### UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Leonardo Ferreira Cardoso

## SIMULAÇÃO DE FLUIDO EM MULTIRESOLUÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Computação Visual.

Orientador: Prof. Dr. Marcos de Oliveira Lage Ferreira

Niterói 2014

### LEONARDO FERREIRA CARDOSO

## SIMULAÇÃO DE FLUIDO EM TEMPO REAL COM MULTIRESOLUÇÃO DE PARTÍCULAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre. Área de Concentração: Computação Visual.

Aprovada em <MES> de 2014.

### BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcos de Oliveira Lage Ferreira – Orientador UFF

> Prof. Dr. Esteban Walter Gonzalez Clua UFF

> > Prof. Dr. Ricardo Marroquim UFRJ

> > > Niterói 2014

"Dedicatória(s): Elemento opcional onde o autor presta homenagem ou dedica seu trabalho"

### AGRADECIMENTOS

"Elemento opcional, colocado após a dedicatória" (ABNT, 2005).

"Epígrafe: Folha onde o autor apresenta uma citação, seguida de indicação de autoria, relacionada com a matéria tratada no corpo do trabalho." (ABNT, 2005).

### **RESUMO**

Inúmeras simulações físicas são realizadas no campo da computação gráfica para gerar animações cada vez mais próximas da realidade. Algumas dessas simulações são as simulações de colisões de corpos rígidos ou não, de tecido, de fenômenos astrofísicos, e de fluidos. Esta última tem uma característica especial que é a de estar presente em cada uma das simulações citadas anteriormente. Por exemplo, nas simulações de colisão, podemos observar a colisão de fluidos com outros objetos (como outros fluidos ou outros tipos de corpos rígidos ou não), na de tecido, a interação entre o tecido e um determinado tipo de fluido, por exemplo água ou vento, e nos fenômenos astrofísicos, os jatos expelidos pelos núcleos de galáxias altamente ativas.

Em alguns trabalhos, podemos observar que o estudo de fluidos está diretamente direcionado com a morfologia natural de um dado terreno, uma vez que fatores externos como vento e água são elementos extremamente importantes para a formação de rios, lagos, montanhas, cavernas, etc.

Ademais, o estudo das interações entre gases, líquidos e sólidos tem sido de grande importância de várias áreas da geociência, incluindo a extração de petróleo. Contudo, com o intuito de gerar simulações mais realistas, é preciso que esta seja feita na ordem de milhões de partículas o que torna a simulação custosa pois demandaria de muito recurso computacional.

Tendo em vista isso, a presente dissertação tem como objetivo, apresentar o método computacional para simulação de fluidos baseado em SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) e com multiresolução de partículas, objetivando o balanceamento entre quantidade de partículas e resolução gráfica.

Palavras-chave: Simulação de fluido, SPH, Smoothed Particle Hydrodynamics.

### ABSTRACT

Numerous physical simulations are performed in the field of computer graphics to generate animations ever closer to reality. Some of these simulations are simulations of collisions of rigid bodies, woven, astrophysical phenomena, and fluid. The latter has a special feature that is to be present in each of the simulations listed above. For example, the crash simulations, we can observe the collision of fluid with other objects (or other fluids such as other types of rigid bodies or not) in the tissue, the interaction of tissue and one type of fluid, for example water or wind, and astrophysical phenomena, ejected by the core of highly active galaxies.

In some studies, we observed that the study of fluids is directly targeted to the natural morphology of a given terrain, since external factors such as wind and water elements are extremely important for the formation of rivers, lakes, mountains, caves, etc.

Furthermore, the study of the interactions between gases, liquids and solids has been of great importance in many areas of geoscience, including the extraction of oil. However, in order to generate more realistic simulations, it is necessary that this be done in the order of millions of particles which makes it costly simulation would require a lot of computational resources.

In view of this, this thesis aims to present the computational method for fluid simulation based on SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) and multiresolution particle, aiming to balance between the amount of particles and graphics resolution.

Keywords: fluid simulation, SPH, Smoothed Particle Hydrodynamics

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – A esquerda vemos uma cena do filme O Motoqueiro Fantasma, que utiliza
técnicas de simulação para criar o efeito de fogo. À direita uma tela do jogo PixelJunk Shooter,
cujo gameplay é baseado na simulação de um escoamento de fluido10
Figura 2: Colocando água no copo a 5 frames por segundo14
Figura 3: Sequência de frames que mostra o escoamento do fluido pela fenda na
superfície através da ação da gravidade (foram utilizadas 80 partículas)14
Figura 4: Sequência de frames que resume o método de SPH em Duas-Fases: Alta
(High) e Baixa (Low)
Figura 5 – Volume de controle17
Figura 6 – Processo de multiresolução de partículas
Figura 7 – Distribuição de força entre as partículas
Figura 8 – Atuação da força elástica entre partículas reais e virtuais
Figura 9 – Processo de transição de partículas em baixa resolução para alta resolução

# SUMÁRIO

Capítulo 1 – Introdução	
1.1 Visão Geral	
1.2 Relevância do trabalho	11
Capítulo 2 – Trabalhos relacionados	
Capítulo 3 – Fundamentação teórica	16
3.1 Descrição Lagrangeana Das equações de Navie	r Stokes16
3.2 Smoothed Particle Hydrodynamics	
3.3 aproximação SPH das equações de Navier-Stok	tes21
3.3.1 Força interna	21
3.3.2 Forças Externas	
Capítulo 4 – Multiresolução de partículas	
4.1 Definição	. Error! Bookmark not defined.
4.2 Partículas Virtuais	
4.3 Split – divisão de partículas	
4.4 Merge – Junção de partículas	
Capítulo 5 – Resultados	. Error! Bookmark not defined.
5.1 Definição	. Error! Bookmark not defined.
Capítulo 6 – Conclusão	. Error! Bookmark not defined.
6.1 Definição	. Error! Bookmark not defined.

# CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

### 1.1 VISÃO GERAL

Simulações de fenômenos naturais tais como chuva, escoamento de água sobre uma superfície, lama, fogo, fumaça, ondas de oceano, ação do vento, entre outros, vem sendo desenvolvidas por muitos pesquisadores nas últimas décadas e aplicadas em diversos ramos da indústria. Um dos principais exemplos desta realidade é a indústria do entretenimento, haja vista a grande quantidade de jogos eletrônicos, animações gráficas, e filmes gerados por computador e que utilizam estas simulações para criar efeitos e cenas fisicamente realistas. Alguns exemplos de filmes e jogos que utilizaram simulações de fenômenos naturais para gerar efeitos especiais são os filmes O Motoqueiro Fantasma (2007 e 2012), Piratas do Caribe (2003, 2006, 2007 e 2011) e Happy Feet – O Pinguim (2011), e também os jogos Where Is My Water (Disney) e PixelJunk Shooter (Q-Games). A Figura 1 mostra uma cena retirada do filme O Motoqueiro Fantasma e uma tela do jogo PixelJunk Shooter.



