.

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

PATRÍCIA DIAS GOMES

Resolução Explícita por Elementos Finitos do Sistema que Descreve Escoamentos Evolutivos Viscoelásticos

> NITERÓI 2015

#### UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

### PATRÍCIA DIAS GOMES

## Resolução Explícita por Elementos Finitos do Sistema que Descreve Escoamentos Evolutivos Viscoelásticos

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor.

Orientador: MAURICIO KISCHINHEVSKY

Co-orientador: JOSE HENRIQUE CARNEIRO DE ARAUJO

> NITERÓI 2015

### PATRÍCIA DIAS GOMES

Resolução Explícita por Elementos Finitos do Sistema que Descreve Escoamentos Evolutivos Viscoelásticos

> Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor.

Aprovada em Março de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Prof. MAURICIO KISCHINHEVSKY, UFF

Prof. JOSÉ HENRIQUE CARNEIRO DE ARAUJO, UFF

Prof. ANSELMO ANTUNES MONTENEGRO, UFF

Prof. LUIZ NELIO HENDERSON GUEDES DE OLIVEIRA, IPRJ

Prof. LUIZ SATORU OCHI, UFF

Prof. NORBERTO MANGIAVACCHI, UERJ

Prof. WAGNER FIGUEIREDO SACCO, UFOPA

Prof. VITORIANO RUAS DE BARROS SANTOS, UPMC

Niterói 2015

## Resumo

Este trabalho está calcado em uma formulação de elementos finitos de três campos desenvolvida para resolver sistemas de equações diferenciais parciais que descrevem escoamentos evolutivos de fluidos viscoelásticos. Efetuada uma discretização no tempo pelo método de Euler implícito, o sistema de equações de três campos resultante permite uma aproximação estável da velocidade, da pressão e do tensor extra de tensões, por meio de elementos finitos lineares por parte, em duas ou três dimensões espaciais. As provas formais são dadas para a forma linearizada do sistema. Uma vantagem desta formulação é o fato de que fornece um algoritmo para a resolução iterativa explícita das não linearidades do sistema.

**Palavras-chave**: elementos finitos, lineares por partes, resolução explícita, Euler implícito, fluidos viscoelásticos, sistema de Stokes, três campos, evolutivo.

## Abstract

A three-field finite element scheme designed for solving systems of partial differential equations governing time-dependent viscoelastic flows is studied. Once a classical backward Euler time discretization is performed, the resulting three-field system of equations allows for a stable approximation of velocity, pressure and extra stress tensor, by means of continuous piecewise linear finite elements, in both two- and three- dimension space. This is proved to hold for the linearized form of the system. An advantage of this formulation is the fact that it provides an algorithm for the explicit iterative resolution of system non-linearities.

**Keywords**: Backward Euler, explicit solution, finite elements, piecewise linear, Stokes system, three-field, time-dependent, viscoelastic flows.

# Lista de Figuras

| 5.1  | Erro para um problema linear estacionário com $\lambda = 1, 0 \ldots \ldots \ldots$  | 40 |
|------|--|----|
| 5.2  | A evolução com $\lambda$ dos erros na norma $L^2$ da velocidade, da pressão e da tensão—extra para um problema estacionário tridimensional | 41 |
| 5.3  | Erros relativos na norma $L^2$ para $\lambda = 10, \ \eta = 1 \ e \ t = 0, 1 \ \dots \ \dots \ \dots$                                      | 67 |
| 5.4  | Erros relativos na norma $L^2$ para $\lambda = 10, \ \eta = 1 \ e \ t = 1, 0 \ \dots \ \dots \ \dots$                                      | 68 |
| 5.5  | Erros relativos na norma $L^2$ para $\lambda = 1, \ \alpha = 0 \ e \ m = 4 \ . \ . \ . \ . \ .$  | 70 |
| 5.6  | Erros relativos na norma $L^2$ para $t = 0, 1, \lambda = 1$ e $\alpha = 1$   | 71 |
| 5.7  | Erros relativos na norma $L^2$ para $t = 0, 1, \lambda = 100 \ e \ \alpha = 1 \ \dots \ \dots$   | 72 |
| 5.8  | Erros relativos na norma $L^2$ para $t = 1, \lambda = 1 e \alpha = 1 \dots \dots \dots$  | 73 |
| 5.9  | Erros relativos na norma $L^2$ para $t = 1, \lambda = 10 e \alpha = 1 \dots \dots \dots$   | 74 |
| 5.10 | Erros relativos na norma $L^2$ para $k = 0, 5, t = 1 e \lambda = 1 \dots \dots \dots$  | 75 |
| 5.11 | Erros relativos na norma $L^2$ para $k = 0, 5, t = 0, 1 e \lambda = 10 \dots$  | 76 |
| 5.12 | Erros relativos na norma $L^2$ para um crescente número de tetraedros $\ldots$   | 77 |
| 5.13 | Erros relativos na norma $L^2$ para diferentes valores de $m$  | 78 |
| 5.14 | Vetores dos campos de velocidade nos nós do duto.  | 79 |
| 5.15 | Corte em perfil do duto, no plano $YZ$ na posição $X = 0. \dots \dots \dots$   | 80 |
| 5.16 | Corte do duto no plano $XY$ na posição<br>$Z=2,88.$ Região larga do duto. $% Z=2,88.$  | 80 |
| 5.17 | Corte do duto no plano XY na posição $Z=3,5.$ Região central da contração.   | 81 |
| 5.18 | Corte do duto no plano XY na posição $Z=4.$ Região estreita do duto  | 81 |
| 5.19 | Valores da componente $\sigma_{xx}$ do tensor extra de tensões nos nós da malha  | 82 |
| 5.20 | Valores da Componente $\sigma_{xz}$ do tensor extra de tensões nos nós da malha $% \sigma_{xz}$ .  | 83 |
| 5.21 | Valores da Componente $\sigma_{zz}$ do tensor extra de tensões nos nós da malha $~$ .  | 83 |

| 5.22 | Valores | de | $\operatorname{press}$ ão | $\operatorname{nos}$ | nós | no | interior | do | duto. |  |  | • | • |  |  | • |  |  |  | • |  | • | • • |  | 84 |
|------|---------|----|---------------------------|----------------------|-----|----|----------|----|-------|--|--|---|---|--|--|---|--|--|--|---|--|---|-----|--|----|
|------|---------|----|---------------------------|----------------------|-----|----|----------|----|-------|--|--|---|---|--|--|---|--|--|--|---|--|---|-----|--|----|

## Lista de Tabelas

| 5.1  | Erro para um problema linear estacionário com $\lambda = 1, 0$                                    | 39 |
|------|---|----|
| 5.2  | Erros relativos na norma $L^2$ para $\lambda = 10, \ \eta = 1 \ e \ t = 0, 1 \ . \ . \ . \ .$     | 66 |
| 5.3  | Erros relativos na norma $L^2$ para $\lambda = 10, \ \eta = 1 \ e \ t = 1, 0 \ . \ . \ . \ . \ .$ | 66 |
| 5.4  | Erros relativos na norma $L^2$ para $\lambda = 1, \ \alpha = 0 \ e \ m = 4 \ . \ . \ . \ . \ .$   | 70 |
| 5.5  | Erros relativos na norma $L^2$ para $t = 0, 1, \lambda = 1$ e $\alpha = 1$                        | 71 |
| 5.6  | Erros relativos na norma $L^2$ para $t = 0, 1, \lambda = 100 \ e \ \alpha = 1 \ . \ . \ . \ .$    | 71 |
| 5.7  | Erros relativos na norma $L^2$ para $t = 1, \lambda = 1 e \alpha = 1 \dots \dots \dots$           | 72 |
| 5.8  | Erros relativos na norma $L^2$ para $t = 1, \lambda = 10 e \alpha = 1 \dots \dots \dots$          | 73 |
| 5.9  | Erros relativos na norma $L^2$ para $k = 0, 5, t = 1 e \lambda = 1 \dots \dots \dots$             | 75 |
| 5.10 | Erros relativos na norma $L^2$ para $k = 0, 5, t = 0, 1 \ e \ \lambda = 10$                       | 76 |
| 5.11 | Erros relativos na norma $L^2$ para um crescente número de tetraedros $\ldots$                    | 77 |
| 5.12 | Erros relativos na norma $L^2$ para diferentes valores de $m$                                     | 78 |

