf{x}}$ e encerrar o processo iterativo;
8. Caso o critério de convergência não seja satisfeito, atualizar o contador de iterações com $k = k + 1$ e retornar ao passo 3.

2.4 Detecção e Identificação de Erros Grosseiros

A partir do vetor de estado estimado, é possível determinar as grandezas elétricas (observadas ou não) do sistema, como fluxos de potência ativa e reativa, injeções de potência ativa e reativa, além das magnitudes das correntes. A comparação entre essas grandezas calculadas e os valores medidos correspondentes permite verificar a presença de inconsistências na base de dados oriunda das telemedições. Define-se uma medida como portadora de EG quando a medição apresenta uma discrepância significativa em relação ao valor teórico calculado com base no estado estimado.

A presença de medidas portadoras de EG compromete diretamente a confiabilidade e a precisão dos resultados obtidos pela EE, sendo essencial que esses erros sejam detectados e identificados para assegurar a robustez do processo. Essas medidas corrompidas devem ser excluídas da base de dados ou substituídas por pseudomedidas consistentes. Destacam-se como possíveis causas de EG: falhas no sistema de comunicação, instrumentos de medição defeituosos, alterações não reportadas na topologia da rede, entre outras.

Para detecção e identificação de EG, utiliza-se o vetor de resíduos da estimação $\mathbf{r}$, de dimensão $(m \times 1)$, definido como:

$$\mathbf{r} = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] \quad (2.6)$$

Onde:

- $\mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$: é o vetor que reúne os valores teóricos correspondentes às quantidades observadas, obtidos a partir do vetor de estado estimado $\hat{\mathbf{x}}$.

Os resíduos da estimação em $\mathbf{r}$ indicam possíveis inconsistências entre as quantidades estimadas e o modelo de medição adotado, e podem ser interpretados como estimativas dos erros de medição. Dessa forma, quando um resíduo em $\mathbf{r}$ exibe uma discrepância significativa em relação ao modelo de medição adotado na EE, há indícios de que a medida associada seja portadora de EG, não identificada na etapa de pré-filtragem.

Inicialmente, busca-se detectar a presença de medidas portadoras de erros grosseiros (EG). Caso a presença dessas medidas espúrias seja confirmada, torna-se necessário identificá-las e removê-las ou, sempre que viável, substituí-las por pseudomedidas. Destaca-se que a etapa de *identificação* apresenta maior custo computacional do que a de *detecção* no tratamento de EG.

Para detecção de medidas espúrias nos dados de medição, pode-se utilizar um teste estatístico de hipóteses denominado *teste do Qui-quadrado*. Nesse teste, admite-se que a soma ponderada dos quadrados dos resíduos $J(\hat{\mathbf{x}})$, a função objetivo do MQP, segue a distribuição do qui-quadrado χ^2 com $m - n$ graus de liberdade, onde m e n são as quantidades de medições e de variáveis de estado, respectivamente. No entanto, sua validade depende das seguintes suposições:

- os erros associados às medições obedecem a uma distribuição normal de média zero e matriz de covariância $\mathbf{R}$;
- a configuração topológica e os parâmetros da rede elétrica são conhecidos;
- o modelo de medição é linearizado em $\hat{\mathbf{x}}$, um ponto suficientemente próximo da solução real.

O teste compara $J(\hat{\mathbf{x}})$ com um *valor crítico* K , obtido da distribuição qui-quadrado χ^2 , com $m - n$ graus de liberdade, para um nível de confiança α , usualmente 95%, definido como:

$$K = \chi_{m-n, 1-\alpha}^2 \quad (2.7)$$

Quando $J(\hat{\mathbf{x}}) \leq K$, não há evidências estatísticas que indiquem a presença de EG nos dados de medição. No entanto, se $J(\hat{\mathbf{x}}) > K$, há alta probabilidade de que exista pelo menos uma medida portadora de EG, o que justifica uma análise adicional para sua identificação e tratamento.

Para a identificação de medidas potencialmente contaminadas por EG, cada elemento i do vetor de resíduos da estimação é normalizado e submetido a um critério de validação expresso por:

$$r_i^N = \frac{|r_i|}{\sigma_{\Omega_i}} = \frac{|r_i|}{\sqrt{\Omega_{i,i}}} \leq \lambda \quad (2.8)$$

Onde a matriz de covariância dos resíduos $\mathbf{\Omega}$ é definida como:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{R} - \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}})^{-1} \mathbf{H}(\hat{\mathbf{x}})^\top \quad (2.9)$$

Onde:

- r_i^N : representa o resíduo normalizado associado à i -ésima medida;
- $\sigma_{E_i} = \sqrt{E_{i,i}}$: corresponde ao desvio padrão do erro do resíduo da i -ésima medida;
- $\mathbf{\Omega}$: é a matriz de covariância dos resíduos da estimação, de dimensão $(m \times m)$;
- $E_{i,i}$: denota o elemento diagonal da matriz $\mathbf{\Omega}$ correspondente à i -ésima medida;
- λ : representa o limiar adotado para a detecção de erros grosseiros.

A normalização dos resíduos de estimação desempenha um papel fundamental nesse processo, pois diferentes tipos de medidores apresentam variâncias distintas. Assim, um resíduo elevado pode indicar uma inconsistência significativa em uma medida com baixa variância, enquanto pode ser perfeitamente aceitável em outra com alta variância. Dessa forma, ao normalizar os resíduos, todas as medidas são avaliadas na mesma escala estatística, o que permite uma comparação justa entre seus valores absolutos.

Caso o resíduo normalizado de uma medida exceda o limiar λ , essa medida é classificada como portadora de EG e deve ser submetida a procedimentos de mitigação, como sua exclusão da base de dados ou substituição por seu valor estimado [47].

2.5 Análise de Observabilidade

A EE em SEP depende da disponibilidade de um conjunto redundante de medições, distribuídas estrategicamente ao longo da rede elétrica, abrangendo diferentes grandezas elétricas. Essa redundância é essencial para garantir a robustez da estimação e minimizar os impactos de medições incorretas ou de falhas nos sensores.

No âmbito da estimação *estática* de estado, o conceito de observabilidade está diretamente relacionado à suficiência de um plano de medição para a determinação do estado de todo um sistema. A análise de observabilidade pode ser conduzida de forma *offline*, nas fases de projeto e de implementação do estimador, ou de forma *online*, antes da execução da rotina de EE, para verificar se as observações obtidas no instante mais recente são suficientes para a completa funcionalidade do estimador [1].

Em cenários em que a rede é considerada *inobservável*, a análise de observabilidade pode desempenhar um papel crucial na identificação das ilhas observáveis e na determinação das pseudomedidas necessárias para restaurar a observabilidade do sistema. As pseudomedidas são estimativas, geralmente relacionadas à demanda em determinadas barras, e derivam de dados históricos, de resultados de estimações anteriores ou de estudos de previsão de cargas de curto prazo [19]. Para garantir que sua influência no resultado final seja proporcional à sua confiabilidade, as pseudomedidas são comumente tratadas no estimador como tendo variâncias elevadas, o que reflete sua maior incerteza em comparação com as medições reais.

A análise de observabilidade pode ser conduzida por meio de abordagens *topológicas* ou *numéricas*. A abordagem topológica, fundamentada na Teoria dos Grafos, avalia qualitativamente o plano de medição projetado sobre a topologia da rede elétrica. Por outro lado, a abordagem numérica, foco desta seção, emprega métodos baseados na manipulação de matrizes, como as matrizes Jacobiana e de Ganho, por meio de operações de álgebra linear. A condição necessária para que um sistema seja classificado como observável é que essas matrizes tenham posto máximo.

A fim de reduzir o custo computacional sem comprometer a precisão da análise, a observabilidade é, em geral, realizada por meio de um modelo linear simplificado de estimação. Esse modelo faz uso das seguintes simplificações [1] [29] [47]:

- As medições de fluxo e injeção de potência são consideradas pares ativo-reativo;
- As magnitudes de tensão nas barras são assumidas como unitárias;

- As reatâncias série das linhas de transmissão são arbitrariamente definidas como unitárias ($b_{k,m} = 1$);
- As reatâncias shunt e as resistências das linhas de transmissão são desprezadas.

Ao aplicar as simplificações previamente estabelecidas, obtém-se uma relação linear entre o vetor de estado do sistema, composto pelos ângulos de fase das tensões nodais, e as medidas disponíveis (potências ativas e sincrofasores). Essa relação pode ser formalmente expressa pela equação:

$$\tilde{\mathbf{z}} = \tilde{\mathbf{H}} \boldsymbol{\theta} + \tilde{\mathbf{e}} \quad (2.10)$$

Onde:

- $\tilde{\mathbf{z}}$: representa o vetor das medidas ativas (sincrofasores, fluxos e injeções de potência ativa), com dimensão $(m \times 1)$, sendo m a quantidade dessas observações;
- $\tilde{\mathbf{H}}$: é a matriz Jacobiana desacoplada referente ao modelo que relaciona linearmente o estado às observações, com dimensão $(m \times n)$;
- $\boldsymbol{\theta}$: é o vetor de estado, contendo os ângulos de fase das tensões nodais, com dimensão $(n \times 1)$, onde $n = NB - 1$, sendo NB o número total de barras da rede;
- $\tilde{\mathbf{e}}$: é o vetor de erro das medidas consideradas, de dimensão $(m \times 1)$.

A equação (2.10) define um *estimador linear*, no qual se estabelece uma relação linear entre as medições de potência ativa e os ângulos de fase das tensões nodais. Assume-se que as medições de potência ativa e reativa tenham a mesma disponibilidade e que as magnitudes das tensões nodais sejam constantes no modelo. Essa simplificação apoia-se na mesma premissa adotada no modelo de fluxo de potência desacoplado, segundo a qual as potências ativas apresentam maior correlação com os ângulos de fase das tensões nodais, enquanto as potências reativas são mais sensíveis às magnitudes dessas tensões [48]. Essa hipótese permite separar os cálculos das variáveis ativas e reativas, reduzindo a complexidade computacional sem comprometer significativamente a precisão da análise.

O plano de medição considerado combina grandezas convencionais (fluxos e injeções de potência ativa, P_{k-m} e P_k , respectivamente, adquiridas via SCADA) e sincrofasores, fornecidos por PMUs [53], correspondentes aos fasores de corrente de ramo (I_{k-m}) e aos ângulos de fase das tensões nodais (A_k).

Os elementos da matriz Jacobiana $\tilde{\mathbf{H}}$, associados à i -ésima medida, são definidos conforme a natureza da variável medida, como descrito a seguir.

- **Fluxo de potência ativa** P_{k-m} no ramo que conecta as barras k e m :

$$\tilde{H}_{i,k} = b_{k,m}, \quad \tilde{H}_{i,m} = -b_{k,m} \quad (2.11)$$

- **Injeção de potência ativa** P_k na barra k :

$$\tilde{H}_{i,k} = \sum_{m \in \xi} b_{k,m}, \quad \tilde{H}_{i,m} = -b_{k,m}, \quad k \neq m \quad (2.12)$$

onde ξ representa o conjunto de barras adjacentes conectadas à barra k .

- **Fasor de corrente** I_{k-m} no ramo que conecta as barras k e m :

$$\tilde{H}_{i,k} = b_{k,m}, \quad \tilde{H}_{i,m} = -b_{k,m} \quad (2.13)$$

- **Ângulo de fase de tensão nodal** A_k na barra k :

$$\tilde{H}_{i,k} = 1 \quad (2.14)$$

Neste trabalho, adota-se o modelo linear que contempla exclusivamente grandezas do subproblema ativo ($P - \theta$): fluxos e injeções de potência ativa, fasores de corrente e ângulos de fase de tensão. As medidas de magnitude de tensão ($|V|$) pertencem ao subproblema reativo ($Q - V$) e não são objeto de estudo. Salienta-se que tais medidas podem ser incorporadas à análise de observabilidade representando-se cada uma como uma medida de fluxo de potência reativa em um ramo fictício de susceptância unitária conectado a um nó terra, artifício que permite tratá-las de modo análogo às grandezas $P - \theta$ [72].

Com base na estrutura da matriz Jacobiana $\tilde{\mathbf{H}}$, cujos elementos estão definidos pelas equações (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14), podem-se estabelecer as seguintes observações [56]:

- Medidas de fluxo de potência ativa e de fasor de corrente estabelecem uma relação entre os ângulos de fase das tensões nas barras terminais do respectivo ramo;
- Medidas de injeção de potência ativa associam o ângulo de fase da tensão na barra monitorada aos ângulos de fase das tensões nas barras adjacentes;

- Medidas de ângulo de fase de tensão nodal fornecem informação exclusivamente sobre a barra em que são realizadas, sem estabelecer dependência explícita com as demais barras do sistema.

A partir da matriz Jacobiana $\tilde{H}$ característica do modelo linearizado, define-se a matriz de ganho linear $\tilde{G}$ como:

$$\tilde{G} = \tilde{H}^\top \tilde{R}^{-1} \tilde{H} \quad (2.15)$$

Quanto aos erros de medição no contexto do modelo linearizado, considera-se $\tilde{R}$ igual à matriz identidade I , o que implica a hipótese de erros não-correlacionados e com variância unitária. Como a matriz identidade possui a propriedade $I^{-1} = I$ e é o elemento neutro da multiplicação matricial, a equação (2.15) pode ser reescrita na forma simplificada:

$$\tilde{G} = \tilde{H}^\top \tilde{H} \quad (2.16)$$

Um sistema é considerado observável se a matriz de ganho linear $\tilde{G}$ for inversível (ou não singular). Essa propriedade pode ser verificada por meio de técnicas de escalonamento de matrizes, como a eliminação de Gauss, a decomposição de Cholesky ou outros métodos de fatoração matricial. A presença de pivôs nulos na fatoração indica a inobservabilidade do sistema.

A matriz de covariância dos resíduos da estimação linear, denotada por $\tilde{\Omega}$ e de dimensão $m \times m$, é definida por:

$$\tilde{\Omega} = I - \tilde{H} \tilde{G}^{-1} \tilde{H}^\top \quad (2.17)$$

A matriz de covariância dos resíduos $\tilde{\Omega}$ desempenha papel central na análise de *criticalidades*, uma vez que suas propriedades numéricas revelam fragilidades no plano de medição.

2.6 Criticalidades

Para uma combinação de arranjo topológico de rede e plano de medição, a análise de observabilidade determina se é possível estimar o estado completo de um sistema, mas não fornece detalhes sobre a robustez da EE. Em contrapartida, o estudo de criticalidades

fornece um diagnóstico da solidez da observabilidade, evidenciando limitações no tratamento de EG. Além disso, indica cenários de inobservabilidade que podem ocorrer em decorrência da indisponibilidade de medidas durante a execução da EE.

A redundância do plano de medição é um requisito essencial para a confiabilidade da EE, alcançada por meio da implementação de sensores de diferentes tipos, estrategicamente posicionados na rede. A robustez da EE é diretamente beneficiada por essa redundância, tornando-a capaz de compensar eventuais falhas ou inconsistências, como defeitos em sensores, erros de comunicação ou ruídos nas medições. Esse mecanismo de salvaguarda é crucial para manter a estabilidade do estimador, especialmente em sistemas complexos sujeitos a condições adversas.

Por outro lado, a ausência de um sistema de medição robusto não apenas impõe riscos imediatos à observabilidade, mas também prejudica a capacidade da EE de identificar e corrigir observações corrompidas. Essa deficiência pode levar a estimativas imprecisas e, conseqüentemente, à geração de informações de baixa confiabilidade para os operadores. Ademais, tais limitações estão diretamente associadas à presença de dados críticos.

2.6.1 Definições e Terminologia

Define-se uma medida crítica C_1 como um elemento não redundante de um conjunto de observações cuja perda resulta na inobservabilidade do referido sistema [16]. Ademais, a EE torna-se incapaz de mitigar ruídos ou de detectar a ocorrência de EG em dados provenientes de medições realizadas sob essa condição. Sob a perspectiva numérica, os resíduos de estimação associados às C_1 s, bem como suas covariâncias, invariavelmente assumem valor nulo [29]. Esse comportamento evidencia a ausência de informação redundante capaz de corrigir ou depurar eventuais inconsistências nessas medições. Assim, durante a análise de um plano de medição, classifica-se a i -ésima medida como C_1 se:

$$r_i = 0 \quad (2.18)$$

$$\sigma_{\Omega_i} = \sqrt{\Omega_{i,i}} = 0 \quad (2.19)$$

Um par crítico C_2 é um subconjunto do plano de medição formado por duas medidas inicialmente não críticas, nas quais a remoção de uma torna a outra uma C_1 [30]. Na prática, as medidas que formam um mesmo C_2 exibem resíduos idênticos, comprometendo

parte do processo de depuração de EG em dados provenientes delas. Nesse caso, embora a detecção de EG seja factível, torna-se impossível a identificação exata da medida comprometida.

Por outro lado, um conjunto crítico C_{conj} generaliza o conceito de C_2s para grupos de duas ou mais medidas: trata-se de um conjunto de medidas no qual a indisponibilidade de uma qualquer não compromete a observabilidade do sistema, mas torna as remanescentes C_1s , comprometendo a capacidade de detecção de EG sobre elas.

Salienta-se que os elementos de um C_{conj} guardam a *propriedade de reciprocidade* [64]: a criticalidade é simétrica entre pares de medidas, de modo que, se a remoção de uma torna a outra crítica, vale a recíproca. Como consequência, toda combinação de dois elementos de um C_{conj} configura um C_2 [4] e, reciprocamente, C_2s que compartilham medidas constituem um C_{conj} [34]. Assim, a remoção simultânea de quaisquer duas medidas de um C_{conj} compromete a observabilidade.

A cardinalidade de um C_{conj} não pode ser fixada a priori, pois emerge da estrutura de dependências do plano de medição. Por exemplo, se os pares de medidas (a,b) , (a,c) , (a,d) , (b,c) , (b,d) e (c,d) forem todos C_2s , o conjunto $\{a,b,c,d\}$ constitui um C_{conj} de cardinalidade quatro.

Um ponto importante é que os resíduos normalizados das medidas pertencentes a um mesmo C_{conj} apresentam igualdade numérica [31], conforme expresso em:

$$\rho_{k-m} = \frac{r_k^N}{r_m^N} = 1 \quad (2.20)$$

Onde:

- r_k^N e r_m^N : são resíduos normalizados de duas medidas z_k e z_m de um C_{conj} .

Adicionalmente, para duas medidas distintas z_k e z_m pertencentes a um mesmo C_{conj} , o coeficiente de correlação é expresso como [31]:

$$\gamma_{k-m} = \frac{|\Omega_{k,m}|}{\sqrt{\Omega_{k,k}}\sqrt{\Omega_{m,m}}} = 1 \quad (2.21)$$

Onde:

- γ_{k-m} : é o coeficiente de correlação entre as observações z_k e z_m .

O conceito de criticalidade de elementos de rede é generalizado por meio da *k-tupla crítica*, com $k \in \mathbb{N}$ [27] [67]. Formalmente, define-se uma *k-tupla crítica*, denotada por C_k , como um conjunto *minimal* de k medidas cuja indisponibilidade *simultânea* torna o sistema inobservável. A minimalidade estabelece que nenhum subconjunto próprio de uma C_k constitui, por si só, uma criticalidade; isto é, para $k \geq 2$, não existe r -tupla crítica com $1 \leq r < k$ contida em uma C_k .

Assim sendo, a cardinalidade de uma C_k é dada pelo número de medições que a compõem. As C_k s com cardinalidade $k \geq 2$ fornecem informações adicionais sobre a capacidade do sistema de lidar com múltiplos EGs, a partir da análise dos resíduos da estimação. As propriedades fundamentais que caracterizam uma C_k são as seguintes:

- **Propriedade 1** : se r medidas que formam uma C_k são removidas de um sistema, com $r < k$, então as $k - r$ medidas remanescentes caracterizam uma C_{k-r} .

Demonstração : a indisponibilidade de um subconjunto de $j < k$ medidas de uma C_k não resulta em inobservabilidade (*propriedade 1*). Assim, dado um plano de medição sem r medidas de uma C_k , a exclusão adicional das $k - r$ medidas remanescentes equivale a remover todas as k medidas da C_k , tornando o sistema inobservável. Portanto, no contexto em questão, essas $k - r$ medidas constituem uma C_{k-r} . ■

- **Propriedade 2** : para um sistema observado por m medidas, a cardinalidade máxima teórica de uma C_k , denotada por k_{max} , é estabelecida por [46]:

$$k_{max} = m - (n - 1) \quad (2.22)$$

Onde:

- n : é o número de variáveis de estado a serem estimadas no processo de estimação.

- **Propriedade 3** : a submatriz da matriz de covariância dos resíduos $\mathbf{\Omega}$ (ou $\tilde{\mathbf{\Omega}}$) referente a todas as medidas de uma C_k é singular, caracterizando um conjunto linearmente dependente [3] [27].

Como terminologias alternativas para o conceito de conjunto crítico, alguns trabalhos adotam os termos *bad data group* [5] e *conjunto de medidas minimamente dependentes* [42]. Estabeleceu-se a denominação *conjunto k-crítico* na dissertação de Piazza [54], na qual um subconjunto S de medidas é dito *k-crítico* quando a remoção de quaisquer k de seus

elementos preserva a observabilidade do sistema, ao passo que a remoção de quaisquer $k+1$ a compromete. Nessa convenção, indexada pela margem de redundância do conjunto, uma medida crítica (C_1) corresponde a um conjunto 0-crítico.

Esses agrupamentos foram posteriormente estabelecidos como objeto de estudo por Braga Flôr et al. [34], sob a denominação de C_{k-set} , com a caracterização formal e a demonstração prática de sua ocorrência aplicada à identificação de pontos vulneráveis em planos de medição. Nessa formulação, um C_{k-set} é um conjunto de p medidas constituído por C_k s que compartilham $(k-1)$ medidas em comum, sendo o índice dado pela cardinalidade das C_k s constituintes; o conjunto crítico clássico corresponde ao caso $k=2$. A distinção entre os índices das duas convenções reflete grandezas de naturezas distintas: em [54], o índice quantifica uma propriedade do próprio conjunto, sua margem de redundância, ou seja, quantas medidas ele tolera perder antes de tornar-se inobservável; em [34], quantifica a cardinalidade das tuplas críticas que o compõem. Assim, o C_{conj} adotado no presente trabalho é conjunto 1-crítico na convenção de [54], por tolerar uma perda, e um C_{2-set} conforme definido em [34], por ser constituído de C_2 s, o que explica o deslocamento unitário de índice entre as duas convenções.

2.6.2 Identificação Numérica de Criticalidades

A identificação de C_1 s e C_{conj} s em um sistema de medição pode ser realizada de forma eficiente por meio da aplicação de um estimador linear [1]. Para identificação de criticalidades, torna-se suficiente capturar as dependências estruturais entre as medidas. Nesse caso, calcula-se o vetor de resíduos referente ao modelo linear $\tilde{\mathbf{r}}$, com dimensão $(m \times 1)$, através da matriz de covariância dos resíduos $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ e de um vetor de medidas de elementos unitários $\tilde{\mathbf{z}} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^t$ [29]:

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{\Omega}} \tilde{\mathbf{z}} \quad (2.23)$$

Note que, conforme indicado pela equação (2.23), os resíduos das observações no modelo linear são determinados exclusivamente pelos elementos da matriz de covariância dos resíduos $\tilde{\mathbf{\Omega}}$.

Uma abordagem numérica destinada à identificação de C_1 s e C_{conj} s pode ser estruturada nas seguintes etapas:

1. A partir da configuração topológica, descrita pela Y_{barra} , e do plano de medição

do sistema, construir a matriz Jacobiana $\tilde{\mathbf{H}}$ com base nas equações (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14). Construir o vetor de medidas ativas $\tilde{\mathbf{z}}$ com valores unitários (ou arbitrários).

2. Calcular a matriz de covariância dos resíduos da estimação linear $\tilde{\mathbf{\Omega}}$, utilizando a equação (2.17).
3. Para cada elemento $\tilde{z}_i$ do vetor de medidas ativas $\tilde{\mathbf{z}}$, extrair o elemento diagonal correspondente da matriz de covariância dos resíduos $\tilde{\Omega}_{i,i}$. Em seguida, calcular o resíduo correspondente $\tilde{r}_i$, com base na equação (2.23). Classifica-se uma medida $\tilde{z}_i$ como C_1 quando a condição $\tilde{\Omega}_{i,i} = \tilde{r}_i = 0$ é satisfeita.
4. Calcular o resíduo normalizado $\tilde{r}_i^N$ de cada medida ativa não identificada como C_1 , definido através da expressão:

$$\tilde{r}_i^N = \frac{|\tilde{r}_i|}{\sqrt{\tilde{\Omega}_{i,i}}} \quad (2.24)$$

5. Organizar os resíduos normalizados calculados em ordem decrescente.
6. Analisar os resíduos normalizados sequencialmente, agrupando as medidas cujos valores sejam idênticos entre si. Salienta-se que esse agrupamento preliminar reflete possíveis dependências entre as medidas que podem caracterizar $C_{conj}s$.
7. Para cada grupo identificado no passo anterior, proceder da seguinte forma:
 - (a) Determinar o coeficiente de correlação $\tilde{\gamma}_{k-m}$ para todas as combinações de medidas tomadas em pares ($\tilde{z}_k$ e $\tilde{z}_m$) de um mesmo grupo, conforme a expressão:

$$\tilde{\gamma}_{k-m} = \frac{|\tilde{\Omega}_{k,m}|}{\sqrt{\tilde{\Omega}_{k,k}}\sqrt{\tilde{\Omega}_{m,m}}} \quad (2.25)$$

Esse coeficiente quantifica o grau de dependência entre as medidas analisadas.

- (b) Reter no grupo apenas as medidas que exibam correlações unitárias ($\tilde{\gamma}_{k-m} = 1$) entre si.
8. Os grupos resultantes que contêm duas ou mais medidas são identificados como $C_{conj}s$.

Uma técnica comumente adotada na literatura para identificação de $C_k s$ consiste na verificação da singularidade de submatrizes da matriz de covariância dos resíduos

da estimação linear $\tilde{\mathbf{\Omega}}$, concernente a um sistema avaliado. Cada índice das linhas (e colunas) de $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ corresponde a uma observação específica do plano de medição. Seja $\tilde{\mathbf{\Omega}}_k$ uma submatriz de ordem k extraída de $\tilde{\mathbf{\Omega}}$, formada pelas linhas e colunas associadas a um conjunto de k medidas. Ao aplicar técnicas de escalonamento, como a eliminação de Gauss, se for detectada a presença de pivôs nulos em $\tilde{\mathbf{\Omega}}_k$, conclui-se que esta é singular. Se $\tilde{\mathbf{\Omega}}_k$ é singular e nenhuma de suas submatrizes próprias (de ordem menor que k) é singular, então as k medidas associadas formam uma C_k [27]. A identificação das C_k s é realizada de forma incremental, em ordem crescente de cardinalidade, a fim de atender à propriedade de minimalidade.

A identificação de C_k s constitui um problema intrinsecamente combinatório que tem recebido atenção limitada na literatura especializada. Trata-se de um problema NP-difícil [58], o que implica que não é possível determinar, em tempo polinomial, todas as C_k s existentes em um SEP.

2.7 Aspectos Computacionais do Cálculo da Matriz $\tilde{\mathbf{\Omega}}$

Conforme expresso na equação (2.17), a matriz de covariância dos resíduos da estimação linear $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ depende da inversa da matriz de ganho $\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{H}}^\top \tilde{\mathbf{H}}$. O cálculo direto de $\tilde{\mathbf{G}}^{-1}$, entretanto, representa uma operação computacionalmente custosa, especialmente quando o número de medições cresce, dado que o processo de inversão matricial possui elevada carga computacional, cuja complexidade tende a se tornar um gargalo de desempenho à medida que o tamanho do problema escala.

Uma alternativa eficiente para a obtenção dos elementos da matriz de covariância dos resíduos $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ consiste em explorar a fatoração de Cholesky da matriz de ganho $\tilde{\mathbf{G}}$, evitando a formação explícita de sua inversa [1] [27]. Seja a decomposição:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{L}} \tilde{\mathbf{L}}^\top \quad (2.26)$$

Onde:

- $\tilde{\mathbf{L}}$: é uma matriz quadrada e triangular inferior constituída por elementos positivos na diagonal, com a mesma ordem de $\tilde{\mathbf{G}}$.

A partir da fatoração de Cholesky de $\tilde{\mathbf{G}}$, define-se a *matriz auxiliar* $\tilde{\mathbf{T}}$ como:

$$\tilde{T} = \tilde{G}^{-1} \tilde{H}^\top \quad (2.27)$$

Cada linha da matriz $\tilde{H}$ está associada a uma medição específica do sistema, podendo ser representada pelo vetor linha $\tilde{h}_i \in \mathbb{R}^n$, o qual descreve a relação entre as variáveis de estado e a respectiva medida. Assim, a matriz $\tilde{H}$, concernente a um sistema de m medidas tomadas aos pares ativo-reativo, pode ser expressa como:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \\ \vdots \\ \tilde{h}_m \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

Com base nessa definição, as colunas de $\tilde{T}$ podem ser obtidas resolvendo o seguinte sistema linear para cada uma das m medidas, utilizando o método de eliminação de Gauss ou técnicas equivalentes de substituição direta:

$$\tilde{L} \tilde{L}^\top \tilde{T}_i = \tilde{h}_i^\top, \quad 1 \leq i \leq m \quad (2.29)$$

Onde:

- $\tilde{h}_i$: vetor linha da matriz Jacobiana $\tilde{H}$ associado à i -ésima medição;
- $\tilde{T}_i$: i -ésima coluna da matriz auxiliar $\tilde{T}$;
- $\tilde{L}$: matriz triangular inferior proveniente da fatoração de Cholesky de $\tilde{G}$.

Assim, os elementos individuais de $\tilde{\Omega}$ podem ser calculados diretamente como:

$$\tilde{\Omega}_{i,j} = \begin{cases} 1 - \tilde{h}_i \tilde{T}_j, & \text{se } i = j, \\ -\tilde{h}_i \tilde{T}_j, & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad \text{para } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq m. \quad (2.30)$$

Esse procedimento evita a inversão direta da matriz de ganho $\tilde{G}$ e permite o cálculo seletivo de elementos de $\tilde{\Omega}$, característica particularmente útil em análises pontuais de criticalidades de medidas e estudos de observabilidade de sub-regiões de redes de larga escala.

3 Teoria dos Grafos

O capítulo precedente apresentou a EE em Sistemas Elétricos de Potência, com destaque para os problemas de observabilidade e de criticalidades em planos de medição. O presente capítulo introduz os conceitos da Teoria dos Grafos necessários à compreensão da metodologia proposta nesta tese. São apresentadas definições de grafos simples, digrafos e multigrafos, além das propriedades fundamentais de árvores e florestas. Os problemas de conectividade e de coloração de grafos são também abordados de forma concisa, dada sua relevância para os objetivos deste trabalho.

3.1 Sete Pontes de Königsberg

O problema das *Sete Pontes de Königsberg* é um dos mais emblemáticos da história da matemática. Situado na antiga cidade de Königsberg (hoje Kaliningrado, Rússia), o problema envolvia sete pontes que atravessavam o rio Pregel, interligando duas ilhas, denominadas C e D , às margens opostas, identificadas como A e B . Esse arranjo é representado na Figura 2.

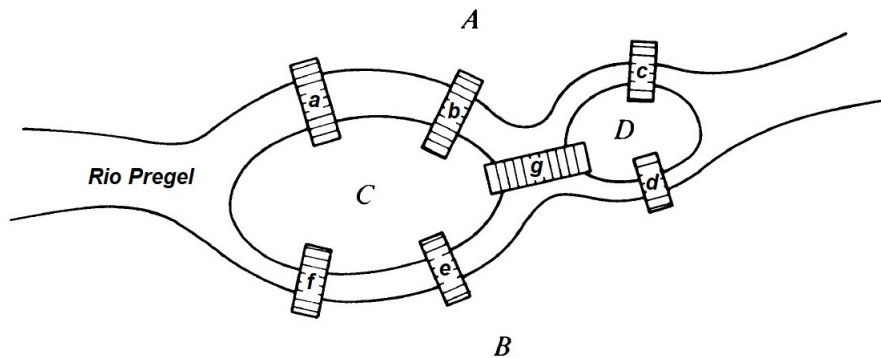


Figura 2: O problema das Sete Pontes de Königsberg. Adaptado de [25].

Durante muito tempo, os habitantes de Königsberg discutiram a possibilidade de percorrer todas as sete pontes em uma caminhada contínua, sem atravessar nenhuma delas mais de uma vez. Essa indagação tornou-se recorrente na tradição local. Em 1736, o matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783) demonstrou a impossibilidade de tal percurso sob as condições estabelecidas.

Um aspecto central no raciocínio de Euler foi a representação abstrata do problema: as regiões terrestres (margens e ilhas) foram modeladas como pontos (vértices) e as pontes como linhas (arestas) que conectam esses pontos. Com isso, os detalhes geográficos tornam-se irrelevantes, e o problema reduz-se à análise de uma estrutura simplificada. O resultado dessa construção é apresentado na Figura 3.

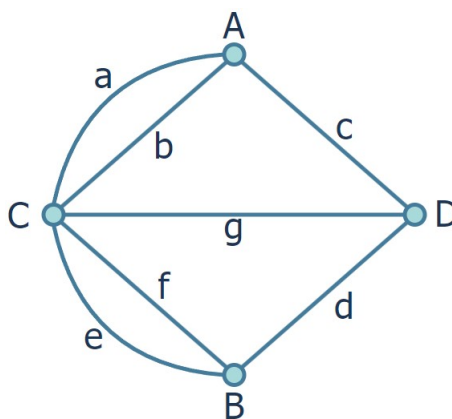


Figura 3: Modelagem do problema das Sete Pontes de Königsberg.

Essa construção é amplamente aceita como a primeira representação formal de um grafo. Euler demonstrou que um percurso contínuo que cruza cada aresta exatamente uma vez (hoje conhecido como *Caminho Euleriano*) só é possível se todos os vértices, exceto eventualmente os de início e fim, possuírem um número par de arestas incidentes. No caso de Königsberg, todos os quatro vértices possuem um número ímpar de arestas, o que torna o percurso inviável.

O trabalho de Euler, publicado em 1736, é reconhecido como o marco inicial da Teoria dos Grafos [2]. Atualmente, essa teoria é amplamente empregada em áreas como a engenharia elétrica, as ciências computacionais e as biológicas [25]. Matematicamente, os grafos permitem representar relações de interdependência entre elementos de um conjunto [39], fornecendo uma base teórica para a análise de problemas topológicos como os explorados nesta tese.

3.2 Definições Iniciais

Um *grafo simples* $\mathcal{G}$ é definido por dois conjuntos: o conjunto de *vértices* $V(\mathcal{G})$ e o conjunto de *arestas* $E(\mathcal{G})$. Cada aresta é um par não ordenado (x, y) de vértices distintos x e y , denominados *extremos* da aresta [55]. Dois vértices unidos por uma aresta são ditos *adjacentes*, *conectados* ou *vizinhos*. Considere o grafo simples $\mathcal{G}$ com $V(\mathcal{G}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $E(\mathcal{G}) = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 7), (6, 7)\}$. A Figura 4 ilustra duas representações geométricas distintas desse mesmo grafo.

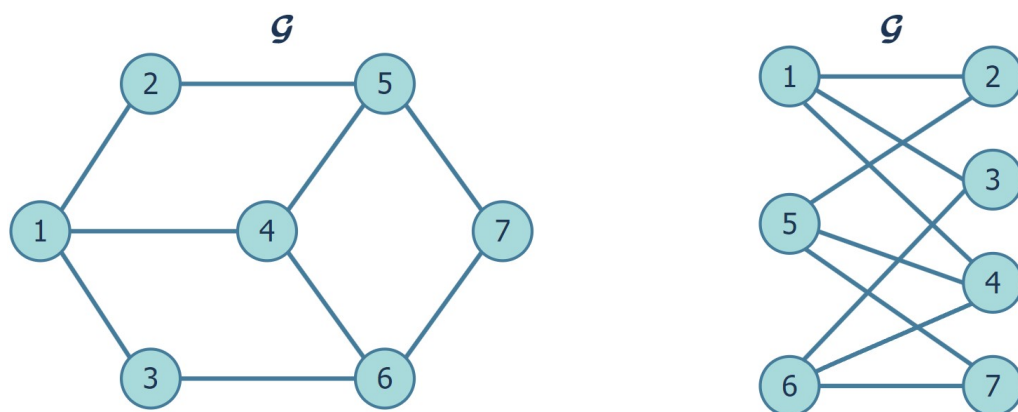


Figura 4: Representações geométricas distintas para o mesmo grafo. Adaptado de [55].

A *ordem* de um grafo $\mathcal{G}$ é a cardinalidade do conjunto de vértices, $|V(\mathcal{G})|$. O *tamanho* de $\mathcal{G}$ é dado por $|E(\mathcal{G})|$. Um *grafo trivial* possui um único vértice. Denomina-se *grafo nulo* aquele com conjuntos de vértices e de arestas vazios [73]. Um *grafo vazio* é aquele que possui vértices, mas não arestas.

O *grau* de um vértice v , denotado por $d(v)$, corresponde ao número de arestas incidentes a ele. A *vizinhança* $N(v)$ de um vértice v é o conjunto de seus vizinhos. Em grafos simples, $d(v) = |N(v)|$. Um vértice com grau zero é dito *isolado*. A Tabela 1 apresenta os graus e as vizinhanças dos vértices do grafo $\mathcal{G}$ ilustrado na Figura 4.

Tabela 1: Grau e vizinhança de cada vértice do grafo exemplo $\mathcal{G}$.

Vértice	1	2	3	4	5	6	7
Grau $d(v)$	3	2	2	3	3	3	2
Vizinhança $N(v)$	{2, 3, 4}	{1, 5}	{1, 6}	{1, 5, 6}	{2, 4, 7}	{3, 4, 7}	{5, 6}

Em um grafo, duas ou mais arestas que unem o mesmo par de vértices são chamadas de *arestas múltiplas*. Uma aresta cujos extremos coincidem em um mesmo vértice é denominada *laço*. Um grafo simples é, por definição, desprovido de arestas múltiplas e de laços. Em contrapartida, um *multigrafo* admite tanto arestas múltiplas quanto laços, constituindo uma generalização do conceito de grafo simples.

As definições de grau e vizinhança permanecem válidas para multigrafos, com a ressalva de que cada laço incidente a um vértice incrementa seu grau em duas unidades. Na representação do conjunto de arestas de um multigrafo, cada aresta é descrita por um par não ordenado acompanhado de um índice adicional, que permite distinguir arestas múltiplas.

A Figura 5 ilustra um multigrafo $\mathcal{M}$ com $V(\mathcal{M}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ e $E(\mathcal{M}) = \{(1, 2, 0), (1, 3, 0), (1, 4, 0), (1, 4, 1), (2, 5, 0), (3, 6, 0), (3, 6, 1), (3, 6, 2), (4, 4, 0), (4, 5, 0), (4, 6, 0), (5, 7, 0), (5, 7, 1), (5, 7, 2), (6, 7, 0), (6, 7, 1)\}$.

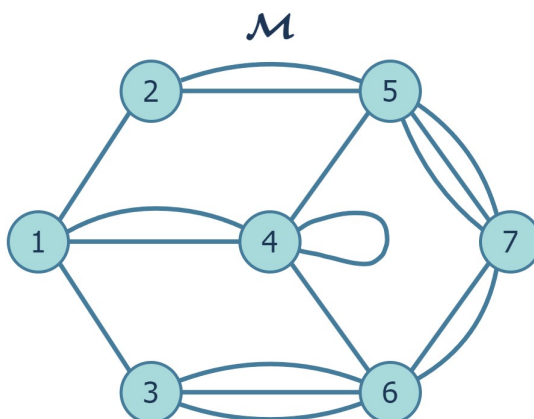


Figura 5: Representação de um multigrafo.

3.3 Subgrafos

Um grafo $\mathcal{H}$ é *subgrafo* de um grafo $\mathcal{G}$ quando $V(\mathcal{H}) \subseteq V(\mathcal{G})$ e $E(\mathcal{H}) \subseteq E(\mathcal{G})$. Denota-se essa relação por $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$.

Um subgrafo $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ é denominado *próprio* quando $V(\mathcal{H}) \subset V(\mathcal{G})$ e $E(\mathcal{H}) \subset E(\mathcal{G})$, isto é, quando $\mathcal{H}$ é estritamente menor que $\mathcal{G}$ [55]. A Figura 6 exemplifica um subgrafo próprio $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$.

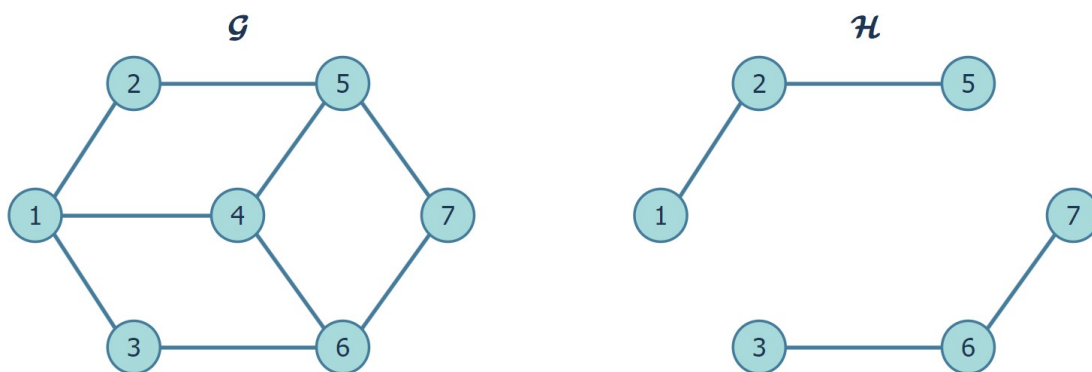


Figura 6: Exemplo de um subgrafo próprio $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$.

Um *subgrafo gerador* (*spanning subgraph*) de $\mathcal{G}$ é um subgrafo $\mathcal{H}$ que contém todos os vértices de $\mathcal{G}$, mas não necessariamente todas as arestas de $\mathcal{G}$. Formalmente, $V(\mathcal{H}) = V(\mathcal{G})$ e $E(\mathcal{H}) \subseteq E(\mathcal{G})$ [55]. A Figura 7 apresenta um subgrafo gerador $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$.

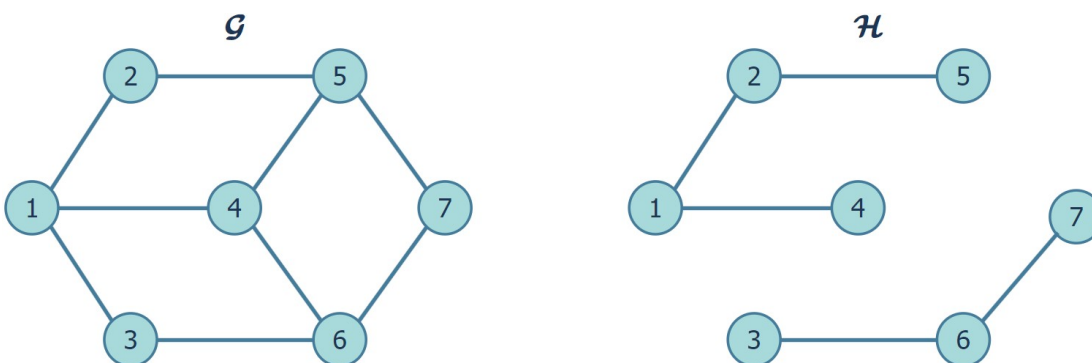


Figura 7: Exemplo de um subgrafo gerador $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$.