Figura 1 – A esquerda vemos uma cena do filme O Motoqueiro Fantasma, que utiliza técnicas de simulação para criar o efeito de fogo. À direita uma tela do jogo PixelJunk Shooter, cujo gameplay é baseado na simulação de um escoamento de fluido.

O estudo do movimento de fluidos é uma área de interesse antiga da comunidade científica. Antes do advento da computação, pesquisas nesta área eram restritas em laboratórios ou em ambientes controlados. Nesta época, muitos problemas importantes para a humanidade não eram bem entendidos já que diversos experimentos não podiam ser reproduzidos em laboratórios, como certos os fenômenos climáticos, ou tinham custos de reprodução proibitivos, como por exemplo os estudos aerodinâmicos em túneis de vento.

Após o advento da computação, a linha de pesquisa multidisciplinar chamada Dinâmica de Fluidos Computacional (DFC) se desenvolveu com o objetivo de propor métodos computacionais que pudessem reproduzir numericamente o escoamento de fluidos. Simulações numéricas passaram a ser utilizadas como apoio e complemento a estudos teóricos e experimentais. Seus resultados fossem usados para validar experimentos, novos modelos matemáticos e para estudar problemas intratáveis no passado.

Para simular computacionalmente fenômenos naturais é necessário o desenvolvimento de um modelo matemático que descreva estes fenômenos. Por exemplo, o escoamento de fluidos Newtonianos Incompressíveis é descrito matematicamente pelas equações de Navier-Stokes, que serve como base para este trabalho. As equações de Navier-Stokes não têm solução analítica e para resolve-las numericamente, é necessário que se efetue uma série de cálculos e aproximações. A complexidade destes cálculos é ainda maior quando queremos simular a interação de diversas fases de fluido ou quando há contato do fluido com elementos rígidos. De fato, métodos numéricos para a simulação de fluidos são computacionalmente custosos e precisam levar em consideração estratégias que otimizem a utilização dos recursos computacionais disponíveis.

O método SPH (Smoothed Particle Hydrodinamics), detalhado na seção 3.2, é um método baseado em partículas que aproxima as quantidades físicas de uma partícula (ou volume de fluido) através de médias ponderadas das propriedades de partículas adjacentes. A complexidade computacional de simulações de fluidos baseadas no método SPH é proporcional à quantidade de partículas utilizadas para discretizar o fluido. Quanto maior for este número, mais caro se torna o processo em termos computacionais. Entretanto, aumentar a quantidade de partículas de uma simulação implica em gerar melhores descrições numéricas do fenômeno estudado pois, deste modo, o erro inerente à aproximação imposta pelo método numérico é reduzido.

### **1.2 RELEVÂNCIA DO TRABALHO**

Dado a natureza deste problema, é imprescindível a utilização de um método que possa atender a necessidade de se aumentar a discretização de uma simulação sem onerar os recursos computacionais disponíveis. Este trabalho tem como objetivo apresentar uma variação do método de SPH que utilize uma discretização adaptativa do volume ocupado pelo fluido. Isto é, apresentaremos uma técnica através da qual é possível dividir e/ou fundir partículas para, de forma adaptativa, obter melhores discretizações em região importantes da simulação (por exemplo, regiões onde o fluido interage com corpos rígidos) sem que haja desperdício de recursos computacionais em outras regiões. Tanto a divisão quanto a fusão de partículas são feitas de forma dinâmica, permitindo que cada aplicação determine quando e onde é necessário criar um cenário de alta e ou baixa resolução de partículas.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 2 faremos uma breve revisão bibliográfica da área, no Capítulo 3 revisaremos os principais conceitos relacionados à às equações de Navier-Stokes e o método SPH em sua formulação tradicional, no Capítulo 4 descreveremos o método SPH com multiresolução adaptativa, que propomos neste trabalho e, por fim, nos **Error! Reference source not found.** e **Error! Reference source not found.** apresentamos os resultados e as considerações finais, respectivamente.

### **CAPÍTULO 2 – TRABALHOS RELACIONADOS**

Inicialmente, o método SPH foi aplicado para resolução de problemas astrofísicos por Lucy [44] e em seguida por Gingold e Monaghan [43], ambos em 1977. Como o movimento das partículas apresentados por estes trabalhos se comportavam de forma semelhante ao movimento de um fluido, então este método foi adaptado para escoamento de fluidos incompressíveis, e portanto, passou a ser regido por uma equação clássica de hidrodinâmica newtoniana. Desde então, tal método tem se mostrado ser bastante robusto, e por conta disso, passou a ser usado em uma grande variedade de aplicações em diversas áreas, tais como:

- Astrofísica Colisões estelares: [Faber and Rasio, 2000]; [Faber and Manor, 2001]; [Benz, 1988]; [Benz, 1990]; [Monaghan, 1992]; [Frederic and James, 1999];
- Magneto-hidrodinâmica Colapso Magnético de nuvens de gás: [Habe, 1989];
- Mecânica dos sólidos Problemas de impacto: [Johnson et al., 1996]; [Libersky and Petscheck, 1991]; [Libersky and Petscheck, 1993];
- Dinâmica dos fluidos Fluxo multifásico: [Monaghan and Kocharyan, 1995]);
- Ondas dos mares Estudo que deslizamento de terra submarina gera ondas [Panizzo e Dalrymple, 2004];
- Transporte de sedimentos [Zou e Dalrymple, 2006] e [Zou, 2007] Examinaram sedimentos em suspensão sob as ondas, utilizando o método de Lagrange da equação de convecção-difusão;
- SPH em duas fases [Hu e Adams, 2007] determinam a força de superfície entre as fases através de um modelo SPH multifásico incompressível;
- Incompressibilidade de fluido [Shao et al., 2006] usa o método SPH para escoamento incompressível.

Outros trabalhos de igual importância, citados a seguir, também foram levados em consideração, dentre eles estão os trabalhos do Müller [23, 24, 25], na qual é apresentado aplicações de fluido interativos baseados em partículas - Figura 2: Colocando água no copo a 5 frames por segundo.. Este trabalho serviu como base para a elaboração dos principais algoritmos de cálculo das equações utilizadas pelo método SPH em simulações que trabalham em tempo real, principalmente aquelas que tratam de interações entre o fluido e corpos rígidos ou deformáveis, bem como interações de fluidos de diferentes tipos de materiais.



Figura 2: Colocando água no copo a 5 frames por segundo.

O trabalho de Desbrun e Gascuel [51] também influenciou o presente trabalho, permitindo que nele fosse feito a interação do fluido com objetos rígidos na cena - Figura 3: Sequência de frames que mostra o escoamento do fluido pela fenda na superfície através da ação da gravidade (foram utilizadas 80 partículas).. Desse modo, foi possível a realização de testes em regiões complexas, bem como interações com o usuário de modo que fosse viável criar distúrbios propositais que permitissem a averiguação visual dos efeitos de multi-resolução de partículas em tempo real.



Figura 3: Sequência de frames que mostra o escoamento do fluido pela fenda na superfície através da ação da gravidade (foram utilizadas 80 partículas).