## Sumário

| 1 | Intr | odução  |   | 1  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|------|---|---|----|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 2 | Mod  | Modelos Viscoelásticos e o Problema Linear Subjacente |   |    |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   | 2.1  | Sistem  | as que Descrevem Escoamentos Viscoelásticos                   | 4  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   | 2.2  | O Pro   | blema Matemático Estudado                                     | 8  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 | Tral | oalhos F  | Relacionados  | 11 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   | 3.1  | Alguns  | s Métodos de Simulação Numérica de Escoamentos Viscoelásticos | 11 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 | Mod  | lelagem   | Numérica  | 15 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   | 4.1  | Introd  | ução  | 15 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   | 4.2  | Algori  | tmo de resolução no caso estacionário                         | 17 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   | 4.3  | Discre  | tização no espaço   | 20 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   | 4.4  | Caso I  | Estacionário  | 23 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   | 4.5  | O case  | o dos problemas evolutivos                                    | 27 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 | Res  | ultados   | Obtidos   | 38 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   | 5.1  | Result  | ados Numéricos - Caso estacionário                            | 38 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |      | 5.1.1   | Experimentos Bidimensionais                                   | 39 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |      | 5.1.2   | Experimentos Tridimensionais                                  | 40 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   | 5.2  | Anális  | e Numérica - Caso Evolutivo                                   | 41 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |      | 5.2.1   | Estabilidade  | 41 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|   |      | 5.2.2   | Consistência  | 46 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|     | 5.2.3    | Converg                                   | ência  | 62 |  |  |  |  |  |  |
|-----|----------|---|--|----|--|--|--|--|--|--|
| 5.3 | Result   | esultados numéricos para o Caso Evolutivo |  |    |  |  |  |  |  |  |
| 5.4 | Outros   | s resultad                                | os numéricos envolvendo escoamentos de fluidos viscoelásticos              | 69 |  |  |  |  |  |  |
|     | 5.4.1    | Problem                                   | a em um domínio tridimensional em forma de cubo                            | 69 |  |  |  |  |  |  |
|     |          | 5.4.1.1                                   | Caso estacionário, com parâmetros: $\alpha=0; \lambda=1$ e $m=4$ .         | 69 |  |  |  |  |  |  |
|     |          | 5.4.1.2                                   | Caso evolutivo, com parâmetros: $\alpha=1; \lambda=1$ e $t=0,1$            | 70 |  |  |  |  |  |  |
|     |          | 5.4.1.3                                   | Caso evolutivo, com parâmetros: $\alpha=1; \lambda=100$ e $t=0,1$          | 71 |  |  |  |  |  |  |
|     |          | 5.4.1.4                                   | Caso evolutivo, com parâmetros: $\alpha=1; \lambda=1$ e $t=1$              | 72 |  |  |  |  |  |  |
|     |          | 5.4.1.5                                   | Caso evolutivo, com parâmetros: $\alpha=1; \lambda=10$ e $t=1$             | 73 |  |  |  |  |  |  |
|     | 5.4.2    | Problem                                   | a em um domínio 3D de uma seção elíptica                                   | 74 |  |  |  |  |  |  |
|     |          | 5.4.2.1                                   | Primeiro caso, com parâmetros: $\lambda = 1$ e $t = 1$                     | 75 |  |  |  |  |  |  |
|     |          | 5.4.2.2                                   | Segundo caso, com parâmetros: $\lambda=10$ e $t=0,1$ $\hdots$              | 75 |  |  |  |  |  |  |
|     | 5.4.3    | Fluidos                                   | power-law  | 76 |  |  |  |  |  |  |
|     |          | 5.4.3.1                                   | Escoamento de Poiseuille   | 76 |  |  |  |  |  |  |
|     |          | 5.4.3.2                                   | Escoamento de Couette  | 77 |  |  |  |  |  |  |
| 5.5 | Visual   | ização do                                 | escoamento viscoelástico em um duto  | 79 |  |  |  |  |  |  |
|     | 5.5.1    | Campo y                                   | velocidade   | 79 |  |  |  |  |  |  |
|     | 5.5.2    | Campo 1                                   | tensor extra de tensões  | 82 |  |  |  |  |  |  |
|     |          | 5.5.2.1                                   | Componentes $\sigma_{xx}$ do tensor extra de tensões                       | 82 |  |  |  |  |  |  |
|     |          | 5.5.2.2                                   | Componente $\sigma_{xz}$ do tensor extra de tensões $\ldots \ldots \ldots$ | 82 |  |  |  |  |  |  |
|     |          | 5.5.2.3                                   | Componente $\sigma_{zz}$ do tensor extra de tensões $\ldots \ldots \ldots$ | 83 |  |  |  |  |  |  |
|     | 5.5.3    | Campo j                                   | pressão  | 83 |  |  |  |  |  |  |
| Con | sideraçõ | ões Finais                                |  | 85 |  |  |  |  |  |  |

6

86

## Capítulo 1

## Introdução

Simular numericamente escoamentos de fluidos viscoelásticos vem sendo objeto de muitos estudos por cerca de quatro décadas. Esse fato é devido ao grande interesse por esse tipo de fluido principalmente em escala industrial.

O principal objetivo dos pesquisadores que se dedicam a essa questão é desenvolver métodos numéricos estáveis e eficientes que sejam capazes de resolver os sistemas de equações diferenciais ou integrais que descrevem o escoamento do fluido tratado e que dessa forma, possam captar informações importantes referentes ao caso de interesse.

É conhecido que essa simulação é um problema delicado em muitos aspectos e ao lidarmos com líquidos viscoelásticos podemos nos deparar com diversas dificuldades. A principal delas está relacionada ao fato de que as equações que descrevem o escoamento envolvem uma formulação de três campos,  $(\vec{u}, p, \sigma)$ , fortemente acoplados, sendo  $\vec{u}$  a velocidade do fluido, p a pressão hidrostática e  $\sigma$  o tensor extra de tensões. No caso do método de elementos finitos, por exemplo, tal fato pode requerer que as discretizações dos campos  $\vec{u}$ ,  $p \in \sigma$ , dependendo da formulação, verifiquem a condição clássica de Babuska-Brezzi, requerida nos casos newtonianos, para velocidade  $(\vec{u})$  e pressão (p) e nos demais casos, além desta, outra condição Babuska-Brezzi para a velocidade  $\vec{u}$  e o tensor  $\sigma$ . Tais condições devem ser satisfeitas para garantir a existência e a unicidade além da estabilidade das soluções numéricas [32].

Ainda sobre dificuldades, podemos citar outras, tais como a mudança de tipo das equações que descrevem o escoamento com inércia de um fluido viscoelástico (elíptico hiperbólico) [30], entre outros fatores, que imprimem maior não-linearidade ao sistema de equações dificultando a obtenção de soluções estáveis. Entre eles estão a presença de termos convectivos em tensão e velocidade e a dificuldade encontrada em se manter a estabilidade das soluções quando são altos os valores do número de Weissenberg (We), ou alternativamente, de Deborah (De) [32, 34, 39, 40, 53], os quais a grosso modo medem o grau de elasticidade do fluido em movimento.

Com a finalidade de superar o problema de mudança de tipo das equações, referida no parágrafo anterior, vários pesquisadores optaram por regularizar o sistema de equações que descrevem o escoamento. Tal regularização, realizada de forma mais comum pela adição de um solvente newtoniano na equação constitutiva, define a estrutura matemática (hiperbólica - elíptica) das equações. Dessa forma, o conjunto formado pelas equações de continuidade e de quantidade de movimento fica estritamente elíptico, enquanto a equação constitutiva é estritamente hiperbólica para tensão, fato esse que parece ser crucial para o desenvolvimento de uma formulação mais abrangente, ou seja, que possa ser utilizada para um maior número de modelos, e que possa dessa forma, gerar soluções regulares, sem considerar a estrutura particular de cada modelo [42]. Essa regularização das equações que torna dominante o operador elíptico, na equação de conservação de momento, costuma melhorar os resultados obtidos por métodos de discretização dos sistemas que descrevem o escoamento de um fluido viscoelástico [35].

Neste trabalho, apresentamos um esquema de elementos finitos de três campos que utiliza uma técnica de estabilização, tendo por objetivo superar duas das dificuldades já referidas em parágrafos anteriores, isto é, a problemática devida à presença de três campos fortemente acoplados, além da mudança de comportamento que pode ocorrer nas equações fortemente não lineares, do sistema que descreve este tipo de escoamento. O esquema é baseado na integração no tempo para resolver equações de escoamentos viscoelásticos transientes ou estacionários, tanto em duas como em três dimensões espaciais.

O trabalho está estruturado da seguinte maneira:

No Capítulo 2, relembramos os principais modelos viscoelásticos encontrados na bibliografia. Além disso, apresentamos o modelo matemático básico que é o objeto do estudo analítico desta tese.

No Capítulo 3, mencionamos as principais características de alguns métodos numéricos propostos relacionados, que tiveram por finalidade simular escoamentos viscoelásticos.

A metodologia numérica abordada neste trabalho propriamente dita é tratada no Capítulo 4.

No Capítulo 5, apresentamos os resultados obtidos computacionalmente, tanto para o caso estacionário, quanto para o evolutivo. São também apresentados resultados analíticos para o caso evolutivo.

No Capítulo 6, discorremos sobre as considerações finais a cerca do trabalho realizado, de análise e de resolução numérica relativos à metodologia desenvolvida.

### Capítulo 2

## Modelos Viscoelásticos e o Problema Linear Subjacente

Este capítulo tem por objetivo apresentar os principais modelos viscoelásticos encontrados na literatura, descrever a nossa metodologia para resolver as equações que descrevem este tipo de escoamento e apresentar o modelo que é objeto das análises realizadas.