Seja $X_v \subseteq V(\mathcal{G})$ um subconjunto de vértices de $\mathcal{G}$. O *subgrafo induzido por X_v* , denotado $\mathcal{G}[X_v]$, é o subgrafo $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ formado por todos os vértices de X_v e todas as arestas de $\mathcal{G}$ cujos extremos pertencem a X_v , ou seja, $V(\mathcal{H}) = X_v$ e $E(\mathcal{H}) = \{(x, y) \mid x, y \in X_v \text{ e } (x, y) \in E(\mathcal{G})\}$ [55]. A Figura 8 ilustra o subgrafo induzido $\mathcal{G}[X_v]$ com $X_v = \{1, 3, 4, 5\}$.

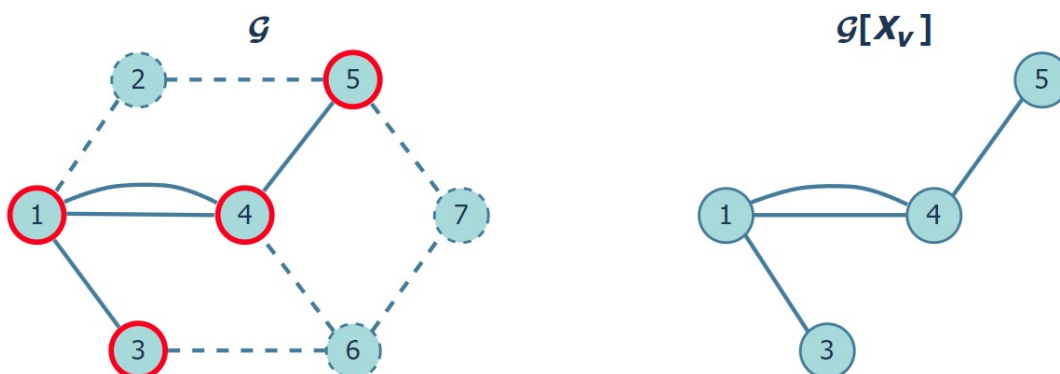


Figura 8: Subgrafo induzido $\mathcal{G}[X_v]$ de $\mathcal{G}$.

De forma análoga, dado um subconjunto de arestas $X_e \subseteq E(\mathcal{G})$, o *subgrafo induzido por X_e* , denotado por $\mathcal{G}[X_e]$, é o subgrafo $\mathcal{H}$ que contém todas as arestas de X_e e todos os vértices de $\mathcal{G}$ que são extremos dessas arestas. A Figura 9 ilustra o subgrafo induzido $\mathcal{G}[X_e]$ com $X_e = \{(1, 3), (1, 4), (4, 5)\}$.

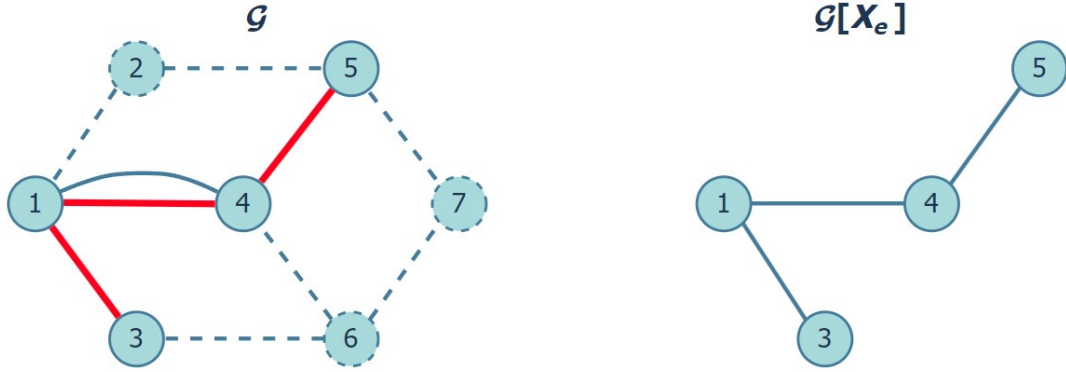


Figura 9: Subgrafo induzido $\mathcal{G}[X_e]$ de $\mathcal{G}$.

3.4 Notações e Manipulações Estruturais em Grafos

Dado um grafo $\mathcal{G}$ e uma aresta $e \in E(\mathcal{G})$, denota-se por $\mathcal{G} - e$ o grafo obtido pela remoção de e . Para dois vértices não adjacentes $x, y \in V(\mathcal{G})$, a notação $\mathcal{G} + (x, y)$ representa o grafo obtido pela inserção da aresta (x, y) .

Da mesma forma, para um vértice $v \in V(\mathcal{G})$, o grafo $\mathcal{G} - v$ é aquele obtido pela exclusão de v e de todas as arestas a ele incidentes, enquanto $\mathcal{G} + v$ representa a adição de v à estrutura de $\mathcal{G}$. Para um subconjunto $X_v \subseteq V(\mathcal{G})$, a expressão $\mathcal{G} - X_v$ refere-se ao subgrafo induzido por $V(\mathcal{G}) \setminus X_v$, ou seja, $\mathcal{G}[V(\mathcal{G}) \setminus X_v]$.

A *união* de dois grafos $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, denotada por $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$, é o grafo cujos conjuntos de vértices e arestas são dados por:

$$V(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2) = V(\mathcal{G}_1) \cup V(\mathcal{G}_2) \quad \text{e} \quad E(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2) = E(\mathcal{G}_1) \cup E(\mathcal{G}_2).$$

A *interseção* entre $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$, denotada por $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$, restringe-se aos elementos comuns:

$$V(\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2) = V(\mathcal{G}_1) \cap V(\mathcal{G}_2) \quad \text{e} \quad E(\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2) = E(\mathcal{G}_1) \cap E(\mathcal{G}_2).$$

Dois grafos $\mathcal{G}_1$ e $\mathcal{G}_2$ são *disjuntos em vértices* quando $V(\mathcal{G}_1) \cap V(\mathcal{G}_2) = \emptyset$, e *disjuntos em arestas* quando $E(\mathcal{G}_1) \cap E(\mathcal{G}_2) = \emptyset$. A disjunção em vértices implica disjunção em arestas, mas a recíproca não é verdadeira: grafos disjuntos em arestas podem compartilhar vértices [55].

O *complemento* de um grafo simples $\mathcal{G}$, denotado por $\overline{\mathcal{G}}$, é o grafo com o mesmo conjunto de vértices ($V(\overline{\mathcal{G}}) = V(\mathcal{G})$) e cujas arestas são exatamente aquelas ausentes em $\mathcal{G}$, de modo que $E(\mathcal{G}) \cap E(\overline{\mathcal{G}}) = \emptyset$. Assim, dois vértices adjacentes em $\mathcal{G}$ não são adjacentes em $\overline{\mathcal{G}}$, e vice-versa. A Figura 10 ilustra um grafo $\mathcal{G}$ e seu complemento $\overline{\mathcal{G}}$.

A união de $\mathcal{G}$ com $\overline{\mathcal{G}}$ resulta em um *grafo completo*, no qual todos os pares de vértices são adjacentes entre si.

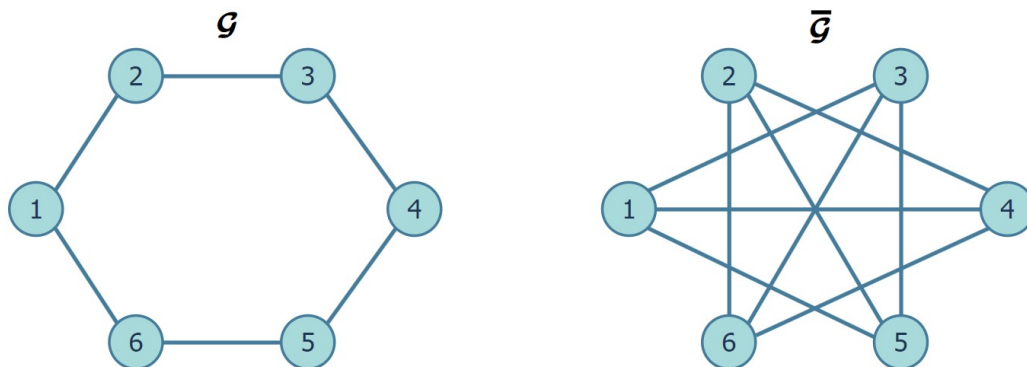


Figura 10: Complemento $\overline{\mathcal{G}}$ de um grafo simples $\mathcal{G}$.

3.5 Caminhos e Ciclos

Em um grafo $\mathcal{G}$, um *passeio* (*walk*) é uma sequência de vértices $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$ tal que $(v_i, v_{i+1}) \in E(\mathcal{G})$ para $1 \leq i \leq k-1$. Um passeio admite a repetição de vértices e arestas. Quando o vértice inicial coincide com o final ($v_1 = v_k$), tem-se um *passeio fechado*; caso contrário, um *passeio aberto*. Considerando o grafo $\mathcal{G}$ da Figura 4:

- $W_1 = \langle 6, 7, 5, 4, 6, 3 \rangle$ é um passeio aberto; e
- $W_2 = \langle 6, 7, 5, 4, 6, 3, 1, 4, 6 \rangle$ é um passeio fechado.

Uma *trilha* (*trail*) é um passeio sem repetição de arestas, embora os vértices possam ser revisitados. As trilhas são classificadas como abertas ou fechadas conforme a coincidência entre os vértices inicial e final. Para o grafo $\mathcal{G}$ da Figura 4:

- $T_1 = \langle 1, 4, 6, 3, 1, 2, 5 \rangle$ é uma trilha aberta;
- $T_2 = \langle 1, 2, 5, 4, 1 \rangle$ é uma trilha fechada.

Um *caminho* (*path*) é um passeio sem repetição de vértices. Como não há vértices repetidos, não há arestas repetidas, de modo que todo caminho é uma trilha, mas a recíproca não é verdadeira [55] [73]. O *comprimento* de um caminho é dado pelo número de arestas que o compõem.

Em grafos simples, um *ciclo* (*cycle*) é um passeio $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k$ cujos vértices intermediários são distintos e cujo vértice final coincide com o inicial ($v_1 = v_k$) [9]. O menor ciclo em grafos simples possui comprimento 3 e é denominado *triângulo*. Em multigrafos, o menor ciclo possui comprimento 2, formado por um par de arestas múltiplas. Ciclos são classificados como *pares* ou *ímpares* conforme a paridade de seus comprimentos.

Uma *corda* é uma aresta que conecta dois vértices não consecutivos de um caminho ou de um ciclo. A Figura 11 ilustra um caminho com cordas de comprimento 5 no grafo $\mathcal{G}$ e um ciclo com cordas de comprimento 6 no grafo $\mathcal{H}$. Um caminho sem cordas é denominado *caminho induzido* e, analogamente, um ciclo sem cordas é denominado *ciclo induzido*. A Figura 12 apresenta um caminho induzido de comprimento 3 em $\mathcal{G}$ e um ciclo induzido de comprimento 4 em $\mathcal{H}$.

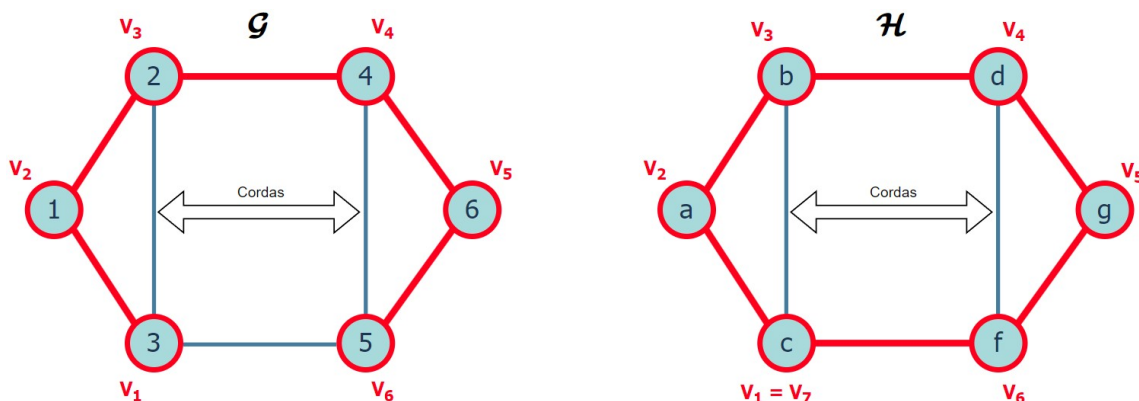


Figura 11: Caminho e ciclo com cordas.

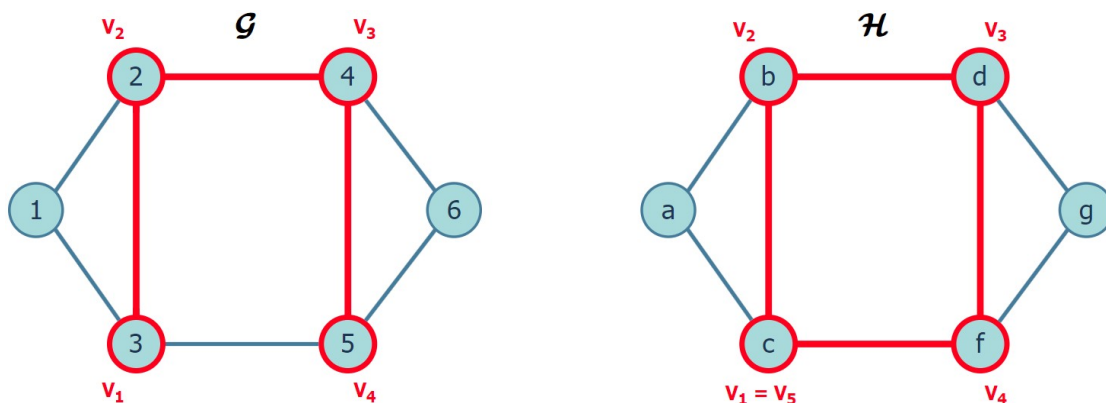


Figura 12: Caminho e ciclo induzidos.

Caminhos e ciclos podem ser tratados como subgrafos, em lugar de seqüências de vértices [55]. Assim sendo, um caminho $\mathcal{P}$ é um subgrafo com $V(\mathcal{P}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\}$, onde $v_1 \neq v_k$, e $E(\mathcal{P}) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq k-1\}$. Analogamente, um ciclo $\mathcal{C}$ é um subgrafo com $V(\mathcal{C}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\}$, onde $v_1 = v_k$, e $E(\mathcal{C}) = \{(v_i, v_{i+1}) \mid 1 \leq i \leq k-1\}$.

3.6 Digrafos

Os grafos apresentados até aqui são *não direcionados*: suas arestas não possuem orientação, de modo que a adjacência entre vértices é recíproca. Em contraste, um *grafo direcionado* (ou *digrafo*) $\mathcal{D}$ é definido por um conjunto de vértices $V(\mathcal{D})$ e um conjunto de *arcos* (ou *arestas direcionadas*) $A(\mathcal{D})$ [13].

Cada arco é um par ordenado (x, y) de vértices distintos, onde x é o *extremo inicial* e y é o *extremo final*. Nesse contexto, x é *vizinho de entrada* de y e y é *vizinho de saída* de x [55]. Um arco (x, y) é dito *divergente* de x e *convergente* a y . Os arcos (x, y) e (y, x) são distintos e podem coexistir no mesmo digrafo [68]. A Figura 13 apresenta uma representação geométrica de um digrafo.

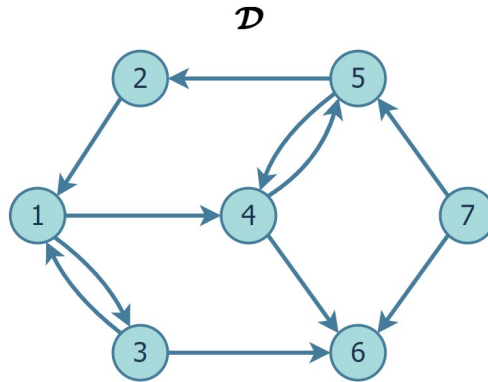


Figura 13: Representação geométrica de um digrafo.

Para um vértice $v \in V(\mathcal{D})$, define-se a *vizinhança de saída* $N^+(v)$ como o conjunto de vizinhos de saída de v e a *vizinhança de entrada* $N^-(v)$ como o conjunto de vizinhos de entrada. O *grau de saída*, $d^+(v) = |N^+(v)|$, indica o número de arcos divergentes de v , e o *grau de entrada*, $d^-(v) = |N^-(v)|$, o número de arcos convergentes a v .

No digrafo da Figura 13, o vértice 4 possui vizinhança de saída $N^+(4) = \{5, 6\}$ e vizinhança de entrada $N^-(4) = \{1, 5\}$, com $d^+(4) = d^-(4) = 2$. Um vértice com grau de entrada igual a zero é denominado *fonte*, como o vértice 7, para o qual $d^-(7) = 0$. Um vértice com grau de saída igual a zero é denominado *sumidouro*, como o vértice 6, com $d^+(6) = 0$.

Muitas propriedades de grafos não direcionados se estendem aos digrafos [68], de modo que se definem *passeio direcionado*, *trilha direcionada*, *caminho direcionado* e *ciclo direcionado* de forma análoga às definições da Seção 3.5, com a restrição de que os arcos impõem orientação às sequências de vértices. A Figura 14 ilustra um caminho direcionado no digrafo $\mathcal{D}_1$ e um ciclo direcionado no digrafo $\mathcal{D}_2$.

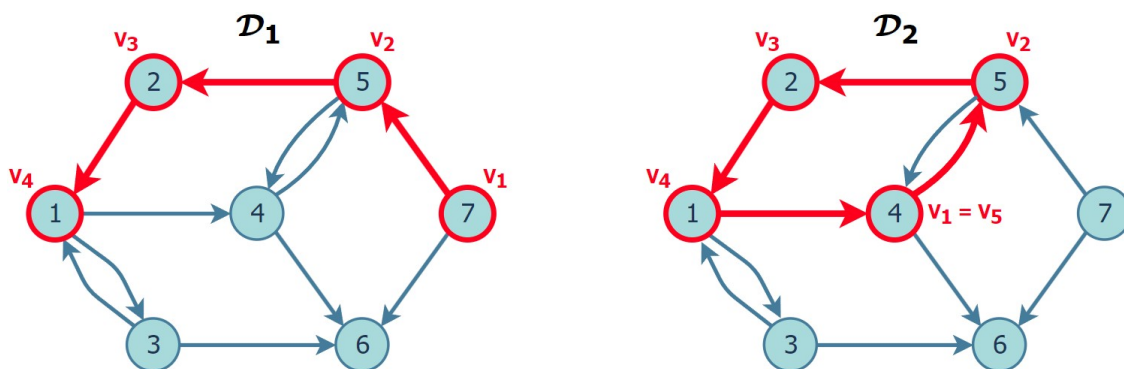


Figura 14: Caminho e ciclo direcionados nos digrafos $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$, respectivamente.

Diferentemente dos ciclos em grafos simples, que possuem comprimento mínimo igual a 3, os ciclos direcionados podem envolver apenas dois vértices distintos x e y , pois os arcos (x, y) e (y, x) podem coexistir [55]. A Figura 15 ilustra esses ciclos direcionados de comprimento mínimo.

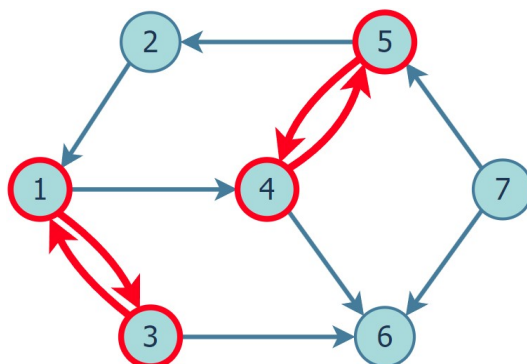


Figura 15: Ciclos direcionados triviais em um digrafo.

Seja um caminho direcionado em $\mathcal{D}$ com origem em s e término em t . Nesse caso, diz-se que s *alcança* t e que t é *alcançado por* s [68]. Além disso, s é denominado *predecessor* de t e t é *sucessor* de s [55]. Por exemplo, se os arcos (s, x) e (x, t) formam um caminho, então s alcança t indiretamente por meio de x , sucessor de s e predecessor de t .

3.7 Bipartição em Grafos

Um *grafo bipartido* é um grafo $\mathcal{G}$ cujo conjunto de vértices $V(\mathcal{G})$ pode ser particionado em dois subconjuntos disjuntos X e Y , de modo que toda aresta de $E(\mathcal{G})$ possua um extremo em X e outro em Y . Assim, X e Y são conjuntos independentes. Uma consequência dessa propriedade é a ausência de ciclos de comprimento ímpar em grafos bipartidos [55]. A Figura 16 apresenta dois exemplos: um grafo bipartido não direcionado e um digrafo bipartido.

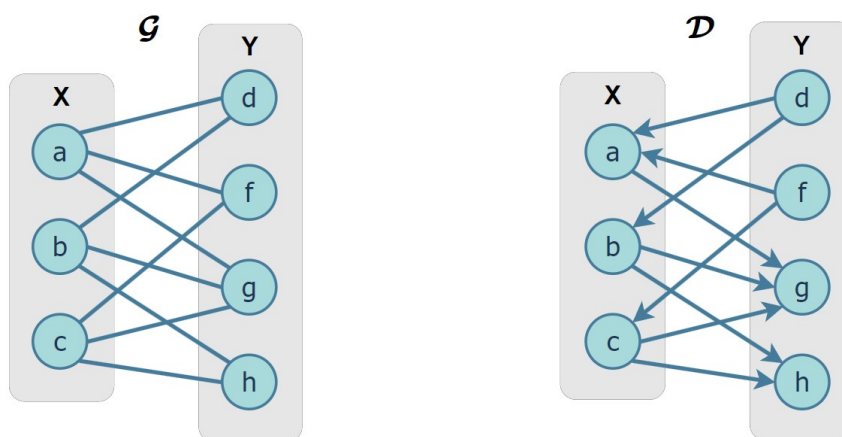


Figura 16: Exemplos de grafos bipartidos.

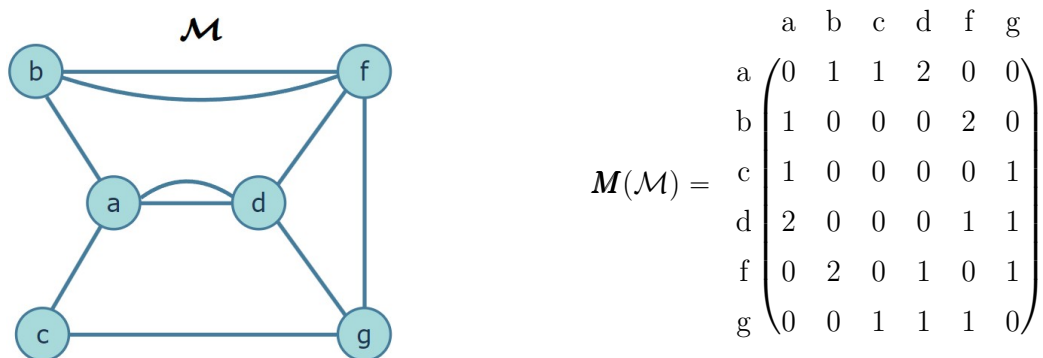
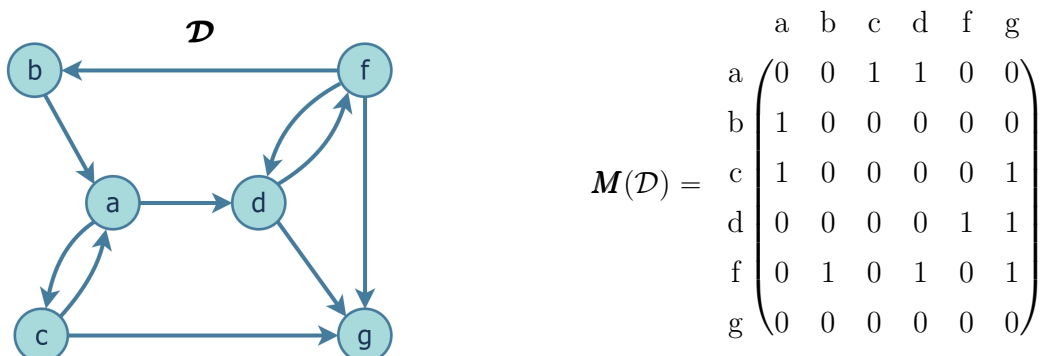
3.8 Matrizes e Listas de Adjacência de Grafos

A representação geométrica de um grafo é conveniente para visualização, mas em casos mais complexos torna-se necessário representá-lo como uma estrutura de dados adequada ao processamento computacional.

A *matriz de adjacências* $\mathbf{M}(\mathcal{G})$ de um grafo $\mathcal{G}$ é uma matriz quadrada de ordem $|V(\mathcal{G})|$, cujos elementos são dados por:

$$M(\mathcal{G})_{i,j} = \begin{cases} k, & \text{se existirem } k \text{ arestas } (i,j) \in E(\mathcal{G}); \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Para grafos não direcionados, a matriz de adjacência é simétrica; basta armazenar sua parte triangular superior ou inferior. Para digrafos, a matriz é assimétrica, refletindo a orientação dos arcos. As Figuras 17 e 18 apresentam as matrizes de adjacência de um multigrafo $\mathcal{M}$ e de um digrafo $\mathcal{D}$, respectivamente.

Figura 17: Matriz de adjacência referente a um multigrafo $\mathcal{M}$.Figura 18: Matriz de adjacência referente a um digrafo $\mathcal{D}$.

A *lista de adjacência* consiste em um vetor de listas encadeadas, cujos índices correspondem aos vértices do grafo. Para grafos não direcionados, cada lista armazena a vizinhança do vértice correspondente; para digrafos, armazena a vizinhança de saída. As Figuras 19 e 20 ilustram as listas de adjacência de um grafo simples $\mathcal{G}$ e de um digrafo $\mathcal{D}$.

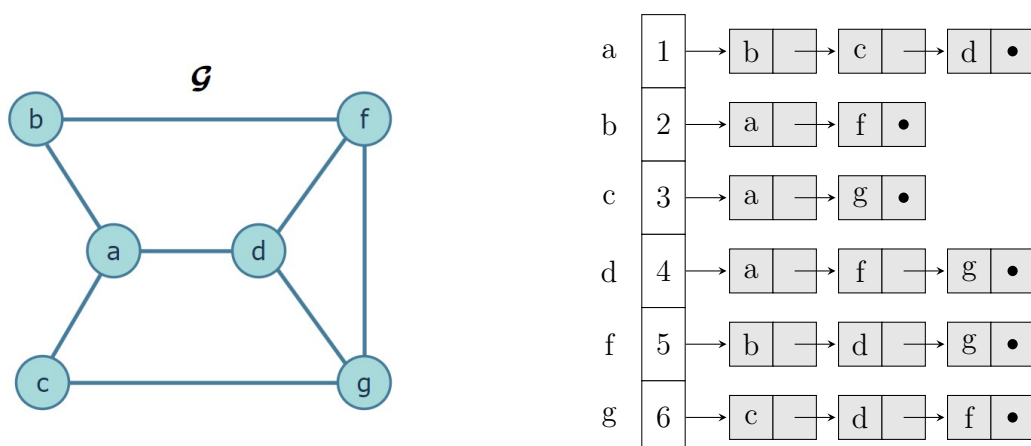


Figura 19: Um grafo não direcionado e a lista de adjacência correspondente.

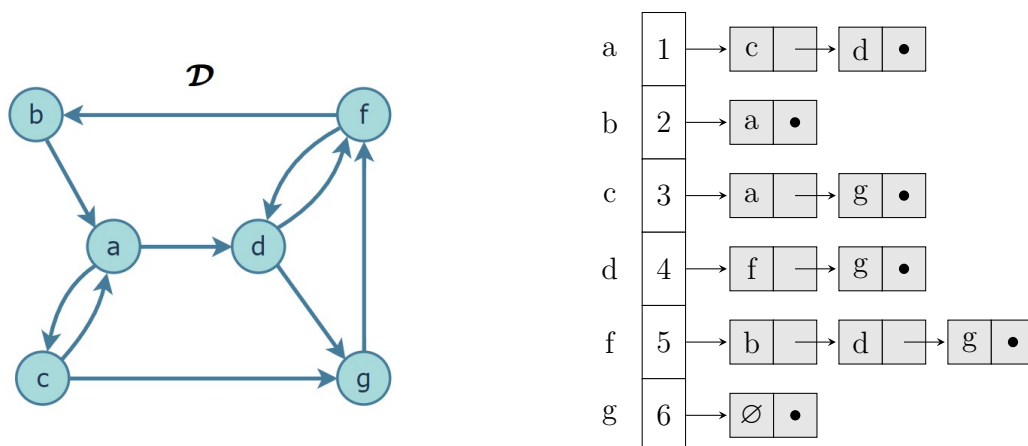


Figura 20: Um digrafo e a lista de adjacência correspondente.

Multigrafos podem ser representados por um *vetor de vetores de listas encadeadas*, permitindo gerenciar arestas múltiplas de forma explícita.

Em termos de espaço, a matriz de adjacência requer $|V(\mathcal{G})|^2$ posições, independentemente da densidade do grafo. A lista de adjacência demanda, no máximo, $|V(\mathcal{G})| + 2|E(\mathcal{G})|$ posições para grafos não direcionados e $|V(\mathcal{D})| + |A(\mathcal{D})|$ para digrafos, sendo mais eficiente em grafos esparsos. Quanto ao desempenho, a verificação de adjacência entre dois vértices é realizada em tempo constante $O(1)$ na matriz de adjacência, enquanto na lista de adjacência requer, no pior caso, tempo $O(|V(\mathcal{G})|)$ [55].

3.9 Subconjuntos Maximais e Minimais

Seja S um conjunto e P uma propriedade definida sobre subconjuntos de S . Um subconjunto $S_a \subseteq S$ é *maximal* com respeito a P quando: (i) S_a satisfaz P ; e (ii) não existe $S_b \subseteq S$ que satisfaça P e contenha S_a propriamente. Por sua vez, S_a é *máximo* quando: (i) S_a satisfaz P ; e (ii) $|S_a| \geq |S_b|$ para todo $S_b \subseteq S$ que satisfaça P . Todo subconjunto máximo é maximal, mas a recíproca não é verdadeira [55].

Para ilustrar, considere o grafo $\mathcal{G}$ da Figura 21 e a propriedade P de “ser conjunto independente”, isto é, um subconjunto de vértices mutuamente não adjacentes. Nesse caso, $S_{a1} = \{1, 5, 6\}$ é um conjunto independente maximal e $S_{a2} = \{2, 3, 4, 7\}$ é um conjunto independente máximo.

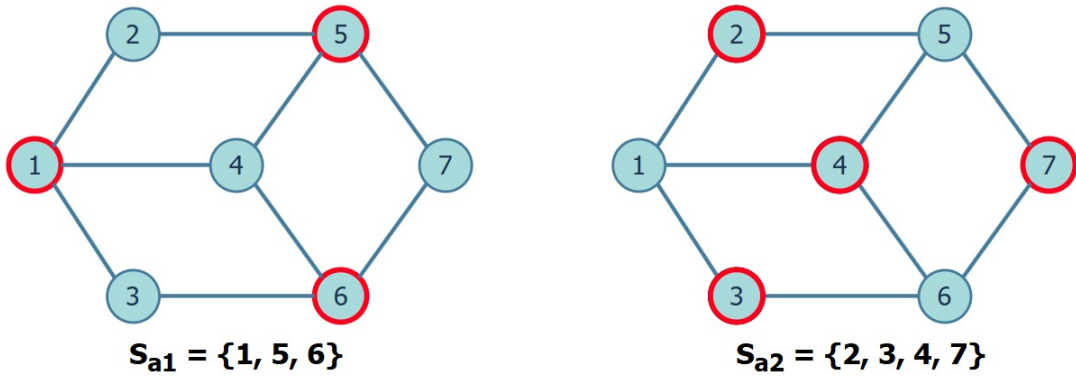


Figura 21: Subconjuntos maximal e máximo concernentes aos conjuntos independentes.

De forma análoga, S_a é *minimal* com respeito a P quando: (i) S_a satisfaz P ; e (ii) não existe $S_b \subset S_a$ que satisfaça P . Por sua vez, S_a é *mínimo* quando: (i) S_a satisfaz P ; e (ii) $|S_a| \leq |S_b|$ para todo $S_b \subseteq S$ que satisfaça P . Todo subconjunto mínimo é minimal, mas nem todo minimal é mínimo [55].

No contexto da EE, essas definições são diretamente aplicáveis ao estudo de criticidades. Seja S o conjunto de medidas de um plano de medição e P a propriedade de “tornar o sistema inobservável”. Uma k -tupla crítica C_k é um subconjunto minimal $S_a \subseteq S$ cuja remoção leva à inobservabilidade. As C_{ks} de menor cardinalidade constituem os subconjuntos mínimos de S que possuem essa propriedade.

3.10 Grafos Conexos e Componentes Conexas

Um grafo $\mathcal{G}$ é *conexo* se, para qualquer par de vértices em $V(\mathcal{G})$, existir ao menos um caminho que os conecte. Caso contrário, $\mathcal{G}$ é *desconexo*.

Os subgrafos conexos maximais de $\mathcal{G}$ são denominados *componentes conexas*. A quantidade de componentes conexas é denotada por $w(\mathcal{G})$. Se $\mathcal{G}$ é conexo, então $w(\mathcal{G}) = 1$ [38] [55]. A Figura 22 ilustra um grafo desconexo $\mathcal{G}$ com $w(\mathcal{G}) = 3$ e um grafo *totalmente desconexo* $\mathcal{H}$, onde $w(\mathcal{H}) = |V(\mathcal{H})| = 7$.

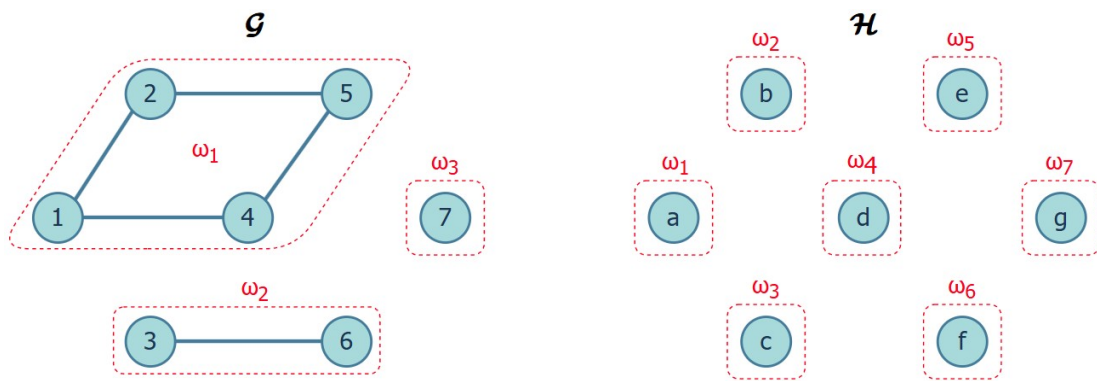
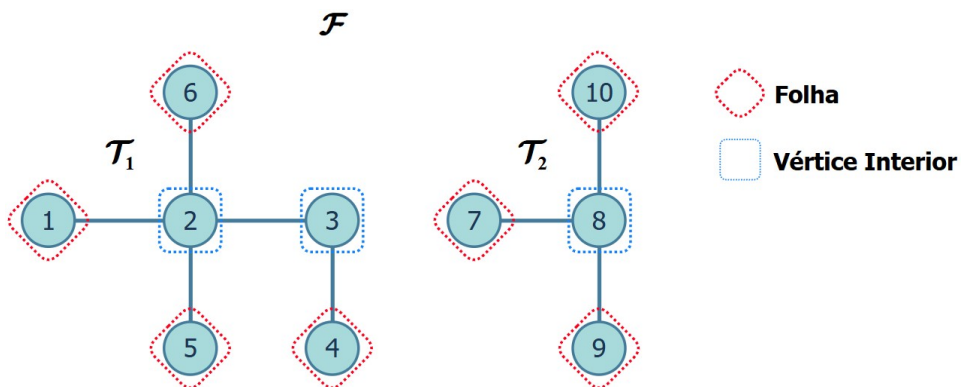


Figura 22: Grafos desconexos.

3.11 Árvores e Florestas

Um grafo é *acíclico* quando não contém ciclos. Uma *árvore* $\mathcal{T}$ é um grafo acíclico e conexo. Uma árvore com n vértices possui exatamente $n - 1$ arestas [68]. Uma árvore é dita *trivial* quando $|V(\mathcal{T})| = 1$. Uma *floresta* $\mathcal{F}$ é um grafo acíclico, formado por um conjunto de árvores quando desconexa. Assim, toda árvore é um caso particular de floresta.

Em uma árvore $\mathcal{T}$, um vértice v com $d(v) = 1$ é denominado *folha*, e um vértice com $d(v) > 1$ é denominado *vértice interior*. Árvores não triviais possuem entre duas e $n - 1$ folhas [55]. A Figura 23 ilustra uma floresta composta por duas árvores.

Figura 23: Uma floresta $\mathcal{F}$ formada por duas árvores.

Uma *árvore geradora* (*spanning tree*) de um grafo conexo $\mathcal{G}$ é um subgrafo gerador acíclico e conexo. Todo grafo conexo possui ao menos uma árvore geradora [55]. A Figura 24 apresenta uma árvore geradora $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$.

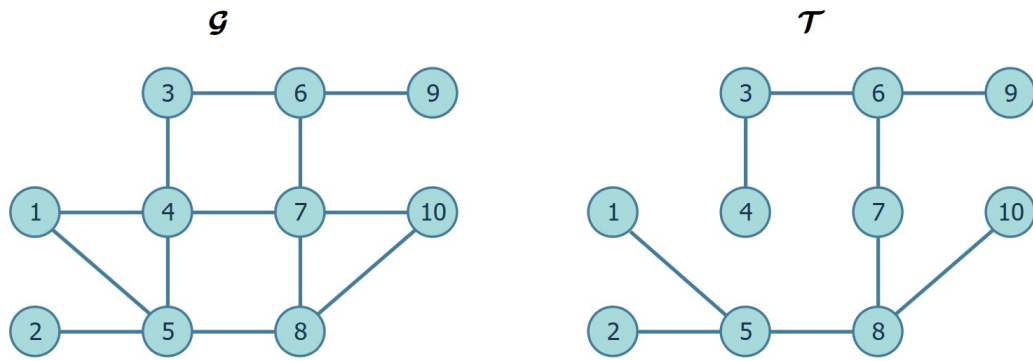


Figura 24: Uma árvore geradora $\mathcal{T}$ de um grafo não direcionado $\mathcal{G}$.

Uma propriedade fundamental das árvores geradoras é que a inserção de qualquer aresta $e \in E(\mathcal{G}) \setminus E(\mathcal{T})$ em $\mathcal{T}$ resulta na formação de exatamente um ciclo em $\mathcal{T} + e$. Isso decorre do fato de que, sendo $\mathcal{T}$ conexa e acíclica, existe um único caminho entre quaisquer dois de seus vértices; a inserção de uma aresta cria um segundo caminho entre seus extremos, formando necessariamente um ciclo. A prova completa pode ser encontrada em [55] e [73]. Essa propriedade também se aplica a multigrafos, nos quais o ciclo mínimo é formado por um par de arestas múltiplas.

A Figura 25 ilustra essa propriedade para a árvore geradora da Figura 24. Considerando $E(\mathcal{G}) \setminus E(\mathcal{T}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, a inserção de e_1 , e_2 , e_3 e e_4 forma, respectivamente, os ciclos $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ e $\mathcal{C}_4$.

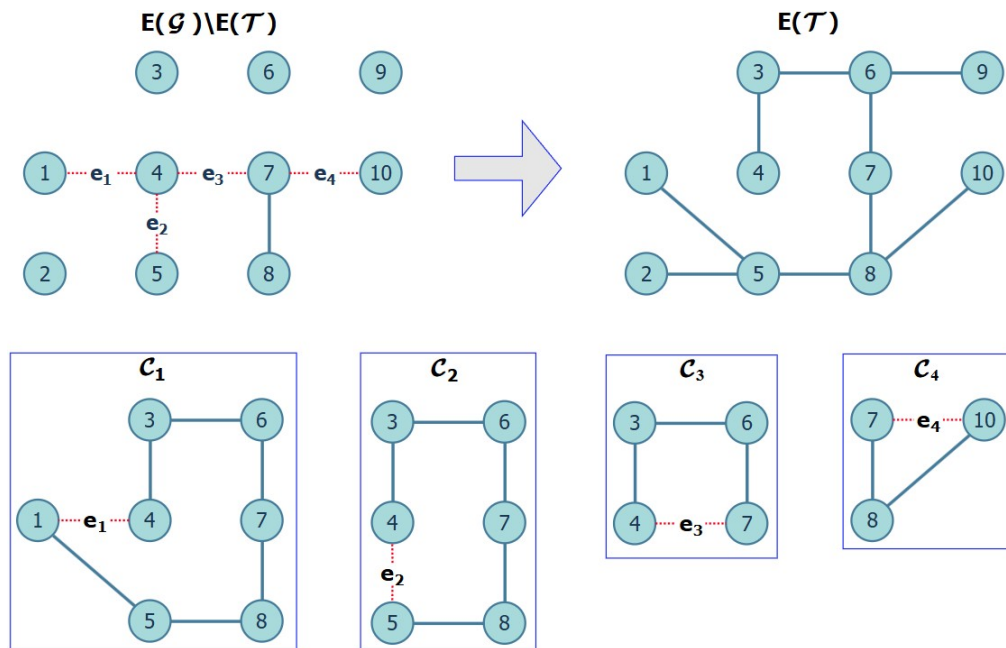


Figura 25: Possíveis formações de ciclos na árvore geradora exemplo.

3.12 Árvores Geradoras Arco-Íris

A coloração de arestas de um grafo $\mathcal{G}$ consiste em atribuir cores (ou rótulos) a cada aresta de $E(\mathcal{G})$ por meio de uma função $f : E(\mathcal{G}) \rightarrow K$, onde K é um conjunto de cores, frequentemente representado por números naturais. Um subconjunto $S \subseteq E(\mathcal{G})$ é dito *arco-íris* se todas as suas arestas possuem cores distintas entre si [6] [14].

Uma *árvore geradora arco-íris* (*rainbow spanning tree*) de um grafo conexo $\mathcal{G}$ com arestas coloridas é uma árvore geradora cujas arestas possuem cores mutuamente distintas [6] [8] [14] [37]. A Figura 26 ilustra um grafo $\mathcal{G}$ com arestas coloridas e uma árvore geradora arco-íris $\mathcal{T}$, na qual os números associados às arestas são identificadores, empregados apenas para referenciar cada aresta individualmente, sem representar pesos ou custos; a propriedade arco-íris é determinada pelas cores.