Em relação a multi-resolução de partículas, o trabalho de Solenthaler e Gross [52] teve um papel fundamental para o desenvolvimento deste trabalho. Nele foi possível entender a dinâmica de múltiplas resoluções, que nesse caso foi apresentado apenas como baixa e alta resolução, bem como as mudanças necessárias acerca do método em SPH que permitisse o seu funcionamento, mesmo agora em sistemas onde o número de partículas não era mais constante Figura 4: Sequência de frames que resume o método de SPH em Duas-Fases: Alta (High) e Baixa (Low)..



Figura 4: Sequência de frames que resume o método de SPH em Duas-Fases: Alta (High) e Baixa (Low).

## CAPÍTULO 3 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo são apresentados os conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente revisaremos a derivação das equações de Navier-Stokes para fluxos de fluido incompressíveis (Seção 3.1), e em seguida, na (Seção 3.2), a formulação tradicional do método *Smoothed Particle Hidrodymics* (SPH), que serve de base para a técnica de multi-resolução proposta neste trabalho.

### **3.1 EQUAÇÕES DE NAVIER STOKES**

As equações que regem o movimento de um fluido são conhecidas como as Equações de Navier-Stokes. Essas equações são diferenciais parciais que possibilitam estabelecer os campos de velocidade e pressão de um fluido, sendo possível usá-las para modelar, por exemplo, o escoamento de fluidos em dutos, como também correntes oceânicas atmosféricas.

Antes de apresenta-las, é necessário discutir as hipóteses sobre as quais elas foram deduzidas. Exige-se que o fluido seja composto de um meio contínuo, em outras palavras, que não exista interstícios na região de domínio do fluido, como bolhas de ar, ou partículas de outros materiais, além disso, as principais variáveis de estudo (pressão, velocidade e densidade) devem ser diferenciáveis.

O modelo matemático usado para representar as equações de Navier-Stokes é baseado em três princípios físicos básicos: Conservação de massa; Conservação de movimento (2° Lei de Newton) e Conservação de energia (1° Lei da Termodinâmica). De modo a fazer valer tais princípios, é necessário estabelecer um volume arbitrário de um fluido, comumente chamado de volume finito de controle, denotado por  $\vartheta$ , cuja superfície é dada por  $S = \partial \vartheta$ .



Figura 5 – Volume de controle

O volume de controle pode ser considerado fixo no espaço (abordagem Euleriana), ou variar sua posição baseado no comportamento do fluido (abordagem Lagrangeana). O presente trabalho é baseado no método Lagrangeano chamado SPH (Smoothed Particles Hydrodynamics), que será detalhado na seção 3.2, cuja discretização espacial utiliza um conjunto de partículas para representar o domínio do fluido. Este método tem como vantagem a possibilidade de se adaptar a simulações com grandes deformações no domínio da simulação, e possibilitam a inserção e remoção de partículas, facilitando o refinamento adaptativo para regiões que necessitam de resultados mais precisos.

Por outro lado, esta estratégia tem algumas desvantagens, dentre elas está a necessidade de calcular a vizinhança das partículas a cada iteração, devido à falta de informação de conectividade entre elas. Esta característica eleva a quantidade de esforço computacional de métodos Lagrangeanos devido ao grande número de partículas necessárias para simulações numericamente precisas.

Como na abordagem Lagrangeana as partículas de fluidos permanecem dentro do volume de controle, então podemos dizer que o comportamento da partícula *P* segue a equação a seguir:

$$P \in \vartheta \iff P \in \varphi(\vartheta, t), \forall t$$
  
Equação 1

Onde  $P \in \Omega$ , e  $\Omega$  representa a região de escoamento do fluido, e o termo  $\varphi(\vartheta, t)$  da equação acima representa o movimento do volume  $\vartheta$  do fluido.

Basicamente, as entidades físicas de um fluido viscoso e isotérmico são: u que representa o campo de velocidade,  $\rho$  que representa a densidade do material, e p que representa o campo da pressão. Essas entidades são consideradas como campos contínuos em um fluido [50]. O fluxo de fluido incompressível pelo tempo é dado pelas equações de Navier-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + u.\nabla\right)u = -\nabla p + \mu\nabla.(\nabla u) + f$$
  
Equação 2

 $\nabla . u = 0$ Equação 3

Onde  $\mu$  representa a viscosidade do fluido, e *f* é a soma das forças externas agindo no fluido tal qual como a gravidade. A Equação 2 descreve a conservação do momento seguindo a segunda lei de Newton. O lado direito representa o total das forças agindo sobre um volume de fluido, enquanto do lado esquerdo é o produto entre a massa e a aceleração.

É importante observar que para o fluido a aceleração é a derivada total em relação ao tempo do campo de velocidade. Usando a regra da cadeia sobre o campo de velocidade temos:

$$\frac{d}{dt}u(t,r(t)) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right]^{T} \cdot \left[\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}\right]^{T}$$
$$= \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right]^{T}\right)u$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla\right)u$$
Equação 4

A Equação 3 é conhecida como equação de continuidade, ou conservação da massa. Esta equação impõe que a massa do sistema deva ser constante para um fluido incompressível.

Em métodos baseados em partículas, a Equação 3 pode ser desconsiderada, desde que não haja adição ou remoção de novas partículas no sistema, pois cada partícula já possui uma quantidade de massa constante, o que por si só já garante a validade desta equação. Contudo,

para o presente trabalho, se faz necessário a criação e remoção de partículas no sistema, e as estratégias utilizadas para a conservação da massa, de modo a garantir a validade dessa equação, serão detalhadas no capítulo 4.

### **3.2 SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS**

O método Smoothed Particle Hidrodynamics (ou apenas SPH), que nasceu no campo da Astrofísica Computacional, foi inicialmente desenvolvido para modelar problemas de fluxo de fluidos compressíveis [21] e apenas mais tarde foi adaptado para representar fluidos incompressíveis como o ar e a água [55].

O SPH é um método Lagrangeano, e portanto, não necessita de malha. De forma geral, o método é uma estratégia de aproximação de quantidades físicas contínuas e suas derivadas, usando a teoria dos integrais de interpolação, baseada em pontos de uma amostra discreta do domínio de simulação. Esses pontos da amostra são chamados de partículas e transportam quantidades físicas, como por exemplo massa, posição, velocidade, etc. O Núcleo de interpolação é compreendido como uma função analítica que pode ser diferenciada sem necessitar de uma malha espacial e que varia com a distância. Assim, as equações da dinâmica (Navier-Stokes), adequadamente escritas no formalismo SPH serão de agora em diante, intituladas por equações SPH.

Nesta seção, descreveremos os principais pontos da formulação clássica do método SPH, e para mais detalhes sobre o assunto, sugerimos o texto de Monaghan [43].