### 2.1 Sistemas que Descrevem Escoamentos Viscoelásticos

Os escoamentos de fluidos incompressíveis em um domínio  $\Omega$ , verificam as equações de conservação de momento e de conservação de massa, - equivalente aqui a uma condição de incompressibilidade -, isto é:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} - \nabla \cdot \sigma + \nabla p = \vec{f} \\
\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$em \Omega, \qquad (2.1)$$

Devemos completar o sistema (2.1) com uma lei constitutiva para o tensor extra de tensões, que juntas descreverão o escoamento do fluido em  $\Omega$ . Quando este envolve um grau de elasticidade não desprezível, qualquer modelo para as aplicações de interesse prático, precisa ser baseado na Teoria da Viscoelasticidade. Relembramos, a título de exemplo, as leis constitutivas ditas objetivas para uma ampla classe de fluidos, como a dos polímeros fundidos, baseadas nessa teoria, que são do tipo

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \tag{2.2}$$

onde  $\sigma_1$  é a parte "não newtoniana" do tensor extra de tensões  $\sigma$ que verifica

$$\lambda \frac{\mathcal{D}_a \sigma_1}{\mathcal{D}t} = 2\mu_1 D(\vec{u}) + \mathcal{L}(\sigma_1)$$
(2.3)

e  $\sigma_2$  é a parte "newtoniana" de  $\sigma$ , dada por

$$\sigma_2 = 2\mu_2 D(\vec{u}). \tag{2.4}$$

Utilizamos  $\nabla$  para representar o gradiente de um escalar ou de um campo vetorial e  $\nabla$ · para representar a divergência de um campo vetorial ou tensorial. Em todo o texto,  $D(\vec{u})$ representa o tensor taxa de deformação,  $D(\vec{u}) := \frac{1}{2} \left[ \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right].$ 

Na equação (2.3),  $\lambda$  é um coeficiente físico característico do fluido viscoelástico denominado tempo de relaxação de tensões e é sempre estritamente positivo;  $\mu_1 > 0$  e  $\mu_2 \ge 0$ são frações da viscosidade  $\mu$  do fluido (ou seja,  $\mu_1 + \mu_2 = \mu$ ), sendo a expressão

$$\frac{\mathcal{D}_a \sigma_1}{\mathcal{D}t} := \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \sigma_1 + \frac{1-a}{2} \left[ \sigma_1 \nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^t \sigma_1 \right] 
- \frac{1+a}{2} \left[ (\nabla \vec{u}) \sigma_1 + \sigma_1 (\nabla \vec{u})^t \right]$$
(2.5)

uma derivada material objetiva de  $\sigma_1$ , definida para todo parâmetro adimensional  $a \in [-1, 1]$ .

Exemplos típicos de modelos viscoelásticos que podem ser escritos na forma geral (2.2) - (2.3) - (2.4) com  $\lambda$ ,  $\mu$  constantes e *a* qualquer, são:

- o modelo de Phan-Thien-Tanner:  $\mathcal{L}(\sigma) := -\exp(c(tr\,\sigma))\sigma, c > 0$
- o modelo de Johnson-Segalman:  $a \in (-1, +1); \mu_2 > 0, \mathcal{L}(\sigma) := -\sigma$
- o modelo de Giesekus:  $a = 1, \mathcal{L}(\sigma) := -\sigma (\alpha/\mu)\sigma.\sigma, \alpha > 0$
- o modelo de Maxwell convectado superior:  $a = 1, \mu_2 = 0, \mathcal{L}(\sigma) := -\sigma$
- o modelo de Maxwell convectado inferior:  $a = -1, \mu_2 = 0, \mathcal{L}(\sigma) := -\sigma$
- o modelo de Oldroyd-A:  $a = -1, \mu_2 > 0, \mathcal{L}(\sigma) := -\sigma$
- o modelo de Oldroyd-B:  $a = 1, \mu_2 > 0, \mathcal{L}(\sigma) := -\sigma.$

Por outro lado, há modelos consagrados pelo uso em que  $\lambda \in \mu$  dependem do segundo invariante de  $D(\vec{u})$ , isto é, de  $I_2 := D(\vec{u}) : D(\vec{u})$ . Tal é o caso do modelo de WhiteMetzner [19] para o qual a = 1,  $\mu_2 = 0$  e  $\mathcal{L}(\sigma) := -\sigma$ . Variantes desse modelo têm sido usadas em trabalhos mais recentes sobre reologia computacional.

Enquanto a escolha do modelo viscoelástico apropriado para cada aplicação, dentro de uma grande quantidade de possibilidades, é ainda objeto de pesquisas ativas dos reologistas (ver, por exemplo, [6]), existe, por outro lado, um longo caminho a seguir antes de se obter bons resultados na discretização do sistema formado por (2.1) aliada a uma lei constitutiva viscoelástica e condições de contorno adequadas.

Em relação a isto, especialistas em métodos de simulação computacional aplicados a esta classe de problemas, basicamente se restringem a encontrar métodos que sejam capazes de tratar a contento os mais simples modelos viscoelásticos, tais como os de Maxwell ou Oldroyd. Vale ressaltar que qualquer método eficiente nesta aplicação, precisa produzir boas aproximações da velocidade, da pressão e do tensor extra de tensões do fluido viscoelástico, uma vez que estas três variáveis estão fortemente acopladas no sistema que descreve o escoamento desses fluidos, como já referido no Capítulo 1.

Sem perda de generalidade, no que tange aos nossos objetivos, consideramos a seguir, o escoamento em  $\Omega$  de um fluido de Maxwell convectado superior verificando (2.1). Isto porque é notório que é neste caso que os maiores desafios numéricos estão presentes diferentemente do caso de um fluido de Oldroyd ao qual se aplica uma regularização elíptica. Consideramos então o seguinte problema:

Dado um campo de força de corpo  $\vec{f}$ , deseja-se determinar  $\vec{u}$ ,  $p \in \sigma$  que satisfazem, para certos  $\lambda > 0 \in \mu > 0$ ,

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} - \nabla \cdot \sigma + \nabla p = \vec{f} \\
\sigma + \lambda \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\sigma - (\nabla \vec{u})\sigma - \sigma(\nabla \vec{u})^t\right] = 2\mu D(\vec{u}) \\
\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$(2.6)$$

com condições iniciais dadas por:

$$u = u_0 e \sigma = \sigma_0 em \Omega \text{ para } t = 0$$
(2.7)

e condições de contorno:

$$\vec{u} = \vec{g} \quad sobre \quad \Gamma_1 \times [0, T] \\ (\sigma - Ip)\vec{\nu} = 0 \quad sobre \quad \Gamma_2 \times [0, T]$$

$$(2.8)$$

$$\sigma = \sigma^{-} \text{ sobre } \Gamma_{1}^{-} \times [0, T]$$

$$\operatorname{com} \Gamma_{1}^{-} = \left\{ \vec{x} \mid \vec{x} \in \Gamma_{1} \ e \ \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{\nu}(\vec{x}) < 0 \right\}$$

$$(2.9)$$

onde  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são duas porções disjuntas e complementares de  $\Gamma$  com  $med(\Gamma_1) > 0$ ;  $\vec{\nu}$  é o vetor unitário normal externo a  $\Gamma$  e  $\sigma^-$  é um tensor dado.

Supondo que pretendemos resolver esse sistema, ou seja, (2.6) - (2.7) - (2.8) - (2.9), seria sensato que fôssemos capazes de resolvê-lo quando os termos não lineares fossem desprezados. Sob este ponto de vista, devemos então inicialmente, estudar o sistema (2.15) - (2.16) - (2.17) a seguir que representa uma linearização do sistema (2.6) - (2.7) - (2.8) - (2.9). Esse sistema é chamado de linear subjacente.

Vamos trabalhar mais especificamente com métodos de elementos finitos a três campos para aproximar os campos incógnitos  $\vec{u}, p, \sigma$  presentes no sistema (2.6) - (2.7) - (2.8) -(2.9). Nesse contexto, como se pode legitimamente conjecturar dos trabalhos pioneiros de BARANGER & SANDRI [4] e de MARCHAL & CROCHET [39], a eficiência, em termos de estabilidade e convergência de um método de elementos finitos para aproximar o sistema que descreve um escoamento que verifica (2.1) - (2.2) - (2.3) - (2.4), com  $\sigma_2 = 0$ , fica condicionada por igual propriedade com relação aos sistemas linearizados (2.15) ou (2.18) definidos mais adiante. Em outras palavras, embora os resultados finais de convergência não sejam necessariamente os mesmos, do ponto de vista qualitativo, é inútil se esperar obter bons resultados numéricos, para o caso de fluidos viscoelásticos desse tipo, com métodos de elementos finitos que falham na aproximação do sistema linear (2.18), ou ainda do sistema (2.15).

No caso de o escoamento ser estacionário, considerando um fluido de Maxwell convectado superior ou de Oldroyd B, o sistema que descreve o escoamento se escreve:

$$\begin{array}{c} (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} - \nabla \cdot \sigma + \nabla p = \vec{f} \\ \sigma + \lambda \left[ (\vec{u} \cdot \nabla)\sigma - (\nabla \vec{u}) \cdot \sigma - \sigma (\nabla \vec{u})^t \right] &= 2\mu_1 D(\vec{u}) \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \sigma_2 = 2\mu_2 D(\vec{u}) \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0 \end{array} \right\} em \ \Omega$$
(2.10)

com condições de contorno (2.9) e

$$\sigma_1 = \sigma_1^- \text{ sobre } \Gamma_1^- \tag{2.11}$$

Após manipulações simples, verificamos que trata-se de resolver o seguinte problema:

Dado um campo de forças  $\vec{f}$ , Determinar  $\vec{u}$ ,  $p \in \sigma_1$  que satisfazem

$$\begin{array}{l} (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} - \nabla \cdot \sigma_{1} - 2\mu_{2}\nabla \cdot D(\vec{u}) + \nabla p &= \vec{f} \\ \sigma_{1} + \lambda \left[ (\vec{u} \cdot \nabla)\sigma_{1} - (\nabla \vec{u})\sigma_{1} - \sigma_{1}(\nabla \vec{u})^{t} \right] &= 2\mu_{1}D(\vec{u}) \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \end{array} \right\} em \Omega$$

$$(2.12)$$

para  $\lambda > 0$ , com as condições de contorno já apresentadas.