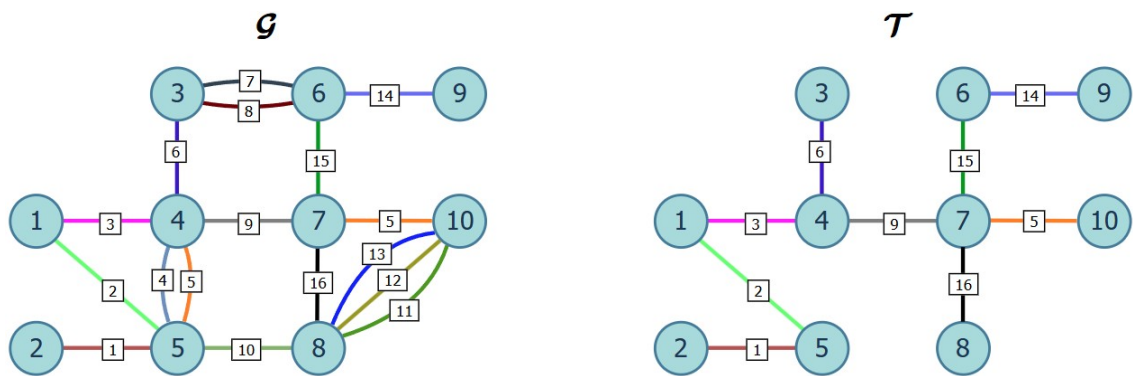


Figura 26: Uma árvore geradora arco-íris $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$.

Nem todo grafo conexo com arestas coloridas admite uma árvore geradora arco-íris. Quando toda árvore geradora possível contém pelo menos duas arestas de mesma cor, tal árvore não existe. A Figura 27 exemplifica essa situação: as arestas rotuladas como “red”, de mesma cor, são indispensáveis a qualquer árvore geradora de $\mathcal{G}^*$, o que impede que esse grafo admita uma árvore geradora arco-íris.

As cores das arestas podem ser interpretadas como rótulos, de modo que a unicidade de cores em uma árvore geradora arco-íris corresponde à unicidade de rótulos em suas arestas. Essa correspondência é explorada na formulação metodológica deste trabalho.

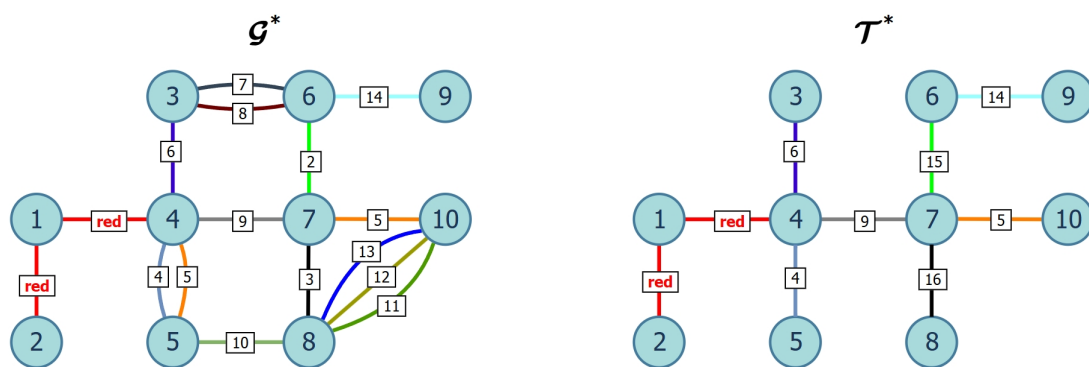


Figura 27: Uma árvore geradora $\mathcal{T}^*$ de $\mathcal{G}$ sem coloração arco-íris.

3.13 Cortes, Articulações e Co-ciclos

Em um grafo conexo $\mathcal{G}$, um *corte de vértices* é um subconjunto minimal $V' \subseteq V(\mathcal{G})$ cuja remoção desconecta o grafo, isto é, $w(\mathcal{G} - V') > 1$. Um vértice $v \in V(\mathcal{G})$ cuja remoção isolada desconecta $\mathcal{G}$ é denominado *articulação*. Como a remoção de um vértice implica a exclusão de todas as suas arestas incidentes, vértices de grau unitário não constituem articulações. A Figura 28 exemplifica um corte de vértices V' e uma articulação v .

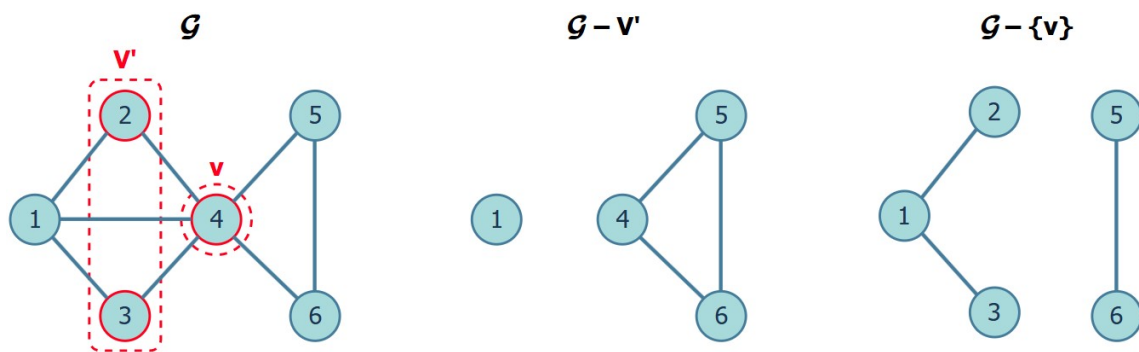


Figura 28: Um corte de vértices V' e uma articulação v de um grafo.

Analogamente, um *conjunto desconectante* é um subconjunto de arestas $E' \subseteq E(\mathcal{G})$ cuja remoção desconecta $\mathcal{G}$, resultando em $w(\mathcal{G} - E') > 1$ [55]. Uma aresta $e \in E(\mathcal{G})$ cuja remoção desconecta $\mathcal{G}$ é denominada *ponte*. A Figura 29 apresenta um conjunto desconectante E' e uma ponte e .

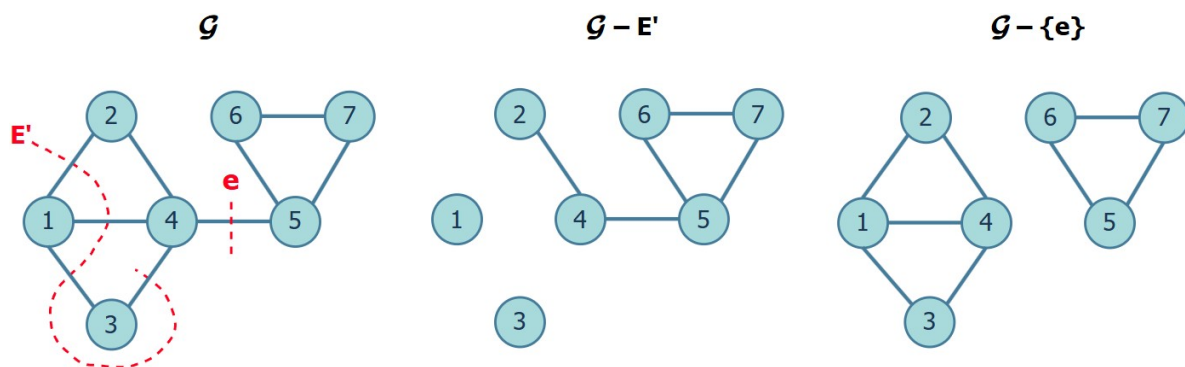


Figura 29: Um conjunto desconectante E' e uma ponte e de um grafo.

Sejam S e $\bar{S} = V(\mathcal{G}) \setminus S$ subconjuntos complementares de vértices de $\mathcal{G}$, com S não vazio e próprio. O *corte de arestas* $[S, \bar{S}]$ é o conjunto de arestas com um extremo em S e outro em $\bar{S}$ [55] [73]. A Figura 30 ilustra um corte de arestas $[S, \bar{S}]$ com $S = \{1, 3, 4\}$ e $\bar{S} = \{2, 5, 6, 7\}$.

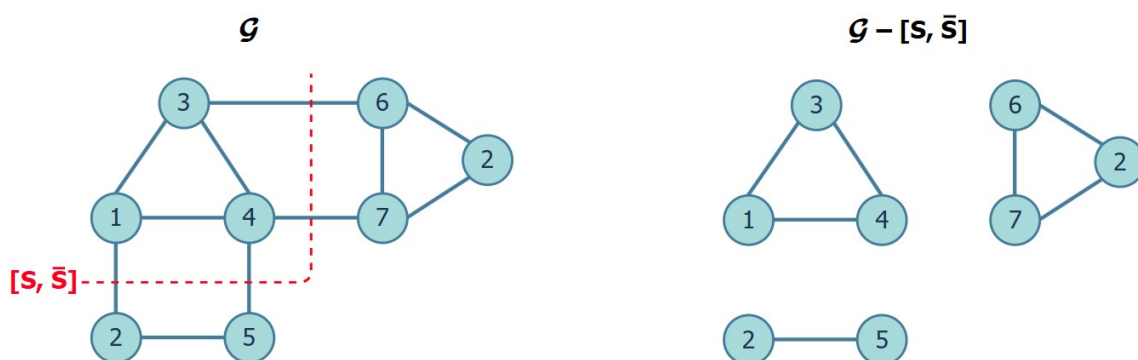


Figura 30: Um corte de arestas $[S, \bar{S}]$ de um grafo.

Um corte de arestas minimal $F = [S, \bar{S}]$ é denominado *co-ciclo* (*co-cycle*) ou *ligação* (*bond*). Em um grafo conexo $\mathcal{G}$, a remoção de um co-ciclo resulta em exatamente duas componentes conexas, isto é, $w(\mathcal{G} - F) = w(\mathcal{G}) + 1$ [55] [73]. Consequentemente, um co-ciclo não contém propriamente outro conjunto desconectante. A Figura 31 apresenta dois co-ciclos F_1 e F_2 de um grafo $\mathcal{G}$.

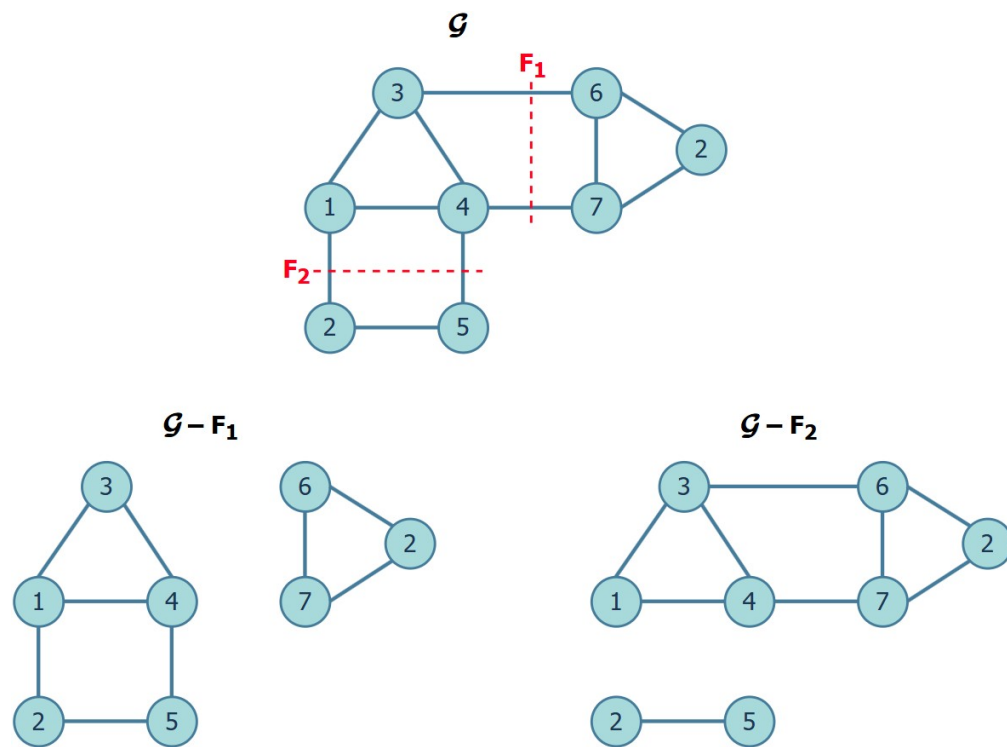


Figura 31: Exemplos de co-ciclos de um grafo.

4 Metodologias

Este capítulo descreve as metodologias desenvolvidas para análise de observabilidade e criticalidade de medidas na EE, utilizando exclusivamente grafos, sem operações aritméticas de ponto flutuante. Tais propostas fundamentam-se nos conceitos apresentados nos capítulos anteriores. Inicialmente, discute-se o conceito de observabilidade sob a perspectiva da Teoria dos Grafos, detalhando o processo de mapeamento entre ramos da rede elétrica e elementos do plano de medição correspondente. Em seguida, descreve-se uma modelagem baseada em multigrafos para representar a área de cobertura de cada tipo de medida do sistema. Por fim, descrevem-se as técnicas desenvolvidas para confirmar a observabilidade e a identificação de C_1s , C_2s e $C_{conj}s$.

4.1 Premissas

Um SEP é considerado observável quando as medições redundantes, processadas em uma topologia de rede específica, permitem estimar integralmente seu estado operativo, definido pelas tensões nodais complexas. A inobservabilidade, por outro lado, reflete um plano de medição inadequado, que prejudica o funcionamento do módulo de EE no SGE. Identificar ilhas observáveis torna-se, portanto, uma abordagem estratégica, possibilitando a estimação do estado dessas regiões ou o uso dessas informações para reforçar o plano de medição, visando restaurar a observabilidade global do sistema.

A abordagem numérica para análise de observabilidade, descrita na [Seção 2.4](#), baseia-se no modelo linear de estimação, verificando o posto da matriz Jacobiana $\tilde{H}$. Um SEP é *algebricamente observável* quando o posto de $\tilde{H}$ é máximo, isto é, com valor igual à dimensão do vetor de estado θ [44]. Equivalentemente, pode-se confirmar a observabilidade de um sistema pela matriz de ganho $\tilde{G}$, sendo observável quando $\det(\tilde{G}) \neq 0$. Por depender de operações com ponto flutuante, essa abordagem é vulnerável a erros de arredondamento, truncamento e problemas de condicionamento numérico.

A abordagem topológica para avaliar a observabilidade de um sistema, em contraste com o método numérico, não demanda cálculos em ponto flutuante, apoiando-se exclusivamente em operações lógicas. À vista disso, os dados de entrada se resumem a valores binários e inteiros que fornecem informações sobre a conectividade da rede, o tipo e a localização de cada medida. Do mesmo modo que o enfoque numérico, fundamenta-se a abordagem topológica no modelo linear de estimação, em que as medidas são agrupadas em pares ativo-reativo.

O grafo que modela a rede elétrica é denominado *grafo de rede*, com vértices representando barras e arestas correspondendo a ramos [56] [64]. No âmbito do modelo linear de estimação, seja uma rede elétrica representada pelo grafo $\mathcal{G}$, supervisionada por medidas reunidas no conjunto M . Essa rede é considerada topologicamente observável se, e somente se, existir uma árvore geradora $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$, formada por $|E(\mathcal{T})| = n - 1$ arestas atribuídas a $n - 1$ elementos distintos (medidas) de M , onde $n = |V(\mathcal{G})| = |V(\mathcal{T})|$ [44].

A árvore geradora $\mathcal{T}$ induzida por um grafo de rede, referida como *árvore geradora observável* ou *árvore geradora de posto máximo*, é a estrutura de referência para a observabilidade topológica. O processo de associação de elementos de M às arestas de $\mathcal{G}$ é restrito pelo tipo e pela localização de cada medida, conforme determinado pela estrutura da matriz Jacobiana $\tilde{\mathbf{H}}$. Uma medida $z \in M$ é atribuída a uma aresta $e \in E(\mathcal{G})$ se: (i) z mede fluxo de potência ou corrente no ramo e ; ou (ii) z mede injeção de potência em uma barra conectada a e , conforme a estrutura de $\tilde{\mathbf{H}}$ [56].

A Figura 32 apresenta uma rede elétrica de 6 barras e 7 ramos, supervisionada por 5 medidas de fluxo de potência e 2 de injeção de potência. O grafo de rede correspondente a essa rede e uma árvore geradora observável, indicando que esse sistema é topologicamente observável, são apresentados na Figura 33.

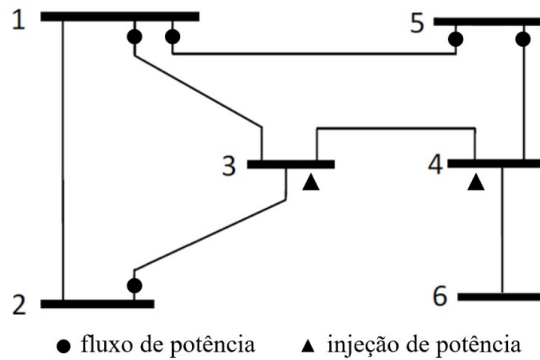


Figura 32: Rede de 6 barras monitorada por 7 medidas.

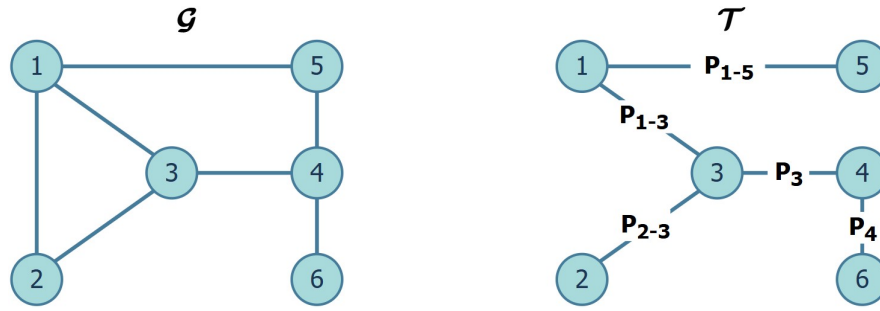


Figura 33: Grafo de rede e uma árvore geradora observável referentes ao sistema de 6 barras e 7 medidas.

As possibilidades de atribuições de medidas z , pertencentes a um plano de medição M , a arestas do grafo de rede $\mathcal{G}$ correspondente, e consequentemente de uma árvore geradora $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$, estão relacionadas na Tabela 2. Essas correspondências entre medidas e arestas do grafo de rede (ou ramos da rede) representam a influência de cada medida no processo de obtenção de estimativas das tensões nodais complexas de um SEP.

Tabela 2: Possibilidades de atribuição de medidas às arestas no sistema-exemplo.

$z \in M$	$e \in E(\mathcal{G})$
P_{1-3}	(1, 3)
P_{1-5}	(1, 5)
P_{2-3}	(2, 3)
P_{5-1}	(5, 1)
P_{5-4}	(5, 4)
P_3	(1, 3), (2, 3) e (3, 4)
P_4	(3, 4), (4, 5) e (4, 6)

Neste trabalho, por conveniência prática dos métodos topológicos para as análises de observabilidade e criticalidades, abstrai-se a combinação das informações de conectividade da rede avaliada, representadas pelo grafo de rede, com o referido plano de medição, que especifica o tipo e a localização de cada medida, no grafo designado *multigrafo de medições*. Esse multigrafo, originalmente proposto por Quintana, Simões Costa e Mandel [56], elenca todas as possibilidades de atribuição de medidas ativas e reativas às arestas do grafo de rede correspondente.

4.2 Multigrafo de Medições

Um multigrafo de medições é uma estrutura de abstração que integra informações de topologia e de plano de medição de uma rede elétrica. Cada aresta do grafo corresponde a uma medida específica do sistema, identificada por um rótulo ou, alternativamente, por uma cor. A presença de uma árvore geradora observável no multigrafo, com rótulos distintos (ou cores distintas) nas arestas, indica que o sistema é topologicamente observável. Quando as medidas são representadas por arestas coloridas, a identificação de uma árvore geradora arco-íris (*rainbow spanning tree*) é suficiente para confirmar a observabilidade. A quantidade de rótulos distintos (ou cores distintas) em arestas de uma árvore geradora observável equivale ao posto da matriz Jacobiana $\tilde{H}$.

Sejam um grafo de rede $\mathcal{G}$ e um plano de medição M concernentes a um SEP. Para construção do multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$ do referido sistema:

1. Cria-se um vértice em $\mathcal{Z}_M$ para cada vértice $v \in V(\mathcal{G})$, resultando em um multigrafo caracterizado pelo conjunto de vértices $V(\mathcal{Z}_M) = V(\mathcal{G})$;
2. Para cada medida de fluxo de potência $P_{k-m} \in M$ e de corrente fasorial $I_{k-m} \in M$, instaladas no ramo $k-m$ e, conseqüentemente, atribuíveis à aresta $(k, m) \in E(\mathcal{G})$, cria-se uma aresta com rótulo (ou cor) distinto das demais arestas em $\mathcal{Z}_M$ e com extremos $k, m \in V(\mathcal{Z}_M)$, conforme a Figura 34;



Figura 34: Representação de medidas de fluxo de potência e corrente de ramo num multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$.

3. Para cada medida de injeção de potência $P_k \in M$, instalada na barra k e atribuível às arestas de $\mathcal{G}$ com extremo em k , criam-se arestas com rótulos (ou cores) iguais entre si e distintas das demais arestas de $\mathcal{Z}_M$, com um extremo k e outro extremo em $N(k) \subseteq V(\mathcal{Z}_M)$ (vizinhança da barra k), de acordo com a Figura 35; e

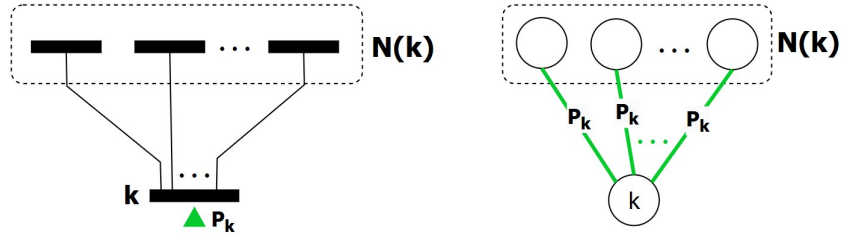


Figura 35: Representação de medida de injeção num multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$.

4. Para cada medida de ângulo de fase de tensão $A_k \in M$, instalada na barra k , cria-se uma aresta com rótulo (ou cor) diferente das demais arestas em $\mathcal{Z}_M$, conectando o vértice k ao 0. Salienta-se que o vértice 0 representa a referência angular do sistema e não constitui a rede elétrica, ou seja, $0 \notin V(\mathcal{G})$. Com a existência de medidas de ângulo, caracteriza-se $\mathcal{Z}_M$ pelo conjunto de vértices $V(\mathcal{Z}_M) = V(\mathcal{G}) \cup \{0\}$. A Figura 36 exemplifica a representação de A_k em $\mathcal{Z}_M$.

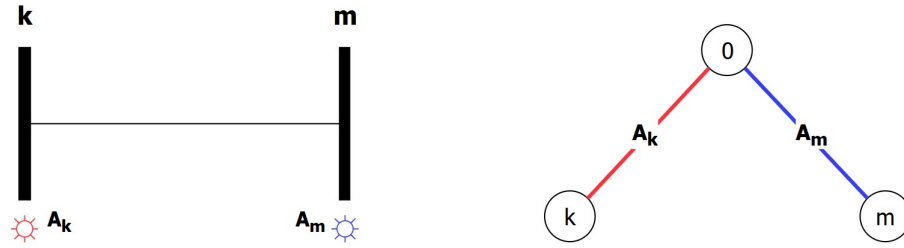


Figura 36: Representação de medida de ângulo num multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$.

Denominam-se *arestas de fluxo* as arestas do multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$ que representem medidas de fluxo de potência, fasor de corrente de ramo e de ângulo de fase de tensão. As arestas de $\mathcal{Z}_M$ que definem as medidas de injeção de potência são designadas como *arestas de injeção*. Salienta-se que as arestas de injeção possuem apenas extremos que correspondem a barras reais da rede elétrica (isto é, não incidem no vértice 0).

Cabe destacar em que situações a distinção entre rótulos (ou cores) efetivamente restringe quais arestas podem compor uma árvore geradora observável. Para medidas de fluxo de potência, fasor de corrente de ramo e ângulo de fase de tensão, a correspondência entre medida e aresta é biunívoca, isto é, cada uma dessas medidas dá origem a uma única aresta em $\mathcal{Z}_M$, com rótulo (ou cor) distinto dos demais por construção. Nesses casos, a unicidade de rótulos é satisfeita automaticamente, não constituindo restrição efetiva. A restrição de coloração torna-se efetiva apenas para as medidas de injeção de potência, representadas por múltiplas arestas de mesmo rótulo (ou cor), das quais no máximo

uma pode integrar uma árvore geradora observável. Desse modo, a caracterização da observabilidade topológica como a existência de uma árvore geradora arco-íris equivale a tratar as arestas de fluxo como classes de cor unitárias, ficando a restrição de coloração limitada às arestas de injeção.

Como ilustração, um sistema de 6 barras com um plano de medição composto por 4 medidas de fluxo de potência, 2 medidas de fasor de corrente de ramo, 2 medidas de ângulo e 2 de medidas de injeção é apresentado na Figura 37. O multigrafo de medições correspondente é ilustrado na Figura 38. A análise topológica de observabilidade consiste na identificação de uma árvore geradora observável no multigrafo de medições que representa o sistema em estudo.

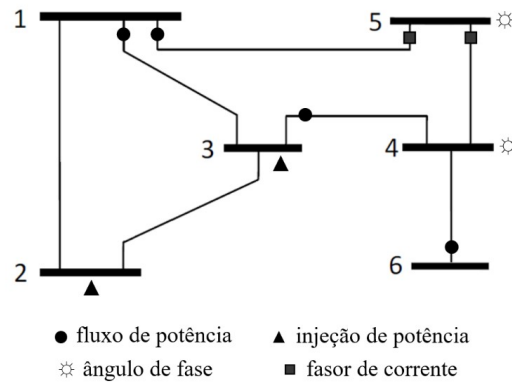


Figura 37: Um sistema exemplo de 6 barras monitorado por 10 medidas.

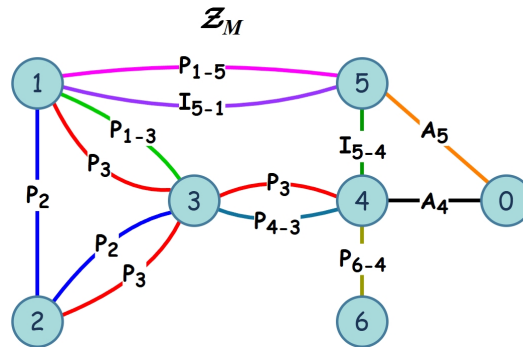


Figura 38: Multigrafo de medições que modela o sistema exemplo.

4.3 Análise de Observabilidade Topológica

O multigrafo de medições é a instância de entrada do algoritmo desenvolvido neste trabalho para a análise de observabilidade topológica. Basicamente, o objetivo é construir uma árvore geradora observável (ou árvore geradora arco-íris) a partir das arestas de fluxo e

de injeção que compõem um multigrafo de medições. Caso o algoritmo identifique essa árvore, classifica-se o sistema como topologicamente observável. Se tal árvore não existe no multigrafo, confirma-se a inobservabilidade, e o algoritmo retorna uma floresta de tamanho máximo formada por árvores observáveis, que delineiam as ilhas observáveis do sistema. Ressalta-se que o mapeamento topológico das ilhas observáveis torna eficiente o processo de inserção de pseudomedidas para restabelecimento da observabilidade global.

Seja um multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$, que modela um sistema, e um grafo vazio $\mathcal{T}$ definido pelos conjuntos de vértices $V(\mathcal{T}) = V(\mathcal{Z}_M)$ e arestas $E(\mathcal{T}) = \emptyset$. O algoritmo para análise de observabilidade topológica, desenvolvido neste trabalho, utiliza arestas de $\mathcal{Z}_M$ para a expansão de $\mathcal{T}$ e, conseqüentemente, para a construção de uma árvore geradora ou floresta máxima observável, respeitando as restrições enumeradas a seguir.

1. Uma aresta de fluxo $e_f \in E(\mathcal{Z}_M)$ **não** pode ser adicionada a $\mathcal{T}$ se $\mathcal{T} + e_f$ formar um ciclo, definido pelo conjunto de arestas $\mathcal{R}_{ciclo}$.
2. Uma aresta de injeção $e_p \in E(\mathcal{Z}_M)$ **não** pode ser adicionada a $\mathcal{T}$ se $\mathcal{T} + e_p$ possui um ciclo, caracterizado pelo conjunto de arestas $\mathcal{R}_{ciclo}$, e/ou possui um par de arestas de mesmo rótulo (ou cor), estabelecido pelo conjunto de arestas $\mathcal{R}_{cor}$.

Em síntese, a expansão de $\mathcal{T}$ com as arestas de fluxo e injeção de $\mathcal{Z}_M$ não pode conter ciclos, a fim de preservar a estrutura de árvore ou floresta. No caso das arestas de injeção, deve-se restringir a repetição de arestas de mesmo rótulo na expansão de $\mathcal{T}$, pois o objetivo é identificar uma árvore geradora com unicidade de rótulos das arestas (ou, equivalentemente, árvore geradora arco-íris). De acordo com a modelagem estabelecida, os rótulos das arestas de fluxo são únicos em $\mathcal{Z}_M$, distinguindo-as das arestas de injeção. Assim, enquanto as arestas de fluxo estão sujeitas a uma única restrição (aciclicidade), as arestas de injeção devem satisfazer simultaneamente duas restrições (aciclicidade e unicidade de rótulos), tornando-se necessária a divisão do processo em duas etapas [56] [65] [64]:

1. Processamento de arestas de fluxo; e
2. Processamento de arestas de injeção.

4.3.1 Processamento de Arestas de Fluxo

O algoritmo proposto para o processamento de arestas de fluxo utiliza o multigrafo $\mathcal{Z}_F$, o subgrafo induzido por todas as arestas de fluxo do multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$. O

principal objetivo consiste na construção de uma floresta $\mathcal{T}_F$ com as arestas de $\mathcal{Z}_F$. A única restrição existente é a aciclicidade de $\mathcal{T}_F$, viabilizando estratégias gulosas.

Neste trabalho, a implementação fundamenta-se na busca em profundidade (*Depth-First Search*) [69], que explora a estrutura do multigrafo $\mathcal{Z}_F$ para induzir uma floresta de profundidade em $\mathcal{T}_F$. O pseudocódigo correspondente encontra-se apresentado no Algoritmo 1.

Algoritmo 1: Processamento de arestas de fluxo.

Entrada: Multigrafo $\mathcal{Z}_F$.

Saída: A floresta de profundidade $\mathcal{T}_F$ induzida por $\mathcal{Z}_F$.

```

1  início
2  |  $\mathcal{T}_F : V(\mathcal{T}_F) \leftarrow V(\mathcal{Z}_F)$  e  $E(\mathcal{T}_F) \leftarrow \emptyset$ ; // Inicialização de  $\mathcal{T}_F$ .
3  | para cada  $v \in V(\mathcal{Z}_F)$  faça
4  | |  $visitado[v] \leftarrow falso$ ;
5  | para cada  $v \in V(\mathcal{Z}_F)$  faça
6  | | se  $visitado[v] = falso$  então
7  | | | DFS-Visit( $\mathcal{T}_F, \mathcal{Z}_F, v$ );
8  | retorna  $\mathcal{T}_F$ ;
9  procedimento DFS-Visit( $\mathcal{T}_F, \mathcal{Z}_F, v$ )
10 |  $visitado[v] \leftarrow verdadeiro$ ;
11 | para cada  $w \in \mathcal{Z}_F.N(v)$  faça //  $\mathcal{Z}_F.N(v)$  denota a vizinhança de  $v$  em  $\mathcal{Z}_F$ .
12 | | se  $visitado[w] = falso$  então
13 | | |  $E(\mathcal{T}_F) \leftarrow E(\mathcal{T}_F) \cup \{(v, w)\}$ ;
14 | | | DFS-Visit( $\mathcal{T}_F, \mathcal{Z}_F, w$ );

```

No Algoritmo 1, inicializa-se o grafo simples $\mathcal{T}_F$ com os vértices do multigrafo $\mathcal{Z}_F$ e sem arestas (linha 2). Ao passo que os vértices de $\mathcal{Z}_F$ são recursivamente visitados (linhas 7 e 14) em uma sequência estabelecida pela busca em profundidade, inserem-se arestas com um extremo visitado e outro não visitado em $\mathcal{T}_F$ (linha 13). Nesse trabalho, adotou-se uma busca em profundidade orientada por vértices, por isso as arestas com ambos os extremos visitados são ignoradas, o que assegura a ausência de ciclos e arestas múltiplas em $\mathcal{T}_F$. O algoritmo termina quando todos os vértices de $\mathcal{Z}_F$ são visitados (isto é, quando todos os elementos do vetor *visitado* estão definidos com o valor booleano *verdadeiro*), retornando a floresta de profundidade $\mathcal{T}_F$. Se $\mathcal{T}_F$ é uma árvore geradora, classifica-se o sistema como topologicamente observável; caso contrário, prossegue-se para a rotina de

processamento de arestas de injeção.

O algoritmo proposto possui complexidade computacional $O(n + m)$, em que n e m denotam, respectivamente, o número de vértices e o número de arestas de $\mathcal{Z}_F$. Como o processamento das arestas de fluxo se restringe à obtenção de uma floresta geradora, sem qualquer ordenação de arestas, dispensa-se a etapa de ordenação inerente aos métodos baseados em árvores geradoras de custo mínimo. Abordagens desse tipo, como o algoritmo de Kruskal [45], cuja complexidade é $O(m \log m)$ em sua forma padrão [22], já foram consideradas no contexto da observabilidade topológica [56] [64] [65].

A Figura 39 exibe o multigrafo $\mathcal{Z}_F$ correspondente ao sistema exemplo de 6 barras e 10 medidas (ver Figura 37). A execução do Algoritmo 1 sobre $\mathcal{Z}_F$ resulta na floresta de profundidade $\mathcal{T}_F$, apresentada na Figura 40. Os vértices foram visitados na sequência $0 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 2$. A sequência de vértices visitados e a escolha das arestas a serem inseridas em $\mathcal{T}_F$ dependem do vértice definido como raiz da busca em profundidade, que, neste exemplo, foi o vértice 0. Ressalta-se que a floresta de profundidade não é única, dependendo estritamente da raiz da busca e da lógica adotada no tratamento de arestas múltiplas.

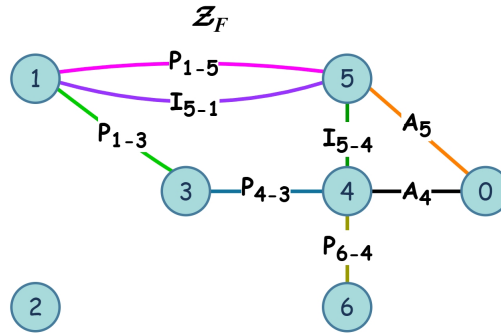


Figura 39: Multigrafo $\mathcal{Z}_F$ referente ao sistema exemplo de 6 barras e 10 medidas.

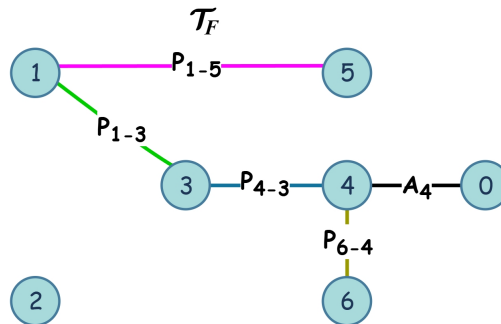


Figura 40: Uma floresta de profundidade $\mathcal{T}_F$ referente ao sistema exemplo de 6 barras e 10 medidas.

Note que a floresta de profundidade $\mathcal{T}_F$ da Figura 40 não é uma árvore geradora observável; portanto, é necessário processar as arestas de injeção de $\mathcal{Z}_M$. Nesse caso, o

objetivo é avaliar a possibilidade de unir o vértice 2 à componente conexa formada pelos vértices 0, 1, 3, 4, 5 e 6.

4.3.2 Processamento de Arestas de Injeção

Considere o multigrafo $\mathcal{Z}_P^0$, um subgrafo induzido por todas as arestas de injeção de $\mathcal{Z}_M$, e a floresta $\mathcal{T}_P^0$, caracterizada pelos conjuntos de vértices $V(\mathcal{T}_P^0) = V(\mathcal{T}_F)$ e de arestas $E(\mathcal{T}_P^0) = E(\mathcal{T}_F)$, onde $\mathcal{T}_F$ é a floresta de profundidade resultante do processamento das arestas de fluxo. Na etapa de processamento de arestas de injeção, buscam-se inserir arestas de injeção em $\mathcal{T}_P^0$, observando as restrições existentes: aciclicidade e unicidade de rótulos das arestas em $E(\mathcal{T}_P^0)$. Neste trabalho, com o objetivo de reduzir o espaço de busca e melhorar o desempenho do algoritmo, realiza-se a operação de *contração de arestas*. Todos os vértices pertencentes a uma mesma componente conexa (árvore) de $\mathcal{T}_F$ são tratados como supernós em $\mathcal{T}_P^0$ e $\mathcal{Z}_P^0$, produzindo os grafos reduzidos designados por $\mathcal{T}_P^{sn}$ e $\mathcal{Z}_P^{sn}$, respectivamente. A Figura 41 ilustra essa operação de contração de arestas aplicada aos grafos $\mathcal{Z}_P^0$ e $\mathcal{T}_P^0$ referentes à rede exemplo da Figura 37.

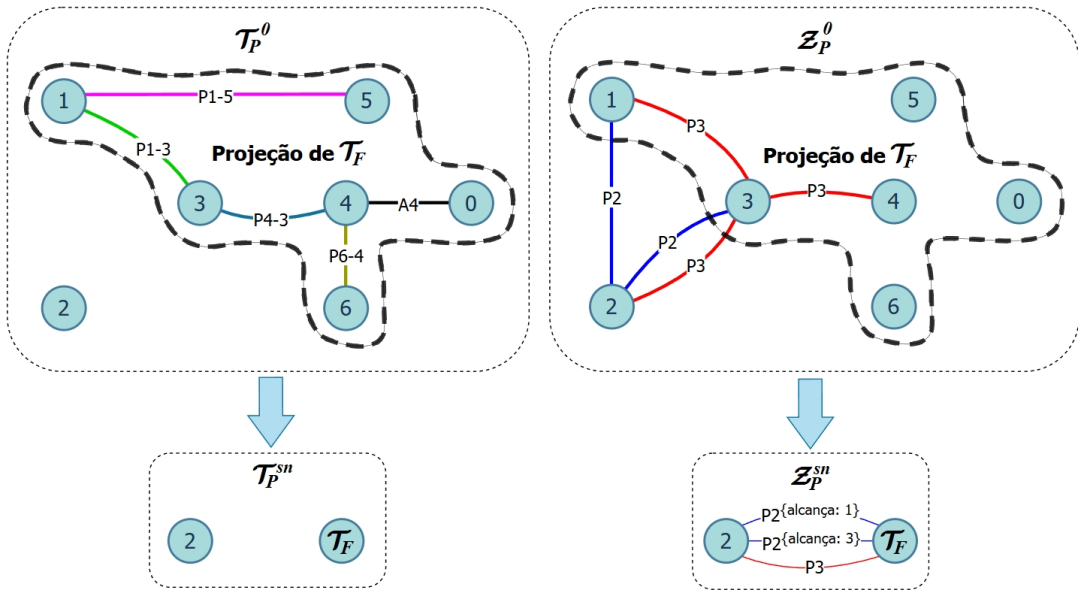


Figura 41: Contração de arestas de $\mathcal{Z}_P^0$ e $\mathcal{T}_P^0$ referentes à rede exemplo.

Com o objetivo de reduzir ainda mais o espaço de busca no processamento de arestas de injeção, realizam-se reduções adicionais de $\mathcal{Z}_P^{sn}$ e $\mathcal{T}_P^{sn}$. Identificam-se as arestas de $\mathcal{Z}_P^{sn}$ que constituem pontes. Caso duas pontes possuam o mesmo rótulo P_k , o sistema é classificado diretamente como topologicamente inobservável, pois ambas seriam obrigatórias para conectar componentes distintas de $\mathcal{Z}_P^{sn}$, violando inevitavelmente a restrição de unicidade de rótulos. Caso contrário, considerando uma ponte identificada $e_{ponte} \in E(\mathcal{Z}_P^{sn})$

com rótulo P_k , realizam-se as seguintes operações:

1. inserção de e_{ponte} em $\mathcal{T}_P^{sn}$, sendo tratada como uma aresta de fluxo. Nesse caso, todas as demais arestas de $\mathcal{Z}_P^{sn}$ com rótulo P_k são removidas, pois a unicidade de rótulos impede a inclusão dessas arestas na solução; e
2. contração de e_{ponte} , uma vez que seus extremos passam a constituir uma mesma componente conexa de $\mathcal{T}_P^{sn}$. Com isso, obtêm-se os grafos reduzidos atualizados $\mathcal{Z}_P^{sn*}$ e $\mathcal{T}_P^{sn*}$.

Repete-se o processo até que não sejam identificadas mais pontes. Denotam-se os grafos oriundos desse processo como $\mathcal{Z}_P$ e $\mathcal{T}_P$. O Algoritmo 2 detalha esse processo.

Algoritmo 2: Busca por pontes em $\mathcal{Z}_P^{sn}$.

Entrada: Grafos $\mathcal{Z}_P^{sn}$ e $\mathcal{T}_P^{sn}$.

Saída: $\mathcal{Z}_P$ e $\mathcal{T}_P$, grafos reduzidos após eliminação de pontes;

ou apenas $\mathcal{T}_P$ com resposta sobre observabilidade topológica.