O método SPH é baseado na aproximação integral de funções. A aproximação integral de uma função *A*, que denotaremos por  $A_S(\mathbf{r})$ , é definida sobre todo o domínio de simulação  $\Omega$ , e dada pela equação:

$$A_{S}(r) = \int_{\Omega} A(r') \cdot W(r - r', h) dr'$$
  
Equação 5

onde r é um ponto de  $\Omega$ , e W é uma função suave, chamada núcleo, que tem suporte compacto de comprimento h. A discretização da equação anterior é obtida aproximando o termo integral por um somatório sobre as partículas da amostra discreta do domínio de simulação  $\Omega$ :

$$A_{S}(r) = \sum_{j} A_{j} \cdot V_{j} \cdot W(r - r_{j}, h)$$
  
Equação 6

# onde j é o índice da partícula, $V_j$ é a porção de volume representado pela partícula j, $r_j$ é a posição, e $A_j$ é o valor da quantidade A na posição $r_j$ . Como o volume $V_j$ de uma partícula pode ser escrito em função de sua massa $m_j$ e sua densidade $\rho_i$ , a Equação 6 pode ser reescrita como:

$$A_s(r) = \sum_j A_j \frac{m_j}{\rho_j} W(r - r_j, h)$$

O gradiente da função A também podem ser aproximado através dos valores  $A_j$  da função nas partículas e do uso de um núcleo diferenciável através da equação:

$$\nabla A_{s}(r) = \sum_{j} A_{j} \frac{m_{j}}{\rho_{j}} \nabla W(r - r_{j}, h)$$
  
Equação 8

Para conseguir maior precisão na aproximação do gradiente de um campo escalar, outras

estratégias podem ser utilizadas, como apresentado em [55]. Ainda, o Laplaciano da função *A* pode ser escrito como:

$$\nabla^2 A_s(r) = \sum_j A_j \frac{m_j}{\rho_j} \nabla^2 W(r - r_j, h)$$
  
Equação 9

A escolha do núcleo de suavização é de grande importância para a qualidade dos resultados obtidos com o método SPH. Mais ainda, a derivada dos núcleos de suavização tem impacto importante nas estimativas das quantidades diferenciais. Em [12] foram estudados diversos tipos de núcleos para SPH. Neste trabalho, utilizamos as funções apresentadas abaixo como núcleo de suavização.

$$W_{padrão}(r,h) = \frac{315}{64\pi h^9} \begin{cases} (h^2 - ||r||^2)^3 & 0 \le ||r|| \le h \\ 0 & ||r|| > h \end{cases}$$
$$W_{pressão}(r,h) = \frac{15}{\pi h^6} \begin{cases} (h - ||r||)^3 & 0 \le ||r|| \le h \\ 0 & ||r|| > h \end{cases}$$
$$W_{viscosidade}(r,h) = \frac{15}{2\pi h^3} \begin{cases} -\frac{||r||^3}{2h^3} + \frac{||r||^2}{h^2} + \frac{h}{2||r||} - 1 & 0 \le ||r|| \le h \\ 0 & ||r|| > h \end{cases}$$
Equação 10

### **3.3 APROXIMAÇÃO SPH DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES**

A equação (2) e (3) representa a formulação básica Euleriana de um fluido isotérmico e incompressível. É importante observar que o uso de uma formulação Lagrangeana ajuda a simplificar as equações de Navier-Stokes. Mesmo que haja uma variação da quantidade de partículas dentro do nosso volume de controle, nós garantimos que a massa de cada uma das partículas será mantida igual, e que a massa total das partículas contidas no volume de controle será constante, dessa forma a conservação da massa é garantida.

O lado direito da Equação 2 consiste das forças de campo internas e externas. Os campos de força podem ser combinados dentro de um somatório de campos de força da seguinte forma:

 $F = f_{interno} + f_{externo}$ Equação 11

### **3.3.1 FORÇA INTERNA**

As forças internas são contribuições de força geradas por interações moleculares. Na Equação 2 estas forças são dadas pelo campo de pressão e o termo da viscosidade, que são o primeiro e segundo termo do lado direito, respectivamente.

O termo  $\nabla p$  da Equação 2 representa a força de pressão por volume, causando o deslocamento de partículas localizadas em regiões de alta pressão para regiões de baixa pressão. A pressão p de uma partícula pode ser determinada usando a lei dos gases ideais, indicada pela equação a seguir.

 $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ Equação 12 Onde  $V = \frac{1}{\rho}$  é o volume por unidade de massa, *n* é o número de partículas no gás em mol, *R* é a constante universal dos gases, e *T* é a temperatura. Para um fluido isotérmico com uma massa constante, o lado direito da Equação 12 pode ser mantida constante, e, portanto, podemos substituí-lo por uma constante k, o que, teoricamente, depende apenas da quantidade de partículas no fluido. O termo pressão pode então ser escrito como:

$$p \cdot V = k$$
$$p \cdot \frac{1}{\rho} = k$$
$$p = k \cdot \rho$$
Equação 13

Onde k é uma constante que depende da temperatura. Na ausência de forças, inclusive de forças externas como a da gravidade, essa relação causa a expansão indefinida de matéria no espaço, o que no caso de escoamento de fluidos é um comportamento indesejado, pois um fluido não teria tal comportamento devido as forças de lição entre suas moléculas

A Equação 13 resulta em forças puramente repulsivas entre as partículas, o que é verdadeiro para um gás ideal, que tende a expandir-se no espaço. Em contraste, os líquidos devem exibir coesão interna e devem possuir uma massa de densidade constante em repouso. Em [5] Desbrun sugeriu o uso de uma versão modificada da equação de estado do gás ideal, com uma pressão adicional de repouso  $\rho_0$ , que é

$$(p + p_0)V = k$$
$$p + k\rho_0 = k \cdot \rho$$
$$p = k \cdot (\rho - \rho_0)$$
Equação 14

Onde  $\rho_0$  é a densidade do fluido em repouso. Com esta adaptação no cálculo da pressão, a densidade do fluido tende a se aproximar de  $\rho_0$ , que representa a densidade de um fluido em repouso. Como exemplo, [23] configura este valor para 1000 kg/m3 a fim de simular água.

Se a pressão é conhecida para cada partícula, a força pressão da partícula i, na notação do SPH, fica:

$$f_i^{pressão} = -\nabla p(\mathbf{r}_i)$$
$$= -\sum_{j \neq i} p_j \frac{m_j}{\rho_j} \nabla W(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, h)$$
Equação 15

Infelizmente, a força pressão na Equação 15 não é simétrica, Isto pode ser verificado quando interagimos somente duas partículas, pois a primeira partícula usaria a pressão na segunda partícula para calcular sua própria pressão e vice-versa. Uma vez que as forças de pressão das partículas não são iguais, em geral, a força pressão será assimétrica, e a lei de ação e reação não vai ser conservada. O trabalho [??] propõe uma forma de balancear a força pressão através da equação a seguir:

$$f_i^{pressão} = -\rho_i \sum_{j \neq i} \left( \frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) m_j \nabla W(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, h)$$

Equação 16

Usando a Equação 14 em Equação 16, resulta numa força de atração-repulsão que será minimizada conforme a densidade se aproxima da densidade de repouso. Desse modo, A força de pressão simétrica tem a qualidade de conservar o momento linear e angular, e, portanto, a terceira lei de Newton.