Como mencionado, supondo que pretendemos resolver via elementos finitos o sistema (2.12) para  $\lambda > 0$ , é sensato que sejamos capazes de resolvê-lo também quando  $\lambda = 0$ . Neste caso, o sistema linearizado tem a forma

$$\left. \begin{array}{l} -\nabla \cdot \sigma_1 - 2\mu_2 \nabla \cdot D(\vec{u}) + \nabla p &= \vec{f} \\ \sigma_1 &= 2\mu_1 D(\vec{u}), \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \end{array} \right\} em \,\Omega, \qquad (2.13)$$

com as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{g} \quad sobre \quad \Gamma_1 \\ (2\mu D(\vec{u}) - Ip)\vec{\nu} &= 0 \quad sobre \quad \Gamma_2 \end{aligned}$$
 (2.14)

Podemos depreender dos argumentos apresentados em [10] que um método de elementos finitos mistos do tipo velocidade-pressão, convergente na resolução do sistema de Stokes a dois campos clássico (2.19)-(2.14) é teoricamente capaz de gerar aproximações convergentes para o sistema (2.13)-(2.14), independentemente do tipo de interpolação escolhida para o tensor  $\sigma_1$ . Entretando, na prática observa-se que a escolha correta do tipo de aproximação deste último, para o caso puramente de três campos, ou seja, baseado no estudo de aproximações para o sistema (2.17)-(2.18) discretizado, produz resultados numéricos de qualidade superior, o que é expressivamente ilustrado pelas experiências numéricas realizadas por MARCHAL & CROCHET, em [38] e [39], para esse tipo de fluido viscoelástico, (também denominado de *Jeffreys convectado superior* segundo [6]). Esta observação se estende obviamente ao caso evolutivo.

#### 2.2 O Problema Matemático Estudado

Nesta seção introduzimos o modelo matemático que será o objeto de estudos analíticos como base das aplicações numéricas consideradas neste trabalho. Trata-se de um sistema de Stokes com ou sem dependência temporal que pode ser visto como forma linearizada de sistemas que descrevem o escoamento de fluidos viscoelásticos, como visto na seção (2.1).

Como se sabe, o sistema de Stokes clássico descreve o escoamento de um fluido newtoniano incompressível, com pequenos números de Reynolds (ver Cap. 8 em [20]). No entanto, em função das motivações sobre as quais discorreremos mais adiante, consideramos um sistema de Stokes modificado, aqui denominado o Sistema de Stokes generalizado em três campos, a saber:

- $\vec{u}$  o campo de velocidade,
- p o campo de pressão,
- $\sigma$  o tensor extra de tensões.

Desejamos determinar  $(\vec{u}, p, \sigma)$ , em um aberto limitado  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^N$ , N = 2, 3, de fronteira  $\Gamma$ , no qual ocorre um escoamento de um fluido com viscosidade  $\mu$  e tempo de relaxação de tensões igual a  $\lambda$ , sujeito a um campo de forças  $\vec{f}$ , satisfazendo

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \sigma + \nabla p = \vec{f} 
\sigma + \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 2\mu D(\vec{u}) 
\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$em \,\Omega \times [0, T] \qquad (2.15)$$

com condições iniciais dadas por:

$$u = u^0 \quad e \quad \sigma = \sigma^0 , \ em \ \Omega , \ no \ instante \ t = 0$$
 (2.16)

e condições de contorno:

$$\vec{u} = \vec{g} \quad sobre \quad \Gamma_1 \times [0, T]$$

$$(\sigma - Ip)\vec{\nu} = 0 \quad sobre \quad \Gamma_2 \times [0, T]$$

$$(2.17)$$

sendo T um tempo finito,  $\Gamma_1 \in \Gamma_2$  duas porções disjuntas e complementares de  $\Gamma$ , com  $medida(\Gamma_1) \neq 0, \vec{g}$  um campo dado sobre  $\Gamma_1 \in \vec{\nu}$  o vetor unitário normal exterior a  $\Gamma$ .

Se o escoamento for estacionário, isto é, se nenhum dado depender do tempo, o sistema (2.15) - (2.16) - (2.17) se reduz a:

$$\left. \begin{array}{l} -\nabla \cdot \sigma + \nabla p &= \vec{f} \\ \sigma &= 2\mu D(\vec{u}) \\ \nabla \cdot \vec{u} &= 0 \end{array} \right\} em \ \Omega$$

$$(2.18)$$

com as condições de contorno (2.17).

O sistema (2.15) - (2.16) - (2.17) é a forma linearizada do sistema não linear que descreve o escoamento evolutivo de um fluido viscoelástico, valendo sob a hipótese de o escoamento ser muito lento a ponto de poder ser assimilado a de um sólido viscoelástico em pequenas deformações. Voltaremos a esse ponto mais adiante. Já o sistema (2.17)-(2.18) é a forma linearizada das equações de Navier-Stokes estacionárias que descrevem o escoamento de um fluido newtoniano incompressível, no caso em que este é bastante lento.

**Observação 2.2.1** Se a medida de  $\Gamma_2$  for nula, se exigirá que  $\vec{g}$  verifique a condição de conservação de massa global

$$\oint \vec{g} \cdot \vec{\nu} = 0$$

Neste caso, a pressão é determinada a menos de uma constante aditiva, a qual será fixada aqui exigindo-se que a integral da pressão em  $\Omega$  seja nula.

**Observação 2.2.2** Em geral o uso da formulação (2.18) não apresenta vantagens, quando estudamos o escoamento de um fluido newtoniano propriamente dito, dado que a variável  $\sigma$  pode ser facilmente eliminada do sistema. Desta operação resulta o clássico sistema de Stokes

$$\begin{array}{rcl} -2\mu\nabla\cdot D(\vec{u})+\nabla p &=& \vec{f} \\ \nabla\cdot \vec{u} &=& 0 \end{array} \right\} em \ \Omega,$$
 (2.19)

com as condições de contorno simplificadas (2.14), cuja resolução por métodos de elementos finitos mistos do tipo velocidade-pressão já foi extensivamente estudada. ■

Para uma resenha dos métodos mais em uso para se resolver esse tipo de sistema de dois campos, nos referimos, por exemplo, ao livro de GIRAULT & RAVIART [30] e ao artigo de RUAS [44].

## Capítulo 3

### **Trabalhos Relacionados**

Apresentamos neste capítulo uma breve revisão bibliográfica de trabalhos encontrados na literatura, relacionados com esta tese. Uma ênfase é dada àqueles cujo objetivo é a simulação numérica de escoamentos de fluidos viscoelásticos, pela metodologia que empregamos neste estudo, vale dizer o método dos elementos finitos.

### 3.1 Alguns Métodos de Simulação Numérica de Escoamentos Viscoelásticos

Levando em conta as dificuldades descritas no Capítulo 1 para simular numericamente escoamentos de fluidos viscoelásticos, vários trabalhos vêm sendo propostos desde a década de 80, introduzindo métodos para o problema em questão. No que diz respeito a métodos de elementos finitos multi-campos adequados para tratar esta classe de problemas de uma forma confiável, o trabalho de FORTIN e PIERRE [37], incorporando um quarto campo, denominado, o tensor taxa de deformação, encontra-se entre as contribuições de maior relevância. Em particular, isso impulsionou significativamente a simulação numérica de escoamentos de fluidos viscoelásticos em espaço tridimensional, que se tornou mais difundido na última década (cf. [2]). Quanto à análise numérica de métodos de elementos finitos para o conjunto completo de equações que descrevem escoamentos viscoelásticos, a contribuição de BARANGER e SANDRI [4] é a referência pioneira. Mais recentemente, CODINA [17] adotou uma outra técnica de estabilização para aproximações de elementos finitos de três campos de igual ordem. Limitando suas análises ao caso linearizado, CAR-NEIRO DE ARAÚJO & RUAS [48], propuseram alternativas para estudar esta classe de problemas, na grande maioria no caso bidimensional. Isto foi atingido através de reduções drásticas do número de graus de liberdade necessários para obter aproximações confiáveis,

quando comparado a outros métodos em uso de mesma ordem (cf. [39]). Entretanto, no contexto de escoamentos tridimensionais, tal técnica não é satisfatória, visto que o número final de graus de liberdade permanece excessivamente alto de qualquer modo. Isto foi o que motivou RUAS [45] a também trabalhar em métodos três campos usando técnicas de estabilização  $\vec{u} - \sigma$ , para obter a redução do número de graus de liberdade de tensão-extra. A chave desta aproximação é a formulação de mínimos quadrados de Galerkin proposta e explorada por FRANCA, STENBERG e colaboradores na década de 80 (cf. [26],[27]). No que diz respeito a escoamentos viscoelásticos evolutivos, a análise numérica de esquemas "time-marching" combinadas com elementos finitos mistos velocidade-pressão adequados, para tratar escoamentos imcompressíveis, foram primeiro relatados em meados dos anos noventa (cf. BARANGER e WARDI [5] e SARAMITO [49]). Alguns outros trabalhos neste tópico apareceram nos anos 2000, tais como [7, 22, 23, 24]. Artigos mais recentes, [14] e [15] por CHRISPELL, ERVIN e JENKINS baseados no método  $\theta$  para a integração no tempo, combinados com os elementos de Taylor-Hood e um tratamento SUPG dos termos convectivos, fornecem análises do sistema completo de equações não lineares, dependentes do tempo, que descrevem o escoamento viscoelástico. No entanto, como devemos lembrar, a maioria dessas contribuições evitou a questão crucial da estabilidade numérica envolvendo a aproximação da tensão-extra versus a aproximação da velocidade. Este objetivo foi alcançado, considerando apenas os modelos que incorporaram um termo puramente viscoso na lei constitutiva, tais como os de Oldroyd ou Johnson-Segalman (cf. [6]). Também deve ser salientado que os mesmos trabalhos negligenciaram estimativas de erro para a pressão, embora este seja um ponto essencial para garantir a confiabilidade da simulação do escoamento. No entanto, como o tratamento das não-linearidades do sistema é um desafio que qualquer metodologia numérica deve ser capaz de assumir de forma eficiente, pode-se afirmar que a série de trabalhos citados acima, forneceu decisiva contribuição para a simulação de escoamentos viscoelásticos evolutivos.