1 **início**

```

2    $\mathcal{Z}_P^{sn*} \leftarrow \mathcal{Z}_P^{sn}; \quad \mathcal{T}_P^{sn*} \leftarrow \mathcal{T}_P^{sn};$ 
3    $\mathcal{P}_{pontes} \leftarrow \text{BuscarPontes}(\mathcal{Z}_P^{sn*})$  ; // busca em profundidade sobre  $\mathcal{Z}_P^{sn*}$ .
4   enquanto  $\mathcal{P}_{pontes} \neq \emptyset$  faça // Enquanto existirem pontes em  $\mathcal{Z}_P^{sn*}$ .
5       se existem duas pontes em  $\mathcal{P}_{pontes}$  com mesmo rótulo então
6            $\mathcal{T}_P \leftarrow \mathcal{T}_P^{sn*}$ ; retorna  $\mathcal{T}_P$  ; // Sistema inobservável.
7       para cada  $e_{ponte} \in \mathcal{P}_{pontes}$  faça // Processa cada ponte identificada.
8            $P_k \leftarrow$  rótulo de  $e_{ponte}$ ;
9            $E(\mathcal{T}_P^{sn*}) \leftarrow E(\mathcal{T}_P^{sn*}) \cup \{e_{ponte}\}$  ; // Insere  $e_{ponte}$  em  $\mathcal{T}_P^{sn*}$ .
10          se  $|E(\mathcal{T}_P^{sn*})| = |V(\mathcal{T}_P^{sn*})| - 1$  então // Sistema observável.
11               $\mathcal{T}_P \leftarrow \mathcal{T}_P^{sn*}$ ; retorna  $\mathcal{T}_P$ 
12           $E(\mathcal{Z}_P^{sn*}) \leftarrow E(\mathcal{Z}_P^{sn*}) \setminus \{e \in E(\mathcal{Z}_P^{sn*}) \mid \text{rótulo}(e) = P_k\}$  ; // Remove todas as
13              arestas de rótulo  $P_k$  de  $\mathcal{Z}_P^{sn*}$ .
14           $\mathcal{Z}_P^{sn*}, \mathcal{T}_P^{sn*} \leftarrow \text{ContrairArestas}(\mathcal{Z}_P^{sn*}, \mathcal{T}_P^{sn*})$  ; // Nova contração de arestas.
15           $\mathcal{P}_{pontes} \leftarrow \text{BuscarPontes}(\mathcal{Z}_P^{sn*})$  ; // Reavalia pontes após atualização de  $\mathcal{Z}_P^{sn*}$ .
16   $\mathcal{Z}_P \leftarrow \mathcal{Z}_P^{sn*}; \quad \mathcal{T}_P \leftarrow \mathcal{T}_P^{sn*};$ 
retorna  $\mathcal{Z}_P, \mathcal{T}_P$ ;

```

A identificação das pontes de $\mathcal{Z}_P^{sn*}$, invocada no Algoritmo 2 por meio do procedimento **BuscarPontes**, é detalhada a seguir. O procedimento **BuscarPontes** (Algoritmo 3) identifica as pontes de $\mathcal{Z}_P$ por meio de uma busca em profundidade recursiva, descrita no procedimento **DFS-Pontes**, baseada no algoritmo proposto por Tarjan [71]. Para cada vértice u visitado, registram-se dois valores: o instante de descoberta $disc[u]$, que indica quando u foi visitado pela primeira vez, e o valor $low[u]$, que armazena o menor instante de descoberta alcançável a partir da subárvore enraizada em u , considerando, no máximo, uma aresta de retorno. Uma aresta (u, v) é classificada como ponte se $low[v] > disc[u]$, pois essa condição indica que não há caminho alternativo de v para u sem percorrer essa aresta.

Algoritmo 3: Procedimentos **BuscarPontes** e **DFS-Pontes**.

```

1  procedimento BuscarPontes( $\mathcal{Z}_P$ )
    // As variáveis visitado, disc, low, tempo e  $\mathcal{P}_{pontes}$  são compartilhadas com DFS-Pontes.
2     $\mathcal{P}_{pontes} \leftarrow \emptyset$ ;
3     $tempo \leftarrow 0$ ;
4    para cada  $v \in V(\mathcal{Z}_P)$  faça
5         $visitado[v] \leftarrow falso$ ;
6         $disc[v] \leftarrow \infty$ ;
7         $low[v] \leftarrow \infty$ ;
8    para cada  $v \in V(\mathcal{Z}_P)$  faça
9        se  $visitado[v] = falso$  então
10           DFS-Pontes( $\mathcal{Z}_P, v, nulo$ );
11    retorna  $\mathcal{P}_{pontes}$ ;

12 procedimento DFS-Pontes( $\mathcal{Z}_P, u, e_{pai}$ )
13     $visitado[u] \leftarrow verdadeiro$ ;
14     $disc[u] \leftarrow low[u] \leftarrow tempo$ ;   $tempo \leftarrow tempo + 1$ ;
15    para cada  $e = (u, v) \in \mathcal{Z}_P.N(u)$  faça //  $\mathcal{Z}_P.N(u)$  denota a vizinhança de  $u$  em  $\mathcal{Z}_P$ .
16        se  $visitado[v] = falso$  então // Aresta de árvore.
17            DFS-Pontes( $\mathcal{Z}_P, v, e$ );
18             $low[u] \leftarrow \min(low[u], low[v])$ ;
19            se  $low[v] > disc[u]$  então  $\mathcal{P}_{pontes} \leftarrow \mathcal{P}_{pontes} \cup \{e\}$  ; // Condição de ponte.
20        senão // Aresta de retorno: atualiza low.
21            se  $e \neq e_{pai}$  então  $low[u] \leftarrow \min(low[u], disc[v])$  ;

```

Embora o pré-processamento por pontes permita reduzir $\mathcal{Z}_P^{sn}$, identificando a observabilidade topológica em casos específicos, ele não é, em geral, suficiente para esse fim, pois as arestas remanescentes de $\mathcal{Z}_P$ podem ainda apresentar conflitos simultâneos de aciclicidade e de unicidade de rótulos. A presença conjunta dessas restrições impede a aplicação direta de estratégias gulosas para obter soluções exatas.

Nesse contexto, o problema é formulado como a interseção entre um matroide gráfico e um matroide de partição. Essa formulação foi introduzida no âmbito da observabilidade topológica por Quintana, Simões Costa e Mandel [56], que a resolveram por meio de uma variante do algoritmo de interseção de matroides de Edmonds [32] proposta por Frank [36]. No presente estudo, adota-se uma adaptação do algoritmo de Cunningham [24]. Adicionalmente, emprega-se uma heurística de ordenação das arestas de injeção remanescentes, em ordem crescente do número de ocorrências de seus respectivos rótulos em $E(\mathcal{Z}_P)$, com desempate pelo índice original da aresta, garantindo determinismo total na ordenação, de modo a favorecer inserções sem conflito nas etapas iniciais do algoritmo.

A abordagem proposta percorre as arestas de $E(\mathcal{Z}_P)$ na ordem definida pela heurística, avaliando-as individualmente. Para cada aresta $e_p \in E(\mathcal{Z}_P) \setminus I$, realiza-se a verificação simultânea de sua independência em ambos os matroides: aciclicidade em $\mathcal{T}_P$ e unicidade de rótulos. Caso ambas as condições sejam satisfeitas, e_p é inserida em I e em $\mathcal{T}_P$ sem necessidade de remanejamento. Caso contrário, constrói-se o digrafo auxiliar $\mathcal{B}$ a partir do estado corrente de $\mathcal{T}_P$ e busca-se um caminho aumentante em $\mathcal{B}$, viabilizando um remanejamento de arestas capaz de expandir $\mathcal{T}_P$ em uma unidade. Repete-se o procedimento até que $\mathcal{T}_P$ constitua uma árvore geradora observável ou até que nenhum caminho aumentante exista em $\mathcal{B}$, confirmando a inobservabilidade topológica do sistema.

Tanto a abordagem aqui proposta quanto a de Quintana, Simões Costa e Mandel [56] dispensam o emprego de estruturas adicionais características de algoritmos de *matching*, como contrações de *blossom* [52]. A distinção reside na varredura do digrafo auxiliar $\mathcal{B}$. Em [56], adota-se o algoritmo de Dijkstra para a busca pelo caminho aumentante de menor comprimento, o que implica uma busca a cada origem potencial. Como $\mathcal{B}$ é não ponderado, tal busca reduz-se a uma busca em largura, adotada neste trabalho na forma multi-fonte: todas as origens potenciais são enfileiradas simultaneamente e o caminho de menor comprimento é identificado em uma única varredura de $\mathcal{B}$, evitando buscas repetidas a partir de cada origem. Os Algoritmos 4, 5, 6 e 7 descrevem a implementação desenvolvida para o processamento das arestas de injeção em $\mathcal{Z}_P$.

Algoritmo 4: Processamento de arestas de injeção.**Entrada:** Grafos reduzidos $\mathcal{Z}_P$ e $\mathcal{T}_P$.**Saída:** $\mathcal{T}_P$, uma floresta máxima com unicidade dos rótulos nas arestas.

```

1 início
2    $I \leftarrow \emptyset$ ;
3   enquanto  $|E(\mathcal{T}_P)| < |V(\mathcal{T}_P)| - 1$  faça // Enquanto  $\mathcal{T}_P$  não é árvore geradora.
4      $Inseriu \leftarrow \text{ProcessarArestas}(I, \mathcal{T}_P)$  ; // Fase gulosa; ver Algoritmo 5.
5     se  $|E(\mathcal{T}_P)| = |V(\mathcal{T}_P)| - 1$  então retorna  $\mathcal{T}_P$ ; // Sistema observável.
6     se  $Inseriu = \text{falso}$  então // Fase gulosa esgotou-se.
7        $encontrou \leftarrow \text{BuscarCaminhoAumentante}(I, \mathcal{T}_P)$  ; // Ver Algoritmo 6.
8       se  $encontrou = \text{falso}$  então retorna  $\mathcal{T}_P$ ; // Sistema inobservável.
9   retorna  $\mathcal{T}_P$ ; // Sistema observável.

```

Algoritmo 5: Procedimento ProcessarArestas.

```

1 procedimento ProcessarArestas( $I, \mathcal{T}_P$ )
2    $Inseriu \leftarrow \text{falso}$ ;
3   para cada  $e_p \in E(\mathcal{Z}_P) \setminus I$  faça
4     se  $\mathcal{T}_P + e_p$  não tem conflito de rótulos e não tem ciclo então
5       // Independência nos dois matroides.
6        $I \leftarrow I \cup \{e_p\}$ ;  $\mathcal{T}_P \leftarrow \mathcal{T}_P + e_p$ ;  $Inseriu \leftarrow \text{verdadeiro}$ ;
7       se  $|E(\mathcal{T}_P)| = |V(\mathcal{T}_P)| - 1$  então retorna  $Inseriu$ ; // Sistema observável.
8   retorna  $Inseriu$ ;

```

Algoritmo 6: Procedimento BuscarCaminhoAumentante.

```

1 procedimento BuscarCaminhoAumentante( $I, \mathcal{T}_P$ )
2    $\mathcal{B}, V_{\mathcal{B}}^{\text{rótulo}}, V_{\mathcal{B}}^{\text{ciclo}} \leftarrow \text{CriarB}(I, \mathcal{T}_P)$  ; // Ver Algoritmo 7.
3    $\mathcal{P} \leftarrow \text{BFS multi-fonte em } \mathcal{B}, \text{ com origens simultâneas } s \in V_{\mathcal{B}}^{\text{rótulo}} \text{ e primeiro}$ 
4      $\text{destino } t \in V_{\mathcal{B}}^{\text{ciclo}} \text{ alcançado};$ 
5   se  $E(\mathcal{P}) = \emptyset$  então retorna falso; // Floresta de posto máximo; inobservável.
6    $E(\mathcal{T}_P) \leftarrow E(\mathcal{T}_P) \setminus I$ ;
7    $I^* \leftarrow I \triangle E(\mathcal{P})$  ; // Diferença simétrica: remaneja arestas.
8    $E(\mathcal{T}_P) \leftarrow E(\mathcal{T}_P) \cup I^*$ ;  $I \leftarrow I^*$ ;
9   retorna verdadeiro;

```

Algoritmo 7: Procedimento CriarB.

```

1 procedimento CriarB( $I, \mathcal{T}_P$ )
2    $V(\mathcal{B}) \leftarrow \{v_{e_p} \mid e_p \in E(\mathcal{Z}_P)\};$ 
3    $A(\mathcal{B}) \leftarrow \emptyset;$ 
4    $V_{\mathcal{B}}^{rótulo} \leftarrow \emptyset;$ 
5    $V_{\mathcal{B}}^{ciclo} \leftarrow \emptyset;$ 
6   para cada  $e_p \in E(\mathcal{Z}_P) \setminus I$  faça
7     se  $\mathcal{T}_P + e_p$  tem conflito de rótulos em  $\mathcal{R}_{rótulo} = \{e_p, e_{rótulo}\}$  então
8        $A(\mathcal{B}) \leftarrow A(\mathcal{B}) \cup \{(v_{e_{rótulo}}, v_{e_p})\}$ 
9     senão
10       $V_{\mathcal{B}}^{rótulo} \leftarrow V_{\mathcal{B}}^{rótulo} \cup \{v_{e_p}\}$ 
11     se  $\mathcal{T}_P + e_p$  tem um ciclo  $\mathcal{R}_{ciclo}$  então
12       para cada  $e_{ciclo} \in E(\mathcal{R}_{ciclo}) \setminus \{e_p\}$  faça
13          $A(\mathcal{B}) \leftarrow A(\mathcal{B}) \cup \{(v_{e_p}, v_{e_{ciclo}})\}$ 
14       senão
15          $V_{\mathcal{B}}^{ciclo} \leftarrow V_{\mathcal{B}}^{ciclo} \cup \{v_{e_p}\}$ 
16   retorna  $\mathcal{B}, V_{\mathcal{B}}^{rótulo}, V_{\mathcal{B}}^{ciclo};$ 

```

Nos Algoritmos 4, 5, 6 e 7, a floresta $\mathcal{T}_P$ e o conjunto independente I são mantidos como estado compartilhado entre os procedimentos: as inserções e remoções realizadas em qualquer um deles refletem-se diretamente nos demais, dispensando sua passagem explícita como parâmetros de retorno. As demais variáveis são locais a cada procedimento. Utilizam-se, ainda, os seguintes elementos:

- conjunto independente I , que armazena as arestas de injeção inseridas em $\mathcal{T}_P$;
- variável booleana *Inseriu*, que indica se a fase gulosa obteve êxito em incorporar pelo menos uma aresta de injeção a $\mathcal{T}_P$. Quando *Inseriu* = *falso*, conclui-se que a varredura gulosa esgotou-se e transita-se para a busca de caminho aumentante;
- digrafo auxiliar $\mathcal{B}$, construído no procedimento **CriarB** a partir do estado corrente de $\mathcal{T}_P$, cujos vértices $V(\mathcal{B})$ correspondem biunivocamente às arestas de injeção de $\mathcal{Z}_P$;
- conjunto $V_{\mathcal{B}}^{rótulo}$, subconjunto de vértices de $\mathcal{B}$ que representa as arestas de injeção de $\mathcal{Z}_P$ cuja inclusão em $\mathcal{T}_P$ não violaria a unicidade de rótulos, mas comprometeria sua aciclicidade. Os vértices desse conjunto atuam como fontes em $\mathcal{B}$;

- conjunto $V_{\mathcal{B}}^{ciclo}$, subconjunto de vértices de $\mathcal{B}$ que representa as arestas de injeção de $\mathcal{Z}_P$ cuja inclusão em $\mathcal{T}_P$ não violaria sua aciclicidade, mas comprometeria a unicidade de rótulos. Os vértices desse conjunto atuam como sumidouros em $\mathcal{B}$;
- subgrafo $\mathcal{R}_{ciclo}$ de $\mathcal{T}_P + e_p$, que representa o ciclo formado na hipótese de inclusão de uma aresta de injeção e_p em $\mathcal{T}_P$;
- subgrafo $\mathcal{R}_{rótulo}$ de $\mathcal{T}_P + e_p$, caracterizado pelo par de arestas de mesmo rótulo $E(\mathcal{R}_{rótulo}) = \{e_{rótulo}, e_p\}$, onde $e_{rótulo} \in E(\mathcal{T}_P)$ e $e_p \notin E(\mathcal{T}_P)$, na hipótese de inclusão de e_p em $\mathcal{T}_P$; e
- subgrafo $\mathcal{P}$ de $\mathcal{B}$, induzido pelos arcos que constituem o menor caminho direcionado em $\mathcal{B}$, obtido por busca em largura multi-fonte com origens simultâneas em todos os vértices de $V_{\mathcal{B}}^{rótulo}$ e destino no primeiro vértice de $V_{\mathcal{B}}^{ciclo}$ alcançado. Em caso de inexistência desse caminho, $E(\mathcal{P}) = \emptyset$.

A sequência adotada para o processamento das arestas de injeção pode impossibilitar a máxima expansão da floresta $\mathcal{T}_P$, implicando na confirmação errônea da inobservabilidade do sistema. Para contornar isso, utiliza-se o digrafo auxiliar $\mathcal{B}$, que registra os conflitos existentes (formação de ciclos e repetição de rótulos) entre as arestas de injeção incorporadas à solução parcial e as demais, garantindo a maximalidade da solução. A estrutura de $\mathcal{B}$ é ilustrada na Figura 42. Os vértices $v_{e_p} \in V(\mathcal{B})$ correspondem biunivocamente às arestas de injeção $e_p \in E(\mathcal{Z}_P)$, organizados nas seguintes partições:

- X , composta de vértices que representam as arestas de injeção incorporadas à solução parcial I , isto é, pertencentes a $\mathcal{T}_P$; e
- Y , que incorpora os demais vértices de $\mathcal{B}$, correspondentes às arestas de injeção não pertencentes a $\mathcal{T}_P$.

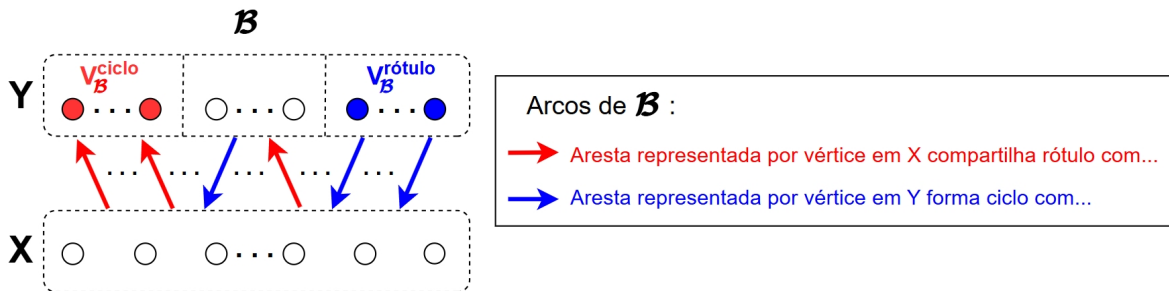


Figura 42: Estrutura do digrafo bipartido auxiliar $\mathcal{B}$.

De acordo com o Algoritmo 5, na fase gulosa, para cada aresta de injeção $e_p \in E(\mathcal{Z}_P) \setminus I$, verifica-se simultaneamente as condições de unicidade de rótulos e de aciclicidade em $\mathcal{T}_P + e_p$. Quando ambas as condições são satisfeitas, e_p é inserida em $\mathcal{T}_P$, integrando o conjunto independente I , e a variável *Inseriu* é assinalada como *verdadeiro*. Caso contrário, e_p permanece fora de $\mathcal{T}_P$. A varredura gulosa encerra-se quando todas as arestas de $E(\mathcal{Z}_P) \setminus I$ são processadas ou quando $\mathcal{T}_P$ atinge a condição de árvore geradora observável.

Uma única passada sobre $E(\mathcal{Z}_P) \setminus I$ é suficiente na fase gulosa, uma vez que a inserção de arestas em $\mathcal{T}_P$ apenas acrescenta restrições de aciclicidade e de unicidade de rótulos, sem relaxá-las: uma aresta previamente rejeitada permanece inelegível. A liberação de arestas antes bloqueadas ocorre apenas quando o remanejamento na etapa de busca de caminho aumentante remove arestas de $\mathcal{T}_P$, motivo pelo qual o laço principal reavalia as arestas somente após cada aumento.

Quando a fase gulosa esgota-se sem completar a árvore geradora observável, isto é, *Inseriu* = *falso* no Algoritmo 4, invoca-se o procedimento *BuscarCaminhoAumentante* (Algoritmo 6). Este constrói o digrafo auxiliar $\mathcal{B}$ por meio do procedimento *CriarB* (Algoritmo 7), processando todas as arestas em $E(\mathcal{Z}_P) \setminus I$. Para cada aresta de injeção e_p avaliada, se a floresta $\mathcal{T}_P + e_p$:

- possui unicidade de rótulos, mas forma um ciclo $\mathcal{R}_{ciclo}$, então v_{e_p} é adicionado a $V_{\mathcal{B}}^{rótulo}$ e criam-se arcos em $\mathcal{B}$ com extremo inicial v_{e_p} e extremos finais $\{v_{e_{ciclo}} \mid e_{ciclo} \in E(\mathcal{R}_{ciclo}) \setminus \{e_p\}\}$ (isto é, arcos $Y \rightarrow X$); ou
- possui duas arestas de mesmo rótulo, mas é acíclica, então v_{e_p} é adicionado a $V_{\mathcal{B}}^{ciclo}$ e cria-se um arco em $\mathcal{B}$ com extremo inicial $v_{e_{rótulo}}$ e extremo final v_{e_p} (isto é, arcos $X \rightarrow Y$), onde $e_{rótulo} \in E(\mathcal{T}_P)$ é a aresta de injeção com mesmo rótulo de e_p .

Os conjuntos $V_{\mathcal{B}}^{rótulo}$ e $V_{\mathcal{B}}^{ciclo}$ são subconjuntos disjuntos da partição Y dos vértices de $\mathcal{B}$, que representam as arestas de injeção de $\mathcal{Z}_P$ não inclusas em $\mathcal{T}_P$, conforme representado na Figura 42. Os vértices em $V_{\mathcal{B}}^{rótulo}$ e em $V_{\mathcal{B}}^{ciclo}$ são fontes e sumidouros em $\mathcal{B}$, respectivamente.

Após a construção de $\mathcal{B}$ (Algoritmo 7), realiza-se uma busca em largura multi-fonte, conforme indicado no Algoritmo 6, com origens simultâneas em todos os vértices de $V_{\mathcal{B}}^{rótulo}$ e destino no primeiro vértice de $V_{\mathcal{B}}^{ciclo}$ alcançado. Se tal caminho não for encontrado, isto é, $E(\mathcal{P}) = \emptyset$, conclui-se que $\mathcal{T}_P$ é uma floresta de posto máximo, com suas componentes

conexas correspondendo às ilhas observáveis, caracterizando o sistema como topologicamente inobservável.

A existência de um caminho mínimo em $\mathcal{B}$, isto é, $E(\mathcal{P}) \neq \emptyset$, indica que o posto da floresta $\mathcal{T}_P$ não é máximo. A sequência de vértices de $\mathcal{P}$ possibilita um remanejamento de arestas de injeção para construir uma floresta $\mathcal{T}_P^*$ tal que $|E(\mathcal{T}_P^*)| = |E(\mathcal{T}_P)| + 1$, evidenciando uma floresta com uma aresta de injeção adicional em relação a $\mathcal{T}_P$.

A construção de $\mathcal{T}_P^*$ é realizada utilizando o conjunto independente I de $\mathcal{T}_P$ e o conjunto $E(\mathcal{P})$, que contém as arestas de injeção representadas por $\mathcal{P}$. O processo envolve a remoção das arestas de injeção em I de $\mathcal{T}_P$, seguida da expansão do grafo resultante com as arestas de injeção em $I^* = I \triangle E(\mathcal{P})$, onde I^* representa o conjunto independente obtido pelo remanejamento.

A operação de *diferença simétrica*, denotada por “ $\triangle$ ”, é definida como a união dos elementos que pertencem a apenas um dos conjuntos A ou B , excluindo os elementos comuns a ambos. O conjunto resultante de $A \triangle B$ (região azul) é ilustrado na Figura 43.

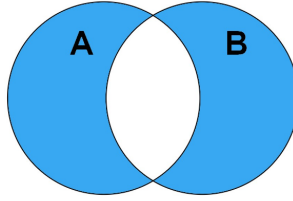


Figura 43: Conjunto resultante da diferença simétrica entre A e B (região azul).

Caso a floresta $\mathcal{T}_P^*$, obtida pelo remanejamento de arestas, seja uma árvore geradora observável, o sistema é considerado topologicamente observável. Caso contrário, prossegue-se com as arestas restantes de $E(\mathcal{Z}_P) \setminus I^*$ na ordem fixada, retomando a avaliação individual de cada aresta para expandir $\mathcal{T}_P^*$.

O algoritmo de interseção de matroides, proposto originalmente por Edmonds [32], resolve o problema em tempo $O(|E|^3 C(|E|))$, em que $|E|$ é a cardinalidade do conjunto-base e $C(|E|)$ limita superiormente o custo dos testes de independência dos dois matroides [52]. Para os matroides gráfico e de partição aqui considerados, tem-se $|E| = m$. O teste de independência do matroide de partição, referente à unicidade de rótulos, é efetuado por consulta a um dicionário em tempo $O(1)$; o do matroide gráfico, referente à aciclicidade, bem como a determinação do circuito fundamental associado, são realizados por uma travessia da floresta $\mathcal{T}_P$, que possui no máximo $n - 1$ arestas, em tempo $O(n)$. Desse modo, $C(|E|) = O(n)$ e o custo resulta em $O(m^3 n)$, onde n e m denotam, respectivamente, o número de vértices e de arestas de $\mathcal{Z}_P$.

Ressalta-se que a instância submetida à interseção de matroides é substancialmente reduzida pela contração das componentes de $\mathcal{T}_F$ em supernós e pela eliminação de pontes. Em planos de medição típicos do SEP, essas reduções são particularmente efetivas, uma vez que a predominância de medidas de ramo e a prioridade conferida às arestas de fluxo fazem com que grande parte de $\mathcal{T}$ seja formada já no processamento das arestas de fluxo, de modo que a interseção de matroides opera sobre um número reduzido de arestas de injeção. Assim, o ganho de desempenho da etapa de processamento de arestas de injeção decorre primordialmente dessa redução da instância, e não da estratégia de busca adotada no digrafo auxiliar.

No contexto da rede exemplo de 6 barras e 10 medidas (ver Figura 37), a rotina de processamento de arestas de injeção, que emprega a operação de contração de arestas ilustrada na Figura 41, construiu a árvore geradora observável da Figura 44, indicando a observabilidade topológica desse sistema.

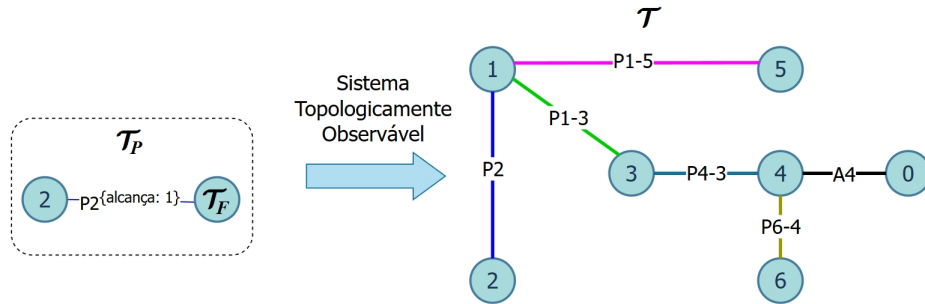


Figura 44: Árvore geradora observável referente à rede exemplo.

4.4 Criticalidades de Medidas por Grafos

Nesta seção, apresentam-se as metodologias desenvolvidas para análise de criticalidades, fundamentadas na Teoria dos Grafos, objetivando a identificação de medidas críticas (C_1s), pares críticos (C_2s) e conjuntos críticos ($C_{conj}s$).

4.4.1 Busca por Medidas Críticas

Seja $\mathcal{Z}_M$ um multigrafo de medições que modela uma rede elétrica supervisionada. A metodologia de identificação de C_1s é baseada na seguinte proposição: uma aresta $e_m \in E(\mathcal{Z}_M)$ é considerada um C_1 se, e somente se, ela faz parte de toda árvore geradora observável $\mathcal{T}$ de $\mathcal{Z}_M$ [65] [64]. Isso decorre naturalmente da própria definição de C_1 , pois sua remoção compromete a observabilidade (topológica e numérica) global do sistema, o

que implica a inexistência de $\mathcal{T}$ em $\mathcal{Z}_M$.

Fundamenta-se a metodologia desenvolvida para a identificação de C_1 s na modelagem proposta por Simões Costa, Piazza e Mandel [64], que utiliza um digrafo bipartido $\mathcal{B}_{c_1}$ cujos vértices representam biunivocamente as arestas de fluxo e de injeção de $\mathcal{Z}_M$. Divide-se o conjunto de vértices $V(\mathcal{B}_{c_1})$ nas seguintes partições:

- X , formada pelos vértices v_{e_x} , associados às arestas $e_x \in E(\mathcal{T})$, concernentes à árvore geradora observável $\mathcal{T}$ obtida pela análise de observabilidade topológica; e
- Y , formada pelos vértices v_{e_y} , que representam as arestas $e_y \in E(\mathcal{Z}_M) \setminus E(\mathcal{T})$, ou seja, arestas pertencentes à co-árvore $\overline{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{T}$.

O conjunto de arcos $A(\mathcal{B}_{c_1})$ mapeia as formações de ciclos e violações de unicidade de rótulos em $\mathcal{T} + e_y$, onde $e_y \in E(\mathcal{Z}_M) \setminus E(\mathcal{T})$. Quando a inclusão de uma aresta e_y , representada pelo vértice $v_{e_y} \in Y$, em $\mathcal{T}$ resulta:

- na violação da unicidade de rótulos, em conflito com $e_{cor} \in E(\mathcal{T})$, adiciona-se um arco em $\mathcal{B}_{c_1}$ com origem em $v_{e_{cor}} \in X$ e destino em $v_{e_y} \in Y$; ou
- na formação de um ciclo $\mathcal{C}_{ciclo}$, adicionam-se arcos com origem em $v_{e_y} \in Y$ e destinos em $v_{e_{ciclo}} \in X$, para cada $e_{ciclo} \in E(\mathcal{C}_{ciclo}) \setminus \{e_y\}$.

Uma *sequência de troca* (*exchange sequence*) é um caminho direcionado maximal no digrafo $\mathcal{B}_{c_1}$. Essa sequência é classificada como *própria* quando possui origem na partição Y e destino na partição X . Para uma sequência de troca própria $\mathcal{S}$, o remanejamento das arestas representadas pelos vértices que a compõem, isto é, a inserção das arestas da co-árvore $\overline{\mathcal{T}}$ associadas aos vértices em $\mathcal{S} \cap Y$ e a remoção das arestas da árvore $\mathcal{T}$ correspondentes aos vértices em $\mathcal{S} \cap X$, resulta em uma árvore geradora $\mathcal{T}^*$ distinta de $\mathcal{T}$, ou seja, $E(\mathcal{T}^*) \neq E(\mathcal{T})$. Consequentemente, os vértices de X que não pertencem a nenhuma sequência de troca própria representam as C_1 s do sistema.

A identificação dessas criticalidades admite uma perspectiva alternativa ao conceito de sequências de troca. As medidas que rotulam as arestas de $\mathcal{T}$ são inicialmente classificadas como suspeitas de serem C_1 s [65], enquanto as demais são classificadas como redundantes. Quando um arco em $\mathcal{B}_{c_1}$ conecta um vértice de X , associado a uma medida redundante m_r , a um vértice de Y , correspondente a uma medida suspeita m_s , classifica-se m_s também como redundante, pois m_r pode substituí-la. Em [66], esse processo foi implementado de

forma concomitante à construção de $\mathcal{B}_{c_1}$: à medida que os arcos eram criados, propagava-se imediatamente a classificação de redundância para as medidas suspeitas alcançáveis. A Figura 45 ilustra, de forma simplificada, seis etapas desse processo, evidenciando o efeito de espalhamento da classificação de redundância pelo digrafo.

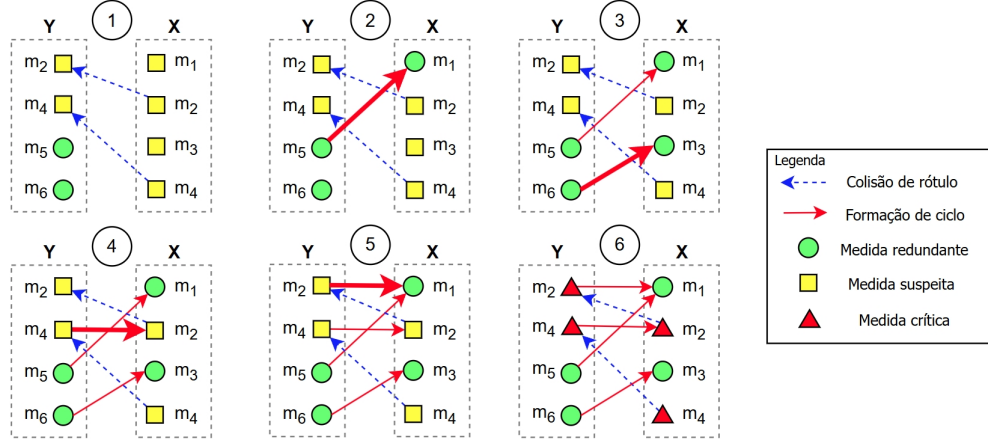


Figura 45: Exemplo de construção de $\mathcal{B}_{c_1}$ concomitante com a classificação de medidas.

Em [64], a identificação dos vértices de X que não pertencem a sequências de troca próprias é expressa em termos da existência de caminhos direcionados em $\mathcal{B}_{c_1}$, com origem em Y e destino em X . Essa formulação conduz naturalmente a um problema de alcançabilidade em grafos dirigidos. Como o número de caminhos simples pode crescer de forma superpolinomial com o tamanho do grafo [70], a determinação de todos esses caminhos tende a comprometer a escalabilidade em sistemas de grande porte; o fundamento do método, contudo, está em identificar quais vértices de X são alcançáveis a partir de Y .

Neste trabalho, adota-se uma abordagem que, assim como em [64], separa a construção de $\mathcal{B}_{c_1}$ e a identificação de C_1 s em fases independentes, em contraste com o mapeamento de redundâncias no decorrer da construção desse digrafo, adotado em [66]. Seja $M_v(v)$ a função que retorna a medida referenciada por um vértice $v \in V(\mathcal{B}_{c_1})$. Denomina-se *fonte* todo vértice $v_y \in Y$ com $N^-(v_y) = \emptyset$ em $\mathcal{B}_{c_1}$, condição que implica que a medida $M_v(v_y)$ não integra $\mathcal{T}$, isto é, não compartilha rótulo com aresta em $E(\mathcal{T})$ e, portanto, trata-se de uma medida redundante.

A distinção em relação a [64] reside no mecanismo de identificação. O método seminal fundamenta-se na determinação de todos os caminhos direcionados maximais (sequências de troca próprias) de Y para X no digrafo auxiliar, ao passo que a abordagem aqui proposta avalia apenas a alcançabilidade de cada $v_x \in X$ a partir das fontes em Y , por meio de uma busca em largura multi-fonte, dispensando a determinação explícita desses caminhos. A impossibilidade de alcançar v_x a partir de qualquer fonte de Y , percorrendo

os arcos de $\mathcal{B}_{c_1}$, é condição suficiente para caracterizar $M_v(v_x)$ como C_1 .

Após a construção do digrafo $\mathcal{B}_{c_1}$, realiza-se, para cada medida redundante distinta m representada por ao menos uma fonte na partição Y , uma busca em largura com origens simultâneas em todas as fontes referentes à medida m , expandindo-se pelos arcos de $\mathcal{B}_{c_1}$. Todo vértice $v_x \in X$ alcançado por essa busca tem m registrada no conjunto $F_Y(v_x)$, que reúne as medidas de fontes que o alcançam. Assim, $F_Y(v_x) = \emptyset$ corresponde à ausência de alcance descrita anteriormente, classificando $M_v(v_x)$ como C_1 . Salienta-se que essa abordagem produz, como subproduto direto, o dicionário FY , que armazena $F_Y(v_x)$ para cada $v_x \in X$ e será utilizado na identificação de C_2s e $C_{conj}s$, descritas nas seções subsequentes.

No Algoritmo 8, descreve-se o procedimento para identificação de C_1s de um plano de medição.

Algoritmo 8: Identificação de C_1s .

Entrada: $\mathcal{Z}_M$, $\mathcal{T}$ e $M_v(\cdot)$ referentes ao sistema avaliado.

Saída: C_1s , $\mathcal{B}_{c_1}$ e FY .

1 **início**

```

2    $\mathcal{B}_{c_1} : V(\mathcal{B}_{c_1}) \leftarrow \{v_{e_z} \mid \forall e_z \in E(\mathcal{Z}_M)\}$  e  $A(\mathcal{B}_{c_1}) \leftarrow \emptyset$ ; // Inicialização de  $\mathcal{B}_{c_1}$ .
3    $C_1s \leftarrow \emptyset$ ;  $FY[v_x] \leftarrow \emptyset, \forall v_x \in X$ ;
4   para cada  $e_y \in E(\mathcal{Z}_M) \setminus E(\mathcal{T})$  faça // Fase 1: construção de  $\mathcal{B}_{c_1}$ .
5       se  $\mathcal{T} + e_y$  tem conflito de rótulos em  $\mathcal{R}_{rótulo} = \{e_y, e_{cor}\}$  então
6            $\mathcal{B}_{c_1} \leftarrow \mathcal{B}_{c_1} + (v_{e_{cor}}, v_{e_y})$ ;
7       se  $\mathcal{T} + e_y$  tem um ciclo  $\mathcal{C}_{ciclo}$  então
8           para cada  $e_{ciclo} \in E(\mathcal{C}_{ciclo}) \cap E(\mathcal{T})$  faça  $\mathcal{B}_{c_1} \leftarrow \mathcal{B}_{c_1} + (v_{e_y}, v_{e_{ciclo}})$ ;
9    $Fontes \leftarrow \{v_y \in Y \mid N^-(v_y) = \emptyset\}$ ; // Fase 2: identificação de fontes.
10  para cada medida redundante distinta  $m$  em  $\{M_v(v_y) \mid v_y \in Fontes\}$  faça
    // Fase 3: busca em largura multi-fonte.
11       $src \leftarrow \{v_y \in Fontes \mid M_v(v_y) = m\}$ ;
12      BFS em  $\mathcal{B}_{c_1}$  com origens simultâneas em  $src$ ;
13      para cada  $v_x \in X$  alcançado faça  $FY[v_x] \leftarrow FY[v_x] \cup \{m\}$ ;
14  para cada  $v_x \in X$  faça // Fase 4: identificação de  $C_1s$ .
    // Condição suficiente para classificação como  $C_1$ .
15      se  $FY[v_x] = \emptyset$  então  $C_1s \leftarrow C_1s \cup \{M_v(v_x)\}$ ;
16  retorna  $C_1s$ ,  $\mathcal{B}_{c_1}$ ,  $FY$ ;

```

O Algoritmo 8 estrutura-se em quatro fases. Na primeira, constrói-se $\mathcal{B}_{c_1}$ mediante varredura completa das arestas $e_y \in E(\mathcal{Z}_M) \setminus E(\mathcal{T})$: conflitos de unicidade de rótulos geram arcos $X \rightarrow Y$ e formações de ciclo geram arcos $Y \rightarrow X$. Na segunda fase, identificam-se as fontes, que são vértices $v_y \in Y$ com $N^-(v_y) = \emptyset$. Na terceira, realiza-se a busca em largura multi-fonte para cada medida redundante distinta representada por fontes, registrando-se em $FY[v_x]$ as medidas que alcançam cada $v_x \in X$. Na quarta fase, classifica-se como C_1 a medida de todo vértice $v_x \in X$ com $FY[v_x] = \emptyset$, condição suficiente para essa classificação.

Como exemplo, a Figura 46 ilustra o digrafo bipartido $\mathcal{B}_{c_1}$ proveniente do multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$ e da árvore geradora observável $\mathcal{T}$ referentes ao sistema exemplo de 6 barras e 10 medidas da Figura 37. Nesse caso, a medida de fluxo de potência P_{6-4} é uma C_1 , pois o vértice correspondente em X não é alcançado por vértices de Y ligados a medidas redundantes (marcados em verde), ou seja, $FY[P_{6-4}] = \emptyset$.

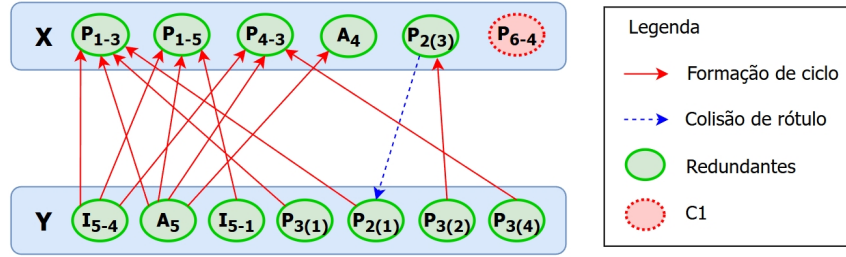


Figura 46: Digrafo $\mathcal{B}_{c_1}$ referente à rede exemplo de 6 barras e 10 medidas.

A Tabela 3 apresenta o conjunto $FY[v_x]$ para cada vértice $v_x \in X$ do digrafo $\mathcal{B}_{c_1}$ ilustrado na Figura 46. As fontes em Y são I_{5-4} , A_5 , I_{5-1} , $P_{3(1)}$, $P_{3(2)}$ e $P_{3(4)}$, sendo as três últimas referentes à mesma medida P_3 . O vértice $P_{2(1)}$ não é fonte, pois recebe o arco de colisão de rótulo proveniente de $P_{2(3)} \in X$. Note que P_{6-4} é o único vértice com $FY[v_x] = \emptyset$, o que confirma sua classificação como C_1 .

Tabela 3: Conjunto $FY[v_x]$ para cada vértice $v_x \in X$ do digrafo $\mathcal{B}_{c_1}$ referente ao sistema exemplo de 6 barras e 10 medidas.

v_x	$FY[v_x]$
P_{1-3}	$\{I_{5-4}, A_5, P_3\}$
P_{1-5}	$\{I_{5-4}, A_5, I_{5-1}\}$
P_{4-3}	$\{I_{5-4}, A_5, P_3\}$
A_4	$\{A_5\}$
$P_{2(3)}$	$\{P_3\}$
P_{6-4}	$\emptyset$

4.4.2 Busca por Pares e Conjuntos Críticos

Para a identificação topológica de C_2 s e C_{conj} s, utiliza-se o digrafo bipartido $\mathcal{B}_{c_2}$, obtido pela eliminação de todos os vértices de $\mathcal{B}_{c_1}$ correspondentes a C_1 s, bem como dos vértices de Y que recebem arco de colisão de rótulo desses vértices. Salienta-se que todo C_2 contém ao menos uma medida referenciada pela partição X de $\mathcal{B}_{c_2}$, pois a existência de um par formado exclusivamente por medidas em Y implicaria a observabilidade do sistema após a remoção simultânea de ambas, o que contradiz a definição de C_2 . Dessa forma, o esforço computacional para busca dessas criticalidades restringe-se à consulta ao dicionário FY , construído durante a identificação de C_1 s, e à análise da vizinhança de entrada $N^-(v_x)$ de cada vértice $v_x \in X$, onde $X \subset V(\mathcal{B}_{c_2})$. Salienta-se que, na consulta a FY , desconsideram-se as medidas pertencentes a C_1 s, preservando o dicionário original sem necessidade de atualização.

Para apoiar a elucidação dos padrões topológicos, definem-se as seguintes vizinhanças de entrada para vértices da partição X :

- *Vizinhança de entrada própria de $v_x \in X$* : $N_P^-(v_x) = N^-(v_x) \setminus N^+(v_x)$, que exclui os vértices de Y representantes da mesma medida de v_x ; e
- *Vizinhança de entrada reduzida de v_{xk} em relação a v_{xm}* : $N_R^-(v_{xk}, v_{xm}) = N^-(v_{xk}) \setminus \xi$, onde $\xi = N^+(v_{xk}) \cup N^+(v_{xm})$, utilizada na comparação dois a dois de vértices distintos $v_{xk}, v_{xm} \in X$.