O gradiente do campo de pressão é utilizado no cálculo da força de pressão. Se o gradiente do kernel padrão da Equação 10 é usada como a escolha de suavização do kernel na Equação 16, então agrupamento de partículas irão surgir em regiões de alta pressão. Essa situação ocorre por causa da equação  $\nabla W_{padrão}(r,h) \rightarrow 0$  quando  $||r|| \rightarrow 0$ , o que implica que as forças de repulsão ficam mais atenuadas quando partículas se aproximam umas das outras. Devido a esse modelo não confiável da força de pressão, é possível se formar uma aglomeração de partículas. Para uma descrição física mais precisa para tal comportamento, se faz necessário a utilização de outro kernel de suavização para a força de pressão. Desbrun tornou-se familiarizado com o mesmo problema em [5], e propôs outro kernel normalizado, que mais tarde foi adotada em [23]. Para as avaliações da força de pressão entre as partículas, empregamos o kernel spiky a partir de [23] como o nosso núcleo de pressão, que produz o kernel de pressão expresso na Equação 10, e cujo gradiente é representado por,

$$\nabla W_{pressão}(\boldsymbol{r},h) = -\frac{45}{\pi h^6} \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|} (h - \|\boldsymbol{r}\|)^2$$
  
Equação 17

Onde é escrito os limites para uma única dimensão. Observa-se que  $\nabla W_{pressão}(r,h) \rightarrow -\frac{45}{\pi h^6}$  quando  $r \rightarrow 0^+$ , que irá modelar a força de repulsão necessária quando as partículas adjacentes se tornarem muito densas.

Um fluido é uma substância que não podem resistir à tensão de corte e, consequentemente, irá fluir após deformação. Ao mesmo tempo, quando o fluido flui, as moléculas sofrem atrito interno que diminui a sua energia cinética, convertendo-a em calor. A resistência ao fluxo é chamada viscosidade, e o coeficiente de viscosidade,  $\mu$ , define a força de como o fluido viscoso é. A variante SPH ao termo de força de viscosidade é representada por:

$$f_i^{viscosidade} = \mu \cdot \nabla^2 u(r_i)$$
$$= \mu \cdot \sum_{j \neq i} u_j \frac{m_j}{\rho_j} \cdot \nabla^2 W(r_i - r_j, h)$$

#### Equação 18

Como a força de pressão da Equação 15, a força de viscosidade da Equação 18 também é assimétrico devido à velocidade das partículas variarem de uma partícula para a outra. Para contrariar esta questão Müller et al. em [23] optaram por simetrizar os campos de velocidade utilizando.

$$f_i^{viscosidade} = \mu \cdot \sum_{j \neq i} (u_j - u_i) \frac{m_j}{\rho_j} \cdot \nabla^2 W(r_i - r_j, h)$$
  
Equação 19

O Laplaciano do kernel de suavização deve ser positivo ( $W(\mathbf{r}, h) \ge 0$ ). Se o Laplaciano é positiva em todos os lugares, então a força de viscosidade é usado como um termo de amortecimento. O kernel padrão não tem essa propriedade e nem o kernel de pressão, assim é necessário que se tenha um kernel de suavização para  $\nabla^2 W(r, h) \ge 0$  dado que  $||r|| \le h$ . Desse modo, foi empregado neste trabalho o kernel viscosidade proposto por [23], expressado pelo termo  $W_{viscosidade}(\mathbf{r}, h)$  na Equação 10, cuja equação Laplaciana é dada a seguir.

$$\nabla^2 W_{viscosidade}(\boldsymbol{r}, h) = \frac{45}{\pi h^6} (h - \|\boldsymbol{r}\|)$$
  
Equação 20

### **3.3.2 FORÇAS EXTERNAS**

As forças externas são equilibradas contra as forças internas. Na **Error! Reference source not found.** o campo de força de densidade externa é o último termo do lado direito, que podem ser combinados em uma soma de densidades de força.

$$f^{external} = \sum_{n} f^{n}$$
  
Equação 21

Onde *n* indica cada força externa individual. Algumas contribuições da força externa podem ser aplicadas diretamente sobre as partículas sem o uso de SPH, enquanto outros ainda dependem de partículas adjacentes. Manipulação de colisão, que também pode ser considerado como uma contribuição de força externa, é descrita na Secção 4.4.

Além disso, a aceleração de um volume de fluido é dada pela derivada ordinária da velocidade u(t) em relação ao tempo. Sendo assim, para uma dada partícula *i* a aceleração será dada por:

$$a_i = \frac{du_i}{dt} = \frac{F_i}{\rho_i}$$
Equação 22

Onde  $a_i$  e  $u_i$  são a aceleração e a velocidade da partícula i respectivamente,  $\rho_i$  é densidade calculada na posição da partícula i, e  $F_i$  é a força total atuante na partícula.

No caso da força da gravidade, a mesma segue atuante em todas as partículas do fluido de uma maneira homogênea, e a mesma é uma adaptação da Equação 22, dada por:

# $f_i^{gravidade} = \rho_i \cdot g$ Equação 23

Onde g é o vetor que representa a aceleração gravitacional direcionada para baixo.

## CAPÍTULO 4 – MULTIRESOLUÇÃO DE PARTÍCULAS

Como vimos anteriormente no Capítulo 3, a qualidade visual, a precisão numérica e a complexidade computacional das simulações estão diretamente relacionadas com o aumento de partículas. Sendo assim, podemos afirmar que as simulações de alta resolução com alto nível de precisão numérica são complexas de serem feitas, pois necessitariam de uma quantidade significativa de partículas, sendo portanto, bastante custosa do ponto de vista de recursos computacionais.

Desse modo, simulações nas quais haja interação complexas do fluido com outros meios, como por exemplo, a interação com outros elementos como o ar envolvente, fluidos de outras substâncias, ou corpos rígidos, demandam de muitos recursos computacionais para o processamento de uma quantidade exorbitante de partículas, dado que apenas assim ter-se-ia um alto nível de refinamento visual. Contudo, o presente trabalho, que trata o modelo de fluido com multi-resolução de partículas usando SPH, permite a realização destas simulações complexas de fluido sem que se eleve substancialmente o custo computacional necessário para a realização de uma simulação de alto nível. Isso se dá por que nesse processo é feito uma amostragem espacial adaptativa, que concentra mais partículas apenas em regiões estratégicas da simulação, podendo levar a economia significativa de memória e de processamento.

Tal esquema de amostragem também pode ser temporalmente adaptativo, pois não há restrições de se alterar o nível de resolução apenas com base no tempo. Em outras palavras, é possível ajustar dinamicamente a quantidade de partículas de fluido a partir de um instante *t* da simulação. Contudo, ajustes do nível de resolução de um fluido com base apenas na amostragem temporal, por menor que seja o período estabelecido para a realização do ajuste de resolução, ainda assim trata-se de um efeito aplicado em todas as partículas do fluido dentro do volume de controle da simulação, o que por sua vez, apesar de ter um custo computacional menor do que aqueles produzidos por simulações que não utilizam esta técnica, ainda assim, é um modelo que resulta em um custo computacional ainda maior do que aquele feito com base apenas em uma amostragem espacial.