Neste trabalho vamos usar um algoritmo de passo fracionário para desacoplar a resolução em termos dos três campos incógnitos. Mais especificamente trata-se de algoritmo do tipo projeção. Projeções sobre espaços de campos solenoidais foram primeiramente propostas por CHORIN [13] e TEMAM [51]. Provaram ser uma ferramenta eficiente para resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis. Uma de suas principais características é tratar as duas variáveis primitivas, velocidade e pressão, de forma desacoplada. Outra importante vantagem desse tipo de aproximação é que, ao menos em algumas versões, permite o uso dos espaços de discretização mais simples possíveis para ambas as

variáveis, sem afetar a estabilidade numérica. Essa propriedade foi explorada por muitos autores, como por exemplo, CODINA & ZIENKIEWICZ em [18]. Contudo, a principal desvantagem dos algoritmos de projeção, conforme relatado por diferentes autores como RANNACHER em [43], é a inconsistência numérica em suas versões mais amplamente em uso. Esse é o caso, especialmente quando empregamos a equação de pressão de Poisson com condições de contorno de Neumann não-físicas. Em GOLDBERG & RUAS [31], uma alternativa para esse resolutor de pressão, com vistas a superar essa dificuldade, foi proposta. A idéia básica foi a determinação de uma pressão pós-processada a cada passo de tempo, relativa à velocidade usual, por uma aproximação de mínimos-quadrados, usando a equação de conservação de momento. Os resultados numéricos certificaram uma melhora considerável da pressão assim corrigida, quando comparada à obtida de maneira clássica, ao menos para números de Reynolds não muito baixos. De fato, nessa abordagem o termo viscoso é sistematicamente removido das condições de contorno verdadeiras pela equação da pressão corrigida, causando uma perda mais significativa de precisão quanto mais baixo o número de Reynolds. Isto é devido ao fato de que as derivadas de segunda ordem não são computáveis com elementos finitos de Lagrange clássicos.

Embora alternativas para este problema tenham sido propostas e testadas em alguns trabalhos anteriores, tais como RAHMOUN & RUAS [41], uma persistente perda de precisão no cálculo da pressão foi sistematicamente constatada. Em [33], uma modificação da técnica de correção de pressão anteriormente mencionada, foi proposta com a finalidade de superar tal inconsistência dos algoritmos de projeção. Contudo, os autores não mostraram que a aproximação proposta por eles, permitia o uso de aproximações de elementos finitos lineares, contínuos por partes, para ambas as variáveis, violando dessa forma, a condição clássica de Babuska-Brezzi [11].

Tendo em vista algumas limitações dos trabalhos referidos em parágrafos anteriores, estudamos em [10] e [47], uma técnica de estabilização aplicável aos três campos, com base na integração no tempo para resolver equações de escoamentos viscoelásticos estacionários ou evolutivos, em ambos os casos, bidimensional e tridimensional. O estudo foi realizado para o sistema de Stokes de três campos evolutivo obtido através da linearização do sistema que descreve escoamento viscoelástico, mesmo para problemas estacionários. De fato, neste caso a integração no tempo é puramente fictícia e tem a função de método de resolução iterativa. Foi mostrado em [46] e [47] que tais iterações combinadas com representações lineares por partes padrão dos três campos, dão origem a aproximações convergentes quando aplicadas ao problema estacionário de Stokes como uma forma linearizada das equações de Navier-Stokes estacionárias e as equações de escoamentos viscoelásticos, respectivamente.

Na realidade, uma componente fundamental da nossa estratégia numérica tem o objetivo de superar simultaneamente ambas as dificuldades referidas no início deste trabalho. Mais especificamente, o algoritmo de resolução iterativa em uso permite a solução do sistema de três campos em cada passo de tempo de uma forma explícita, tanto para a velocidade quanto para a tensão-extra, para um intervalo de tempo da mesma ordem que o tamanho do passo de malha. A pressão por sua vez, é determinada como a solução de uma equação de Poisson, com condições de contorno consistentes, seguindo as idéias já exploradas por GOLDBERG & RUAS [31], como referido.

### Capítulo 4

### Modelagem Numérica

### 4.1 Introdução

Como mencionado nos últimos parágrafos do Capítulo 3, neste Capítulo apresentamos nossa formulação numérica de três campos para resolver sistemas de equações que descrevem escoamentos viscoelásticos. São utilizadas interpolações lineares por partes contínuas clássicas de  $\vec{u}$ ,  $p \in \sigma$ , combinadas com uma formulação variacional adequada, o que nos conduziu a versões discretas estáveis e precisas, combinadas a um algoritmo que resolve iterativamente o sistema de Stokes generalizado subjacente. Esta técnica é baseada na integração no tempo do sistema evolutivo, associada a um algoritmo de decomposição do sistema, fazendo as vezes de resolutor iterativo no caso estacionário. A técnica, como já foi salientado, é inspirada nas idéias exploradas por GOLDBERG & RUAS em [31] para a integração no tempo das equações de Navier-Stokes incompressíveis.

Embora a metodologia a ser descrita possa ser estendida de maneira direta a um grande grupo de leis constitutivas viscoelásticas, por questão de simplicidade, consideramos como modelo o caso dos fluidos de Maxwell, como citado anteriormente.

Seja então  $\Omega$  um domínio limitado de  $\mathbb{R}^N$ , N = 2 ou N = 3, com fronteira  $\Gamma$ . Sob a ação de forças de corpo  $\vec{f}$ , consideramos a evolução no tempo t do escoamento em  $\Omega$ , de um líquido viscoelástico obedecendo a uma lei constitutiva de tipo diferencial. Supomos que a velocidade do líquido seja prescrita em  $\Gamma$ , ou seja, supomos  $\vec{u} = \vec{g}$ , onde  $\vec{g}$  satisfaz a propriedade de conservação  $\int_{\Gamma} \vec{g}(.,t) \cdot \vec{\nu} ds = 0, \forall t$ , sendo  $\vec{\nu}$  o vetor unitário normal exterior a  $\Gamma$ , e além disso, sem perda de aspectos essenciais, apenas para simplificar a apresentação, consideramos uma lei constitutiva do tipo Maxwell convectada superior, que relaciona a tensão-extra à velocidade da seguinte maneira:

$$\sigma + \lambda \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \sigma - (\nabla \vec{u}) \sigma - \sigma (\nabla \vec{u})^T \right] = 2\eta D(\vec{u}).$$
(4.1)

Em (4.1), como já referido no Capítulo 2,  $\lambda$  é o tempo de relaxação de tensões do líquido e  $\eta$  é a sua viscosidade de referência, aqui ambas consideradas constantes.

Então, de um dado estado no tempo t = 0, ou seja, dada uma velocidade solenoidal  $\vec{u}^0$  e uma tensão-extra  $\sigma^0$ , para t > 0, adicionalmente à lei (4.1), o escoamento é regido pelo seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nabla \cdot \sigma + \nabla p = \vec{f} \\
\nabla \cdot \vec{u} = 0$$
em  $\Omega \times (0, \infty)$ 
(4.2)

onde a densidade do líquido é supostamente igual a um.

Se linearizarmos o sistema (4.1)-(4.2) obtemos o sistema de Stokes generalizado abaixo, o qual na realidade, descreve o movimento de um sólido de Maxwell em pequenas deformações:

De um dado estado, no tempo t = 0, definido por uma velocidade solenoidal  $\vec{u}^0$  e uma tensão-extra  $\sigma^0$ , para t > 0, devemos encontrar  $\vec{u}$ , p,  $\sigma$ , solução do seguinte sistema, com  $\vec{u} = \vec{g}$  sobre  $\partial \Omega \times (0, \infty)$ :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nabla \cdot \sigma + \nabla p = \vec{f} 
\sigma + \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 2\eta D(\vec{u}) 
\nabla \cdot \vec{u} = 0$$
em  $\Omega \times (0, \infty).$ 
(4.3)

É o sistema (4.3) que será tomado como modelo para o estudo analítico da metodologia de simulação computacional de escoamentos viscoelásticos que empregamos neste trabalho.