O método proposto por Simões Costa, Piazza e Mandel [64] para identificação de C_2 s e C_{conj} s é parcialmente enumerativo: remove-se cada medida não-crítica do plano de medição uma a uma e reexecuta-se o algoritmo de identificação de C_1 s para verificar quais medidas remanescentes tornam-se críticas. Embora essa limitação seja reconhecida na própria formulação original [64], um método topológico não-enumerativo para C_2 s e C_{conj} s permanece em aberto. A metodologia aqui proposta resolve esse problema por meio de quatro padrões topológicos identificados diretamente em $\mathcal{B}_{c_2}$, sem enumeração:

- **C2-XY** (*Fontes representam uma única medida redundante*): seja $v_x \in X$ tal que $|FY[v_x]| = 1$. A única medida $m \in FY[v_x]$ é a única medida redundante capaz de substituir $M_v(v_x)$ em $\mathcal{T}$. O par $\{M_v(v_x), m\}$ constitui um C_2 .
- **C2-XY_p** (*Vizinhança de entrada própria representa uma única medida redundante*): seja $v_x \in X$ tal que os vértices de $N_P^-(v_x)$ representam exclusivamente uma única medida m . O par $\{M_v(v_x), m\}$ constitui um C_2 .

- **C2-XX** (*Igualdade entre vizinhanças de entrada reduzidas*): sejam $v_{xk}, v_{xm} \in X$ tais que $N_R^-(v_{xk}, v_{xm}) = N_R^-(v_{xm}, v_{xk})$. As medidas $M_v(v_{xk})$ e $M_v(v_{xm})$ constituem um C_2 .
- **C2-ext** (*Vizinhança de entrada própria como subconjunto de C_{conj}*): seja $v_x \in X$ não coberto pelos padrões anteriores, cuja $N_P^-(v_x)$ não contém fontes. Se $\{M_v(v_y) \mid v_y \in N_P^-(v_x)\} \subseteq C_{conj}$ para algum C_{conj} identificado, então $M_v(v_x)$ integra esse C_{conj} .

4.4.2.1 Padrão C2-XY: Fontes Representam uma Única Medida Redundante

Seja $v_x \in X$, onde $X \subset V(\mathcal{B}_{c_2})$. O padrão C2-XY é satisfeito quando exatamente uma medida redundante m pertence a $FY[v_x]$, isto é, as fontes em Y que alcançam v_x , diretamente ou por encadeamento de sequências de troca, representam uma única medida m . Nesse contexto, m é a única medida redundante de $M_v(v_x)$. A remoção de m do plano de medição provoca um efeito em cascata que torna $F_Y(v_x) = \emptyset$ e, conseqüentemente, $M_v(v_x)$ uma C_1 . Pela definição de tuplas críticas, o par $\{M_v(v_x), m\}$ constitui um C_2 .

A Figura 47 ilustra o efeito em cascata decorrente da remoção de m . A fonte $a \in Y$, representando a medida $m = M_v(a)$, alcança os vértices b, e, d e g por diferentes caminhos direcionados em $\mathcal{B}_{c_2}$. Como $FY[b] = FY[e] = FY[d] = FY[g] = \{m\}$, todos satisfazem o padrão C2-XY, formando os pares críticos $\{M_v(b), m\}$, $\{M_v(e), m\}$, $\{M_v(d), m\}$ e $\{M_v(g), m\}$.

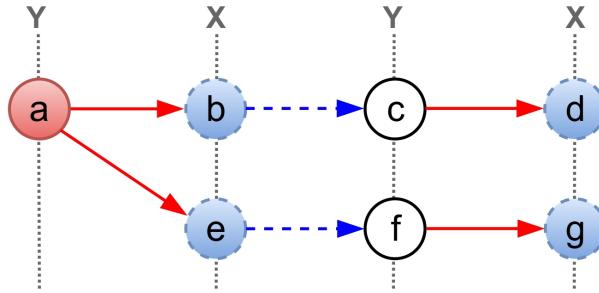


Figura 47: Efeito em cascata provocado pela remoção de m no padrão C2-XY.

A Figura 48 ilustra um caso particular em que duas fontes $a_1, a_2 \in Y$ representam a mesma medida redundante m , isto é, $M_v(a_1) = M_v(a_2) = m$. A busca em largura multi-fonte enfileira a_1 e a_2 simultaneamente, registrando apenas uma medida em FY para cada vértice alcançado. Assim, $FY[b] = FY[e] = FY[d] = FY[g] = \{m\}$, satisfazendo o padrão C2-XY independentemente do número de fontes que representam m .

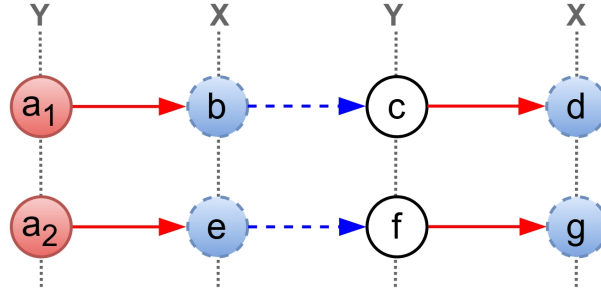


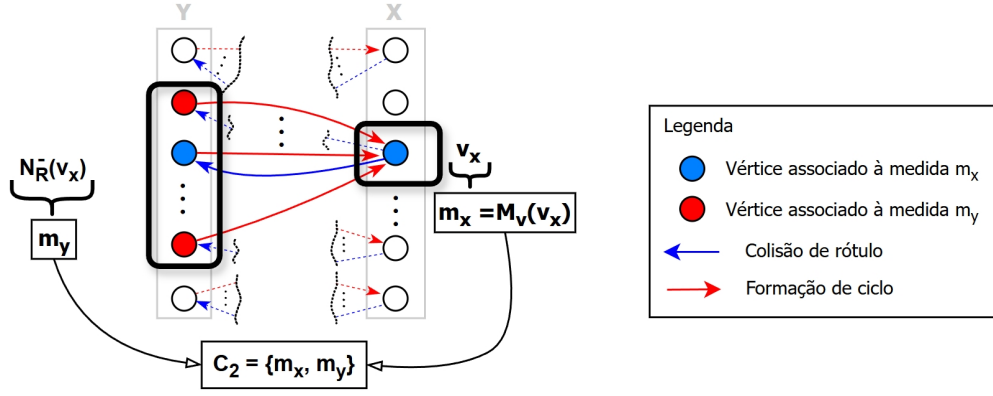
Figura 48: Padrão C2-XY com as fontes a_1 e a_2 representando a medida redundante m .

Retomando a Tabela 3, construída a partir do digrafo $\mathcal{B}_{c_1}$ ilustrado na Figura 46, o digrafo $\mathcal{B}_{c_2}$ é obtido pela remoção do vértice $P_{6-4} \in X$, referente à única C_1 identificada. Essa remoção não invalida o dicionário FY para os vértices remanescentes em X , cujos valores foram calculados independentemente, sendo suficiente desconsiderar a medida P_{6-4} nas consultas a FY . Os vértices A_4 e $P_{2(3)}$ satisfazem o padrão C2-XY, com $|FY[v_x]| = 1$, formando os pares críticos $\{A_4, A_5\}$ e $\{P_{2(3)}, P_3\}$, respectivamente.

4.4.2.2 Padrão C2-XY_p: Vizinhança de Entrada Própria Representa uma Única Medida Redundante

O padrão C2-XY_p identifica C_2 s formados por pares de medidas em que a redundância é estabelecida na vizinhança imediata do vértice $v_x \in X \subset V(\mathcal{B}_{c_2})$, sem depender da alcançabilidade direta desde fontes em Y . Enquanto o padrão C2-XY analisa os extremos das sequências de troca por meio do dicionário FY , o padrão C2-XY_p examina dependências internas dessas sequências, identificando C_2 s que envolvem v_x e a medida representada em sua vizinhança de entrada própria.

Sejam $v_x \in X$ e $m_x = M_v(v_x)$. Quando os vértices de $N_P^-(v_x)$ representam exclusivamente uma única medida m_y , o par $\{m_x, m_y\}$ caracteriza um C_2 . A utilização de $N_P^-(v_x)$ em lugar de $N^-(v_x)$ é essencial para tratar vértices v_x associados a arestas de injeção, que possuem arcos de colisão de rótulo conectando v_x a vértices de Y que compartilham o rótulo m_x . Para arestas de fluxo, $N^+(v_x) = \emptyset$ pela regra de construção de $\mathcal{B}_{c_1}$ descrita na Seção 4.4.1, e tem-se $N_P^-(v_x) = N^-(v_x)$. A Figura 49 ilustra esse padrão em $\mathcal{B}_{c_2}$.

Figura 49: Ilustração do padrão $C2-XY_p$.

A justificativa do padrão decorre diretamente da caracterização de C_1 s estabelecida na Seção 4.4.1, segundo a qual um vértice $v_x \in X$ é C_1 se, e somente se, $F_Y(v_x) = \emptyset$. Sob o padrão $C2-XY_p$, todos os vértices de $N_P^-(v_x)$ representam a mesma medida m_y , e os caminhos direcionados das fontes em Y até v_x em $\mathcal{B}_{c_2}$ atravessam exclusivamente vértices que referenciam m_y . A remoção de m_y do plano de medição implica a exclusão simultânea desses vértices, eliminando todos os caminhos das fontes a v_x e tornando $F_Y(v_x) = \emptyset$. Pela caracterização da Seção 4.4.1, m_x passa a integrar o conjunto de C_1 s do sistema. De modo análogo, a remoção de m_x desconecta os vértices de Y que dependem dela, fazendo com que m_y deixe de alcançar qualquer outro vértice de X que a necessite como intermediária. Pela definição de tuplas críticas, o par $\{m_x, m_y\}$ constitui um C_2 .

A identificação do padrão $C2-XY_p$ é conduzida por meio da avaliação direta da vizinhança de entrada própria $N_P^-(v_x)$ de cada $v_x \in X$. Quando o conjunto de medidas distintas representadas pelos vértices de $N_P^-(v_x)$ é unitário, o par formado por m_x e essa medida única é incorporado aos C_2 s identificados.

4.4.2.3 Padrão C2-XX: Igualdade entre Vizinhanças de Entrada Reduzidas

O padrão $C2-XX$ fundamenta-se na teoria de co-ciclos em matroides gráficos [51], com adaptação para o contexto do multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$ para o tratamento de medidas de injeção. Esse padrão identifica C_2 s formados por pares de medidas que rotulam arestas de $\mathcal{T}$, referidas por pares de vértices da partição X de $\mathcal{B}_{c_2}$.

Sejam $v_{xk}, v_{xm} \in X$ vértices que representam as arestas $e_{xk}, e_{xm} \in E(\mathcal{T})$, rotuladas pelas medidas $M_v(v_{xk})$ e $M_v(v_{xm})$, respectivamente. O padrão $C2-XX$ é satisfeito se $N_R^-(v_{xk}, v_{xm}) = N_R^-(v_{xm}, v_{xk})$, indicando que as medidas $M_v(v_{xk})$ e $M_v(v_{xm})$ constituem um C_2 . A Figura 50 ilustra esse padrão topológico.

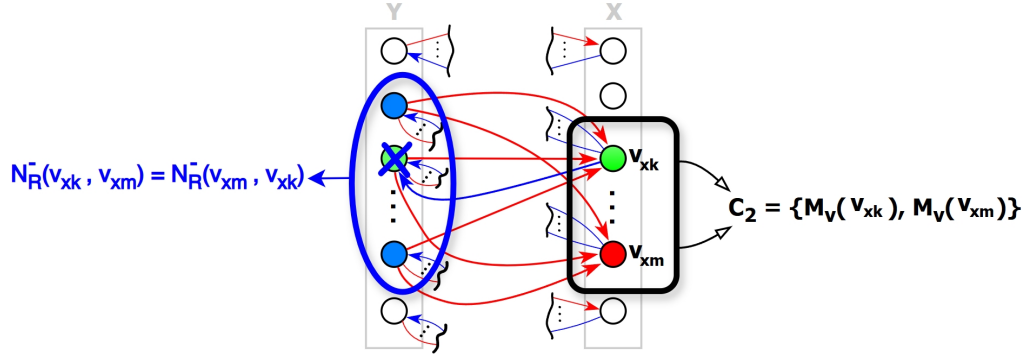


Figura 50: Um C_2 identificado através do padrão C2-XX.

O conjunto ξ é o elemento que generaliza o padrão C2-XX para medidas de injeção. Para medidas de fluxo, como a correspondência entre medida e aresta é biunívoca, não há arcos $X \rightarrow Y$ de colisão de rótulo em $\mathcal{B}_{c_2}$, resultando em $N^+(v_{xk}) = N^+(v_{xm}) = \emptyset$ e $\xi = \emptyset$, reduzindo-se a condição à igualdade simples $N^-(v_{xk}) = N^-(v_{xm})$, sendo um resultado clássico da teoria de co-ciclos [51]. Para medidas de injeção, $\xi \neq \emptyset$, sendo exatamente aqui que ξ desempenha seu papel conceitual. Ao avaliar o cenário hipotético da perda de $M_v(v_{xk})$ ou $M_v(v_{xm})$, não faz sentido considerar como substitutas as arestas que compartilham o mesmo rótulo dessas medidas, pois essas arestas também seriam removidas nesse cenário. O conjunto ξ remove da comparação exatamente esses vértices de Y (aqueles que recebem arco de colisão de rótulo de v_{xk} e v_{xm}) pois a perda de $M_v(v_{xk})$ acarreta a remoção do conjunto de vértices $\{v_{xk}\} \cup N^+(v_{xk})$ de $\mathcal{B}_{c_2}$ e das arestas correspondentes de $\mathcal{Z}_M$, tornando o padrão C2-XX válido para qualquer tipo de medida com a mesma condição $N_R^-(v_{xk}, v_{xm}) = N_R^-(v_{xm}, v_{xk})$.

Quando $N_R^-(v_{xk}, v_{xm}) = N_R^-(v_{xm}, v_{xk})$, as arestas e_{xk} e e_{xm} formam um co-ciclo em $\mathcal{Z}_M$, compartilhando exatamente o mesmo conjunto de arestas substitutas na co-árvore $\overline{\mathcal{T}}$, desconsideradas as arestas de mesmo rótulo que e_{xk} e e_{xm} . A perda de $M_v(v_{xk})$ remove de $\mathcal{Z}_M$ todas as arestas de rótulo $M_v(v_{xk})$, incluindo e_{xk} , rompendo todos os ciclos fundamentais formados pelas arestas substitutas compartilhadas, que passavam por e_{xk} . Consequentemente, v_{xm} torna-se um vértice sem vizinhança de entrada em $\mathcal{B}_{c_2}$, tornando e_{xm} indispensável para a observabilidade do sistema e, consequentemente, $M_v(v_{xm})$ uma C_1 . De forma análoga, a remoção de $M_v(v_{xm})$ torna $M_v(v_{xk})$ uma C_1 . Pela definição de 2-tuplas críticas, o par $\{M_v(v_{xk}), M_v(v_{xm})\}$ constitui um C_2 .

A identificação do padrão C2-XX é conduzida por meio de uma comparação sistemática, dois a dois, das vizinhanças de entrada reduzidas dos vértices pertencentes à partição X . A Figura 51 ilustra as possíveis combinações entre arestas de fluxo e de injeção associadas à árvore geradora observável $\mathcal{T}$ corrente, exemplificadas por um trecho formado pelas

arestas e_{xk} e e_{xm} , representadas pelos vértices $v_{xk}, v_{xm} \in V(\mathcal{B}_{c_2})$, que satisfazem o padrão C2-XX. Para as combinações (a), (d), (e) e (f), a igualdade $N_R^-(v_{xk}, v_{xm}) = N_R^-(v_{xm}, v_{xk})$ permanece válida com $\xi = \emptyset$, implicando $N^-(v_{xk}) = N^-(v_{xm})$. Já nas combinações (b) e (c), embora haja igualdade entre as vizinhanças de entrada reduzidas, uma aresta de injeção $e_{xn} \in E(\overline{\mathcal{T}})$ resulta $N^-(v_{xk}) \neq N^-(v_{xm})$ em $\mathcal{B}_{c_2}$, sendo descartada por comparar rótulos com e_{xk} e e_{xm} , utilizando-se $\xi = \{v_{e_{xn}}\}$ em $N_R^-(v_{xk}, v_{xm})$ e $N_R^-(v_{xm}, v_{xk})$. Em todas as combinações possíveis, a perda simultânea de $M_v(v_{xk})$ e $M_v(v_{xm})$ torna $\mathcal{Z}_M$ desconexo e, portanto, essas medidas formam um C_2 .

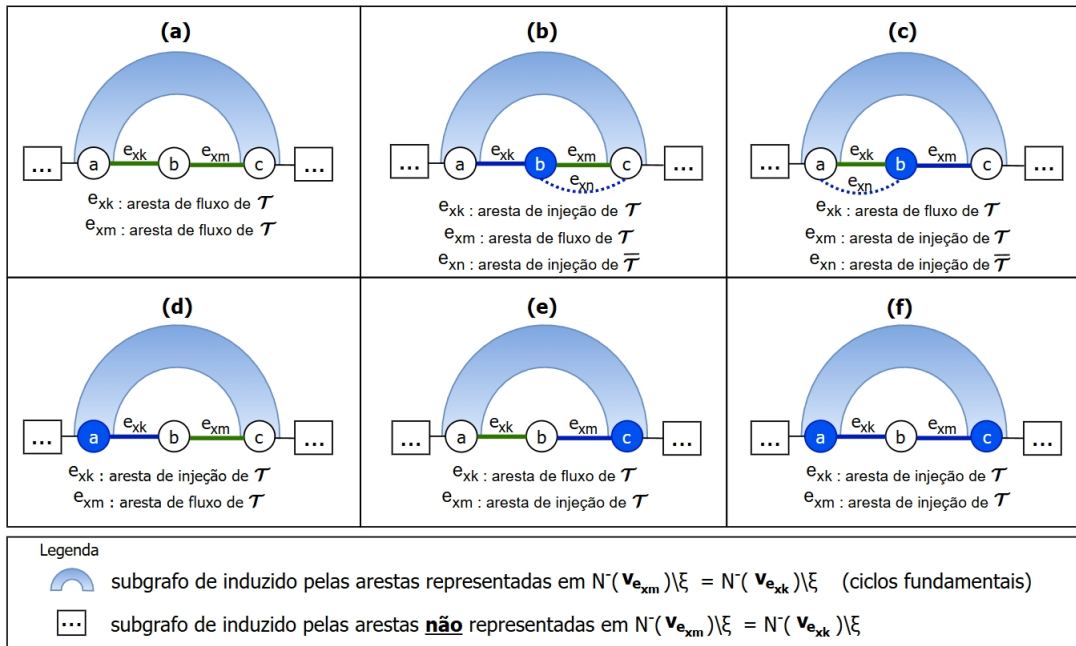


Figura 51: Possibilidades de combinações de arestas baseadas no padrão C2-XX.

Quando a árvore geradora observável é formada unicamente por arestas de fluxo, mesmo com arestas de injeção presentes em $\mathcal{Z}_M$, o padrão C2-XX reduz-se à comparação das vizinhanças de entrada entre vértices da partição X . Nesse caso, para dois vértices $v_{xk}, v_{xm} \in X$ de $\mathcal{B}_{c_2}$, se $N^-(v_{xk}) = N^-(v_{xm})$, então o par $\{M_v(v_{xk}), M_v(v_{xm})\}$ é C_2 .

4.4.2.4 Padrão C2-ext: Vizinhança de Entrada Própria como Subconjunto de C_{conj}

O padrão C2-ext complementa os padrões C2-XY, C2-XY_p e C2-XX, cobrindo um caso específico em que as medidas de injeção integram $\mathcal{T}$. Nessa situação, vértices $v_{xk}, v_{xm} \in X$ identificados pelo padrão C2-XX geram arcos de colisão de rótulo que alcançam vértices $v_{yk}, v_{ym} \in Y$ que, por sua vez, alcançam vértices adicionais $v_x \in X$ via arcos de formação de ciclo. Esses vértices v_x são alcançados por mais de uma medida redundante estritamente em Y , resultando em $|FY[v_x]| > 1$, o que impede a captura pelo padrão C2-XY.

Seja $v_x \in X$ não coberto pelos padrões C2-XY, C2-XY_p e C2-XX. O padrão C2-ext é aplicado apenas a vértices elegíveis (aqueles cuja $N_P^-(v_x)$ não contém nenhuma fonte), pois a ausência de fontes em $N_P^-(v_x)$ é condição necessária para o cenário descrito: vértices alcançados exclusivamente por medidas redundantes oriundas de vértices não-fonte em Y , que são sucessores de membros de C_{conj} s já identificados pelo padrão C2-XX. Para um vértice elegível v_x , verifica-se se o conjunto de medidas $\{M_v(v_y) \mid v_y \in N_P^-(v_x)\}$ é subconjunto de algum C_{conj} previamente identificado. Quando essa condição é satisfeita, $M_v(v_x)$ integra esse C_{conj} .

Se v_x satisfaz o padrão C2-ext, então as medidas representadas em $N_P^-(v_x)$ pertencem a C_{conj-i} . Pela definição de C_{conj} , a indisponibilidade de qualquer medida $m \in C_{conj-i}$ torna as medidas remanescentes desse conjunto em C_1 s, incluindo aquelas representadas em $N_P^-(v_x)$. Como essas medidas estão em X e deixam de ser alcançadas por fontes, os vértices não-fonte em Y que as referenciavam e alcançavam v_x perdem seus predecessores redundantes. Consequentemente, v_x também deixa de ser alcançado por fontes, tornando $M_v(v_x)$ uma C_1 . Portanto, $M_v(v_x)$ integra C_{conj-i} e forma C_2 s com todas as medidas desse conjunto. Salienta-se que esse raciocínio explora a reciprocidade dos C_{conj} s.

A Figura 52 ilustra o padrão C2-ext em dois painéis. No painel esquerdo, o digrafo $\mathcal{B}_{c_2}$ mostra o vértice $v_x \in X$ sendo alcançado pelos vértices de $N_P^-(v_x)$, cujas medidas associadas pertencem a C_{conj-i} . No painel direito, $\mathcal{B}'_{c_2}$ ilustra o efeito da indisponibilidade de uma medida $m \in C_{conj-i}$: o vértice correspondente é removido, e $N_P^-(v_x)$ passa a referenciar apenas C_1 s. Sem predecessores redundantes, v_x deixa de ser alcançado por fontes, tornando $M_v(v_x)$ uma C_1 .

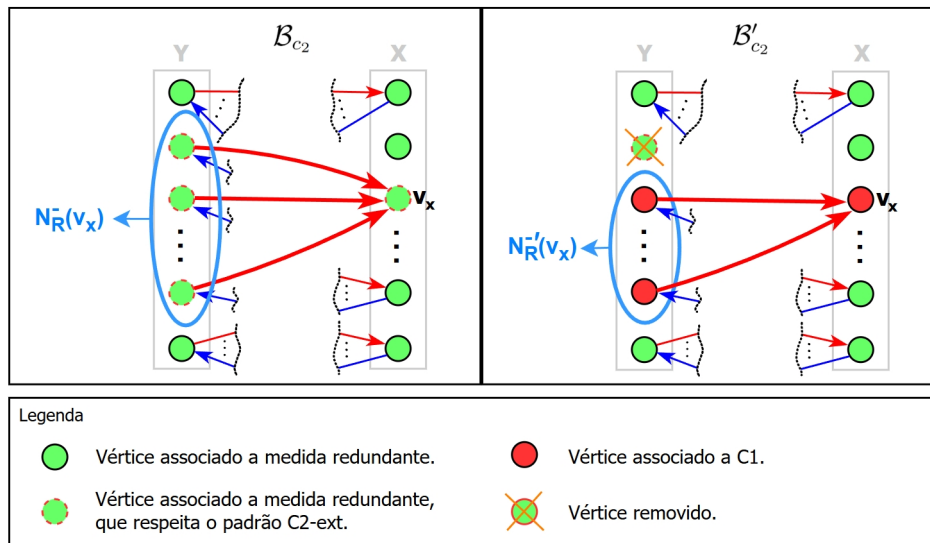


Figura 52: Exemplo de ocorrência do padrão C2-ext.

4.4.2.5 Implementação para Identificação dos Padrões C2-XY, C2-XY_p, C2-XX e C2-ext

Os padrões C2-XY, C2-XY_p, C2-XX e C2-ext são utilizados para identificação de especificidades estruturais em $\mathcal{B}_{c_2}$ que evidenciam C_2s e $C_{conj}s$. A metodologia desenvolvida opera sem modificações na estrutura de $\mathcal{B}_{c_2}$. Os Algoritmos 9, 10, 11, 12 e 13 formalizam o procedimento.

Algoritmo 9: Identificação de C_2s e $C_{conj}s$.

Entrada: $\mathcal{B}_{c_2}$, $M_v(\cdot)$ e FY .

Saída: C_2s e $C_{conj}s$.

```

1 início
2   Visitados  $\leftarrow \emptyset$ ;  Cconjs  $\leftarrow \emptyset$ ;  Pertence  $\leftarrow \emptyset$ ;
3   Padrao_XY( $\mathcal{B}_{c_2}$ ,  $FY$ , Visitados, Cconjs, Pertence);           // Algoritmo 10
4   Padrao_XYp( $\mathcal{B}_{c_2}$ , Visitados, Cconjs, Pertence);               // Algoritmo 11
5   Padrao_XX( $\mathcal{B}_{c_2}$ , Visitados, Cconjs, Pertence);                 // Algoritmo 12
6   Padrao_ext( $\mathcal{B}_{c_2}$ , Visitados, Cconjs, Pertence);               // Algoritmo 13
7    $C_2s \leftarrow \text{Gerar\_C2s}(Cconjs)$ ;
8   retorna  $C_2s$ ,  $Cconjs$ ;
```

Algoritmo 10: Procedimento Padrao_XY.

Entrada: $\mathcal{B}_{c_2}$, FY , Visitados, Cconjs, Pertence.

```

1 início
2   para cada  $v_{x_i} \in X \subset V(\mathcal{B}_{c_2})$  faça // Padrão C2-XY.
3       se  $|FY[v_{x_i}]| = 1$  então
4           Visitados  $\leftarrow$  Visitados  $\cup \{v_{x_i}\}$ ;
5           Combinar(Cconjs, Pertence,  $\{M_v(v_{x_i})\} \cup FY[v_{x_i}]$ );
```

Algoritmo 11: Procedimento Padrao_XYp.**Entrada:** $\mathcal{B}_{c_2}$, $Visitados$, $Cconjs$, $Pertence$.**1 início**

```

2   para cada  $v_{x_i} \in X \setminus Visitados$  faça // Padrão C2-XYp.
3        $N_P^-(v_{x_i}) \leftarrow N^-(v_{x_i}) \setminus N^+(v_{x_i});$ 
4        $Meds \leftarrow \{M_v(v_y) \mid v_y \in N_P^-(v_{x_i})\};$ 
5       se  $|Meds| = 1$  então
6            $Visitados \leftarrow Visitados \cup \{v_{x_i}\};$ 
7           Combinar( $Cconjs$ ,  $Pertence$ ,  $\{M_v(v_{x_i})\} \cup Meds$ );

```

Algoritmo 12: Procedimento Padrao_XX.**Entrada:** $\mathcal{B}_{c_2}$, $Visitados$, $Cconjs$, $Pertence$.**1 início**

```

2   para cada  $v_{x_i} \in X \setminus Visitados$  faça
3       para cada  $v_{x_j} \in X \setminus Visitados$ ,  $j > i$  faça
4            $\xi \leftarrow N^+(v_{x_i}) \cup N^+(v_{x_j});$ 
5            $N_R^-(v_{x_i}, v_{x_j}) \leftarrow N^-(v_{x_i}) \setminus \xi;$ 
6            $N_R^-(v_{x_j}, v_{x_i}) \leftarrow N^-(v_{x_j}) \setminus \xi;$ 
7           se  $N_R^-(v_{x_i}, v_{x_j}) = N_R^-(v_{x_j}, v_{x_i})$  então
8                $Visitados \leftarrow Visitados \cup \{v_{x_i}, v_{x_j}\};$ 
9               Combinar( $Cconjs$ ,  $Pertence$ ,  $\{M_v(v_{x_i}), M_v(v_{x_j})\}$ );

```

Algoritmo 13: Procedimento Padrao_ext.**Entrada:** $\mathcal{B}_{c_2}$, $Visitados$, $Cconjs$, $Pertence$.**1 início**

```

2   para cada  $v_{x_i} \in X \setminus Visitados$  faça
3        $N_P^-(v_{x_i}) \leftarrow N^-(v_{x_i}) \setminus N^+(v_{x_i});$ 
4       se  $\nexists v_y \in N_P^-(v_{x_i})$  tal que  $N^-(v_y) = \emptyset$  então
5            $Meds \leftarrow \{M_v(v_y) \mid v_y \in N_P^-(v_{x_i})\};$ 
6           se  $\exists C_{conj} \in Cconjs$  tal que  $Meds \subseteq C_{conj}$  então
7               Combinar( $Cconjs$ ,  $Pertence$ ,  $\{M_v(v_{x_i})\} \cup Meds$ );

```

Definem-se as seguintes variáveis e procedimentos nos Algoritmos 9, 10, 11, 12 e 13:

- conjunto *Visitados*, inicializado como vazio, que armazena os vértices de X cobertos pelos padrões aplicados, utilizado para restringir o espaço de busca das varreduras subsequentes;
- dicionário *Pertence*, inicializado como vazio, que mapeia cada medida envolvida em C_2s ao C_{conj} correspondente, construído e mantido pelo procedimento **Combinar** mediante a estrutura *Union-Find* [23];
- conjunto temporário *Meds*, que armazena as medidas representadas pelos vértices de $N_P^-(v_{x_i})$, utilizado nas verificações dos padrões C2-XY_p e C2-ext;
- procedimento **Combinar**, que incorpora um novo par ou conjunto de medidas a $Cconjs$, concomitantemente fundindo conjuntos críticos com medidas em comum e atualizando o dicionário *Pertence*; e
- procedimento **Gerar_C2s**, que expande os $C_{conj}s$ em todas as combinações dois a dois, gerando os C_2s definitivos do sistema.

O Algoritmo 9 realiza quatro varreduras sobre os vértices de $X \subset V(\mathcal{B}_{c_2})$. Conforme estabelecido na Seção 4.4.2, na consulta a FY desconsideram-se as C_1s , condição mantida implicitamente em todas as varreduras a seguir.

Na primeira varredura, aplica-se o padrão C2-XY a cada vértice $v_{x_i} \in X$: verifica-se se $|FY[v_{x_i}]| = 1$, condição que indica a existência de exatamente uma medida redundante capaz de substituir $M_v(v_{x_i})$ em $\mathcal{T}$. Os vértices que satisfazem o padrão são inseridos em *Visitados* e o C_2 identificado é incorporado a $Cconjs$ pelo procedimento **Combinar**.

Quanto à segunda varredura, aplica-se o padrão C2-XY_p aos vértices em $X \setminus \text{Visitados}$: calcula-se $N_P^-(v_{x_i})$ e o conjunto *Meds* das medidas representadas por seus vértices. Quando $|\text{Meds}| = 1$, incorpora-se o par formado por $M_v(v_{x_i})$ e a medida única em *Meds* a um $Cconj$. Sob essa condição, v_{x_i} é adicionado ao conjunto *Visitados*.

Na terceira varredura, busca-se por ocorrências do padrão C2-XX em pares de vértices v_{x_i} e v_{x_j} pertencentes a $X \setminus \text{Visitados}$, comparando as vizinhanças de entrada reduzidas $N_R^-(v_{x_i}, v_{x_j})$ e $N_R^-(v_{x_j}, v_{x_i})$, calculadas a partir de $\xi = N^+(v_{x_i}) \cup N^+(v_{x_j})$. Quando um par de vértices v_{x_i} e v_{x_j} satisfaz a igualdade $N_R^-(v_{x_i}, v_{x_j}) = N_R^-(v_{x_j}, v_{x_i})$, incorpora-se o par de medidas $\{M_v(v_{x_i}), M_v(v_{x_j})\}$ como C_2 a um $Cconj$. Sob essa condição, os referidos vértices são adicionados ao conjunto *Visitados*.

Na quarta varredura, aplica-se o padrão C2-ext aos vértices em $X \setminus \text{Visitados}$: calcula-se $N_P^-(v_{x_i})$ e verifica-se a ausência de fontes (condição de elegibilidade). Para os vértices elegíveis, consulta-se *Pertence* para verificar se todas as medidas de $N_P^-(v_{x_i})$ pertencem ao mesmo C_{conj} , incorporando $M_v(v_{x_i})$ a esse conjunto quando a condição é satisfeita.

Em todas as varreduras, o procedimento **Combinar** mantém C_{conjs} e o dicionário *Pertence* atualizados via estrutura *Union-Find*, unindo conjuntos com medidas em comum e mapeando cada medida ao seu C_{conj} correspondente, com custo amortizado praticamente constante por operação [23]. Por fim, o procedimento **Gerar_C2s** expande os $C_{conj}s$ em todas as combinações dois a dois, gerando os C_2s definitivos.

Embora os quatro padrões sejam implementados sistematicamente pelo Algoritmo 9, salienta-se que o padrão C2-ext ocorre exclusivamente em planos de medição com baixa redundância e predominância de medidas de injeção em $\mathcal{T}$, um cenário atípico na prática. Na maioria dos sistemas de potência reais, os C_2s e $C_{conj}s$ são identificados predominantemente pelos padrões C2-XY, C2-XY_p e C2-XX.

5 Resultados

Inicialmente, descrevem-se as redes elétricas avaliadas, de modo a contextualizar sua topologia, porte e as particularidades relevantes para a interpretação dos resultados. Em seguida, detalha-se a aplicação das metodologias propostas sobre a rede IEEE 14 barras monitorada por um plano de medição específico, desde a análise de observabilidade topológica até a identificação das criticalidades, cujos resultados são confrontados com os de uma abordagem numérica clássica sobre o mesmo sistema. Posteriormente, apresenta-se a configuração experimental adotada, incluindo as técnicas topológicas e numéricas de referência empregadas na comparação. Na sequência, avalia-se a aderência das criticalidades identificadas pela abordagem proposta frente às demais técnicas, em sistemas de diferentes portes, e analisa-se o desempenho computacional das abordagens, mensurado pelo tempo total de execução. Por fim, examinam-se as ocorrências dos padrões topológicos que fundamentam a identificação de pares e conjuntos críticos, encerrando-se o capítulo com uma discussão integrada sobre os resultados obtidos.

5.1 Redes Elétricas Estudadas

Para teste e validação das metodologias propostas e discutidas no Capítulo 4, utilizaram-se as redes IEEE 14, 118 e 300 barras, amplamente adotadas pela comunidade acadêmica, além de duas redes de grande porte do repositório MATPOWER: a CASE2383WP (2.383 barras) e a CASE9241PEGASE (9.241 barras). A seguir, apresenta-se uma breve descrição topológica de cada sistema utilizado.

- IEEE 14 barras: sistema de pequeno porte composto por 14 barras e 20 ramos.
- IEEE 118 barras: sistema de médio porte composto por 118 barras e 179 ramos.
- IEEE 300 barras: sistema de grande porte formado por 300 barras e 409 ramos.

- **CASE2383WP**: sistema de grande porte formado por 2.383 barras e 2.886 ramos, correspondente a uma rede de transmissão da Polônia.
- **CASE9241PEGASE**: integrante do conjunto de casos desenvolvidos no âmbito do projeto *PEGASE* (*Pan European Grid Advanced Simulation and State Estimation*), financiado pelo 7º Programa-Quadro da União Europeia [33]. Embora seus dados sejam fictícios, foram elaborados de modo a reproduzir com elevada fidelidade a complexidade estrutural e o porte de uma rede de transmissão transnacional de alta tensão, constituindo um benchmark robusto para estudos em larga escala [41]. O caso é composto por 9.241 barras e 14.207 ramos.

Utiliza-se a rede IEEE de 14 barras, monitorada por um conjunto de 20 medidas, com a finalidade de expor em pormenor cada etapa do processo de construção de uma árvore geradora observável e os mecanismos empregados na identificação de criticalidades de medidas. Para as demais topologias, adotaram-se planos de medição com diferentes níveis de redundância. Esse conjunto experimental permite, por um lado, ilustrar os procedimentos metodológicos sobre um caso de pequeno porte e, por outro, investigar como o problema das criticalidades escala com o tamanho do sistema, possibilitando avaliação da eficiência das técnicas propostas.

5.2 Planos de Medição Avaliados

Os planos de medição avaliados são gerados por uma heurística fundamentada na estrutura topológica do grafo de rede. Inicialmente, constrói-se uma árvore geradora aleatória do grafo e removem-se aleatoriamente k de suas arestas, obtendo-se uma floresta com $k + 1$ árvores. Em cada uma dessas árvores, alocam-se medidas de ramo com sentidos escolhidos ao acaso, assegurando a observabilidade topológica mínima de cada componente, que passa a constituir uma ilha observável. Na sequência, alocam-se aleatoriamente k medidas de injeção, responsáveis por estabelecer a interface entre as ilhas e garantir a observabilidade topológica global do plano de medição.

Como consequência direta dessa construção, a árvore geradora observável do plano de medição resultante contém, necessariamente, k arestas de injeção. Dessa forma, a heurística possibilita a geração de planos de medição aleatórios com presença controlada de medidas de injeção sustentando a observabilidade, permitindo avaliar a robustez das técnicas propostas em cenários nos quais a observabilidade depende de forma significativa desse tipo de medição. As medidas redundantes de fluxo são alocadas exclusivamente nas

regiões do grafo de rede que coincidem com as componentes formadas na etapa inicial, ao passo que as medidas redundantes de injeção não possuem restrição de alocação.

Esse procedimento evita a formação de regiões extensas sustentadas exclusivamente por medidas de injeção — configuração pouco realista em sistemas reais. Além disso, superam-se as limitações computacionais associadas à alocação aleatória de medidas em sistemas com baixo grau de redundância, uma abordagem que se torna computacionalmente custosa para redes elétricas de grande porte, como a CASE2383WP, e praticamente inviável para a CASE9241PEGASE. A estratégia adotada, fundamentada nos princípios de observabilidade topológica, assegura a construção de sistemas teste consistentes e adequados aos objetivos da análise.

Destaca-se que essa técnica não foi empregada no caso da rede IEEE 14 barras, cuja dimensão reduzida e caráter eminentemente ilustrativo dispensam tal estruturação. Os detalhes da implementação desenvolvida para a geração dos sistemas encontram-se descritos no Apêndice A. Ademais, a composição dos respectivos planos de medição para as demais topologias será apresentada ao longo da seção de resultados.

5.3 Caso Ilustrativo: Sistema IEEE 14 barras e 20 medidas

Para ilustrar detalhadamente cada etapa das metodologias propostas, utiliza-se como caso de estudo a rede IEEE de 14 barras monitorada por um plano de medição M de **20 medidas**, composto por: 8 medidas convencionais de injeção de potência ativa (P_i); 7 medidas convencionais de fluxo de potência ativa em ramos (P_{i-j}); 3 medidas de corrente fasorial (I_{i-j}); e 2 medidas de ângulo de fase de tensão (A_i). A Figura 53 apresenta o sistema avaliado, evidenciando a topologia da rede e o plano de medição associado.

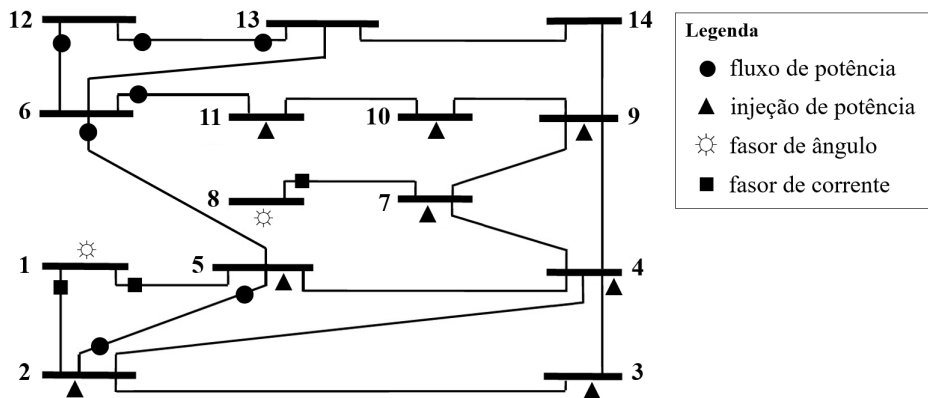


Figura 53: Sistema IEEE 14 barras com 20 medidas.

Esse sistema possui duas PMUs completas nas barras 1 e 8: a PMU da barra 1 fornece o ângulo de tensão nodal e os fasores de corrente nos ramos 1-2 e 1-5, enquanto a PMU da barra 8 mede o ângulo de tensão nodal e o fasor de corrente no ramo 8-7.

A partir do plano de medição M , constrói-se o multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$ conforme o procedimento definido na Seção 4.2 do Capítulo 4. O multigrafo resultante é ilustrado na Figura 54, na qual:

- as 7 medidas de fluxo convencional e as 3 medidas de corrente fasorial originam arestas de fluxo com rótulos distintos;
- cada uma das 8 medidas de injeção gera um conjunto de arestas de injeção com rótulo próprio, centrado na barra monitorada k e conectando-a às suas barras vizinhas;
- as 2 medidas fasoriais de ângulo de tensão produzem arestas de fluxo entre cada barra monitorada e o vértice fictício 0, que representa a referência angular do sistema, cada qual com rótulo distinto.

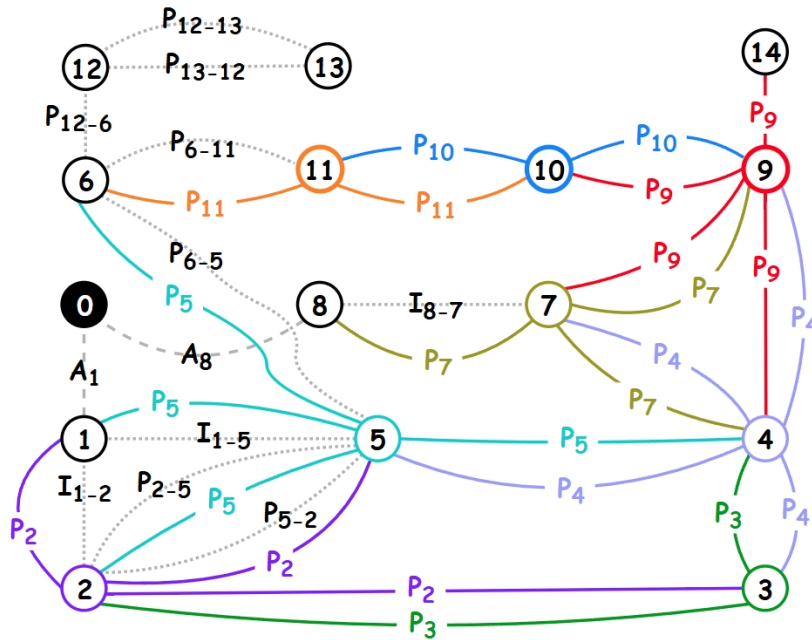


Figura 54: $\mathcal{Z}_M$ referente ao IEEE 14 barras com 20 medidas.

A partir do multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$, preparam-se as instâncias de entrada do algoritmo de observabilidade topológica. Para isso, constroem-se dois subgrafos de $\mathcal{Z}_M$: (i) o subgrafo $\mathcal{Z}_F$, induzido pelas arestas de fluxo, e (ii) o subgrafo $\mathcal{Z}_P^0$, formado pelas

Tabela 4: Sequência de arestas de fluxo processadas para construção de $\mathcal{T}_F$.