No modelo de fluido SPH, duas partículas que interagem entre si têm o mesmo raio de suavização para que haja garantia de uma consistência bidirecional na força resultante atuante sobre elas. Na hipótese de violação desta condição, a terceira lei de Newton não é mais satisfeita, ou seja, uma partícula  $P_i$  pode exercer uma força sobre a partícula  $P_j$  mesmo que  $P_j$  não provoque nenhuma influência sobre a partícula  $P_i$ . Assim, qualquer esquema espacialmente

adaptativo requer uma mudança da forma como as partículas interagem entre si para garantir a conservação da quantidade de movimento.

Uma solução simples seria aplicar uma média nos raios de suavização ou na interpolação dos núcleos [48]. No entanto, como mostrado na [46], esta técnica já produz erros na ordem de 10% para uma diferença de largura de kernel em fator de dois e leva a instabilidades graves com variações de kernel maiores. Uma abordagem diferente foi desenvolvida utilizando o SPH Regularizado feito por Borve et al. [46, 47]. Segundo este artigo, uma vez que o SPH seja derivado de uma interpolação de Monte-Carlo com as partículas sendo usadas como pontos de interpolação, eles propõem o uso de pontos de interpolação adicionais, seja utilizando uma estrutura computacional auxiliar para se criar essas interpolações ou usando partículas auxiliares. Mesmo que haja relatos de melhorias substanciais na precisão numérica para os fluxos estacionários, ainda assim, as mudanças dinâmicas nos fluxos continuam difíceis de serem modeladas utilizando este método.

A proposta deste trabalho é uma abordagem geral para simulações de partículas espacialmente adaptativas que fornece uma aproximação consistente, minimizando a sobrecarga computacional. Semelhante ao [48] e [49], que só permitem que as larguras de kernel sejam de tamanho  $2^nh$ , onde n = 0, 1, 2, ..., indica o nível de resolução de partículas e h é o raio de suavização na resolução mais elevada. Para se adaptar dinamicamente a discretização durante a simulação, partículas podem fazer a transição de um nível para outro, dividindo-se ou fundindo-se (Seções 4.3 e 4.4 respectivamente).

A ideia-chave dessa abordagem é o conceito de partículas virtuais que servem dois propósitos principais: O primeiro deles seria o de permitir um acoplamento consistente de partículas em diferentes níveis de resolução, e no segundo caso, fornecer um mecanismo para dividir e fundir partículas sem introduzir distúrbios na simulação.

### 4.1 PARTÍCULAS VIRTUAIS



Figura 6 – Processo de multiresolução de partículas

Como mostrado na Figura 6 – Processo de multiresolução de partículas, podemos simplificar a explicação do uso dessas partículas virtuais se considerarmos apenas dois níveis de resolução: n e n+1. Para isso, é necessário inicialmente se distinguir os três tipos de partículas reais (ou seja, não-virtual) existentes nesse caso:

- As partículas de nível *n*+1, que são vizinhas das partículas de nível *n* e que carregam partículas virtuais filhas de nível *n* (Podendo ser 2 ou 4 partículas em um modelo em 2D);
- As partículas de nível n perto de partículas de nível n+1 vinculadas a uma partícula virtual pai de nível n. Estes dois tipos de partículas são chamadas de partículas transientes;
- 3. E por fim, quaisquer outras partículas reais de qualquer nível são partículas regulares que não estão associados a quaisquer partículas virtuais.

Para que os cálculos de forças sejam coerentes, as equações de cálculo de força no SPH são utilizadas apenas em partículas reais. Desse modo, para a realização dos cálculos de interação entre partículas, são consideradas partículas vizinhas apenas aquelas que possuem o mesmo nível de resolução da partícula que está sendo calculada, sejam eles virtuais, transientes ou regulares. Isto significa que se uma partícula encontra uma partícula transiente na sua vizinhança, ou ele seleciona essa partícula ou a(s) partícula(s) virtual(ais) associada(s) a ela para o cálculo das forças de interação, dependendo do seu nível. Se uma força é calculada entre uma partícula real e uma virtual, esta força é simetricamente aplicada à partícula virtual para assegurar a conservação da quantidade de movimento, redistribuindo uniformemente a(s) partícula(s) real(ais) associada(s) a ela como apresentado na Figura 7 – Distribuição de força entre as partículas.



Figura 7 – Distribuição de força entre as partículas

Este acoplamento entre as partículas reais e virtuais garante a consistência dos cálculos de força. Consequentemente, as partículas transientes se comportam como intermediários entre dois diferentes níveis.

As partículas virtuais seguem uma advecção passiva com o fluxo utilizando a aproximação SPH do campo de velocidades. A fim de manter as partículas reais e virtuais associadas, é feito a introdução de forças de ligação adicionais que atuam apenas em partículas virtuais, utilizando a lei de Hooke para deformações elásticas Equação 24.

$$F = k \cdot \Delta x$$
Equação 24

Onde *F* é a força elástica da mola que é expressa em Newtons, *k* é a constante elástica da mola (Newton/Metro) e  $\Delta x$  é a deformação da mola (Metros).



### Figura 8 – Atuação da força elástica entre partículas reais e virtuais

Tal como ilustrado na Figura 8 – Atuação da força elástica entre partículas reais e virtuais, as partículas virtuais filhas estão ligados à partícula transiente pai por uma força elástica linear, com um comprimento de repouso igual a metade do espaçamento da amostra de nível correspondente. Partículas pais virtuais são puxados para o baricentro das partículas transientes filhas utilizando um comprimento elástico de repouso igual a zero.

### 4.2 SPLIT – DIVISÃO DE PARTÍCULAS

A transição de partículas de um nível de baixa resolução n+1 para um nível de alta resolução n deve ser feita seguindo dois fatores: O primeiro deles é a necessidade de se ter mais partículas cuja resolução seja a melhor possível para se aumentar o realismo de uma determinada parte de uma simulação. Caso a resolução não seja a mais adequada, é possível ir reduzindo até que se obtenha o nível de resolução adequada. Já em contra partida, o segundo critério é o de se ter a menor quantidade de partículas possíveis para que haja uma minimização da sobrecarga computacional.



Figura 9 – Processo de transição de partículas em baixa resolução para alta resolução

O processo para realizar uma divisão poderá ser feito de forma arbitrária, estabelecendo um determinado quesito que pode ser atingido programaticamente, como por exemplo, pode ser considerado que a partir do momento que uma partícula cruzar uma determinada posição no volume de controle então a divisão dela deverá ser realizada. Uma vez que esse quesito tenha sido atingido a transição de uma partícula de baixa resolução n+1 para uma partícula de alta resolução n é feita, e este processo consiste de três etapas como mostrado na Figura 9 – Processo de transição de partículas em baixa resolução para alta resolução da esquerda pra direita.