Consideramos agora a discretização no tempo, do sistema (4.1)-(4.2), que será usada ulteriormente. É baseada no Método de Euler semi-implícito descrito a seguir:

Seja  $\Delta t > 0$  um passo de tempo dado, e  $\vec{u}^n$ ,  $p^n$  e  $\sigma^n$ , aproximações de  $\vec{u}(n\Delta t)$ ,  $p(n\Delta t)$ ,  $\sigma(n\Delta t)$ , respectivamente, para um inteiro estritamente positivo n. Começando de  $\vec{u}^0$  e  $\sigma^0$  e prescrevendo  $\vec{u}^n = \vec{g}^n$  em  $\partial\Omega$ , para todo n;  $\vec{u}^n$ ,  $p^n$ ,  $\sigma^n$ , para n = 1, 2, ..., são determinados como solução do seguinte sistema em  $\Omega$ :

$$\begin{cases} \frac{\vec{u}^n - \vec{u}^{n-1}}{\Delta t} + (\vec{u}^{n-1} \cdot \nabla)\vec{u}^{n-1} - \nabla \cdot \sigma^n + \nabla p^n &= \vec{f}^n \\ \sigma^n + \lambda \left[ \frac{\sigma^n - \sigma^{n-1}}{\Delta t} + (\vec{u}^{n-1} \cdot \nabla)\sigma^{n-1} - (\nabla \vec{u}^{n-1})\sigma^{n-1} - \sigma^{n-1}(\nabla \vec{u}^{n-1})^T \right] &= 2\eta D(\vec{u}^n) \\ \nabla \cdot \vec{u}^n &= 0 \end{cases}$$

$$(4.4)$$

onde  $\vec{g}^n = \vec{g}(n\Delta t)$  e  $\vec{f}^n = \vec{f}(n\Delta t)$ .

Como pode ser verificado, (4.4) é um problema linear, para todo n. Além disso, supondo velocidades e gradientes de velocidade moderados, os termos não-lineares podem ser negligenciados. Neste caso, como relembramos do Capítulo 2, podemos de forma legítima, linearizar (4.1)-(4.2), obtendo assim o sistema que descreve o escoamento muito lento de um sólido viscoelástico de Maxwell. Como já foi dito, para efeito de uma análise de confiabilidade, introduziremos a nossa metodologia numérica no contexto do sistema de Stokes Generalizado (4.3).

#### 4.2 Algoritmo de resolução no caso estacionário

Nesta e na próxima seções deste capítulo, estaremos interessados na obtenção de soluções estacionárias. Portanto, supomos que ambas  $\vec{f} \in \vec{g}$  sejam independentes de t. Dessa forma, consideramos o seguinte algoritmo iterativo de resolução do sistema (4.1)-(4.2), semi-implícito a cada iteração, que nada mais é do que (4.4) com  $\vec{f}^n = \vec{f} \in \vec{g}^n = \vec{g}$ , para todo n.

A seguir, propomos um algoritmo que servirá de base para resolver equações de escoamentos estacionários newtonianos e não-newtonianos, na formulação  $(\vec{u}, p, \sigma)$ . Embora essa técnica seja descrita aqui só no contexto do problema (4.3), para o caso estacionário (i.e., para  $\vec{f} \in \vec{g}$  independentes de t), sua adaptação a casos mais gerais é direta, incluindo por exemplo, as equações de Navier Stokes, ou ainda escoamentos turbulentos com modelos de tensão turbulenta. De fato nos últimos casos é suficiente tomar  $\lambda = 0$ , antes de incorporar outras expressões ou termos não-lineares. No entanto, é no caso de escoamentos viscoelásticos, que a aproximação apresentada parece ser a mais promissora, visto que neste caso é obrigatório o uso de uma formulação a três campos.

Vamos lidar com um algoritmo de resolução iterativa, explícita no tempo, considerado aqui como fictício, ou seja, de solução iterativa do sistema (4.3) a cada passo, o que aqui significa mais precisamente a cada iteração. Contudo, antes de apresentá-lo, vamos introduzir a discretização temporal implícita deste sistema numa forma variacional. Para tal, definimos os seguintes espaços e subespaços de funções, conforme [1] e [30]:

$$V := [H^{1}(\Omega)]^{N}$$
  

$$\Sigma := \{\tau/\tau \in [L^{2}(\Omega)]^{N \times N}, \nabla \cdot \tau \in [L^{2}(\Omega)]^{N}, \tau^{T} = \tau\}$$
  

$$Q := H^{1}(\Omega) \cap L^{2}_{0}(\Omega) \text{ onde } L^{2}_{0}(\Omega) := \{q/q \in L^{2}(\Omega), \int_{\Omega} q = 0\}.$$
(4.5)

Seja agora  $\Delta t > 0$  um parâmetro numérico dado assimilado a um passo de tempo, como se o problema fosse evolutivo. Então, começando de  $\vec{u}^0 \in V$  e  $\sigma^0 \in \Sigma$  para n = 1, 2, ...e impondo  $\vec{u}^n = \vec{g}$  sobre  $\Gamma$ , para todo n, buscamos campos  $\vec{u}^n$ ,  $p^n$ ,  $\sigma^n \operatorname{com} \vec{u}^n \in V$ ,  $p^n \in Q$ e  $\sigma^n \in \Sigma$ , como a solução do seguinte problema:

$$\frac{\vec{u}^n - \vec{u}^{n-1}}{\Delta t} - \nabla \cdot \sigma^n + \nabla p^n = \vec{f} 
\nabla \cdot \vec{u}^n = 0 
\sigma^n + \lambda \left(\frac{\sigma^n - \sigma^{n-1}}{\Delta t}\right) = 2\eta D(\vec{u}^n)$$
em Ω. (4.6)

Na realidade, esses três campos representarão aproximações da solução estacionária do sistema (4.3). Por uma questão de simplicidade e sem perdas significativas de generalidade, supomos que  $\Omega$  tem propriedades de regularidade não restritivas apropriadas. Além disso, supomos que  $\vec{f} \in L^2(\Omega)^N$ ,  $\vec{g} \in H^{1/2}(\Gamma)^N$ ,  $\vec{u}^0 \in H^1(\Omega)^N \in \sigma^0 \in H^1(\Omega)^{N \times N}$  (cf. [1]). Seja também,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2,\Gamma}$  o produto de dualidade entre  $[H^{1/2}(\Gamma)]^N$  e  $[H^{-1/2}(\Gamma)]^N$ ,  $(\cdot, \cdot)$  e  $\| \cdot \|$ , o produto interno padrão de  $L^2(\Omega)$  e a norma associada a esse produto interno, respectivamente. Em [10] o seguinte resultado para o problema (4.6) foi demonstrado:

**Teorema 4.2.1** Para todo  $\Delta t$  e para todo n, o problema (4.6) tem solução única. Além disso, a solução de (4.6) converge para a solução  $(\bar{\vec{u}}, \bar{p}, \bar{\sigma})$  da versão estacionária de (4.3), dada por:

$$\begin{cases}
-\nabla \cdot \bar{\sigma} + \nabla \bar{p} &= \vec{f} \\
\nabla \cdot \bar{\vec{u}} &= 0 \\
\bar{\sigma} &= 2\eta D(\bar{\vec{u}}).
\end{cases} em \Omega$$
(4.7)

na norma de  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)^{N \times N}$ , com  $\overline{\vec{u}} = \vec{g}$  em  $\partial \Omega$  quando n tende ao  $\infty$ .

Vamos trabalhar com a seguinte formulação variacional do sistema (4.6):

Encontrar 
$$p^n \in Q, \vec{u}^n \in V \in \sigma^n \in \Sigma$$
 tais que  
 $(\nabla p^n - \nabla \cdot \sigma^n, \nabla q) = (\vec{f}^n, \nabla q) + \frac{1}{\Delta t} \left[ (\vec{u}^{n-1}, \nabla q) - \langle \vec{g}^n, q\vec{\nu} \rangle_{1/2, \Gamma} \right] \quad \forall q \in Q,$   
 $(\vec{u}^n - \Delta t (\nabla \cdot \sigma^n - \nabla p^n), \vec{v}) = (\vec{u}^{n-1} + \Delta t \vec{f}^n, \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V$   
 $\frac{\Delta t + \lambda}{2\eta} (\sigma^n, \tau) + \Delta t^2 (\nabla \cdot \sigma^n - \nabla p^n, \nabla \cdot \tau) = \frac{\lambda}{2\eta} (\sigma^{n-1}, \tau) - \Delta t^2 (\vec{f}^n, \nabla \cdot \tau) - \Delta t \left[ (\vec{u}^{n-1}, \nabla \cdot \tau) + \langle \vec{g}^n, \tau \vec{\nu} \rangle_{1/2, \Gamma} \right] \quad \forall \tau \in \Sigma.$   
(4.8)  
e  $Q := H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega), \text{ com } L^2_0(\Omega) := \{q \mid q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q dx = 0\}, V = L^2(\Omega)^N \text{ e}$ 

onde  $Q := H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ , com  $L^2_0(\Omega) := \{q \mid q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q dx = 0\}, V = L^2(\Omega)^N$  e  $\Sigma := \{\sigma, \sigma \in H(\operatorname{div}, \Omega)^N \text{ e } \sigma = \sigma^{\mathrm{T}}\}$  (cf. [30]).