#	Aresta	Rótulo	Extremo x	Extremo y	Tratamento
1	(0, 1)	A_1	(0): raiz/visitado	(1): não visitado	Inserida em $\mathcal{T}_F$
2	(1, 2)	I_{1-2}	(1): visitado	(2): não visitado	Inserida em $\mathcal{T}_F$
4	(2, 5)	P_{2-5}	(2): visitado	(5): não visitado	Inserida em $\mathcal{T}_F$
5	(5, 6)	P_{6-5}	(5): visitado	(6): não visitado	Inserida em $\mathcal{T}_F$
6	(6, 11)	P_{6-11}	(6): visitado	(11): não visitado	Inserida em $\mathcal{T}_F$
7	(6, 12)	P_{12-6}	(6): visitado	(12): não visitado	Inserida em $\mathcal{T}_F$
8	(12, 13)	P_{12-13}	(12): visitado	(13): não visitado	Inserida em $\mathcal{T}_F$
9	(12, 13)	P_{13-12}	(12): visitado	(13): visitado	Ignorada
10	(2, 5)	P_{5-2}	(2): visitado	(5): visitado	Ignorada
11	(1, 5)	I_{1-5}	(1): visitado	(5): visitado	Ignorada
12	(0, 8)	A_8	(0): raiz/visitado	(8): não visitado	Inserida em $\mathcal{T}_F$
13	(8, 7)	I_{8-7}	(8): visitado	(7): não visitado	Inserida em $\mathcal{T}_F$

Como a floresta $\mathcal{T}_F$ resultante do processamento das arestas de fluxo não constitui uma árvore geradora, torna-se necessário recorrer às arestas de injeção para conectar as componentes conexas (árvores), objetivando a análise de observabilidade topológica e a construção de uma árvore geradora observável $\mathcal{T}$.

Sejam $\mathcal{T}_P^0$ e $\mathcal{Z}_P^0$ as instâncias de entrada da rotina de processamento de arestas de injeção, onde $V(\mathcal{T}_P^0) = V(\mathcal{T}_F)$ e $E(\mathcal{T}_P^0) = E(\mathcal{T}_F)$. Inicialmente, conforme estabelecido na Seção 4.3.2 do Capítulo 4, realiza-se a contração de arestas de $\mathcal{T}_P^0$ e $\mathcal{Z}_P^0$. Essa operação visa reduzir o espaço de busca associado ao processamento das arestas de injeção, agrupando em supernós todos os vértices de $\mathcal{T}_P^0$ e $\mathcal{Z}_P^0$ pertencentes a uma mesma árvore $\mathcal{T}_{F_k}$ da floresta $\mathcal{T}_F$. A partir dessa contração obtêm-se os grafos reduzidos $\mathcal{T}_P^{sn}$ e $\mathcal{Z}_P^{sn}$, oriundos de $\mathcal{T}_P^0$ e $\mathcal{Z}_P^0$, respectivamente. A Figura 57 ilustra essa operação de redução no caso avaliado.

A redução resultante é essencial para a eficiência da rotina: ao operar no nível de supernós, o algoritmo avalia as arestas de injeção apenas quanto à sua capacidade de conectar árvores distintas de $\mathcal{T}_F$. Nessa etapa, busca-se construir uma árvore geradora com unicidade de rótulos (ou árvore geradora arco-íris) $\mathcal{T}_P^0$ com arestas de $\mathcal{Z}_P^0$. Posteriormente, as arestas de injeção pertencentes à solução são convertidas para seus extremos originais para expansão de $\mathcal{T}_F$ e, portanto, obtenção da árvore geradora observável $\mathcal{T}$. Salienta-se que, em caso de inobservabilidade topológica, $\mathcal{T}$ persistirá como floresta.

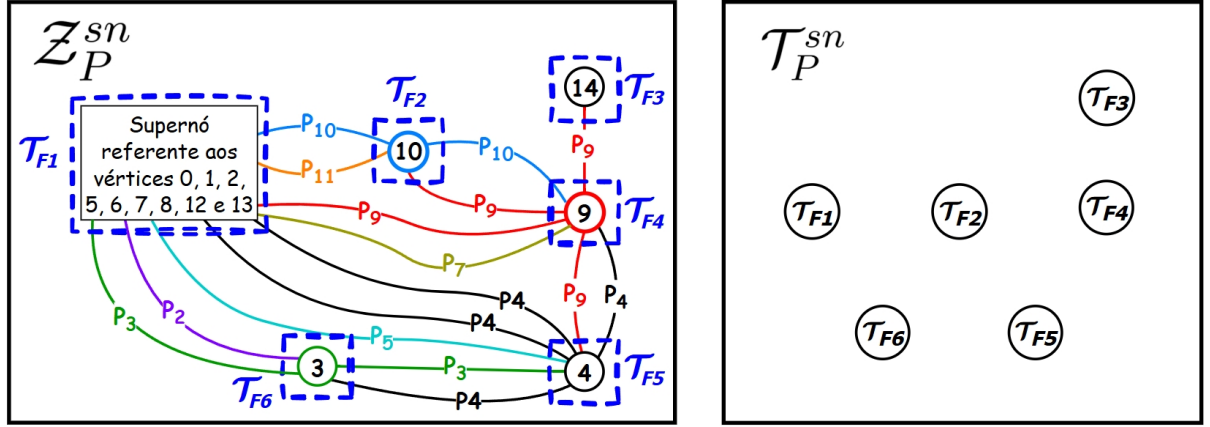


Figura 57: Instâncias de entrada da rotina de processamento das arestas de injeção para o sistema IEEE 14 barras com 20 medidas.

Pode-se reduzir ainda mais o multigrafo $\mathcal{Z}_P^{sn}$ por meio de uma busca iterativa por pontes. Para cada ponte $e_P \in E(\mathcal{Z}_P^{sn})$, rotulada por P_k , realiza-se a contração de seus extremos em um supernó e a remoção das demais arestas com o mesmo rótulo P_k . A contração gera um multigrafo temporário, no qual uma nova busca por pontes é executada. O processo evolui de forma iterativa, de modo que cada ponte identificada aciona uma nova contração e eventuais remoções de arestas, repetindo-se o ciclo até que nenhuma nova ponte seja encontrada. Ao final dessa etapa, obtém-se o multigrafo reduzido $\mathcal{Z}_P$.

No multigrafo $\mathcal{Z}_P^{sn}$ referente ao sistema de IEEE 14 barras e 20 medidas, ilustrado na Figura 57, a aresta de injeção $(\mathcal{T}_{F4}, \mathcal{T}_{F3})$ (extremos 9 e 14, respectivamente) de rótulo P_9 é uma ponte. Assim, transformam-se os extremos dessa ponte no supernó $\mathcal{T}_{F7}$, e removem-se as demais arestas de injeção de mesmo rótulo P_9 . Ilustram-se os grafos $\mathcal{Z}_P$ e $\mathcal{T}_P$ resultantes desse processo na Figura 58. A ponte identificada será posteriormente incorporada a $\mathcal{T}$ ao término da rotina.

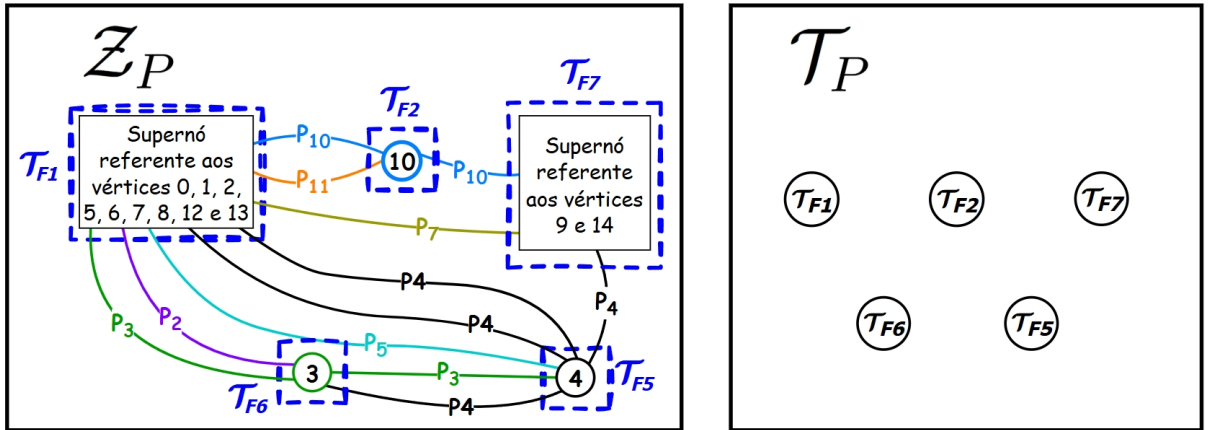


Figura 58: Instância $\mathcal{Z}_P^R$ referente ao sistema IEEE 14 barras com 20 medidas.

As arestas de injeção remanescentes de $\mathcal{Z}_P$ serão processadas pelo Algoritmo 4, com o objetivo de construir uma árvore geradora observável em $\mathcal{T}_P$. A Tabela 5 apresenta o ordenamento adotado para varredura das arestas de injeção e o tratamento dado.

Tabela 5: Ordem de processamento e tratamento das arestas de $\mathcal{Z}_P$.

#	Aresta em $\mathcal{Z}_P^R$	Aresta em $\mathcal{Z}_P$	Rótulo	Freq. do Rótulo	Tratamento / Conflito
1	$(\mathcal{T}_{F1}, \mathcal{T}_{F6})$	(2, 3)	P_2	1	Inserido em $\mathcal{T}_P^R$.
2	$(\mathcal{T}_{F1}, \mathcal{T}_{F7})$	(7, 9)	P_7	1	Inserido em $\mathcal{T}_P^R$.
3	$(\mathcal{T}_{F1}, \mathcal{T}_{F5})$	(4, 5)	P_5	1	Inserido em $\mathcal{T}_P^R$.
4	$(\mathcal{T}_{F1}, \mathcal{T}_{F2})$	(10, 11)	P_{11}	1	Inserido em $\mathcal{T}_P^R$.
5	$(\mathcal{T}_{F1}, \mathcal{T}_{F6})$	(2, 3)	P_3	2	Forma ciclo com aresta #1.
6	$(\mathcal{T}_{F5}, \mathcal{T}_{F6})$	(3, 4)	P_3	2	Forma ciclo com arestas #1 e #3.
7	$(\mathcal{T}_{F1}, \mathcal{T}_{F2})$	(10, 11)	P_{10}	2	Forma ciclo com aresta #4.
8	$(\mathcal{T}_{F2}, \mathcal{T}_{F7})$	(9, 10)	P_{10}	2	Forma ciclo com arestas #2 e #4.
9	$(\mathcal{T}_{F1}, \mathcal{T}_{F5})$	(4, 5)	P_4	4	Forma ciclo com aresta #3.
10	$(\mathcal{T}_{F1}, \mathcal{T}_{F5})$	(4, 7)	P_4	4	Forma ciclo com aresta #3.
11	$(\mathcal{T}_{F5}, \mathcal{T}_{F6})$	(3, 4)	P_4	4	Forma ciclo com arestas #1 e #3.
12	$(\mathcal{T}_{F5}, \mathcal{T}_{F7})$	(4, 9)	P_4	4	Forma ciclo com arestas #2 e #3.

Conforme mencionado no Capítulo 4, o processamento das arestas de injeção não admite uma estratégia gulosa. A ordem em que essas arestas são avaliadas influencia diretamente na máxima expansão possível de $\mathcal{T}_P$, comprometendo, no caso de sistemas topologicamente observáveis, a construção de uma árvore geradora observável $\mathcal{T}$. Nesse caso, o Algoritmo 4 emprega um digrafo bipartido auxiliar $\mathcal{B}$, capaz de reverter escolhas de arestas ao longo da varredura e, assim, garantir a construção de uma solução viável.

Entretanto, em sistemas de grande porte, o acesso frequente ao digrafo auxiliar $\mathcal{B}$ tende a elevar o esforço computacional. Para reduzir esse impacto, adota-se uma ordenação das arestas que tende a minimizar o número de correções necessárias. Neste trabalho, prioriza-se o processamento das arestas de injeção associadas aos rótulos menos frequentes em $\mathcal{Z}_P$, heurística que, empiricamente, demonstrou uma redução da quantidade de intervenções via $\mathcal{B}$. A Tabela 5 ilustra a aplicação desse critério. Todavia, ressalta-se que o maior ganho computacional do método decorre do processo de contração de arestas em supernós nas instâncias de entrada.

Conforme a Tabela 5, as arestas de injeção escolhidas para formarem uma árvore geradora de rótulos únicos em $\mathcal{T}_P$ foram $(\mathcal{T}_{F1}, \mathcal{T}_{F6})$, $(\mathcal{T}_{F1}, \mathcal{T}_{F7})$, $(\mathcal{T}_{F1}, \mathcal{T}_{F5})$ e $(\mathcal{T}_{F1}, \mathcal{T}_{F2})$. Expandido-se todos os supernós de $\mathcal{T}_P$, obtém-se as seguintes arestas de injeção que conectam as árvores da floresta $\mathcal{T}_F$, sem violar as restrições de aciclicidade e unicidade de rótulos: (9, 14) de rótulo P_9 ; (2, 3) de rótulo P_2 ; (7, 9) de rótulo P_7 ; (4, 5) de rótulo P_5 ; e (10, 11) de rótulo P_{11} . Representa-se na Figura 59 a árvore geradora observável $\mathcal{T}$ obtida, o que confirma a observabilidade topológica do sistema IEEE 14 barras com 20 medidas.

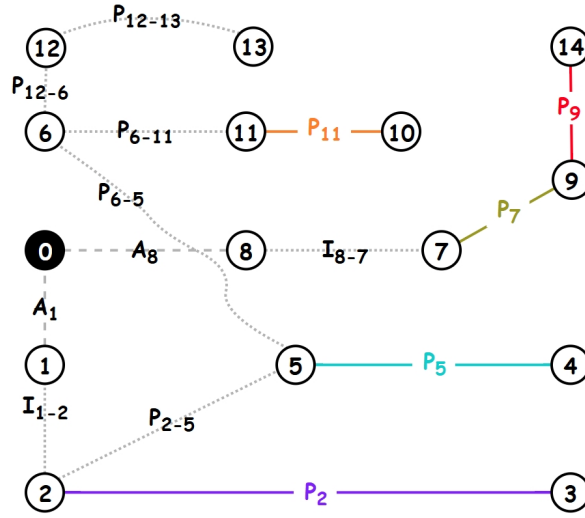


Figura 59: Uma árvore geradora observável $\mathcal{T}$ concernente ao sistema IEEE 14 barras e 20 medidas.

A Figura 60 ilustra a co-árvore $\bar{\mathcal{T}}$ referente a $\mathcal{T}$, composta pelas arestas do multigrafo $\mathcal{Z}_M$ que não pertencem à árvore geradora observável construída, caracterizada pelos conjuntos de vértices $V(\bar{\mathcal{T}}) = V(\mathcal{T})$ e de arestas $E(\bar{\mathcal{T}}) = E(\mathcal{Z}_M) \setminus E(\mathcal{T})$.

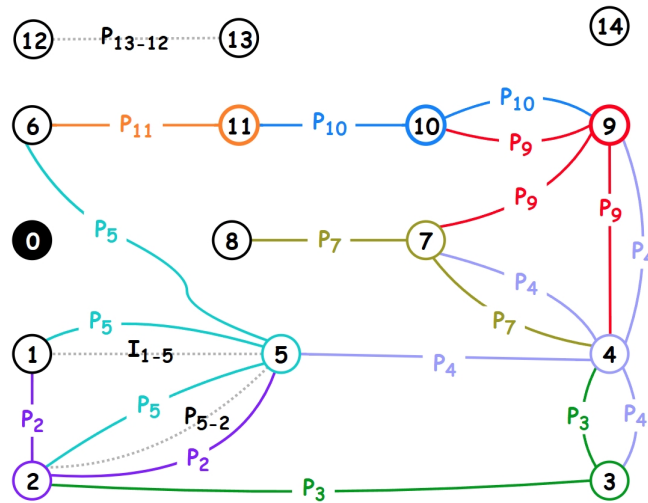


Figura 60: Uma co-árvore $\bar{\mathcal{T}}$ referente à árvore geradora observável oriunda do algoritmo.

Com base em $\overline{\mathcal{T}}$, procede-se à construção do digrafo $\mathcal{B}_{c_1}$, conforme descrito na Seção 4.4.1. Cada vértice de $\mathcal{B}_{c_1}$ representa biunivocamente uma aresta do multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$, sendo o conjunto de vértices particionado em X e Y . A partição X contém os vértices associados às arestas da árvore geradora observável $\mathcal{T}$, enquanto a partição Y é composta pelos vértices correspondentes às arestas da co-árvore $\overline{\mathcal{T}}$.

O digrafo $\mathcal{B}_{c_1}$ mapeia os conflitos estruturais existentes entre as arestas da co-árvore $\overline{\mathcal{T}}$ e as arestas da árvore geradora observável $\mathcal{T}$, indicando as possibilidades de remanejamento entre esses dois conjuntos que resultam em diferentes árvores geradoras observáveis. Essa representação permite explicitar, de forma sistemática, as dependências topológicas entre as medições do sistema. As medidas que não constituem $\overline{\mathcal{T}}$ são identificadas como redundantes, pois são representadas por fontes na partição Y em $\mathcal{B}_{c_1}$. Por sua vez, as C_1 s correspondem aos vértices da partição X que não são alcançáveis a partir dessas fontes por meio de sequências de troca.

Na Figura 61, os vértices assinalados em vermelho correspondem às medidas classificadas como C_1 , isto é, aquelas que integram todas as árvores geradoras observáveis possíveis de $\mathcal{Z}_M$. Por outro lado, os vértices destacados em azul representam medidas redundantes, cuja remoção não compromete a observabilidade topológica do sistema.

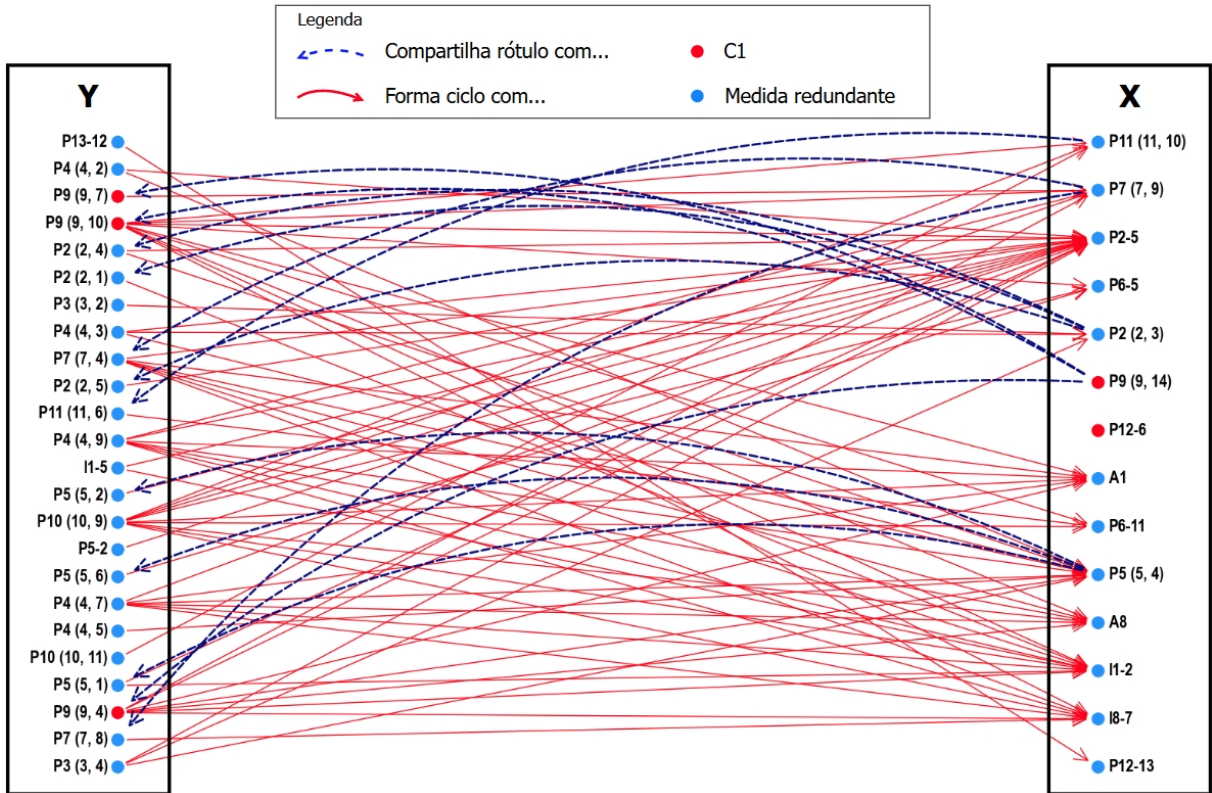


Figura 61: Digrafo $\mathcal{B}_{c_1}$ referente ao sistema IEEE 14 barras e 20 medidas.

Para as arestas de injeção representadas por vértices de $\mathcal{B}_{c_1}$ na Figura 61, adota-se a identificação pelo rótulo da respectiva medida, acompanhada de um par ordenado (i, j) . Nesse par, i corresponde à barra monitorada pela medição de injeção, enquanto j indica a barra adjacente associada a essa medição no multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$. Por exemplo, o vértice rotulado como P2 (2, 5) representa a medida de injeção P₂, cuja referida aresta conecta os vértices 2 e 5 em $\mathcal{Z}_M$.

Salienta-se que a identificação das C_1 s é realizada por meio do dicionário $FY[v_x]$, conforme apresentado na Tabela 6 para o sistema IEEE 14 barras e 20 medidas.

Tabela 6: Conjunto $FY[v_x]$ para cada vértice $v_x \in X$.

v_x	$FY[v_x]$	C_1
A1	$\{P_{10}, P_4\}$	
A8	$\{P_{10}, P_4\}$	
I1-2	$\{I_{1-5}, P_{10}, P_3, P_4\}$	
I8-7	$\{P_{10}, P_4\}$	
P11 (11, 10)	$\{P_{10}\}$	
P12-13	$\{P_{13-12}\}$	
P12-6	$\emptyset$	✓
P2 (2, 3)	$\{P_3, P_4\}$	
P2-5	$\{I_{1-5}, P_{10}, P_3, P_4, P_{5-2}\}$	
P5 (5, 4)	$\{P_{10}, P_3, P_4\}$	
P6-11	$\{P_{10}\}$	
P6-5	$\{P_{10}, P_3, P_4\}$	
P7 (7, 9)	$\{P_{10}, P_4\}$	
P9 (9, 14)	$\emptyset$	✓

De acordo com a Tabela 6, os vértices P12-6 e P9(9, 14) da partição X de $\mathcal{B}_{c_1}$, referentes às medidas P₁₂₋₆ e P₉, respectivamente, não estão envolvidos em sequências de troca. Esses vértices pertencem à partição X e, portanto, correspondem a arestas de $\mathcal{T}$. Tais arestas não admitem remanejamento com arestas da co-árvore $\overline{\mathcal{T}}$ e, por essa razão, as referidas medidas caracterizam C_1 s. Observam-se dois padrões topológicos indicativos de C_1 : (i) o vértice em X não possui vizinhos de entrada em $\mathcal{B}_{c_1}$; ou (ii) todos os seus vizinhos de entrada correspondem, eles próprios, a vértices associados a C_1 s. No sistema em questão, têm-se $N^-(P9(9, 14)) = \emptyset$ e $N^-(P12-6) = \emptyset$.

A partir da eliminação dos vértices associados às medidas C_1 s em $\mathcal{B}_{c_1}$, obtém-se o digrafo bipartido $\mathcal{B}_{c_2}$, ilustrado na Figura 62. Esse digrafo preserva exclusivamente as relações estruturais entre medidas remanejeáveis.

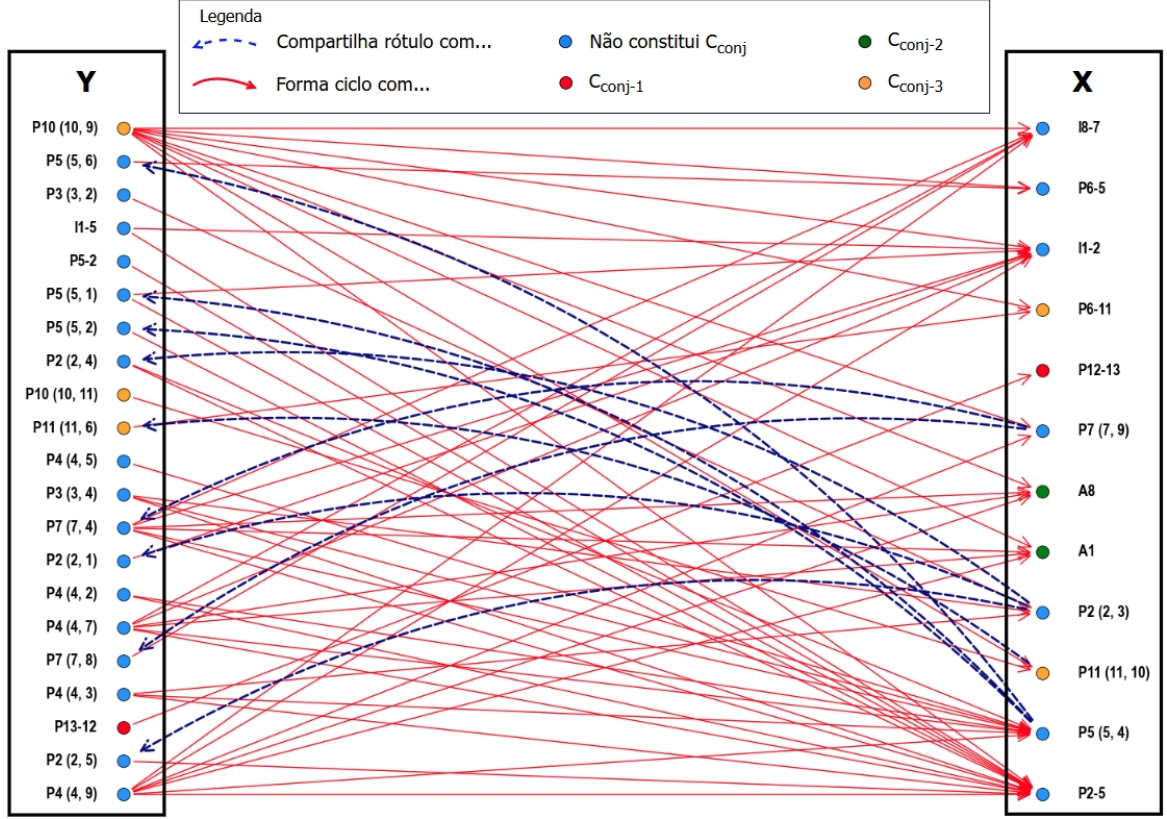


Figura 62: Digrafo $\mathcal{B}_{c_2}$ referente ao sistema IEEE 14 barras e 20 medidas.

Na Figura 62, os vértices destacados em azul correspondem a medidas que não integram nenhum C_{conj} , enquanto as demais cores (vermelho, verde e laranja) destacam os C_{conj} s identificados. Os padrões topológicos estabelecidos na Seção 4.4.2 foram identificados em $\mathcal{B}_{c_2}$, baseando-se no dicionário $FY[v_x]$ apresentado na Tabela 6:

- O vértice P12-13 é alcançado por uma única fonte em Y, que representa a medida P_{13-12} : $FY[P12-13] = \{P_{13-12}\}$. Nesse contexto, satisfaz-se o padrão C2-XY, caracterizando o par $\{P_{12-13}, P_{13-12}\}$ como um C_2 . Como $N^-(P12-13) = \{P13-12\}$ representa uma única medida, o padrão C2-XY_p também retornaria esse C_2 , todavia a lógica implementada prioriza a busca pelo padrão C2-XY.
- O vértice P11 (11, 10) é alcançado por duas fontes em Y, i.e., $N^-(P11 (11, 10)) = \{P10 (10, 9), P10 (10, 11)\}$, que representam a medida P_{10} : $FY[P11 (11, 10)] = \{P_{10}\}$. Do mesmo modo, o vértice P6-11 é alcançado exclusivamente por fontes que representam a medida P_{10} : $FY[P6-11] = \{P_{10}\}$. Assim, os pares $\{P_{10}, P_{11}\}$ e $\{P_{10}, P_{6-11}\}$ satisfazem o padrão C2-XY e são classificados como C_2 s.

- Os vértices A1 e A8 apresentam vizinhanças de entrada reduzidas idênticas. Considerando $\xi = N^+(A1) \cup N^+(A8) = \emptyset$, tem-se:

$$N_R^-(A1) = N_R^-(A8) = \{P4(4, 7), P4(4, 9), P7(7, 4), P10(10, 9)\}.$$

Esse arranjo satisfaz o padrão C2-XX, caracterizando o par $\{A_1, A_8\}$ como um C_2 .

Observa-se, contudo, que os pares $\{P_{10}, P_{11}\}$ e $\{P_{10}, P_{6-11}\}$, ambos identificados pelo padrão C2-XY, compartilham a medida P_{10} . Essa interseção indica que as medidas P_{10} , P_{11} e P_{6-11} pertencem a um mesmo C_{conj} . A partir dessa consolidação, oriunda da reciprocidade característica de $C_{conj}s$, pode-se derivar o par $\{P_{6-11}, P_{11}\}$ como um C_2 adicional, resultando no conjunto crítico

$$C_{conj} = \{P_{10}, P_{11}, P_{6-11}\}.$$

Após a identificação dos C_2s por meio dos padrões C2-XY e C2-XX, bem como a consolidação dos $C_{conj}s$ mediante a propriedade de reciprocidade, obtêm-se as criticalidades apresentadas na Tabela 7.

Tabela 7: C_2s e $C_{conj}s$ identificados no sistema IEEE 14 barras e 20 medidas.

Identificador	Elementos	C_{conj} correspondente
C_2-001	$\{P_{12-13}, P_{13-12}\}$	C_{conj-1}
C_2-002	$\{A_1, A_8\}$	C_{conj-2}
C_2-003	$\{P_{6-11}, P_{11}\}$	C_{conj-3}
C_2-004	$\{P_{6-11}, P_{10}\}$	C_{conj-3}
C_2-005	$\{P_{10}, P_{11}\}$	C_{conj-3}

Os padrões propostos neste trabalho decorrem de cenários em que a perda de medidas induz modificações estruturais no digrafo $\mathcal{B}_{c_2}$, levando ao aparecimento de vértices na partição X que passam a satisfazer os padrões topológicos característicos de C_1s , permitindo, assim, a identificação de C_2s .

Embora a análise topológica desenvolvida neste trabalho constitua o foco principal da metodologia proposta, torna-se relevante verificar a consistência dos resultados obtidos por meio de uma abordagem alternativa amplamente consolidada na literatura. Com esse objetivo, apresenta-se, na sequência, a aplicação de um método numérico baseado na análise dos resíduos normalizados, considerando o mesmo sistema IEEE 14 barras e 20 medidas utilizado na análise topológica.

Essa abordagem numérica fundamenta-se na estrutura da matriz Jacobiana do modelo linearizado e na matriz de covariância dos resíduos da estimação linear $\tilde{\mathbf{\Omega}}$, a partir das quais é possível identificar medidas críticas, pares críticos e conjuntos críticos por meio de propriedades algébricas.

Os resultados obtidos por esse método são apresentados de modo a evidenciar sua correspondência direta com as criticalidades previamente identificadas pelos digrafos $\mathcal{B}_{c_1}$ e $\mathcal{B}_{c_2}$, demonstrando que ambas as abordagens conduzem às mesmas classificações de medidas para o sistema analisado.

A matriz Jacobiana $\tilde{\mathbf{H}}$ correspondente ao sistema IEEE 14 barras e 20 medidas é apresentada a seguir. As linhas estão associadas às medidas que compõem o plano de medição, enquanto as colunas correspondem às variáveis de estado $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{14}$.

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6	θ_7	θ_8	θ_9	θ_{10}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{13}	θ_{14}
I_{1-2}	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I_{1-5}	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_{2-5}	0	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_{5-2}	0	-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_{6-5}	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
P_{6-11}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	0	0	0
I_{8-7}	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0
P_{12-6}	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
P_{12-13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0
$\tilde{\mathbf{H}} = P_{13-12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0
A_1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A_8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
P_2	-1	4	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_3	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_4	0	-1	-1	5	-1	0	-1	0	-1	0	0	0	0	0
P_5	-1	-1	0	-1	4	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
P_7	0	0	0	-1	0	0	3	-1	-1	0	0	0	0	0
P_9	0	0	0	-1	0	0	-1	0	4	-1	0	0	0	-1
P_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0	0
P_{11}	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	2	0	0	0

A partir da matriz Jacobiana do modelo linearizado apresentada anteriormente, foram calculadas a matriz de ganho $\tilde{\mathbf{G}}$ e, em seguida, a matriz de covariância dos resíduos da estimação linear $\tilde{\mathbf{\Omega}}$, em conformidade com as definições e procedimentos descritos na Seção 2.5. Considerando uma tolerância numérica de 10^{-5} , a análise da matriz $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ evidenciou a existência de duas linhas (ou, de forma equivalente, colunas, em razão de sua simetria) com valores nulos, associadas às medidas P_{12-6} e P_9 . Dessa forma, essas medidas são classificadas como C_1 s, em concordância com os resultados obtidos pela abordagem topológica.

Na sequência, obteve-se o vetor de resíduos normalizados da estimação linear $\tilde{r}_i^N$. Os resíduos resultantes foram ordenados em ordem crescente, e seus valores associados a cada medição são apresentados na Tabela 8.

Tabela 8: Resíduos normalizados da estimação linear do IEEE 14 barras e 20 medidas.

Medida	R_n^N	Medida	R_n^N	Medida	R_n^N
P_{11}	0,02509	I_{1-5}	0,76441	I_{8-7}	1,08331
P_{6-11}	0,02509	P_{6-5}	0,78904	A_8	1,15289
P_{10}	0,02510	P_7	0,86235	A_1	1,15290
P_2	0,56068	P_{5-2}	0,90813	P_{2-5}	1,22987
I_{1-2}	0,56950	P_4	0,90858	P_{12-13}	1,41421
P_3	0,68767	P_5	0,98476	P_{13-12}	1,41421

De acordo com a Tabela 8, a presença de resíduos normalizados aproximadamente iguais caracteriza as seguintes criticalidades: $C_{\text{conj-1}} = \{P_{12-13}, P_{13-12}\}$, $C_{\text{conj-2}} = \{A_1, A_8\}$ e $C_{\text{conj-3}} = \{P_{10}, P_{11}, P_{6-11}\}$. Salienta-se que a comparação entre os resíduos normalizados foi realizada considerando-se uma tolerância numérica de 10^{-4} .

Para os C_{conj} s identificados, procedeu-se à confirmação por meio do coeficiente de correlação γ_{k-m} definido na Seção 2.6, onde foi observado coeficientes unitários entre todos os pares de medidas pertencentes ao mesmo conjunto identificado. Dessa forma, os C_{conj} s numericamente confirmados no sistema IEEE 14 barras e 20 medidas coincidem com aqueles obtidos pela abordagem topológica.

5.4 Configuração Experimental

Os experimentos foram conduzidos em computador com processador Intel Core i7-14700K e 32 GB de memória RAM DDR5. As implementações foram desenvolvidas em Python 3.13.5, com o auxílio das bibliotecas NetworkX 3.5 para manipulação de grafos e NumPy 2.2.5 para operações matriciais.

Denomina-se **GraphCA** o conjunto das técnicas topológicas propostas nesta tese para a identificação de criticalidades, abrangendo a análise de observabilidade topológica, a identificação de C_1s , C_2s e $C_{conj}s$. Embora essas técnicas constituam contribuições metodológicas distintas, descritas individualmente no Capítulo 4, são tratadas como uma abordagem integrada desenvolvida para a avaliação da resiliência de um sistema. Nas comparações de aderência e de desempenho apresentadas a seguir, o GraphCA é, portanto, confrontado com as demais técnicas em sua execução completa, da construção de $\mathcal{Z}_M$ à identificação de criticalidades.

Cabe registrar que o GraphCA tem suas raízes no trabalho de Simões Costa, Piazza e Mandel [64]: a representação por digrafo bipartido e a análise de sequências de troca que fundamentam a identificação de criticalidades no MatroidCA constituem o ponto de partida sobre o qual as contribuições desta tese foram desenvolvidas.

Para 9 planos de medição em cada um dos sistemas IEEE 118 e 300 barras, o GraphCA é comparado com as seguintes técnicas da literatura:

- **CovCA**: técnica numérica baseada na análise da singularidade de submatrizes da matriz de covariância dos resíduos da estimação linear $\tilde{\mathbf{Q}}$, conforme descrito na Seção 2.6.
- **ResCA**: abordagem numérica baseada na análise dos resíduos normalizados das medidas, considerando um modelo linearizado descrito na Seção 2.6. Salienta-se que, para os experimentos desenvolvidos nesta tese, adotou-se uma representação auxiliar em grafos na etapa de confirmação dos conjuntos críticos: dentro de cada agrupamento de medidas com resíduos normalizados próximos, os vértices correspondem às medidas e as arestas são estabelecidas quando $\gamma_{k-m} \approx 1$, sendo os $C_{conj}s$ identificados como componentes conexas desse grafo. Essa representação assegura a recuperação de conjuntos críticos disjuntos eventualmente reunidos pela proximidade de resíduo, reduzindo a sensibilidade do método às tolerâncias adotadas.

- **MatroidCA**: técnica topológica proposta por Simões Costa, Piazza e Mandel [64]. A identificação de C_1s é realizada por meio da análise de sequências de troca em $\mathcal{B}_{c_1}$, conduzida por buscas sucessivas de caminhos mínimos, conforme apresentado na Seção 4.4.1. A identificação de C_2s é parcialmente enumerativa: remove-se sistematicamente cada medida não-crítica do plano de medição e reexecuta-se o algoritmo de identificação de C_1s , conforme descrito na Seção 4.4.2. Na implementação adotada neste trabalho, atualiza-se a árvore geradora observável corrente mediante o remanejamento de arestas, evitando-se sua reconstrução integral a cada teste.
- **GraphEnumCA**: enumeração exaustiva topológica, baseada na remoção sistemática de medidas do multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$, simulando a perda de uma ou duas medidas para identificação de C_1s e C_2s , respectivamente. Utiliza-se o algoritmo de interseção de matroides, complementado pela operação de contração em supernós, descrita na Seção 4.3.2, objetivando reduzir a quantidade de arestas de injeção processadas.

Cabe ressaltar que as implementações apoiam-se em bibliotecas de naturezas distintas: a NetworkX, empregada na manipulação de grafos, é implementada em Python interpretado, ao passo que a NumPy executa operações matriciais em código compilado. Essa assimetria e suas implicações sobre a comparação de tempos são discutidas na Seção 5.6.

Para 10 planos de medição em cada um dos sistemas CASE2383WP e CASE9241PEGASE, restringe-se a comparação entre GraphCA e ResCA, esta última avaliada com a adaptação por componentes conexas descrita anteriormente. A escolha pela comparação com ResCA decorre de seu menor custo computacional em relação às demais técnicas avaliadas nos sistemas IEEE 118 e 300 barras, conforme será apresentado nos resultados: MatroidCA recorre a enumeração parcial para identificação de C_2s , enquanto CovCA e GraphEnumCA operam de forma estritamente enumerativa, o que penaliza o desempenho dessas três técnicas em redes de grande porte. Para a identificação de C_1s , mediante a detecção de colunas/linhas nulas em $\tilde{\mathbf{Q}}$, adotou-se a tolerância 10^{-3} nas abordagens numéricas; para a confirmação dos conjuntos críticos via coeficiente de correlação na técnica ResCA, utilizou-se uma tolerância de 10^{-5} .

Caracterizam-se os 38 planos de medição utilizados nos experimentos na Tabela 9, distribuídos entre os sistemas IEEE 118 e 300 barras (9 planos cada), CASE2383WP e CASE9241PEGASE (10 planos cada). Para cada plano, indicam-se: o número de medidas de fluxo m_F , o número de medidas de injeção m_I , o total de medidas $m = m_F + m_I$, e a

redundância global $m/(n-1)$, definida como a razão entre o total de medidas e o número mínimo de medidas requeridas para a observabilidade do sistema. Indica-se também a proporção m_I/m de medidas de injeção em relação ao total, que reflete o peso estrutural dessas medidas no plano. Por fim, k_{inj} denota a quantidade de medidas de injeção que sustentam a observabilidade topológica global do sistema, isto é, a quantidade mínima de arestas de injeção que integram a árvore geradora observável $\mathcal{T}$ do plano de medição.

Tabela 9: Caracterização dos planos de medição avaliados.

Instância	m_F	m_I	m	$m/(n-1)$	m_I/m	k_{inj}
118_A	189	35	224	1,9145	0,1562	0
118_B	180	37	217	1,8547	0,1705	3
118_C	168	40	208	1,7778	0,1923	7
118_D	161	42	203	1,7350	0,2069	10
118_E	147	45	192	1,6410	0,2344	14
118_F	146	47	193	1,6496	0,2435	17
118_G	132	52	184	1,5726	0,2826	24
118_H	120	55	175	1,4957	0,3143	31
118_I	0	118	118	1,0085	1,0000	117
300_A	454	90	544	1,8194	0,1654	0
300_B	441	92	533	1,7826	0,1726	4
300_C	434	94	528	1,7659	0,1780	6
300_D	408	99	507	1,6957	0,1953	14
300_E	397	102	499	1,6689	0,2044	18
300_F	351	120	471	1,5753	0,2548	44
300_G	318	133	451	1,5084	0,2949	62
300_H	304	139	443	1,4816	0,3138	71
300_I	0	300	300	1,0033	1,0000	299
2383_A	3399	714	4113	1,7267	0,1736	0
2383_B	3344	719	4063	1,7057	0,1770	7
2383_C	3338	728	4066	1,7070	0,1790	19
2383_D	3253	731	3984	1,6725	0,1835	23
2383_E	3296	740	4036	1,6944	0,1833	37
2383_F	3209	753	3962	1,6633	0,1901	55
2383_G	3195	759	3954	1,6599	0,1920	63
2383_H	3097	785	3882	1,6297	0,2022	101

continua na próxima página

Tabela 9 – continuação

Instância	m_F	m_I	m	$m/(n - 1)$	m_I/m	k_{inj}
2383_I	2998	819	3817	1,6024	0,2146	150
2383_J	2892	864	3756	1,5768	0,2300	214
9241_A	14992	2772	17764	1,9225	0,1560	0
9241_B	14966	2774	17740	1,9199	0,1564	3
9241_C	14941	2778	17719	1,9176	0,1568	9
9241_D	14923	2780	17703	1,9159	0,1570	11
9241_E	14888	2782	17670	1,9123	0,1574	14
9241_F	14863	2794	17657	1,9109	0,1582	31
9241_G	14759	2810	17569	1,9014	0,1599	55
9241_H	14320	2872	17192	1,8606	0,1671	143
9241_I	13892	2921	16813	1,8196	0,1737	213
9241_J	13622	2984	16606	1,7972	0,1797	303

Nos planos de medição avaliados, optou-se por considerar exclusivamente as medições convencionais de fluxo e de injeção de potência. A ausência de PMUs nas instâncias de teste justifica-se por não se tratar de uma complexidade estrutural do problema de identificação de criticalidades.