Se uma partícula regular de nível n+1 encontrar uma partícula real de nível n então a partícula regular se tornará uma partícula transiente de nível n+1. Partículas virtuais filhas são criadas usando uma amostragem uniforme pré-calculadas da esfera. Essas partículas filhas possuem a metade do raio de apoio da sua partícula pai e 2<sup>-d</sup> da sua massa e volume.

$$\rho = \rho_{n+1} = \frac{m_{n+1}}{V_{n+1}} = \frac{2^{-d} \cdot m_n}{2^{-d} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{1}{8} \cdot r_n^3} = 8 \cdot \rho_n$$
  
Equação 25

Onde  $\rho$  é a densidade do fluido, *m* a massa, *V* o volume e *d* é o número de dimensões.

Se uma partícula transiente A de nível n+1 tiver uma partícula regular B de nível n em sua vizinhança, seus filhos virtuais tornam-se partículas reais transientes e a partícula A transforma-se em uma partícula pai virtual para suas filhas. As partículas transientes de nível nsão desvinculadas de sua relação com sua partícula virtual pai se eles se separarem para além do núcleo de seu raio de suavização, ou seja, se a distância máxima entre duas partículas crianças ultrapassarem de 2<sup>n</sup>h. Nesse caso, as partículas filhas deixarão de serem partículas transientes para se tornarem partículas regulares. A operação de divisão também é iniciada, se todas as partículas transientes filhas de um mesmo pai virtual não tiver partículas virtuais de nível n em sua vizinhança. A divisão sempre ocorre de um nível de baixa resolução para um de alta resolução, ou seja, o critério de divisão é avaliado primeiro para as partículas de nível grosseiro. Isso garante que as partículas menores não vai encontrar partículas regulares de nível superior em seus bairros, uma vez que estes já teria sido dividido.

### 4.3 MERGE – JUNÇÃO DE PARTÍCULAS

Operações de junção de partículas ocorrem no sentido oposto ao apresentado na **Error! Reference source not found.**(d), no sentido da esquerda pra direita. Em geral, podemos novamente criar um processo programaticamente arbitrário para decidir os momentos em que a fusão deverá estar apta a ocorrer. Nesses casos, as partículas são fundidas sempre que a partícula resultante da fusão não atenda aos critérios de divisão correspondente.

O processo de fusão é um processo que requer um tratamento especial devido a sua complexidade. Em geral, para conseguirmos que o número total de partículas sejam a menor quanto for possível, temos que permitir que uma partícula regular se transforme em uma partícula transiente filha com uma partícula virtual pai associada a ela. Se duas partículas virtuais pais forem vizinhas entre si, então é feita a fusão das partículas filhas para uma única partícula pai, desde que o número total de partículas filhas não ultrapasse o máximo permitido (4 partículas em uma simulação 2D).

Esta abordagem tem uma vantagem adicional, pois com ela é permitido fazer a fusão de modo incremental e não apenas quando somente o número total de partículas filhas (4 em 2D) forem atingidas. Além disso, este método não leva a uma fragmentação indesejável, uma vez que fusão é sempre executada na camada de transição entre duas resoluções

## REFERÊNCIAS

ABNT. NBR 14724:2005 - Informação e documentação - Trabalhos acadêmicos -Apresentação. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Normas Técnicas, 2005.

GEORGE MASON UNIVERSITY. **Zotero**. Disponível em: <a href="http://www.zotero.org/">http://www.zotero.org/</a>. Acesso em: 22 mar. 2011.

ROCHA, J. A. M. **Estilo ABNT para o Zotero**. Disponível em: <a href="http://www.conhecendoametodologia.com.br/2011/02/estilo-abnt-para-o-zotero.html">http://www.conhecendoametodologia.com.br/2011/02/estilo-abnt-para-o-zotero.html</a>. Acesso em: 22 mar. 2011.

- M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, and O. Schwarzkopf. *Computational Geometry: Algorithms and Applications*. 2<sup>a</sup> ed. Springer-Verlag. 2000.
- J. A. Bærentzen and N. J. Christensen. Hardware Accelerated Point Rendering of Isosurfaces. *Journal of WSCG*, vol. 11, no.1, pp. 41-48. 2003.
- Colagrossi and M. Landrini. Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, Volume 191, Issue 2, pp. 448-475. 2003.
- S. Clavet, P. Beaudoin, and P. Poulin. Particle-based Viscoelastic Fluid Simulation. Proceedings of the Eurographics Symposium on Point-Based Graphics, pp. 219-228. 2005.
- 5. M. Desbrun and M.-P. Cani. Smoothed Particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies. *In Computer Animation and Simulation '96*, pp. 61–76. 1996.
- 6. D. Eberly. Game Physics. Morgan Kaufmann. 2003.
- K. Erleben, J. Sporring, K. Henriksen, and H. Dohlmann. *Physics-Based Animation*. Charles River Media. 2005.
- 8. N. Foster and R. Fedkiw. Practical Animation of Liquids. *In proceedings of SIGGRAPH* 2001, pp. 15-22. 2001.
- 9. N. Foster and D. Metaxas. Modeling the Motion of a Hot, Turbulent Gas. *In Computer Graphics Proceedings 1997*, Annual Conference Series, pp. 181–188. 1997.
- T. G. Goktekin, A. W. Bargteil, and J. F. O'Brien. A Method for Animating Viscoelastic Fluids. ACM Transactions on Graphics (Proc. of ACM SIGGRAPH 2004), vol. 23, pp. 463-467. 2004.

- 11. M. J. Harris. Fast Fluid Dynamics Simulations on the GPU. In GPU Gems, Programming Techniques, Tips, and Tricks for Real-Time Graphics, Edited by R. Fernando, Chapter 38. Addision-Wesley. 2004.
- J. Hongbin and D. Xin. "On criterions for smoothed particle hydrodynamics kernels in stable field". *Journal of Computational Physics*, 202, pp. 699–709. 2005.
- 13. B. Houston, M. Wiebe, and C. Batty. RLE Sparse Level Sets. *Proceedings of the SIGGRAPH 2004 Conference on Sketches & Applications*. 2004.
- 14. B. Houston, M. B. Nielsen, C. Batty, O. Nilsson, and K. Museth. Hierarchical RLE Level Set: A Compact and Versatile Deformable Surface Representation. *To appear in* ACM Transactions on Graphics, 2006. Conditionally Accepted April 4, 2005.
- 15. T. Jakobsen. Advanced Character Physics. In proceedings of Game Developer's Conference. 2001.
- 16. R. Keiser, B. Adams, D. Gasser, P. Bazzi, P. Dutré, and M. Gross. A Unified Lagrangian Approach to Solid-Fluid Animation. *Proceedings of the Eurographics Symposium on Point-Based Graphics*. 2005.
- S. Koshizuka, H. Tamako, and Y. Oka. A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation. *Computational Fluid Dynamics Journal*, 4, pp. 29-46, 1995.
- T. Layton and M. van de Panne. A Numerically Efficient and Stable Algorithm for Animating Water Waves. *The Visual Computer*, Vol. 18, No. 1, pp. 41-53, 2002.
- 19. W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm. *In Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 163–169, 1987.
- 20. F. Losasso, F. Gibou, R. Fedkiw. Simulating Water and Smoke with an Octree Data Structure. In proceedings of SIGGRAPH 2004, pp. 457-462, 2004.
- 21. J. J. Monaghan. Smoothed Particle Hydrodynamics. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 30, pp. 543-574, 1992.
- M. Moore and J. Wilhelms. Collision Detection and Response for Computer Animation. *In Computer Graphics*, Volume 22, pp. 289-298, 1988.
- 23. M. Müller, D. Charypar, and M. Gross. Particle-Based Fluid Simulation for Interactive Applications. *Proceedings of 2003 ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation*, pp. 154-159, 2003.