A terceira equação de (4.8) incorpora um termo oriundo da equação de conservação de momento testada com  $\nabla \cdot \tau$ . Isso adiciona positividade e tem por função estabilizar o problema discreto, similarmente ao que foi realizado em trabalhos anteriores, tais como [26] e [27]. Analogamente, foi provado em [9] a seguinte proposição para o problema (4.8):

**Proposição 4.2.1** O Problema (4.8) tem solução única para todo  $\Delta t$  e para todo n.

O problema (4.8) corresponde a uma formulação fraca para o problema (4.6) com forma bilinear dada por

$$a\left(\left(\vec{u}, p, \sigma\right), \left(\vec{v}, q, \tau\right)\right) := \Delta t^{2} \left(\nabla p - \nabla \cdot \sigma, \nabla q\right) + \Delta t \left(\vec{u}, \nabla \cdot \tau - \nabla q\right) + \left(\vec{u} - \Delta t \left(\nabla \cdot \sigma - \nabla p\right), \vec{v}\right) + \frac{\Delta t + \lambda}{2\eta} \left(\sigma, \tau\right) + \Delta t^{2} \left(\nabla \cdot \sigma - \nabla p, \nabla \cdot \tau\right)$$

$$(4.9)$$

e forma linear de segundo membro dada por:

$$L\left((q, \vec{v}, \tau)\right) = \Delta t^{2} \left(\vec{f}, \nabla q - \nabla \cdot \tau\right) + \Delta t < \vec{g}, (\tau - Iq)\vec{\nu} >_{1/2,\Gamma} + \Delta t \left(\vec{f}, \vec{v}\right) + \left(\vec{u}^{n-1}, \vec{v}\right) + \Delta t \left(\vec{u}^{n-1}, \nabla q - \nabla \cdot \tau\right) + \frac{\lambda}{2\eta} \left(\sigma^{n-1}, \tau\right).$$

$$(4.10)$$

Assim de forma compacta, escrevemos (4.6) na forma variacional equivalente

Encontrar 
$$(p^n, \vec{u}^n, \sigma^n) \in Q \times V \times \Sigma$$
 tal que  
 $a((p^n, \vec{u}^n, \sigma^n), (q, \vec{v}, \tau)) = L((q, \vec{v}, \tau)) \quad \forall (q, \vec{v}, \tau) \in Q \times V \times \Sigma$ 

$$(4.11)$$

onde  $a \in L$  são definidos em (4.9) e (4.10).

Agora podemos considerar o seguinte algoritmo para resolver iterativamente o sistema (4.8) de forma explícita a cada iteração, no que tange à velocidade e a tensão-extra:

Seja, para todo  $n \ge 0$ ,  $\sigma^{n,0} = \sigma^{n-1}$ . Então para  $s = 1, 2, \ldots$  determinamos aproximações  $\vec{u}^{n,s} \in V$ ,  $p^{n,s} \in Q$  e  $\sigma^{n,s} \in \Sigma$  de  $\vec{u}^n$ ,  $p^n$  e  $\sigma^n$  resolvendo sucessivamente o seguinte problema:

$$(\nabla p^{n,s}, \nabla q) = \left(\vec{f}, \nabla q\right) + \left(\nabla \cdot \sigma^{n,s-1}, \nabla q\right) + \frac{1}{\Delta t} \left[ \left(\vec{u}^{n-1}, \nabla q\right) - \langle \vec{g}^n, q\vec{\nu} \rangle_{1/2,\Gamma} \right] \quad \forall q \in Q,$$

$$(4.12)$$

$$(\vec{u}^{n,s}, \vec{v}) = \Delta t \left( \vec{f} + \nabla \cdot \sigma^{n,s-1} - \nabla p^{n,s}, \vec{v} \right) + \left( \vec{u}^{n-1}, \vec{v} \right) \quad \forall \vec{v} \in V,$$

$$(4.13)$$

$$\frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} \left( \sigma^{n,s}, \tau \right) = \frac{\lambda}{2\eta} \left( \sigma^{n,s-1}, \tau \right) - \Delta t^2 \left( \vec{f} + \nabla \cdot \sigma^{n,s-1} - \nabla p^{n,s}, \nabla \cdot \tau \right) -\Delta t \left[ \left( \vec{u}^{n-1}, \nabla \cdot \tau \right) - \langle \vec{g}, \tau \vec{\nu} \rangle_{1/2,\Gamma} \right] \quad \forall \tau \in \Sigma,$$
(4.14)

Observa-se que é improvável que este algoritmo gere sequências convergentes de aproximações  $(\vec{u}^{n,s}, p^{n,s}, \sigma^{n,s})$  para  $(\vec{u}^n, p^n, \sigma^n)$  quando s tende ao infinito no caso contínuo. Contudo, aqui vamos aplicá-lo no contexto de versões discretas de (4.12), (4.13), (4.14) definidas substituindo V, Q e  $\Sigma$  por espaços de dimensão finita  $V_h$ ,  $Q_h$  e  $\Sigma_h$  especificados na próxima seção. Neste caso, a seguinte desigualdade inversa se verifica: Existe uma constante  $C_i$  dependente da dimensão de  $\Sigma_h$  tal que

$$\| \nabla \cdot \sigma \| \le C_i \| \tau \| \quad \forall \tau \in \Sigma_h.$$

$$(4.15)$$

Usando esta desigualdade, foi provado em [46] que, se  $\Delta t$  é escolhido de tal forma que,  $\Delta t \leq \frac{h}{2C_i} \sqrt{\lambda/\eta}$ , a sequência de análogos discretos de  $(\vec{u}^{n,s}, p^{n,s}, \sigma^{n,s})$  converge para os análogos discretos  $(\vec{u}^n, p^n, \sigma^n)$  em  $V_h \times Q_h \times \Sigma_h$  quando s tende ao infinito.

**Observação 4.2.1** É possível estabelecer que a taxa de convergência para este algoritmo é bem rápida, desde que a dimensão de  $\Sigma_h$  não seja muito elevada.

#### 4.3 Discretização no espaço

Consideramos nesta seção o problema análogo discreto no espaço do sistema (4.6). Supomos que  $\Omega$ ,  $\vec{f} \in \vec{g}$  tenham propriedades de regularidade compatíveis com as requeridas dos campos incógnitos nos casos de interesse.

Seja  $\mathcal{T}_h$  uma partição de  $\Omega$  em *N*-simplex com tamanho máximo de aresta igual a *h*. Supomos que  $\mathcal{T}_h$  satisfaz as condições usuais de compatibilidade para malhas de elementos finitos, e que pertence a uma família quasi-uniforme de partições. Para todo  $K \in \mathcal{T}_h$  denotamos por  $P_1(K)$ , o espaço de polinômios de grau menor ou igual a um, definidos em K. Com isso, introduzimos os seguintes espaços ou subespaços associados a  $\mathcal{T}_h$ :

$$\begin{cases} S_h := \left\{ v \mid v \in C^0(\bar{\Omega}) \in v |_K \in P_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \\ V_h := \left\{ \vec{v} \mid \forall i \; v_i \in S_h \right\} \\ Q_h := S_h \cap L^2_0(\Omega) \\ \Sigma_h := \left\{ \tau \mid \tau \in [S_h]^{N \times N}, \quad \tau = \tau^T \right\} \end{cases}$$
(4.16)

Então, sendo  $\vec{u}_h^0$  o campo de  $V_h$  que satisfaz  $\vec{u}_h^0(\wp) = \vec{u}^0(\wp)$ , e sendo  $\sigma_h^0$ , o tensor de  $\Sigma_h$  que satisfaz  $\sigma_h^0(\wp) = \sigma^0(\wp)$ , para todo vértice  $\wp$  de  $\mathcal{T}_h$ , definimos o seguinte problema como aproximação de (4.6), para todo n, com n = 1, 2, ...

$$\begin{aligned} & \text{Encontrar } p_h^n \in Q_h, \vec{u}_h^n \in V_h, \text{ e } \sigma_h^n \in \Sigma_h \text{ tais que} \\ & (\nabla p_h^n - \nabla \cdot \sigma_h^n, \nabla q) = \left(\vec{f}, \nabla q\right) + \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{u}_h^{n-1}, \nabla q\right) + \\ & \Delta t < \vec{g}, q\vec{\nu} >_{1/2, \Gamma} \quad \forall q \in Q_h, \end{aligned} \\ & (\vec{u}_h^n - \Delta t \left(\nabla \cdot \sigma_h^n - \nabla p_h^n\right), \vec{v}) = \left(\vec{u}_h^{n-1} + \Delta t \vec{f}, \vec{v}\right), \quad \forall \vec{v} \in V_h, \end{aligned} \\ & \frac{\Delta t + \lambda}{2\eta} \left(\sigma_h^n, \tau\right) + \Delta t^2 \left(\nabla \cdot \sigma_h^n - \nabla p_h^n, \nabla \cdot \tau\right) = \frac{\lambda}{2\eta} \left(\sigma_h^{n-1}, \tau\right) - \\ & \Delta t^2 \left(\vec{f}, \nabla \cdot \tau\right) - \Delta t \left(\vec{u}_h^{n-1}, \nabla \cdot \tau\right) + \Delta t < \vec{g}, \ \tau \vec{\nu} >_{1/2, \partial \Omega} \quad \forall \tau \in \Sigma_h. \end{aligned}$$

Para o problema (4.17), o seguinte resultado se verifica (cf. [9]):

**Proposição 4.3.1** O Problema (4.17) tem solução única para todo  $\Delta t$  e para todo n.

Considerando a forma fraca para o problema (4.6), dada em (4.9), (4.10) e (4.11), provamos o seguinte resultado de convergência:

**Teorema 4.3.1** Se para todo n a solução de (4.11) pertence a  $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)^N \times$ 

 $H^2(\Omega)^{N \times N}$  qualquer que seja  $\Delta t$  a solução de (4.17) converge para a solução de (4.11) na norma de  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)^{N \times N}$  quando h tende a 0 (cf. [10]).