Na modelagem topológica descrita no Capítulo 4, as medidas fornecidas por PMUs (fasores de corrente e ângulos de tensão nodal) são incorporadas ao multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$ exclusivamente como arestas de fluxo, conforme ilustrado no caso da Seção 5.3. Sob essa representação, sua inclusão amplia apenas o subgrafo $\mathcal{Z}_F$, processado em tempo linear $O(|V(\mathcal{Z}_F)| + |E(\mathcal{Z}_F)|)$ pela busca em profundidade do Algoritmo 1. Nos digrafos $\mathcal{B}_{c_1}$ e $\mathcal{B}_{c_2}$, vértices associados a arestas de fluxo satisfazem $N^+(v_x) = \emptyset$, dispensando o tratamento das vizinhanças reduzida N_R^- e própria N_P^- exigido pela presença de arestas de injeção na árvore geradora observável $\mathcal{T}$. Em resumo, a presença de PMUs não onera as metodologias propostas, pois não introduz restrições adicionais.

A complexidade efetiva enfrentada pelas técnicas estudadas, tanto topológicas quanto numéricas, concentra-se no processamento das medidas de injeção responsáveis por sustentar a observabilidade topológica do sistema, quantificadas pelo parâmetro k_{inj} da Tabela 9. Restringir os planos de medição a medidas convencionais permite, portanto, avaliar o desempenho das metodologias propostas em relação à variação desse indicador.

5.5 Aderência das Criticalidades Identificadas

Nesta seção, avalia-se a consistência dos resultados produzidos pelo GraphCA por meio de comparação com as técnicas topológicas e numéricas sucintamente descritas na Seção 5.4. A aderência é verificada em duas etapas: primeiro, nos sistemas IEEE 118 barras e IEEE 300 barras, nos quais é viável o confronto com todas as técnicas avaliadas; em seguida, nos sistemas CASE2383WP e CASE9241PEGASE, nos quais a comparação restringe-se ao ResCA, pelos motivos discutidos na seção anterior.

As Tabelas 10, 11 e 12 apresentam, respectivamente, as quantidades de C_1s , C_2s e $C_{conj}s$ identificadas por cada técnica nos diferentes planos de medição dos sistemas IEEE 118 e 300 barras, caracterizados na Tabela 9. Destacam-se em negrito as células em que as técnicas numéricas (CovCA e ResCA) divergem das técnicas topológicas (GraphCA, MatroidCA e GraphEnumCA).

Observa-se aderência integral entre as três técnicas topológicas avaliadas, em todos os planos de medição examinados, na identificação de C_1s , C_2s e $C_{conj}s$. As técnicas numéricas, por sua vez, apresentam concordância entre si. As divergências entre as abordagens topológica e numérica restringem-se a quatro planos: 118_G, 300_D, 300_G e 300_H. Nesses sistemas, as divergências são pequenas e, portanto, pouco expressivas nessa escala. Ainda assim, parecem relacionar-se à presença de medidas de injeção que sustentam a observabilidade global, quantificadas por k_{inj} .

Tabela 10: Medidas críticas (C_1s) identificadas nos sistemas IEEE 118 e 300 barras.

Instância	GraphCA	MatroidCA	GraphEnumCA	CovCA	ResCA
118_A	10	10	10	10	10
118_B	9	9	9	9	9
118_C	13	13	13	13	13
118_D	13	13	13	13	13
118_E	7	7	7	7	7
118_F	9	9	9	9	9
118_G	8	8	8	8	8
118_H	12	12	12	12	12
118_I	0	0	0	0	0
300_A	32	32	32	32	32
300_B	48	48	48	48	48
300_C	46	46	46	46	46
300_D	59	59	59	60	60
300_E	48	48	48	48	48
300_F	40	40	40	40	40
300_G	44	44	44	44	44
300_H	45	45	45	46	46
300_I	0	0	0	0	0

Tabela 11: Pares críticos (C_2s) identificados nos sistemas IEEE 118 e 300 barras.

Instância	GraphCA	MatroidCA	GraphEnumCA	CovCA	ResCA
118_A	33	33	33	33	33
118_B	27	27	27	27	27
118_C	21	21	21	21	21
118_D	21	21	21	21	21
118_E	59	59	59	59	59
118_F	36	36	36	36	36
118_G	27	27	27	30	30
118_H	55	55	55	55	55
118_I	6903	6903	6903	6903	6903
300_A	89	89	89	89	89
300_B	84	84	84	84	84
300_C	85	85	85	85	85
300_D	76	76	76	77	77
300_E	84	84	84	84	84
300_F	99	99	99	99	99
300_G	77	77	77	79	79
300_H	75	75	75	75	75
300_I	44850	44850	44850	44850	44850

Tabela 12: Conjuntos críticos ($C_{conj}s$) identificados nos sistemas IEEE 118 e 300 barras.

Instância	GraphCA	MatroidCA	GraphEnumCA	CovCA	ResCA
118_A	21	21	21	21	21
118_B	21	21	21	21	21
118_C	19	19	19	19	19
118_D	15	15	15	15	15
118_E	19	19	19	19	19
118_F	21	21	21	21	21
118_G	16	16	16	17	17
118_H	16	16	16	16	16
118_I	1	1	1	1	1
300_A	48	48	48	48	48
300_B	57	57	57	57	57
300_C	60	60	60	60	60
300_D	58	58	58	59	59
300_E	62	62	62	62	62
300_F	46	46	46	46	46
300_G	46	46	46	48	48
300_H	41	41	41	41	41
300_I	1	1	1	1	1

As criticalidades identificadas pelas abordagens topológica e numérica são definidas em espaços distintos: a abordagem topológica caracteriza C_1s , C_2s e $C_{conj}s$ a partir das árvores geradoras observáveis de $\mathcal{Z}_M$, ao passo que isso é estabelecido na abordagem numérica por meio da matriz de covariância dos resíduos da estimação linear $\tilde{\mathbf{\Omega}}$. Essa diferença entre os espaços de definição pode levar a classificações não coincidentes, o que torna abstrata a atribuição de corretude a uma abordagem específica.

Os planos 118_I e 300_I são compostos estritamente por medidas de injeção. Na ausência de medidas de fluxo, a observabilidade do sistema depende integralmente das medidas de injeção. Nesse contexto, essas observações são mutuamente dependentes e, portanto, constituem um único conjunto crítico. Os números de pares críticos identificados nessas instâncias correspondem exatamente a $\binom{118}{2} = 6903$ e $\binom{300}{2} = 44850$, ou seja, todos os pares possíveis entre as medidas de cada sistema. Embora apresentem o maior valor de k_{inj} dentre os planos de seus respectivos sistemas, esses cenários-limite exibem redundância mínima ($m/(n-1) \approx 1$, conforme a Tabela 9) e não registram divergência alguma entre as abordagens.

Avaliada a aderência nos sistemas IEEE 118 e 300 barras, estende-se a análise às redes de grande porte CASE2383WP e CASE9241PEGASE, nas quais a comparação restringe-se ao GraphCA e ao ResCA, conforme discutido na Seção 5.4. As Tabelas 13 e 14 apresentam,

para cada um desses sistemas, as quantidades de C_1s , C_2s e $C_{conj}s$ identificadas por cada técnica nos planos de medição caracterizados na Tabela 9. Destacam-se em negrito as células em que o ResCA diverge do GraphCA.

Tabela 13: Criticalidades identificadas no sistema CASE2383WP.

Instância	C_1s		C_2s		$C_{conj}s$	
	GraphCA	ResCA	GraphCA	ResCA	GraphCA	ResCA
2383_A	310	310	844	844	483	483
2383_B	320	320	988	988	520	520
2383_C	351	351	968	968	480	480
2383_D	374	374	1031	1031	532	532
2383_E	379	379	904	904	502	502
2383_F	367	367	985	985	517	517
2383_G	385	385	1008	1020	517	521
2383_H	367	369	1154	1164	529	535
2383_I	418	418	1200	1245	501	501
2383_J	416	416	1237	1343	529	529

Tabela 14: Criticalidades identificadas no sistema CASE9241PEGASE.

Instância	C_1s		C_2s		$C_{conj}s$	
	GraphCA	ResCA	GraphCA	ResCA	GraphCA	ResCA
9241_A	1033	1033	2870	2870	1719	1719
9241_B	1024	1024	2790	2790	1720	1720
9241_C	961	961	2902	2903	1791	1792
9241_D	1027	1027	3035	3035	1723	1723
9241_E	1039	1039	2831	2834	1752	1753
9241_F	1098	1098	2971	2976	1726	1729
9241_G	1005	1006	3054	3064	1698	1705
9241_H	1151	1151	3043	3072	1828	1837
9241_I	1156	1156	3232	3257	1780	1789
9241_J	1206	1206	3443	3516	1815	1824

Observa-se que a aderência entre GraphCA e ResCA mantém-se elevada também em redes de grande porte. As técnicas coincidem na identificação de C_1s em quase todos os planos, com divergência de duas unidades em 2383_H e de uma unidade em 9241_G. As divergências em C_2s e $C_{conj}s$ estão presentes em mais planos, com magnitude que varia conforme a participação das medidas de injeção na sustentação da observabilidade topológica do sistema.

Nota-se que tais divergências tendem a se acentuar nos planos com maiores valores de k_{inj} , isto é, naqueles em que uma quantidade expressiva de medidas de injeção sustenta a observabilidade topológica global. Esse comportamento é coerente com a distinção entre os espaços de definição das abordagens, discutida anteriormente: a complexidade efetiva, tanto da abordagem topológica quanto da numérica, concentra-se no processamento das

medidas de injeção, de modo que, à medida que cresce a participação dessas medidas na sustentação da observabilidade global, ampliam-se as situações em que essas abordagens conduzem a classificações não coincidentes.

5.6 Desempenho Computacional

Analizada a aderência das criticalidades identificadas pelo GraphCA, avalia-se nesta seção o desempenho computacional das técnicas, mensurado pelo tempo total de execução para a identificação de C_1s , C_2s e $C_{conj}s$. Os tempos reportados refletem escopos distintos conforme a natureza da abordagem. Para as técnicas topológicas (GraphCA, MatroidCA e GraphEnumCA), o tempo total engloba a construção de $\mathcal{Z}_M$, a análise de observabilidade topológica e a identificação dessas criticalidades. Quanto às técnicas numéricas (CovCA e ResCA), considera-se a matriz de covariância dos resíduos $\tilde{\mathbf{Q}}$ previamente computada. Tal hipótese é condizente com o contexto prático da estimação de estado, no qual as quantidades necessárias à obtenção de $\tilde{\mathbf{Q}}$ constituem subprodutos do processo de estimação, de modo que seu cálculo não representa custo adicional relevante [11] [21]. Assim, a obtenção de $\tilde{\mathbf{Q}}$, que requer a inversão da matriz de ganho $\tilde{\mathbf{G}}$, não é contabilizada, e os tempos das abordagens numéricas refletem essencialmente a identificação das criticalidades.

Ressalta-se que a comparação de tempo entre as abordagens topológica e numérica se dá sob condições desfavoráveis à primeira: a NetworkX, empregada na manipulação de grafos, é implementada em Python interpretado, ao passo que o custo dominante das técnicas numéricas concentra-se em rotinas matriciais compiladas em C e Fortran. Nesse contexto, os tempos aqui reportados para as técnicas topológicas constituem cotas superiores, passíveis de redução em implementação compilada. Ainda assim, o GraphCA apresenta os menores tempos de execução dentre as técnicas avaliadas. Essa vantagem decorre da natureza não-enumerativa do método, e não do substrato de implementação.

A avaliação abrange dois conjuntos de sistemas: primeiro, os sistemas IEEE 118 e 300 barras, nos quais todas as técnicas são comparadas; em seguida, as redes de grande porte CASE2383WP e CASE9241PEGASE, restritas ao GraphCA e ao ResCA.

5.6.1 Sistemas IEEE 118 e 300 Barras

A Tabela 15 apresenta o tempo total de execução e o respectivo speed-up em relação ao GraphCA, adotado como referência, nas instâncias dos sistemas IEEE 118 e 300 barras.

Tabela 15: Tempo total de execução e speed-up em relação ao GraphCA nos sistemas IEEE 118 e 300 barras.

Instância	GraphCA	MatroidCA		GraphEnumCA		CovCA		ResCA	
		Tempo	Sp.	Tempo	Sp.	Tempo	Sp.	Tempo	Sp.
118_A	5,00 ms	1,90 s	379x	27,91 s	5 582x	169,44 ms	34x	9,99 ms	2,0x
118_B	5,00 ms	1,72 s	344x	53,59 s	10 711x	166,11 ms	33x	13,50 ms	2,7x
118_C	5,00 ms	1,53 s	306x	51,40 s	10 283x	145,52 ms	29x	22,50 ms	4,5x
118_D	5,00 ms	1,31 s	262x	52,47 s	10 493x	128,01 ms	26x	21,50 ms	4,3x
118_E	5,37 ms	1,37 s	256x	58,56 s	10 899x	137,54 ms	26x	16,50 ms	3,1x
118_F	5,50 ms	1,33 s	241x	1,10 min	11 953x	139,77 ms	25x	16,50 ms	3,0x
118_G	6,00 ms	1,25 s	208x	1,27 min	12 652x	117,82 ms	20x	12,02 ms	2,0x
118_H	7,09 ms	1,04 s	147x	1,95 min	16 526x	118,51 ms	17x	21,50 ms	3,0x
118_I	8,00 ms	1,18 s	147x	28,82 s	3 604x	1,68 s	210x	228,88 ms	29x
300_A	12,18 ms	25,63 s	2 104x	7,59 min	37 407x	1,01 s	83x	76,52 ms	6,3x
300_B	12,49 ms	22,29 s	1 784x	11,73 min	56 356x	964,57 ms	77x	91,99 ms	7,4x
300_C	13,50 ms	22,07 s	1 635x	11,91 min	52 932x	938,68 ms	70x	89,50 ms	6,6x
300_D	11,50 ms	14,40 s	1 252x	11,09 min	57 836x	797,29 ms	69x	74,52 ms	6,5x
300_E	12,00 ms	21,49 s	1 791x	15,16 min	75 789x	832,53 ms	69x	79,50 ms	6,6x
300_F	14,50 ms	20,30 s	1 400x	27,06 min	111 970x	736,59 ms	51x	68,70 ms	4,7x
300_G	15,50 ms	17,88 s	1 153x	36,64 min	141 846x	695,77 ms	45x	69,51 ms	4,5x
300_H	16,50 ms	18,02 s	1 092x	44,79 min	162 864x	686,71 ms	42x	83,52 ms	5,1x
300_I	31,02 ms	3,59 s	116x	5,82 min	11 251x	42,09 s	1 357x	1,59 s	51x

Sp. indica o *speed-up* em relação ao GraphCA, adotado como referência.

As Figuras 63 e 64 ilustram esses tempos em escala logarítmica, evidenciando a disparidade de magnitude entre as abordagens.

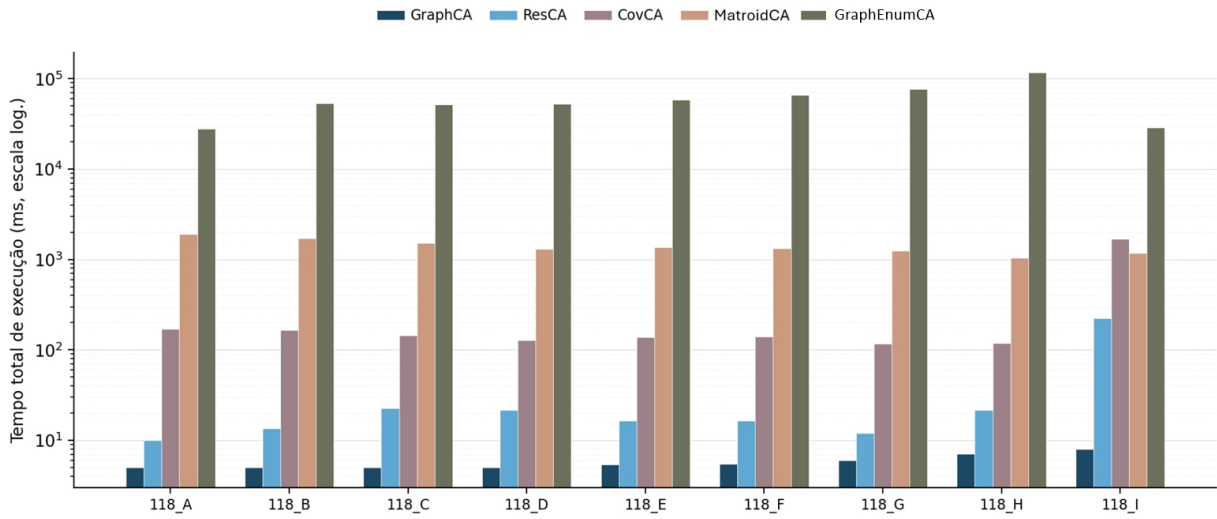


Figura 63: Tempo total de execução das técnicas avaliadas nos planos de medição do sistema IEEE 118 barras (escala logarítmica).

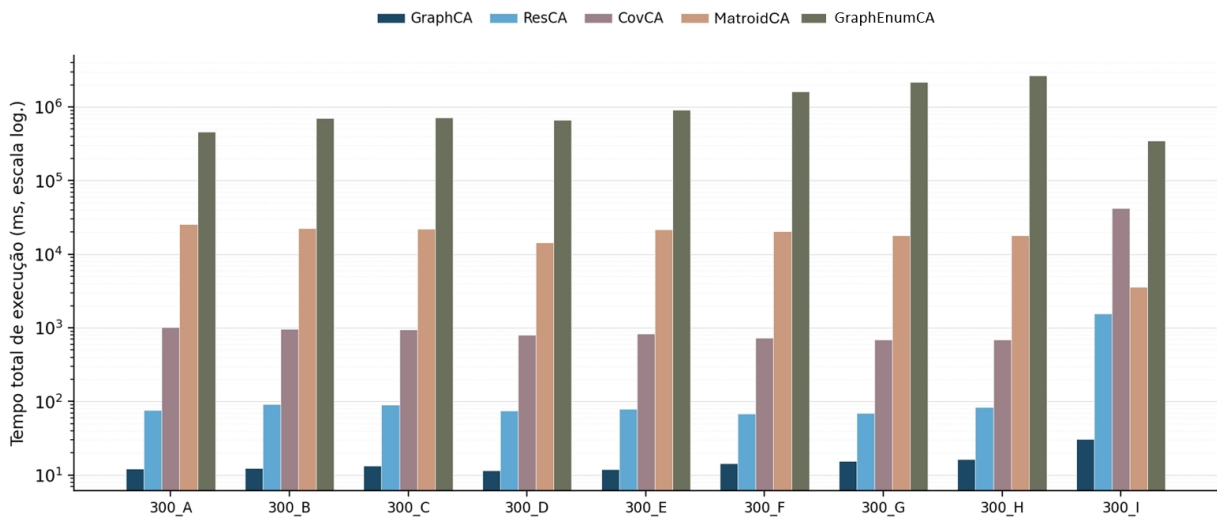


Figura 64: Tempo total de execução das técnicas avaliadas nos planos de medição do sistema IEEE 300 barras (escala logarítmica).

Observa-se uma hierarquia de desempenho consistente nas instâncias representativas (i.e., excetuando-se 118_I e 300_I). As técnicas não enumerativas figuram entre as mais rápidas, com o GraphCA à frente (na ordem de poucos milissegundos), seguido pelo ResCA. O método CovCA, embora enumerativo, mantém-se na ordem de centenas de milissegundos. As demais técnicas topológicas registram os maiores tempos: o MatroidCA, por se tratar de um método parcialmente enumerativo, situa-se na ordem de segundos, e o GraphEnumCA, de força bruta, alcança dezenas de segundos no sistema IEEE 118 barras e dezenas de minutos no IEEE 300 barras, demandando mais de 44 minutos no plano 300_H, em contraste com os 16 ms referentes ao GraphCA.

As diferenças no tempo total de execução decorrem de dois fatores: a adoção, ou não, de enumeração e, entre as técnicas enumerativas, o custo de cada avaliação. O GraphCA e o ResCA prescindem de enumeração, identificando as criticalidades de forma direta: o primeiro a partir das estruturas de $\mathcal{B}_{c_1}$ e de $\mathcal{B}_{c_2}$, e o segundo utiliza ordenação dos resíduos normalizados das medidas, o que justifica os tempos reduzidos. As demais avaliam combinações de medidas, distinguindo-se pelo custo de cada uma. O CovCA verifica a singularidade de submatrizes de $\tilde{\mathbf{Q}}$, operação que se reduz a um escalonamento, ao passo que o GraphEnumCA, reconstrói uma árvore geradora observável para cenários de perda de uma ou duas medidas, o que é computacionalmente oneroso. Quanto ao MatroidCA, a etapa de maior custo consiste na busca por C_2s e $C_{conj}s$, onde ocorre a remoção sistemática de medidas não-críticas, explorando a propriedade de reciprocidade de $C_{conj}s$, atualizando a árvore geradora observável corrente e reconstruindo o digrafo $\mathcal{B}_{c_1}$.

A Tabela 16 apresenta a decomposição do tempo de execução por etapa no plano 300_E, considerado representativo. Na análise de observabilidade, o GraphCA mostra-se mais eficiente, em razão das operações de busca por pontes e contração em supernós, que reduzem as arestas de injeção processadas, ao passo que a verificação numérica, conduzida pela avaliação do determinante de $\tilde{\mathbf{G}}$, revela-se mais onerosa. Na identificação de C_1s , os tempos mantêm-se reduzidos para o GraphCA e as abordagens numéricas, ao passo que o GraphEnumCA, por reexecutar a verificação de observabilidade a cada medida removida, já alcança a ordem de segundos. Observa-se que a identificação de C_2s e $C_{conj}s$ é a etapa em que os desempenhos mais se distanciam, respondendo pela quase totalidade do custo das abordagens enumerativas, com tempos que abrangem de poucos milissegundos, para o GraphCA e do ResCA, a centenas de segundos, no caso do GraphEnumCA.

Tabela 16: Decomposição do tempo de execução por etapa no plano representativo 300_E ($k = 18$) do sistema IEEE 300 barras.

Etapa	GraphCA	MatroidCA	GraphEnumCA	CovCA	ResCA
Inicialização de $\mathcal{Z}_M$	2,50 ms	2,50 ms	3,00 ms	N/A	N/A
Análise de observabilidade	1,50 ms	19,00 ms	6,50 ms	47,70 ms	36,50 ms
Identificação de C_1s	5,50 ms	151,34 ms	4,41 s	2,50 ms	3,00 ms
Ident. de C_2s e $C_{conj}s$	2,50 ms	21,31 s	905,05 s	782,33 ms	32,50 ms
Total	12,00 ms	21,49 s	909,47 s	832,53 ms	72,00 ms

Nas abordagens numéricas (CovCA e ResCA), a verificação de observabilidade é realizada pela avaliação do determinante da matriz de ganho $\tilde{\mathbf{G}}$; nas topológicas, pela construção da árvore geradora observável. A inicialização de $\mathcal{Z}_M$ não se aplica às abordagens numéricas.

5.6.2 Redes de Grande Porte: CASE2383WP e CASE9241PEGASE

A Tabela 17 apresenta o tempo total de execução do GraphCA e do ResCA, bem como o speed-up do primeiro em relação ao segundo, nos planos de medição dos sistemas CASE2383WP e CASE9241PEGASE. Confirma-se que a vantagem do GraphCA não apenas se mantém em redes de grande porte, como se acentua com o aumento da dimensão do sistema: no CASE2383WP, os tempos do GraphCA situam-se na ordem de uma a duas centenas de milissegundos, ante alguns segundos do ResCA, resultando em speed-up entre 12 e 22 vezes; no CASE9241PEGASE, ao passo que o ResCA demanda da ordem de um a dois minutos, o GraphCA preserva tempos inferiores a três segundos, elevando o speed-up a valores entre 39 e 87 vezes.

Cabe ressaltar que, mesmo no sistema CASE9241PEGASE, com mais de nove mil barras, o GraphCA conclui a identificação completa das criticalidades em tempo da ordem de segundos, ao passo que o ResCA, embora igualmente não enumerativo, é penalizado pela manipulação direta da matriz de covariância dos resíduos $\tilde{\mathbf{\Omega}}$, cuja dimensão cresce com o porte do sistema. Tal comportamento evidencia a escalabilidade favorável da abordagem topológica proposta, que opera sobre estruturas de grafo a um custo de processamento substancialmente inferior ao das operações matriciais inerentes às abordagens numéricas.

Tabela 17: Tempo total de execução e speed-up do GraphCA em relação ao ResCA nos sistemas CASE2383WP e CASE9241PEGASE.

Instância	GraphCA	ResCA	Speedup
2383_A	198,53 ms	2,90 s	14,63x
2383_B	215,76 ms	2,94 s	13,61x
2383_C	198,95 ms	2,80 s	14,08x
2383_D	188,02 ms	2,84 s	15,10x
2383_E	169,50 ms	2,84 s	16,78x
2383_F	229,02 ms	2,82 s	12,33x
2383_G	126,52 ms	2,75 s	21,76x
2383_H	129,02 ms	2,70 s	20,95x
2383_I	186,02 ms	2,66 s	14,30x
2383_J	140,51 ms	2,58 s	18,35x
9241_A	2,17 s	1,69 min	46,75x
9241_B	2,85 s	1,84 min	38,71x
9241_C	2,02 s	1,33 min	39,51x
9241_D	1,36 s	1,97 min	87,07x
9241_E	1,78 s	1,35 min	45,46x
9241_F	1,81 s	1,44 min	47,63x
9241_G	1,19 s	1,25 min	63,47x
9241_H	1,09 s	1,45 min	79,69x
9241_I	948,35 ms	1,30 min	82,25x
9241_J	936,66 ms	1,35 min	86,58x

Speedup indica a razão entre o tempo do ResCA e o do GraphCA.

5.7 Ocorrências dos Padrões Topológicos do GraphCA

A identificação de C_{2s} e $C_{conj}s$ pelo GraphCA apoia-se no reconhecimento dos padrões topológicos C2-XY, C2-XY p , C2-XX e C2-ext no digrafo $\mathcal{B}_{c_2}$, aos quais se associa a reciprocidade. As Tabelas 18 e 19 apresentam o número de ocorrências de cada padrão nos planos avaliados, bem como a parcela de C_{2s} recuperada por reciprocidade. O padrão C2-XY concentra a maioria das ocorrências em todos os planos, seguido pelo C2-XX, ao passo que C2-XY p e C2-ext apresentam frequência reduzida.

A contribuição da reciprocidade e a ocorrência do padrão C2-XY p tendem a crescer com a quantidade de medidas de injeção que sustentam a observabilidade global do sistema (indicador k_{inj}), comportamento nítido nos sistemas de grande porte. No tocante à

reciprocidade, tal crescimento decorre da propriedade consolidada dos conjuntos críticos: C_{conj} s oriundos dos padrões que compartilham medidas constituem um mesmo C_{conj} de cardinalidade maior, e dessa ampliação surgem novos C_2 s, i.e., os pares entre as medidas antes separadas, sobreposição que se intensifica à medida que k_{inj} aumenta. O padrão C2-ext, por sua vez, manifestou-se exclusivamente no plano 9241_J, aquele de maior k_{inj} dentre os avaliados, o que configura ocorrência isolada e não tendência.

Tabela 18: Ocorrências dos padrões topológicos e contribuição da reciprocidade dos conjuntos críticos na identificação de C_2 s pelo GraphCA, nos sistemas IEEE 118 e 300 Barras.

Instância	C2-XY	C2-XY _p	C2-XX	C2-ext	Reciprocidade
118_A	21	0	12	0	0
118_B	18	2	6	0	1
118_C	12	5	4	0	0
118_D	11	3	7	0	0
118_E	31	0	8	0	20
118_F	19	7	8	0	2
118_G	15	2	6	0	4
118_H	25	5	2	0	23
300_A	61	0	14	0	14
300_B	67	0	12	0	5
300_C	65	1	14	0	5
300_D	54	2	20	0	0
300_E	62	3	19	0	0
300_F	49	8	16	0	26
300_G	51	4	11	0	11
300_H	45	8	7	0	15

A coluna Reciprocidade indica os C_2 s obtidos pela combinação de conjuntos críticos com elementos em comum. A soma das cinco colunas corresponde ao total de C_2 s identificados. Os planos compostos exclusivamente por medidas de injeção foram omitidos por constituírem um cenário-limite.

Tabela 19: Ocorrências dos padrões topológicos e contribuição da reciprocidade dos conjuntos críticos na identificação de C_2s pelo GraphCA, nos sistemas CASE2383WP e CASE9241PEGASE.

Instância	C2-XY	C2-XY _p	C2-XX	C2-ext	Reciprocidade
2383_A	478	0	301	0	65
2383_B	567	2	296	0	123
2383_C	520	3	316	0	129
2383_D	615	5	295	0	116
2383_E	538	1	257	0	108
2383_F	580	3	255	0	147
2383_G	616	5	229	0	158
2383_H	632	10	260	0	252
2383_I	644	21	239	0	296
2383_J	658	24	212	0	343
9241_A	1779	0	918	0	173
9241_B	1766	1	894	0	129
9241_C	1854	3	901	0	144
9241_D	1845	0	931	0	259
9241_E	1842	2	833	0	154
9241_F	1842	2	900	0	227
9241_G	1806	5	938	0	305
9241_H	1973	7	850	0	213
9241_I	2009	26	779	0	418
9241_J	2102	36	760	1	544

A coluna Reciprocidade indica os C_2s obtidos pela combinação de conjuntos críticos que têm elementos em comum. A soma das cinco colunas corresponde ao total de C_2s identificados.

5.8 Discussão Integrada

Os resultados apresentados permitem uma avaliação conjunta do comportamento das técnicas de identificação de criticalidades, com destaque para a abordagem proposta. As Tabelas 18 e 19 evidenciam que os padrões topológicos não esgotam, isoladamente, a identificação dos C_2s , i.e., parte das criticalidades é obtida pela reciprocidade dos $C_{conj}s$. Essa propriedade mostra-se indispensável à abordagem proposta, uma vez que os padrões C2-XY, C2-XY_p, C2-XX e C2-ext capturam configurações específicas, ao passo que a combinação dos conjuntos críticos já caracterizados completa a identificação dos C_2s .

A caracterização desenvolvida admite, em princípio, extensão à identificação de tuplas críticas de cardinalidade três (C_3s), mediante a ampliação dos padrões topológicos. Tal extensão, contudo, demandaria heurísticas adicionais, como a construção de novos grafos bipartidos, uma vez que a reciprocidade inerente dos $C_{conj}s$ empregada na obtenção dos C_2s não se estende às C_3s .

A comparação entre as criticalidades identificadas pela abordagem topológica e pela abordagem numérica revela que as três técnicas topológicas concordam integralmente entre si em todos os planos avaliados, assim como os métodos numéricos entre si, ao passo que, entre as duas abordagens, a numérica identifica, em determinados planos, um número ligeiramente superior de criticalidades. Observa-se, ademais, que essa divergência tende a acentuar-se à medida que cresce a presença das medidas de injeção na sustentação da observabilidade topológica global, um comportamento perceptível em sistemas de grande porte, nos quais a maior amplitude dos valores de k_{inj} permite que essa tendência se evidencie. Cabe ressaltar que a magnitude dessa divergência permanece reduzida e que sua manifestação depende não apenas do parâmetro k_{inj} , mas também da topologia particular da rede avaliada, de modo que a tendência observada não é estritamente crescente com esse parâmetro.

As criticalidades adicionais apontadas pelas abordagens numéricas decorrem de dependências entre medidas que se manifestam na matriz de covariância dos resíduos $\tilde{\Omega}$, mas que escapam à leitura qualitativa da topologia. A abordagem topológica é suficiente, portanto, quando essas dependências não se traduzem em criticalidades adicionais, o que ocorre quando a observabilidade se apoia unicamente em medidas de fluxo ($k = 0$): nesse caso, existe uma árvore geradora observável formada exclusivamente por arestas de fluxo, na qual as medidas de injeção desempenham papel auxiliar. Nesse regime, ambas as abordagens identificam as mesmas criticalidades, ou seja, a análise numérica nada acrescenta ao que a topológica já revela; as fragilidades remanescentes são de natureza estrutural, ligadas à disponibilidade e à localização das medidas, e não ao modelo numérico. Essa coincidência, contudo, não deve ser tomada como evidência de robustez: indica apenas que a observabilidade independe das medidas de injeção. Se o plano é de fato robusto, tal robustez provém dessa independência estrutural, da qual a coincidência entre as abordagens é apenas o indício verificável.

6 Conclusões

Decorrido mais de meio século desde sua proposição, a EE consolidou-se como instrumento central à supervisão e ao controle de SEPs, e as análises de observabilidade e de criticalidades a ela associadas determinam, a cada execução, se os requisitos para sua funcionalidade e produção de resultados confiáveis se encontram presentes. Essas análises podem ser conduzidas tanto por métodos numéricos quanto por métodos topológicos. A natureza estrutural inerente ao problema da observabilidade, dependente da conectividade da rede elétrica e da disposição das medidas ao longo dela, favorece naturalmente a adoção da perspectiva topológica.

Diante da escassez de trabalhos concernentes aos tratamentos puramente topológicos, sobretudo com foco em redes elétricas de grande porte, a presente tese objetivou desenvolver e aprimorar metodologias fundamentadas na Teoria dos Grafos para as análises em questão. Embora constituam contribuições distintas, articulam-se em um arcabouço integrado, denominado neste manuscrito como GraphCA, que percorre, de forma encadeada, a abstração do plano de medição como um multigrafo, a análise de observabilidade topológica e a identificação qualitativa de C_1s , C_2s e $C_{conj}s$.

Quanto à aderência, a metodologia proposta concordou integralmente com as demais técnicas topológicas avaliadas na identificação de criticalidades, em todos os planos de medição examinados, e mostrou-se consistente com as técnicas numéricas, salvo divergências restritas aos planos em que as medidas de injeção sustentam de forma expressiva a observabilidade topológica global. Essas divergências decorrem de dependências evidenciadas pela matriz de covariância dos resíduos da estimação linear ($\tilde{\Omega}$), às quais a ótica qualitativa da abordagem topológica não é sensível. Cabe ressaltar que essa aderência foi alcançada sem recurso à enumeração de combinações de medidas, uma vez que as medidas críticas, os pares críticos e os conjuntos críticos são identificados diretamente a partir das estruturas dos digrafos auxiliares e da propriedade de reciprocidade dos conjuntos críticos, em contraste com as estratégias enumerativas e parcialmente enumerativas que oneram o desempenho das demais técnicas.

No âmbito do desempenho computacional, mostrou-se determinante a existência, ou não, de enumeração de combinações de medidas, responsável pela quase totalidade do custo das abordagens que dela dependem. Por prescindirem dessa enumeração, a metodologia proposta (GraphCA) e a abordagem numérica baseada na análise de resíduos normalizados (ResCA) figuram entre as técnicas mais rápidas. As abordagens enumerativas e parcialmente enumerativas, em contrapartida, alcançam tempos que se estendem de centenas de milissegundos a centenas de segundos, conforme o porte do sistema. Restringindo a comparação às duas técnicas não enumerativas, no CASE2383WP o GraphCA identificou as criticalidades em centenas de milissegundos, contra ordem de segundos da abordagem numérica; no CASE9241PEGASE, sistema com mais de nove mil barras, o GraphCA manteve tempos inferiores a três segundos, contra um a dois minutos da abordagem numérica. A vantagem do GraphCA em relação ao ResCA não apenas se manteve em redes de grande porte, como se acentuou com o aumento da dimensão do sistema, registrando-se speed-up entre 12 e 22 vezes no CASE2383WP e entre 39 e 87 vezes no CASE9241PEGASE. Esse comportamento decorre da operação sobre estruturas de grafo, ao passo que a abordagem numérica, embora igualmente não enumerativa, é penalizada pela manipulação direta de $\tilde{\mathbf{\Omega}}$, cuja dimensão cresce com o porte do sistema. Cabe acrescentar que essa comparação considerou a matriz $\tilde{\mathbf{\Omega}}$ previamente computada, hipótese condizente com o contexto prático da estimação de estado, na qual as quantidades necessárias à sua obtenção constituem subprodutos do processo de estimação, conforme discutido no Capítulo 5.

No âmbito teórico, de acordo com os resultados, há fortes indícios de que a coincidência de resultados provenientes das abordagens topológica e numérica tende a ocorrer em planos de medição cuja observabilidade global prescinde de medidas de injeção. Em contraste, percebe-se uma tendência de discrepância entre essas abordagens em cenários em que predominam medidas de injeção na sustentação da observabilidade, o que evidencia a natureza estrutural da fronteira entre elas. Em suma, a análise topológica mostra-se integral enquanto a observabilidade repousa sobre medidas de fluxo, e pode ser parcial quando esta passa a depender de injeções. Caracteriza-se, assim, com base empírica, o suposto caráter conservador da abordagem topológica frente à abordagem numérica, agora compreendido como um comportamento associado à presença de medidas de injeção dessa natureza.

Quanto ao aspecto prático, a natureza puramente estrutural e não enumerativa do GraphCA assume relevância particular em cenários de reconfigurações topológicas, recorrentes na operação e, portanto, uma das motivações para o presente estudo. Uma

vez que identifica as criticalidades a partir de estruturas esparsas de grafo, a abordagem topológica prescinde da matriz de covariância dos resíduos e, por conseguinte, do custo de atualizá-la a cada mudança de topologia. Na abordagem numérica, em contrapartida, alterações localizadas admitem atualizações de baixo posto de $\tilde{\mathbf{Q}}$, cuja dimensão acompanha o porte do sistema, ao passo que reconfigurações de maior abrangência tendem a impor sua atualização completa. Essa distinção sugere que a vantagem do GraphCA tende a preservar-se, e possivelmente a acentuar-se, à medida que a alteração topológica se torna mais abrangente, hipótese cuja verificação experimental constitui desdobramento futuro desta investigação.

Além disso, a identificação topológica das criticalidades presta-se não apenas à supervisão em tempo real, mas também ao emprego offline, na fase de projeto do sistema de medição. Ao apontar onde se concentram as C_1s , C_2s e $C_{conj}s$, orienta a alocação de medidas redundantes que mitigam tais fragilidades, tanto na concepção de novos sistemas de medição quanto no reforço daqueles já em funcionamento. O baixo custo computacional do GraphCA, ao viabilizar o exame de um grande número de planos de medição candidatos, favorece particularmente essa aplicação.

Retomando a questão central de pesquisa formulada no Capítulo 1, os resultados obtidos permitem considerá-la respondida nas três vertentes que a constituem. Quanto à identificação das criticalidades, demonstrou-se que as C_1s , C_2s e $C_{conj}s$ de um plano de medição podem ser determinadas por construções exclusivamente topológicas, a partir das estruturas dos digrafos auxiliares e da propriedade de reciprocidade dos conjuntos críticos, sem qualquer recurso à enumeração de combinações de medidas. Quanto ao desempenho computacional, evidenciou-se que tais construções, por operarem sobre estruturas esparsas de grafo, viabilizam a identificação das criticalidades em tempos compatíveis com a aplicação recorrente em sistemas de transmissão de grande porte, conforme atestado nos sistemas CASE2383WP e CASE9241PEGASE. Quanto à relação com a abordagem numérica clássica, caracterizaram-se, em bases empíricas, as condições estruturais que determinam a concordância entre as duas abordagens, verificando-se coincidência integral dos resultados nos planos cuja observabilidade global repousa sobre medidas de fluxo e divergências de pequena magnitude restritas aos planos em que a observabilidade global passa a ser sustentada de forma expressiva por medidas de injeção, o que circunscreve, de forma objetiva, o alcance e os limites do tratamento topológico aqui proposto.

Apontam-se, como desdobramentos futuros desta investigação, as seguintes direções:

- a extensão da metodologia proposta à identificação de criticalidades de cardinali-

dade três (C_3s), por extensão dos padrões estruturais já estabelecidos para C_2s e $C_{conj}s$, ressalvado que se tornam necessárias heurísticas adicionais, dada a ausência de propriedades de reciprocidade conhecidas para cardinalidades superiores a dois, sem que a inexistência destas esteja demonstrada;

- alternativamente, com maior abrangência, o desenvolvimento de uma abordagem híbrida para identificação de criticalidades com cardinalidades superiores a dois, hoje acessíveis apenas pela enumeração exaustiva numérica ou topológica, de custo combinatório elevado, utilizando padrões topológicos para a geração de tuplas candidatas à confirmação numérica, ressalvado que a sua completude exige uma geração de candidatas abrangente o suficiente para completude dos resultados;
- aprofundamento da análise das discrepâncias verificadas em casos pontuais quando se considera as criticalidades oriundas da observabilidade topológica, algébrica e numérica. Para tal, pretende-se empregar, por exemplo, simulações de Monte Carlo para a geração de numerosos planos de medição em redes de pequeno porte, buscando situações em que a participação das medidas de injeção na sustentação da observabilidade global é mais expressiva e com isso analisar a ocorrência das divergências em um maior conjunto de cenários;
- a aplicação da abordagem topológica a redes de distribuição, que demanda adaptações próprias, dado o seu caráter trifásico e desequilibrado e o recurso frequente a pseudomedidas, e na qual a maior radialidade, embora simplifique as estruturas, tende a tornar a criticalidade mais disseminada, por reduzir a redundância; e
- o acoplamento do GraphCA, na qualidade de avaliador de baixo custo, a metaheurísticas voltadas à alocação ótima de medidas, a exemplo dos algoritmos genéticos de chaves aleatórias enviesadas (BRKGA), em que cada configuração candidata demanda repetidas verificações de observabilidade e de criticalidades.

REFERÊNCIAS

- 1 ABUR, Ali; GÓMEZ-EXPÓSITO, Antonio. **Power System State Estimation: Theory and Implementation**. New York, NY: Marcel Dekker, jan. 2004. v. 24. DOI: [10.1201/9780203913673](https://doi.org/10.1201/9780203913673).
- 2 ALDOUS, J. M.; BEST, S.; WILSON, R. J. **Graphs and Applications: An Introductory Approach**. [S. l.]: Springer London, 2003. (The Open University).
- 3 AUGUSTO, Andre A. **Avaliação da Capacidade de Observação do Estado Operativo de Redes Elétricas**. 2016. Tese (Doutorado) – Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense.
- 4 AUGUSTO, Andre A. *et al.* Probabilistic assessment of state estimation capabilities for grid observation. **IET Generation, Transmission & Distribution**, v. 10, n. 12, p. 2933–2941, 2016. DOI: [10.1049/iet-gtd.2015.1406](https://doi.org/10.1049/iet-gtd.2015.1406).
- 5 AYRES, Mark; HALEY, Paul H. Bad Data Groups in Power System State Estimation. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 1, n. 3, p. 1–7, 1986. DOI: [10.1109/TPWRS.1986.4334946](https://doi.org/10.1109/TPWRS.1986.4334946).
- 6 BALOGH, József; LIU, Hong; MONTGOMERY, Richard. Rainbow spanning trees in properly coloured complete graphs. **Discrete Applied Mathematics**, v. 247, p. 97–101, 2018.
- 7 BARGIELA, A.; IRVING, M. R.; STERLING, M. J. H. Observability Determination in Power System State Estimation Using a Network Flow Technique. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 1, n. 2, p. 108–112, 1986. DOI: [10.1109/TPWRS.1986.4334914](https://doi.org/10.1109/TPWRS.1986.4334914).
- 8 BENZING, Frederik; POKROVSKIY, Alexey; SUDAKOV, Benny. Long directed rainbow cycles and rainbow spanning trees. **European Journal of Combinatorics**, v. 88, p. 103102, 2020.
- 9 BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory**. London: Springer London, 2008. v. 244. (Graduate Texts in Mathematics). DOI: [10.1007/978-1-84628-970-5](https://doi.org/10.1007/978-1-84628-970-5).