- 24. M. Müller, S. Schirm, M. Teschner, B. Heidelberger, and M. Gross. Interaction of Fluids with Deformable Solids. *In Journal of Computer Animation and Virtual Worlds* (CAVW), vol 15, no. 3-4, pp. 159-171, 2004.
- 25. M. Müller, B. Solenthaler, R. Keiser, and M. Gross. "Particle-Based Fluid-Fluid Interaction". Proceedings of the 2005 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation, pp. 237-244, 2005.
- 26. M. B. Nielsen and K. Museth. Dynamic Tubular Grid: An Efficient Data Structure and Algorithms for High Resolution Level Sets. *Journal of Scientific Computing*, 2005.
- S. Osher and R. Fedkiw. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Vol. 153 of Applied Mathematical Sciences. Springer, 2003.
- OpenTissue. Opensource Project, Physical based Animation and Surgery Simulation.
   2005. <u>www.opentissue.org</u>.
- 29. PhysX. "PhysX". AGEIA. 2005. http://www.ageia.com/products/physx.html.
- 30. RealFlow3. *RealFlow*<sup>3</sup>. Next Limit Technologies. 2005. <u>http://www.nextlimit.com/realflow/index.html</u>.
- C. Shen, J. F. O'Brien, J. R. Shewchuk. Interpolating and Approximating Implicit Surfaces from Polygon Soup. *The Proceedings of ACM SIGGRAPH 2004*, pp. 896-904, 2004.
- J. Stam and E. Fiume. "Depicting Fire and other Gaseous Phenomena using Diffusion Processes". *Computer Graphics*, 29th Annual Conference Series, pp. 129–136, 1995.
- 33. J. Stam. Stable Fluids. In Proceedings of the 26<sup>th</sup> annual conference on Computer graphics and interactive techniques, pp. 121-128, 1999.
- 34. D. Stora, P.-O. Agliati, M.-P. Cani, F. Neyret, and J.-D. Gascuel. Animating Lava Flows. *In Graphics Interface*, pp. 203–210, 1999.
- 35. D. Terzopoulos, J. C. Platt, A. H. Barr, and K. Fleischer (1987), Elastically deformable models, *Computer Graphics*, volume 21, Number 4, July 1987, pp 205-214, 1987.
- 36. M. Teschner, B. Heidelberger, M. Müller, D. Pomeranerts, and M. Gross. Optimized Spatial Hashing for Collision Detection of Deformable Objects. *In proceedings of Vision, Modeling, Visualization*, pp. 47-54, November 19-21. 2003.
- L. Verlet. Computer Experiments on Classical Fluids I: Thermodynamical of Lennard-Jones Molecules. *Physics Review*, vol. 159, pp. 98-103. 1967.

- M. Zwicker, H. Pfister, J. van Baar, and M. Gross. Surface Splatting. In Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, pp. 371– 378. 2001.
- Rosswog S., Special-relativistic Smoothed Particle Hydrodynamics: a benchmark suite, Jacobs University Bremen. 2010.
- 40. Vesterlund M., Simulation and Rendering of a Viscous Fluid using Smoothed Particle Hydrodynamics
- 41. Amada T., Imura M., Yasumuro Y., Manabe Y., Chihara K., Particle-based fluid simulation on gpu. 2003.
- Ricardo J., Simulação computacional em tempo real de Fluidos utilizando o método SPH em ambiente heterogêneo CPU/GPU, UFF. 2010
- 43. Gingold, R.A. and Monaghan, J.J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. Monthly Notices Royal Astronomical Society, Vol. 181, pp. 375-389. 1977.
- 44. Lucy, L.B. A numerical approach to the testing of fusion process. Astronomical Journal, Vol. 88, pp. 1013-1024. 1977.
- 45. Harada T., Koshizuka S., Kawaguchi Y., Smoothed Particle Hydrodynamics on GPUs
- 46. [BOT01] BORVE S., OMANG M., TRULSEN J.: Regularized smoothed particle hydro- dynamics: A new approach to simulating magnetohydrodynamic shocks. The Astro- physical Journal 561, 1 (2001), 82–93.
- 47. [BOT05] BORVE S., OMANG M., TRULSEN J.: Regularized smoothed particle hydro- dynamics with improved multi-resolution handling. J. Comput. Phys. 208, 1 (2005), 345–367
- [LL03] LIU G. R., LIU M. B.: Smoothed Particle Hydrodynamics, A Meshfree Particle Method. World Scientific Publishing, 2003.
- 49. ETH CS Technical Report #520, 15 June, 2006, Multiresolution Particle-Based Fluids.
  Richard Keiser1, Bart Adams2, Leonidas J. Guibas3, Philip Dutré2, and Mark Pauly1.
  1ETH Zurich, Switzerland 2KU Leuven, Belgium 3Stanford University, CA, USA;
- Lagrangian Fluid Dynamics, Using Smoothed Particle Hydrodynamics, Micky Kelager, January 9, 2006
- Desbrun and Marie-Paule Cani-Gascuel. Active Implicit Surface for Computer Animation, 1998
- 52. B. Solenthaler, M. Gross. Two-scale particle simulation, 2011

- 53. Jonathan Richard Shewchuk. Delaunay refinement mesh generation. PhD thesis,Carnegie Mellon University, 1997.
- 54. L. G. Margolin. Introduction to "an arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds". J. Comput. Phys., 135(2):198-202, 1997.
- 55. Fabiano A Equação de Poisson e a Decomposição de Helmholtz-Hodge com Operadores SPH – Puc Rio

# GLOSSÁRIO

"Elemento opcional, elaborado em ordem alfabética" (ABNT, 2005).

# **APÊNDICE A – TÍTULO DO APÊNDICE**

"Elemento opcional. O(s) apêndice(s) são identificados por letras maiúsculas consecutivas, travessão e pelos respectivos títulos. Excepcionalmente utilizam-se letras maiúsculas dobradas, na identificação, quando esgotadas as 23 letras do alfabeto" (ABNT, 2005).

## ANEXO A – TÍTULO DO ANEXO

"Elemento opcional. O(s) anexo(s) são identificados por letras maiúsculas consecutivas, travessão e pelos respectivos títulos. Excepcionalmente utilizam-se letras maiúsculas dobradas, na identificação dos anexos, quando esgotadas as 23 letras do alfabeto" (ABNT, 2005).

"Elemento opcional, elaborado conforme a ABNT NBR 6034" (ABNT, 2005).