- 10 BRETAS, Newton *et al.* A topological approach to the identification of critical measurements in power-system state estimation. **IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers**, v. 52, p. 139–147, fev. 2005. DOI: [10.1109/TCSI.2004.838543](https://doi.org/10.1109/TCSI.2004.838543).
- 11 CARO, E.; CONEJO, A. J.; MÍNGUEZ, R. A sensitivity analysis method to compute the residual covariance matrix. **Electric Power Systems Research**, v. 81, n. 5, p. 1139–1150, 2011. DOI: [10.1016/j.epsr.2010.12.007](https://doi.org/10.1016/j.epsr.2010.12.007).
- 12 CHAKRABORTY, Maumita *et al.* Algorithms for generating all possible spanning trees of a simple undirected connected graph: an extensive review. **Complex & Intelligent Systems**, v. 5, n. 3, p. 265–281, out. 2019. ISSN 2198-6053. DOI: [10.1007/s40747-018-0079-7](https://doi.org/10.1007/s40747-018-0079-7).
- 13 CHARTRAND, G.; ZHANG, P. **A First Course in Graph Theory**. [S. l.]: Dover Publications, 2012. (Dover books on mathematics).
- 14 CHARTRAND, Gary; OKAMOTO, Futaba; ZHANG, Ping. Rainbow trees in graphs and generalized connectivity. **Networks**, v. 55, n. 4, p. 360–367, 2010.
- 15 CIPRIANI, Emanoelli. **Análise de Observabilidade e Criticidade de Medidas na Estimação de Estados em Sistemas de Potência Considerando Medições Fasoriais Sincronizadas**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.
- 16 CLEMENTS, K. A.; DAVIS, P. W. Multiple Bad Data Detectability and Identifiability: A Geometric Approach. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 1, n. 3, p. 355–360, 1986. DOI: [10.1109/TPWRD.1986.4308015](https://doi.org/10.1109/TPWRD.1986.4308015).
- 17 CLEMENTS, K. A.; KRUMPHOLZ, G. R.; DAVIS, P. W. Power System State Estimation Residual Analysis: An Algorithm Using Network Topology. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-100, n. 4, p. 1779–1787, 1981. DOI: [10.1109/TPAS.1981.316517](https://doi.org/10.1109/TPAS.1981.316517).
- 18 CLEMENTS, K. A.; KRUMPHOLZ, G. R.; DAVIS, P. W. Power System State Estimation with Measurement Deficiency: An Algorithm that Determines the Maximal Observable Subnetwork. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-101, n. 9, p. 3044–3052, 1982. DOI: [10.1109/TPAS.1982.317548](https://doi.org/10.1109/TPAS.1982.317548).
- 19 CLEMENTS, K. A.; KRUMPHOLZ, G. R.; DAVIS, P. W. Power System State Estimation with Measurement Deficiency: an Observability/Measurement Placement Algorithm. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-102, n. 7, p. 2012–2020, jul. 1983. ISSN 0018-9510. DOI: [10.1109/TPAS.1983.318187](https://doi.org/10.1109/TPAS.1983.318187).

- 20 CLEMENTS, Kevin A.; WOLLENBERG, Bruce F. An Algorithm for Observability Determination in Power System State Estimation. *In*: PROC. IEEE PES Summer Meeting. San Francisco, CA: [s. n.], jul. 1975. Paper A75 447-3.
- 21 COOPER, Austin; BRETAS, Arturo; MEYN, Sean. Anomaly Detection in Power System State Estimation: Review and New Directions. **Energies**, v. 16, n. 18, p. 6678, 2023. DOI: [10.3390/en16186678](https://doi.org/10.3390/en16186678).
- 22 CORMEN, Thomas H. *et al.* **Introduction to Algorithms**. 3. ed. Cambridge, MA: MIT Press, 2009.
- 23 CORMEN, Thomas H. *et al.* **Algoritmos: teoria e prática**. [S. l.]: Elsevier Editora, 2012.
- 24 CUNNINGHAM, William H. Improved Bounds for Matroid Intersection. **Journal of the ACM**, v. 33, n. 3, p. 514–521, 1986.
- 25 DEO, N. **Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science**. [S. l.]: Dover Publications, 2017.
- 26 DINITZ, Yefim. Algorithm for Solution of a Problem of Maximum Flow in Networks with Power Estimation. **Soviet Math. Dokl.**, v. 11, p. 1277–1280, 1970.
- 27 DO COUTTO FILHO, Milton Brown. **Power System State Estimation and Forecasting: Fundamentals and Advanced Topics**. 1. ed. Cham, Switzerland: Springer Cham, jul. 2024. (Power Systems). ISBN 978-3-031-63287-7. DOI: [10.1007/978-3-031-63288-4](https://doi.org/10.1007/978-3-031-63288-4).
- 28 DO COUTTO FILHO, Milton Brown; STACCHINI DE SOUZA, Julio Cesar; GLOVER, John. Roots, achievements, and prospects of power system state estimation: A review on handling corrupted measurements. **International Transactions on Electrical Energy Systems**, v. 29, e2779, abr. 2019. DOI: [10.1002/etep.2779](https://doi.org/10.1002/etep.2779).
- 29 DO COUTTO FILHO, Milton Brown; STACCHINI DE SOUZA, Julio Cesar; SCHILLING, Marcus Theodor. Handling Critical Data and Observability. **Electric Power Components and Systems**, Taylor & Francis, v. 35, n. 5, p. 553–573, mai. 2007. DOI: [10.1080/15325000601078187](https://doi.org/10.1080/15325000601078187).
- 30 DO COUTTO FILHO, Milton Brown; STACCHINI DE SOUZA, Julio Cesar; VILLAVICENCIO TAFUR, Jorge E. Quantifying Observability in State Estimation. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 28, n. 3, p. 2897–2906, 2013.

- 31 DO COUTTO FILHO, Milton Brown *et al.* Identifying critical measurements and sets for power system state estimation. *In: 2001 IEEE Porto Power Tech Proceedings (Cat. No.01EX502)*. [S. l.: s. n.], 2001. v. 3, p. 1–6. DOI: [10.1109/PTC.2001.964911](https://doi.org/10.1109/PTC.2001.964911).
- 32 EDMONDS, Jack. Matroid Intersection. *In: HAMMER, P. L.; JOHNSON, E. L.; KORTE, B. H. (ed.). Discrete Optimization I*. [S. l.]: Elsevier, 1979. v. 4. (Annals of Discrete Mathematics). p. 39–49. DOI: [10.1016/S0167-5060\(08\)70817-3](https://doi.org/10.1016/S0167-5060(08)70817-3).
- 33 FLISCOUNAKIS, S. *et al.* Contingency ranking with respect to overloads in very large power systems taking into account uncertainty, preventive and corrective actions. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 28, n. 4, p. 4909–4917, 2013. DOI: [10.1109/TPWRS.2013.2251015](https://doi.org/10.1109/TPWRS.2013.2251015).
- 34 FLÔR, Vinicius Braga *et al.* Critical Data Visualization to Enhance Protection Schemes for State Estimation. **IEEE Transactions on Smart Grid**, v. 14, n. 2, p. 1249–1261, 2023. DOI: [10.1109/TSG.2022.3203404](https://doi.org/10.1109/TSG.2022.3203404).
- 35 FORD JR., L. R.; FULKERSON, D. R. Maximal flow through a network. **Canadian Journal of Mathematics**, v. 8, p. 399–404, 1956. DOI: [10.4153/CJM-1956-045-5](https://doi.org/10.4153/CJM-1956-045-5).
- 36 FRANK, András. A Weighted Matroid Intersection Algorithm. **Journal of Algorithms**, v. 2, n. 4, p. 328–336, 1981. ISSN 0196-6774. DOI: [10.1016/0196-6774\(81\)90032-8](https://doi.org/10.1016/0196-6774(81)90032-8).
- 37 FU, Hung-Lin *et al.* On the number of rainbow spanning trees in edge-colored complete graphs. **Discrete Mathematics**, v. 341, n. 8, p. 2343–2352, 2018.
- 38 GIBBONS, A. **Algorithmic Graph Theory**. [S. l.]: Cambridge University Press, 1985.
- 39 GOLDBARG, Elizabeth; GOLDBARG, Marco. **Grafos: Conceitos, Algoritmos e Aplicações**. [S. l.]: Elsevier, 2012.
- 40 HORISBERGER, H. P. Observability Analysis for Power Systems with Measurement Deficiencies. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 18, n. 7, p. 51–58, 1985. IFAC Symposium on Planning and Operation of Electric Energy Systems, Rio de Janeiro, Brazil, 22-25 July. ISSN 1474-6670. DOI: [10.1016/S1474-6670\(17\)60414-2](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)60414-2).

- 41 JOSZ, C. *et al.* AC Power Flow Data in MATPOWER and QCQP Format: iTesla, RTE Snapshots, and PEGASE. **arXiv preprint arXiv:1603.01533**, 2016. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1603.01533>.
- 42 KORRES, G. N.; CONTAXIS, G. C. Identification and updating of minimally dependent sets of measurements in state estimation. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 6, n. 3, p. 999–1005, 1991. DOI: [10.1109/59.119239](https://doi.org/10.1109/59.119239).
- 43 KORTE, Bernhard; VYGEN, Jens. **Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms**. 6. ed. Berlin: Springer, 2018. ISBN 978-3-662-56039-6.
- 44 KRUMPHOLZ, G. R.; CLEMENTS, K. A.; DAVIS, P. W. Power System Observability: A Practical Algorithm Using Network Topology. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-99, n. 4, p. 1534–1542, 1980. DOI: [10.1109/TPAS.1980.319578](https://doi.org/10.1109/TPAS.1980.319578).
- 45 KRUSKAL, Joseph B. On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem. **Proceedings of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 7, n. 1, p. 48–50, 1956. ISSN 0002-9939.
- 46 LONDON, José B. A.; ALBERTO, Luis F. C.; BRETAS, Newton G. Network observability: identification of the measurements redundancy level. *In*: POWERCON 2000. 2000 International Conference on Power System Technology. Proceedings (Cat. No.00EX409). [S. l.: s. n.], 2000. v. 2, p. 577–582. DOI: [10.1109/ICPST.2000.897087](https://doi.org/10.1109/ICPST.2000.897087).
- 47 MONTICELLI, A. **State Estimation in Electric Power Systems**. Boston, MA: Springer US, 1999. DOI: [10.1007/978-1-4615-4999-4](https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4999-4).
- 48 MONTICELLI, A. J. **Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica**. [S. l.]: E. Blucher, 1983.
- 49 MORI, H.; TSUZUKI, S. A fast method for topological observability analysis using a minimum spanning tree technique. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 6, n. 2, p. 491–500, 1991. DOI: [10.1109/59.76691](https://doi.org/10.1109/59.76691).
- 50 NUCERA, R. R.; GILLES, M. L. Observability analysis: a new topological algorithm. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 6, n. 2, p. 466–475, 1991. DOI: [10.1109/59.76688](https://doi.org/10.1109/59.76688).
- 51 OXLEY, James G. **Matroid Theory**. 2. ed. Oxford: Oxford University Press, 2011. ISBN 978-0-19-856694-6.

- 52 PAPADIMITRIOU, C. H.; STEIGLITZ, K. **Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity**. [S. l.]: Dover Publications, 1998. (Dover Books on Computer Science). ISBN 9780486402581.
- 53 PHADKE, Arun G.; THORP, James S. **Synchronized Phasor Measurements and Their Applications**. 2. ed. Cham, Switzerland: Springer, 2017. (Power Electronics and Power Systems). ISBN 978-3-319-50582-4. DOI: [10.1007/978-3-319-50584-8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-50584-8).
- 54 PIAZZA, Thelma Solange. **Aplicações de Métodos Combinatórios à Estimação de Estados em Sistemas de Potência: Determinação de Medidas e Conjuntos Críticos e Alocação de Pseudomedidas Críticas**. Jul. 1989. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica – Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), Florianópolis, SC.
- 55 PROTTI, Fabio. **Notas de Aula de Teoria dos Grafos**. Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, ago. 2015.
- 56 QUINTANA, Victor H.; SIMÕES COSTA, Antonio; MANDEL, Arnaldo. Power System Topological Observability Using a Direct Graph-Theoretic Approach. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-101, n. 3, p. 617–626, 1982. DOI: [10.1109/TPAS.1982.317275](https://doi.org/10.1109/TPAS.1982.317275).
- 57 RESENDE, Eduardo; PIRES, Robson; MILI, Lamine. New Topological Observability Algorithm for Hybrid Power System Static State Estimation. **Journal of Modern Power Systems and Clean Energy**, v. 13, p. 1945–1954, 2024. DOI: [10.35833/MPCE.2024.000951](https://doi.org/10.35833/MPCE.2024.000951).
- 58 SARMA, Santanu; DUTT, Nikil. Minimal sparse observability of complex networks: Application to MPSoC sensor placement and run-time thermal estimation & tracking. *In: PROCEEDINGS of the 18th Conference and Exhibition on Design, Automation and Test in Europe*. [S. l.]: IEEE, 2014. p. 1–6.
- 59 SCHRIJVER, Alexander. **Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency**. Berlin: Springer, 2003. v. 24. (Algorithms and Combinatorics). ISBN 978-3-540-44389-6.
- 60 SCHWEPPE, F. C.; ROM, D. B. Power System Static-State Estimation, Part II: Approximate Model. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-89, n. 1, p. 125–130, 1970. DOI: [10.1109/TPAS.1970.292679](https://doi.org/10.1109/TPAS.1970.292679).
- 61 SCHWEPPE, F. C.; ROM, D. B. Power System Static-State Estimation, Part III: Implementation. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-89, n. 1, p. 130–135, 1970. DOI: [10.1109/TPAS.1970.292680](https://doi.org/10.1109/TPAS.1970.292680).

- 62 SCHWEPPE, F. C.; WILDES, J. Power System Static-State Estimation, Part I: Exact Model. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**, PAS-89, n. 1, p. 120–125, 1970. DOI: [10.1109/TPAS.1970.292678](https://doi.org/10.1109/TPAS.1970.292678).
- 63 SIMÕES COSTA, Antonio; LOURENCO, Elizete M.; CLEMENTS, Kevin A. Power system topological observability analysis including switching branches. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 17, n. 2, p. 250–256, 2002. DOI: [10.1109/TPWRS.2002.1007889](https://doi.org/10.1109/TPWRS.2002.1007889).
- 64 SIMÕES COSTA, Antonio; PIAZZA, Thelma S.; MANDEL, Arnaldo. Qualitative methods to solve qualitative problems in power system state estimation. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 5, p. 941–949, set. 1990. DOI: [10.1109/59.65924](https://doi.org/10.1109/59.65924).
- 65 SIMÕES COSTA, Antonio José Alves. A Abordagem Topológica para Observabilidade de Sistemas de Potência: Teoria e um Algoritmo. **Revista SBA: Controle & Automação**, SBA – Sociedade Brasileira de Automática, v. 1, n. 1, p. 59–71, 1987.
- 66 SOARES LIMA, Rafael Carlos. **Busca em Grafos por Criticalidades em Sistemas de Medição**. 2021. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Fluminense, Niterói. Instituto de Computação. DOI: [10.22409/PGC.2021.m.05744450726](https://doi.org/10.22409/PGC.2021.m.05744450726).
- 67 SOU, Kin Cheong; SANDBERG, Henrik; JOHANSSON, Karl Henrik. Computing Critical k -Tuples in Power Networks. **IEEE Transactions on Power Systems**, v. 27, n. 3, p. 1511–1520, ago. 2012. ISSN 1558-0679. DOI: [10.1109/TPWRS.2012.2187685](https://doi.org/10.1109/TPWRS.2012.2187685).
- 68 SZWARCFITER, Jayme Luiz. **Teoria Computacional de Grafos: Os Algoritmos**. [S. l.]: Elsevier Brasil, 2018.
- 69 TARJAN, Robert Endre. Depth-first search and linear graph algorithms. *In*: 12TH Annual Symposium on Switching and Automata Theory. [S. l.: s. n.], 1971. p. 114–121. DOI: [10.1109/SWAT.1971.10](https://doi.org/10.1109/SWAT.1971.10).
- 70 TARJAN, Robert Endre. Enumeration of the Elementary Circuits of a Directed Graph. **SIAM Journal on Computing**, v. 2, n. 3, p. 211–216, 1973. DOI: [10.1137/0202017](https://doi.org/10.1137/0202017).
- 71 TARJAN, Robert Endre. A Note on Finding the Bridges of a Graph. **Information Processing Letters**, v. 2, n. 6, p. 160–161, 1974. DOI: [10.1016/0020-0190\(74\)90003-9](https://doi.org/10.1016/0020-0190(74)90003-9).

-
- 72 VAN CUTSEM, Thierry; GAILLY, Pierre J. A simple algorithm for power system observability analysis and related functions. *In: PROC. CIGRE-IFAC Symposium on Control Applications to Power System Security*. Florence, Italy: [s. n.], 1983. paper no. 101–.
- 73 WEST, Douglas B. **Introduction to Graph Theory**. 2. ed. [S. l.]: Prentice Hall, set. 2011.

APÊNDICE A - PLANOS DE MEDIÇÃO E PARTICIONAMENTO DE REDE

Neste apêndice, apresenta-se o procedimento utilizado para a construção dos planos de medição empregados na avaliação experimental das metodologias propostas ao longo deste trabalho. Trata-se de uma abordagem construtiva, fundamentada no particionamento do grafo de rede, capaz de gerar instâncias topologicamente observáveis com graus controlados de redundância. Os planos resultantes não cobrem o espaço completo de configurações topologicamente válidas, mas sim um subconjunto representativo do regime operacional típico de sistemas de transmissão, no qual se baseiam as análises desta tese.

A.1 Considerações sobre o Regime Experimental Adotado

Antes da descrição formal do procedimento, é oportuno explicitar a natureza do regime experimental no qual as metodologias propostas foram avaliadas. Essa explicitação permite delimitar com precisão o escopo das conclusões obtidas e situar a abordagem adotada em relação a outras posturas possíveis.

Em princípio, a construção de planos de medição para fins experimentais pode ser conduzida segundo estratégias bastante distintas. De um lado, a alocação puramente aleatória das medidas, sem qualquer estruturação prévia, oferece a vantagem da simplicidade conceitual, mas tende a produzir planos com excessiva redundância ou, no extremo oposto, configurações inobserváveis cuja correção exige sucessivas verificações computacionalmente onerosas, especialmente em redes de médio e grande porte. De outro lado, é possível conceber estratégias deliberadamente favoráveis à abordagem topológica, alocando-se um número elevado de medidas de injeção sobre uma estrutura subjacente de fluxos predefinida. Nessa configuração, a árvore geradora observável seria identificada de forma quase imediata pelo método topológico, ao passo que o método numérico sofreria com o condicionamento da matriz de ganho. Embora tal abordagem produzisse

resultados aparentemente favoráveis, ela introduziria um viés artificial que mascararia o comportamento real dos métodos sob análise.

Adota-se, neste trabalho, um caminho intermediário e metodologicamente mais honesto. O procedimento construtivo descrito nas seções seguintes estrutura previamente o sistema por meio de um particionamento topológico, alocando medidas de fluxo no interior das partições e medidas de injeção em suas interfaces. Essa estruturação tem por objetivo garantir, por construção, a presença de injeções nas árvores geradoras observáveis dos planos resultantes, exercitando efetivamente o subproblema de interseção de matroides e a manipulação de arestas com restrições simultâneas de aciclicidade e unicidade de rótulos. Em outras palavras, busca-se que os planos gerados não apenas sejam observáveis, mas permitam estressar a abordagem aqui proposta, garantindo que as avaliações experimentais reflitam a capacidade dos algoritmos de resolver instâncias complexas e estruturalmente dependentes de medidas de injeção para a sustentação da observabilidade global.

A escolha por esse regime decorre da própria natureza das contribuições desta tese, que se posicionam como ferramentas auxiliares à abordagem clássica de resíduos normalizados, com aplicação privilegiada em sistemas de transmissão sob condições operacionais usuais. Em tais sistemas, a literatura aponta que medidas de fluxo de potência predominam em quantidade sobre medidas de injeção [1] [47], ainda que estas últimas exerçam papel determinante na sustentação da observabilidade global em regiões pouco instrumentadas. O procedimento adotado reflete essa realidade operacional, sem, contudo, eliminar a presença estrutural das injeções, o que comprometeria a representatividade do experimento.

A.2 Motivações da Abordagem

A motivação para o procedimento aqui descrito decorre da necessidade de avaliar a robustez dos métodos propostos em cenários verossímeis e, ao mesmo tempo, desafiadores do ponto de vista da observabilidade topológica. Conforme discutido na Seção A.1, busca-se evitar duas posturas igualmente indesejáveis: configurações artificiais nas quais grandes regiões da rede sejam sustentadas exclusivamente por medidas de injeção, e situações em que uma redundância excessiva acabe por mascarar as limitações intrínsecas das técnicas avaliadas. Em síntese, o objetivo é construir instâncias com níveis moderados e controlados de redundância, capazes de refletir de forma verossímil as condições operacionais

encontradas em sistemas reais de transmissão.

Nesse contexto, a simples alocação aleatória de medidas, embora conceitualmente direta, revela-se frequentemente impraticável para a construção de planos de medição com baixa redundância. Para que configurações observáveis sejam obtidas por essa via, é necessário um número elevado de tentativas e sucessivas verificações de observabilidade, especialmente em redes de médio e grande porte, tornando o processo computacionalmente oneroso e, em determinados casos, inviável. Além disso, essa estratégia tende a produzir instâncias pouco representativas, seja por gerar inadvertidamente níveis excessivos de redundância, seja por não assegurar uma distribuição adequada das medidas; em particular, das medidas de injeção, cuja localização exerce influência decisiva na formação das árvores geradoras observáveis.

Para contornar essas limitações, adota-se uma estratégia que consiste em estruturar previamente o sistema por meio de um particionamento de sua topologia. Em cada componente conexa resultante desse particionamento, aloca-se um conjunto mínimo de medidas de ramo, denominadas medidas *cruciais*, suficiente para garantir a observabilidade topológica local de cada região. Os ramos que fazem interface entre as partições, por sua vez, tornam-se inelegíveis para a instalação de medidas de fluxo, ficando restritos à alocação de medidas de injeção. Essas medidas de injeção cruciais são, então, responsáveis por assegurar a observabilidade global do sistema. Uma vez estabelecida essa condição mínima, procede-se à alocação das medidas redundantes.

Cabe distinguir desde já o termo *crucial*, aqui empregado, do conceito topológico de medida *crítica*. Uma medida crítica é aquela cuja remoção torna o sistema inobservável, propriedade que emerge da estrutura global do plano de medição e só pode ser determinada após sua análise completa. Já as medidas cruciais correspondem ao conjunto alocado estruturalmente para garantir a observabilidade durante a fase de construção do plano. A distinção é importante porque uma medida crucial pode ou não ser crítica no plano final, dependendo da redundância introduzida nas etapas posteriores: caminhos alternativos de observabilidade introduzidos pela redundância podem fazer com que medidas originalmente cruciais deixem de ser críticas.

Essa organização prévia orienta de forma natural a distribuição das medições, evitando a formação de blocos extensos sustentados exclusivamente por injeções e reduzindo a incidência de redundâncias excessivas. Dessa forma, obtêm-se planos de medição condizentes com a prática operacional de sistemas de transmissão, nos quais as medidas de fluxo de potência naturalmente predominam em quantidade sobre as medidas de injeção

[1] [47], sem que isso suprima a presença estrutural destas últimas.

A.3 Particionamento do Grafo de Rede

Conforme discutido no Capítulo 4, a topologia do sistema elétrico pode ser abstraída por meio de um *grafo de rede* $\mathcal{G}$, no qual os vértices e as arestas representam, respectivamente, as barras e os ramos do sistema. O procedimento de particionamento adotado neste trabalho fundamenta-se na exploração direta da estrutura de uma árvore geradora de $\mathcal{G}$, utilizada como elemento construtivo para a obtenção controlada de componentes conexas, sobre as quais se procede à alocação das medidas de ramo e de barra.

Inicialmente, constrói-se uma árvore geradora $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$, que conecta todos os vértices por meio de um subconjunto mínimo de arestas, sendo, por definição, acíclica. Essa propriedade é determinante para o método proposto: a remoção de qualquer uma de suas arestas implica, necessariamente, a decomposição da árvore em duas componentes conexas, o que permite controlar de forma precisa o número de partições obtidas. Na implementação adotada, $\mathcal{T}$ é obtida pelo algoritmo de Kruskal [45] aplicado sobre uma instância de $\mathcal{G}$ com pesos atribuídos aleatoriamente a cada aresta, o que garante a diversidade estrutural entre os planos de medição gerados para a mesma rede elétrica.

A partir da árvore geradora $\mathcal{T}$, selecionam-se aleatoriamente k arestas distintas, cuja remoção resulta em uma floresta $\mathcal{F}$ composta por exatamente $k + 1$ árvores. Como $\mathcal{T}$ é acíclica, cada aresta removida incrementa em uma unidade o número de componentes conexas. Adicionalmente, impõem-se duas restrições sobre as arestas removidas: nenhuma delas pode ser incidente a vértices folha, de modo a evitar a formação de componentes triviais compostas por um único vértice; e todas devem ser mutuamente disjuntas nos vértices, garantindo que cada aresta removida incida sobre um par exclusivo de vértices e, conseqüentemente, que a alocação de injeções cruciais na etapa subsequente não enfrente conflitos de localização.

Uma vez obtida a floresta $\mathcal{F}$, cada uma de suas árvores define um subconjunto disjunto de vértices de $\mathcal{G}$. Para cada um desses subconjuntos, constrói-se o subgrafo induzido correspondente a partir do grafo original, incorporando todas as arestas de $\mathcal{G}$ cujos extremos pertençam à mesma componente da floresta. Esse procedimento permite que cada região particionada contenha todas as arestas internas originalmente existentes em $\mathcal{G}$, ainda que não façam parte da árvore geradora.

O subgrafo resultante desse processo é denotado por $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ e corresponde à união dos

subgrafos induzidos associados a cada árvore da floresta. As componentes conexas de $\mathcal{H}$ coincidem exatamente, em termos de conjuntos de vértices, com as árvores de $\mathcal{F}$, diferindo apenas pelo conjunto de arestas, agora ampliado pelas conexões internas presentes em $\mathcal{G}$.

As arestas do grafo original que não pertencem a $\mathcal{H}$ constituem o conjunto

$$\mathcal{D} = E(\mathcal{G}) \setminus E(\mathcal{H}),$$

que reúne as arestas conectando vértices de componentes distintas da floresta $\mathcal{F}$. Esse conjunto inclui as arestas removidas da árvore geradora durante o processo de decomposição, bem como quaisquer outras arestas de $\mathcal{G}$ que liguem vértices pertencentes a componentes conexas distintas de $\mathcal{H}$.

As arestas pertencentes a $\mathcal{D}$ são denominadas *arestas de interface*, pois conectam vértices de componentes distintas de $\mathcal{H}$. A identificação dessas arestas permite distinguir de forma objetiva as conexões internas de cada componente das responsáveis pela interligação entre regiões particionadas, fornecendo uma base topológica bem definida para as etapas subsequentes de alocação de medidas. O Algoritmo 14 sintetiza esse procedimento.

Algoritmo 14: Particionamento do grafo de rede.

Entrada: Grafo da rede $\mathcal{G} = (V, E)$.

Número de partições $k \geq 0$.

Saída: Floresta $\mathcal{F}$, subgrafo $\mathcal{H}$, arestas de interface $\mathcal{D}$.

1 **início**

- | | |
|---|---|
| 2 | Atribuir pesos aleatórios às arestas de $\mathcal{G}$; |
| 3 | Construir árvore geradora de custo mínimo $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$; |
| 4 | Remover k arestas aleatórias de $\mathcal{T}$, mutuamente disjuntas nos vértices e sem extremos folha, obtendo $\mathcal{F}$; |
| 5 | Construir o subgrafo $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ induzido pelos conjuntos de vértices de cada árvore em $\mathcal{F}$; |
| 6 | Definir $\mathcal{D} \leftarrow E(\mathcal{G}) \setminus E(\mathcal{H})$; |
| 7 | retorna $\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{D}$ |
-

A.4 Lógica de Geração do Plano de Medição

Estabelecido o particionamento do grafo de rede $\mathcal{G}$, procede-se à alocação das medidas que compõem o plano de medição, segundo critérios aleatórios sujeitos às restrições topológicas impostas pelo particionamento. Esse processo é conduzido em duas etapas: primeiro, aloca-se um conjunto mínimo de medidas suficiente para assegurar a observabilidade topológica global do sistema; em seguida, introduzem-se medidas adicionais com o objetivo de incorporar redundância ao plano.

A.4.1 Alocação Inicial para Observabilidade Topológica

A primeira etapa da alocação fundamenta-se diretamente no particionamento do grafo de rede e visa assegurar a observabilidade topológica global por meio de um conjunto estruturalmente mínimo de medidas. Nessa fase, consolida-se um plano de medição provisoriamente crítico, no sentido de que todas as medidas alocadas são estritamente necessárias para a observabilidade do sistema, sem a introdução deliberada de redundância.

Em cada componente conexa do subgrafo $\mathcal{H}$, considera-se a árvore correspondente da floresta $\mathcal{F}$. Sobre essa árvore, atribuem-se medidas de fluxo em todos os seus ramos, com sentidos definidos aleatoriamente. Como cada árvore é conexa e acíclica, essa alocação assegura que cada componente disponha de um conjunto mínimo de medidas de ramo capaz de torná-la uma ilha topologicamente observável.

Em razão do particionamento, as componentes conexas de $\mathcal{H}$ permanecem, nesse estágio, topologicamente desconectadas entre si, o que implica a inobservabilidade do sistema como um todo. Para assegurar a observabilidade global, torna-se necessária a inserção de medidas de injeção que promovam a conexão entre as ilhas observáveis no multigrafo de medições $\mathcal{Z}_M$. Como a remoção de k arestas da árvore geradora original resulta em $k + 1$ componentes conexas, são necessárias exatamente k medidas de injeção para garantir a observabilidade global sem introdução de redundância.

A alocação dessas medidas de injeção cruciais é conduzida por meio de uma estrutura Union-Find sobre as componentes de $\mathcal{H}$. Para cada uma das k arestas removidas de $\mathcal{T}$, verifica-se se as duas componentes incidentes ainda se encontram desconectadas no multigrafo de medições; em caso afirmativo, seleciona-se aleatoriamente um de seus vértices extremos para a inclusão de uma medida de injeção, unindo as componentes correspondentes. Essa estratégia garante que cada injeção crucial efetivamente conecte duas ilhas ainda desconectadas.

Ao final dessa etapa, garante-se a existência de uma árvore geradora observável do sistema completo, constituída pelas medidas de fluxo alocadas no interior das árvores de $\mathcal{F}$ e pelas medidas de injeção que viabilizam a observabilidade topológica conjunta das diferentes componentes. O plano de medição resultante é, portanto, estruturalmente mínimo e topologicamente observável, servindo como base para a incorporação de redundância nas etapas seguintes. O Algoritmo 15 sintetiza esse procedimento.

Algoritmo 15: Alocação mínima para observabilidade topológica.

Entrada: Floresta $\mathcal{F}$, subgrafo $\mathcal{H}$.

Arestas removidas $E(\mathcal{T}) \setminus E(\mathcal{F})$.

Saída: Plano de medição mínimo M .

1 **início**

2 **para cada** árvore $T_i \in \mathcal{F}$ **faça**

3 **para cada** aresta $e = (u, v)$ em T_i **faça**

4 Escolher aleatoriamente uma direção ($u \rightarrow v$ ou $v \rightarrow u$) para e ;

5 Alocar medida de fluxo em e nessa direção;

6 Inicializar estrutura Union-Find $\mathcal{U}$ sobre as componentes de $\mathcal{H}$;

7 **para cada** aresta removida $e = (u, v)$ em $E(\mathcal{T}) \setminus E(\mathcal{F})$ **faça**

8 **se** u e v pertencem a componentes distintas em $\mathcal{U}$ **então**

9 Selecionar aleatoriamente um extremo $w \in \{u, v\}$ ainda não utilizado
 como injeção crucial, se possível;

10 Alocar medida de injeção em w ;

11 Unir as componentes de u e v em $\mathcal{U}$;

12 **retorna** M

A.4.2 Alocação de Medidas Redundantes

A partir do plano de medição preliminar, estruturalmente mínimo e capaz de assegurar a observabilidade topológica global do sistema, procede-se à alocação de medidas adicionais com o objetivo de introduzir redundância. Embora não sejam necessárias para a observabilidade, essas medidas são fundamentais para habilitar os processos de estimação e, consequentemente, para avaliar o desempenho das metodologias propostas em condições mais próximas das encontradas na operação real. A alocação dessas redundâncias é realizada de forma aleatória, respeitando estritamente as restrições impostas pela estrutura topológica resultante do particionamento.

As medidas redundantes de fluxo são alocadas exclusivamente em arestas internas às componentes conexas de $\mathcal{H}$, permitindo no máximo uma medida por direção em cada aresta. Dessa forma, as arestas de interface $\mathcal{D} = E(\mathcal{G}) \setminus E(\mathcal{H})$ permanecem inelegíveis para medidas de fluxo, preservando o papel estrutural das medidas de injeção como elementos indispensáveis à sustentação da observabilidade global.

Quanto às medidas redundantes de injeção, a alocação é irrestrita quanto à localização, podendo ser inseridas em qualquer barra do sistema representada por um vértice de $\mathcal{G}$, desde que respeitada a restrição de unicidade — isto é, que não exista previamente uma medida de injeção associada à barra em questão. Essa liberdade permite ampliar a disponibilidade de informações nodais sem interferir na separação topológica entre as componentes definidas pelo particionamento.

As quantidades de medidas redundantes de fluxo e de injeção são controladas, respectivamente, pelos parâmetros n_f^{red} e n_i^{red} , definidos a priori para cada instância conforme o cenário experimental considerado. Esses parâmetros permitem regular explicitamente o nível de redundância incorporado ao plano de medição, sem alterar a lógica estrutural do procedimento. Cabe destacar que tais parâmetros não são ajustados em função da topologia específica da rede, sendo utilizados exclusivamente como mecanismos de controle experimental. O Algoritmo 16 sintetiza esse procedimento.

Algoritmo 16: Alocação de medidas redundantes.

Entrada: Plano mínimo M , subgrafo $\mathcal{H}$, grafo $\mathcal{G}$.

Número de medidas redundantes de fluxo $n_f^{red} \geq 0$.

Número de medidas redundantes de injeção $n_i^{red} \geq 0$.

Saída: Plano de medição completo M .

1 **início**

2 **para** $i = 1$ **to** n_f^{red} **faça**

3 Selecionar aleatoriamente uma aresta $e = (u, v) \in E(\mathcal{H})$ e uma direção
 ($u \rightarrow v$ ou $v \rightarrow u$) sem medida de fluxo alocada;

4 Alocar medida de fluxo redundante nessa direção;

5 **para** $i = 1$ **to** n_i^{red} **faça**

6 Selecionar aleatoriamente uma barra $v \in V(\mathcal{G})$ sem medida de injeção
 alocada;

7 Alocar medida de injeção redundante em v ;

8 **retorna** M

APÊNDICE B - CONCEITOS BÁSICOS DE MATROIDES

Este apêndice reúne, de forma concisa, as definições e propriedades de matroides utilizadas na formulação da metodologia proposta nesta tese. A exposição restringe-se aos conceitos de matroide gráfico, matroide de partição e interseção de matroides, sem pretensão de aprofundamento teórico. Ressalta-se que o conteúdo aqui apresentado possui caráter complementar, não sendo necessário para o entendimento da metodologia desenvolvida. As definições seguem a abordagem clássica, conforme [43], [51] e [59].

B.1 Definição de Matroide

Um *matroide* M é definido como um par ordenado $(E, \mathcal{I})$, em que E denota um conjunto finito, denominado *conjunto base* (*ground set*), e $\mathcal{I}$ representa uma família de subconjuntos de E , denominados *conjuntos independentes*, que satisfazem as seguintes propriedades:

1. **Não-trivialidade:** o conjunto vazio é independente, isto é, $\emptyset \in \mathcal{I}$.
2. **Hereditariedade:** se $I_a \in \mathcal{I}$ e $I_b \subseteq I_a$, então $I_b \in \mathcal{I}$. Em outras palavras, todo subconjunto de um conjunto independente também é independente.
3. **Axioma da troca:** se $I_a, I_b \in \mathcal{I}$ e $|I_a| < |I_b|$, então existe um elemento $\kappa \in I_b \setminus I_a$ tal que $I_a \cup \{\kappa\} \in \mathcal{I}$.

Utiliza-se a notação $\mathcal{I}(M)$ para indicar a família de conjuntos independentes associada a M , e $E(M)$ para denotar seu conjunto base. Um subconjunto de E que não pertence a $\mathcal{I}$ é denominado *dependente*. Os conjuntos independentes de cardinalidade máxima (aqueles aos quais não é possível adicionar novos elementos sem violar a independência) são denominados *bases* do matroide. Todas as bases possuem a mesma cardinalidade, denominada *posto* (*rank*) de M , propriedade que decorre diretamente do axioma da troca.

Para ilustrar esses conceitos, considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tomando $E = \{1, 2, 3\}$ como o conjunto de índices das colunas de A e $\mathcal{I}$ como a família de subconjuntos de E cujas colunas correspondentes são linearmente independentes, obtém-se um *matroide linear*. Nesse caso, os subconjuntos $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ e $\{2, 3\}$ constituem as bases do matroide, com posto igual a 2, que corresponde ao posto da matriz A . O subconjunto $\{1, 2, 3\}$ é dependente, pois a terceira coluna é combinação linear das duas primeiras. No contexto deste trabalho, entretanto, o interesse recai sobre os matroides *gráfico* e *de partição*, apresentados nas seções seguintes.

B.2 Matroide Gráfico

Dado um grafo simples $\mathcal{G}$, o *matroide gráfico* $M_{\mathcal{G}} = (E(\mathcal{G}), \mathcal{I}_{\mathcal{G}})$ é aquele cuja família de conjuntos independentes $\mathcal{I}_{\mathcal{G}}$ é formada pelos subconjuntos de arestas que constituem subgrafos acíclicos de $\mathcal{G}$. Assim, um conjunto $I \subseteq E(\mathcal{G})$ é independente em $M_{\mathcal{G}}$ se, e somente se, as arestas de I formam uma floresta em $\mathcal{G}$. Os conjuntos independentes maximais correspondem às árvores geradoras, quando o grafo é conexo, ou às florestas geradoras de seus componentes conexos, no caso geral.

O posto do matroide gráfico é dado por $|V(\mathcal{G})| - w(\mathcal{G})$, onde $w(\mathcal{G})$ denota a quantidade de componentes conexas de $\mathcal{G}$. Essa expressão reflete o número máximo de arestas que podem ser selecionadas sem formar ciclos.

Os axiomas de matroide são naturalmente satisfeitos nesse contexto. A hereditariedade decorre do fato de que qualquer subgrafo de uma floresta permanece acíclico. O axioma da troca, por sua vez, garante que, dadas duas florestas $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ tais que $|E(\mathcal{F}_1)| < |E(\mathcal{F}_2)|$, existe ao menos uma aresta em $E(\mathcal{F}_2) \setminus E(\mathcal{F}_1)$ cuja inserção em $\mathcal{F}_1$ não introduz ciclos.

No âmbito da metodologia desenvolvida nesta tese, o matroide gráfico é empregado para modelar a restrição de aciclicidade na construção de árvores geradoras observáveis, especificamente no processamento das arestas de injeção.

B.3 Matroide de Partição

Seja E um conjunto finito particionado em blocos disjuntos $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k$. O *matroide de partição* $M_P = (E, \mathcal{I}_P)$ define como independentes os subconjuntos $I \subseteq E$ que satisfazem:

$$|I \cap E_i| \leq 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Dessa forma, um conjunto é independente em M_P se contém, no máximo, um elemento de cada bloco da partição. Os conjuntos independentes maximais correspondem à seleção de exatamente um elemento por bloco não vazio, e o posto do matroide é igual ao número de blocos não vazios.

A verificação dos axiomas é imediata: a remoção de elementos de um conjunto que respeita a restrição de partição não pode violá-la (hereditariedade), e um bloco ainda não representado em um conjunto independente menor sempre pode contribuir com um elemento para ampliá-lo (axioma da troca).

No contexto desta tese, o matroide de partição é utilizado para representar a restrição de unicidade de rótulos das arestas de injeção na construção de árvores geradoras observáveis. Cada bloco de partição agrupa as arestas associadas a uma mesma medida de injeção, e a condição de independência assegura que cada medida contribua com, no máximo, uma aresta para a árvore.

B.4 Interseção de Matroides

Sejam $M_1 = (E, \mathcal{I}_1)$ e $M_2 = (E, \mathcal{I}_2)$ dois matroides definidos sobre o mesmo conjunto base E . A *interseção de matroides* consiste em determinar subconjuntos $X \subseteq E$ que sejam simultaneamente independentes em ambos os matroides:

$$X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2.$$

Tais subconjuntos são denominados *conjuntos independentes comuns*. É importante observar que a família $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$ não define, em geral, um novo matroide, uma vez que o axioma da troca pode ser violado. Ainda assim, o problema de encontrar um conjunto independente comum de cardinalidade máxima, formulado como

$$\max\{|X| : X \in \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2\},$$

constitui um problema clássico em otimização combinatória, solucionável em tempo polinomial.

No contexto deste trabalho, a interseção de matroides surge naturalmente na formulação do seguinte problema: a construção de uma árvore geradora (ou, de forma mais geral, de uma floresta de cardinalidade máxima) cujas arestas possuam *rótulos distintos*. Cada rótulo representa uma medida de injeção, de modo que a seleção simultânea de duas arestas com o mesmo rótulo não é permitida.

Essa formulação é modelada pela interseção entre o matroide gráfico $M_G = (E, \mathcal{I}_G)$ e o matroide de partição $M_P = (E, \mathcal{I}_P)$, ambos definidos sobre o mesmo conjunto de arestas E . A independência em M_G impõe que o conjunto selecionado seja acíclico (restrição estrutural), enquanto a independência em M_P garante que cada rótulo contribua com, no máximo, uma aresta (restrição de unicidade). Assim, um subconjunto $I \subseteq E$ pertence à interseção $M_G \cap M_P$ se, e somente se:

1. as arestas de I formam uma floresta no grafo $\mathcal{G}$;
2. I contém, no máximo, uma aresta associada a cada rótulo.

Os conjuntos independentes maximais na interseção correspondem a florestas que respeitam simultaneamente ambas as restrições. Em particular, quando a cardinalidade máxima de um conjunto independente comum coincide com o posto do matroide gráfico, obtém-se uma *árvore geradora* que satisfaz integralmente as duas condições, a qual, no problema analisado nesta tese, corresponde a uma *árvore geradora observável*.

Essa formulação remonta ao trabalho seminal de Quintana, Simões Costa e Mandel [56], no qual o problema da observabilidade topológica foi abstraído como a busca por uma *árvore geradora arco-íris* em multigrafos com arestas coloridas, isto é, uma árvore geradora que satisfaz simultaneamente as restrições de aciclicidade e de unicidade de cores das arestas (coloração arco-íris). Essa abstração fornece parte do arcabouço conceitual que fundamenta a abordagem desenvolvida nesta tese.