PROVA. Primeiro notamos que, para todo  $(\vec{u}, p, \sigma)$  e  $(\vec{v}, q, \tau)$  em  $V \times Q \times \Sigma$ ,

$$a((\vec{u}, p, \sigma, ), (\vec{v}, q, \tau)) \leq 2 \parallel (\vec{u}, p, \sigma) \parallel_{\mathfrak{S}} \parallel (\vec{v}, q, \tau) \parallel_{\mathfrak{S}}$$

Assim, dos limites clássicos de erro (cf. [16] e [50]), existe uma constante C tal que

$$\| (p^{n} - p_{h}^{n}, \vec{u}^{n} - \vec{u}_{h}^{n}, \sigma^{n} - \sigma_{h}^{n}) \|_{\Im} \leq C \begin{bmatrix} \inf_{(q, \vec{v}, \tau) \in Q_{h} \times V_{h}^{\vec{g}} \times \Sigma_{h}} & \| (p^{n} - q, \vec{u}^{n} - \vec{v}, \sigma^{n} - \tau) \|_{\Im} + \\ \sup_{\substack{(q, \vec{v}, \tau) \in Q_{h} \times V_{h}^{0} \times \Sigma_{h} \\ (q, \vec{v}, \tau) \notin (0, \vec{0}, o)}} & \frac{|(L_{h} - L)((q, \vec{v}, \tau))|}{\| (q, \vec{v}, \tau) \|_{\Im}} \end{bmatrix}$$

Por outro lado de estimativas padrão, sabemos que existe outra constante C, independente de h, tal que (cf. [16])

$$\inf_{\substack{(q,\vec{v},\tau) \in Q_h \times V_h^{\vec{g}} \times \Sigma_h \\ Ch (\parallel \nabla(\nabla \vec{u}^n) \parallel + \parallel \nabla(\nabla \sigma^n) \parallel + \parallel \nabla(\nabla p^n) \parallel) . }$$

Além disso,

$$(L_h - L)((q, \vec{v}, \tau)) = \left(\vec{u}_h^{n-1} - \vec{u}^{n-1}, \, \vec{v} + \Delta t \left(\nabla q - \nabla \cdot \tau\right)\right) + \frac{\lambda}{2\eta} \left(\sigma_h^{n-1} - \sigma^{n-1}, \, \tau\right).$$

Portanto,

$$\sup_{\substack{\{(q,\vec{v},\tau) \in Q_h \times V_h^{\vec{g}} \times \Sigma_h \\ (q,\vec{v},\tau) \neq (0,\vec{0},o)}} \frac{\left| (L_h - L) ((q,\vec{v},\tau)) \right|}{\| (q,\vec{v},\tau) \|_{\Im}} \le \| \vec{u}_h^{n-1} - \vec{u}^{n-1} \| + \sqrt{\frac{\lambda}{2\eta}} \| \sigma_h^{n-1} - \sigma^{n-1} \| .$$

Agora notamos que, de acordo com nossas suposições, existe uma constante C(0), independente de h, tal que

$$\| \vec{u}^{0} - \vec{u}_{h}^{0} \| + \| \sigma^{0} - \sigma_{h}^{0} \| \le C(0)h^{2} \left( \| \nabla(\nabla \vec{u}^{0}) \| + \| \nabla(\nabla \sigma^{0}) \| \right)$$

Assim, temos para uma constante adequada C(1), independente de h:

$$\| \vec{u}^{1} - \vec{u}_{h}^{1} \| + \| \sigma^{1} - \sigma_{h}^{1} \| \leq C(1)h^{2} \max_{0 \leq i \leq 1} \left\{ \| \nabla(\nabla \vec{u}^{i}) \| + \| \nabla(\nabla \sigma^{i}) \| + \| \nabla(\nabla p^{i}) \| \right\}.$$

Recursivamente estabelecemos que existem constantes C(n), independente de h, tais que, para todo n temos

$$\| \vec{u}^{n} - \vec{u}_{h}^{n} \| + \| \sigma^{n} - \sigma_{h}^{n} \| \leq C(n)h^{2} \max_{0 \leq i \leq n} \left\{ \| \nabla(\nabla \vec{u}^{i}) \| + \| \nabla(\nabla \sigma^{i}) \| + \| \nabla(\nabla p^{i}) \| \right\}.$$

$$(4.18)$$

Para a convergência de  $p_h^n$  para  $p^n$ , usamos aqui um argumento de dualidade como no Teorema 4.2.1, isto é

$$\begin{split} \parallel p^{n} - p_{h}^{n} \parallel &\leq C \quad \sup_{\substack{\vec{v} \in H_{0}^{1}(\Omega)^{N} \in \vec{0} \\ \vec{v} \in H_{0}^{1}(\Omega)^{N} \neq}} \frac{(\nabla p^{n} - \nabla p_{h}^{n}, \vec{v})}{\parallel \nabla \vec{v} \parallel} = \\ C \left\{ \begin{array}{c} \sup_{\substack{\vec{v} \in H_{0}^{1}(\Omega)^{N} \\ \vec{v} \neq \vec{0} \end{array}} \frac{\Delta t \left(\sigma_{h}^{n} - \sigma^{n}, \nabla \vec{v}\right) + \left(\vec{u}_{h}^{n} - \vec{u}^{n}, \vec{v}\right) + \left(\vec{u}^{n-1} - \vec{u}_{h}^{n-1}, \vec{v}\right)}{\Delta t \parallel \nabla \vec{v} \parallel} + \\ \left\{ \begin{array}{c} \sup_{\substack{\vec{v} \in H_{0}^{1}(\Omega)^{N} \\ \vec{v} \neq \vec{0} \end{array}} \frac{\left[ (\nabla (p^{n} - p_{h}^{n}) + \nabla \cdot (\sigma_{h}^{n} - \sigma^{n}), \vec{v} - \pi_{h}(\vec{v})) \right]}{\parallel \nabla \vec{v} \parallel} + \\ \left\{ \begin{array}{c} \frac{\left(\Delta t^{-1} (\vec{u}^{n} - \vec{u}_{h}^{n}) - \Delta t^{-1} (\vec{u}^{n-1} - \vec{u}_{h}^{n-1}), \vec{v} - \pi_{h}(\vec{v}) \right)}{\parallel \nabla \vec{v} \parallel} \right\} \end{split} \right\} \end{split}$$

onde  $\pi_h(\vec{v})$  é a projeção ortogonal de V em  $V_h$  no sentido de  $L^2(\Omega)$ .

Então, estimativas clássicas (cf. [16]) e (4.18) implicam que existe outra constante  $\bar{C}(n)$ , independente de h, tal que para todo n

$$\| p^{n} - p_{h}^{n} \| \leq \bar{C}(n)h \max_{0 \leq i \leq n} \left\{ \| \nabla(\nabla \vec{u}^{i}) \| + \| \nabla(\nabla \sigma^{i}) \| + \| \nabla(\nabla p^{i}) \| \right\}.$$

$$(4.19)$$

### 4.4 Caso Estacionário

Para complementar nossa análise, podemos agora considerar a aproximação do sistema estacionário (4.7) por meio da versão estacionária do problema discretizado por elementos
finitos (4.17), que de forma sintética se escreve:

$$\begin{cases} \text{Encontrar} \left(\bar{p}_{h}, \bar{\vec{u}}_{h}, \bar{\sigma}_{h}\right) \in Q_{h} \times V_{h} \times \Sigma_{h} \text{ tal que} \\ \bar{a}\left(\left(\bar{p}_{h}, \bar{\vec{u}}_{h}, \bar{\sigma}_{h}\right), (q, \vec{v}, \tau)\right) = \bar{L}_{h}\left((q, \vec{v}, \tau)\right) \quad \forall (q, \vec{v}, \tau) \in Q_{h} \times V_{h} \times \Sigma_{h} \end{cases}$$

$$(4.20)$$

onde para cada  $(\vec{u}, p, \sigma) \in V \times Q \times \Sigma$  <br/>e  $(\vec{v}, q, \tau) \in V \times Q \times \Sigma$  fazemos

$$\bar{a}\left(\left(p,\vec{u},\sigma\right),\left(q,\vec{v},\tau\right)\right) := \Delta t^{2}\left(\nabla p - \nabla \cdot \sigma, \nabla q\right) + \Delta t\left(\vec{u}, \nabla \cdot \tau - \nabla q\right) + \Delta t\left(\nabla p - \nabla \cdot \sigma, \vec{v}\right) + \frac{\Delta t}{2\eta}\left(\sigma,\tau\right) + \Delta t^{2}\left(\nabla \cdot \sigma - \nabla p, \nabla \cdot \tau\right)$$

$$(4.21)$$

e para dados  $\vec{f}, \vec{g}$ , consideramos para todo  $(\vec{v}, q, \tau) \in V \times Q \times \Sigma$ 

$$\bar{L}\left((q,\vec{v},\tau)\right) = \Delta t^2 \left(\vec{f}, \, \nabla q - \nabla \cdot \tau\right) + \Delta t < \vec{g}, \, (\tau - Iq)\vec{\nu} >_{1/2,\,\Gamma} + \Delta t \left(\vec{f}, \, \vec{v}\right).$$

Proposição 4.4.1 O Problema (4.20) tem solução única.

PROVA. Primeiro, notamos que o problema (4.20) é equivalente a um sistema linear de equações algébricas com igual número de incógnitas e de equações. Portanto, tem solução única, se e somente se, admite só a solução trivial, quando o segundo membro é nulo.

Supomos então que a tripla  $(\bar{\vec{u}}_h, \bar{p}_h, \bar{\sigma}_h)$  satisfaz

$$\bar{a}\left(\left(\bar{p}_{h}, \bar{\vec{u}}_{h}, \bar{\sigma}_{h}\right), (q, \vec{v}, \tau)\right) = 0 \quad \forall (q, \vec{v}, \tau) \in Q_{h} \times V_{h} \times \Sigma_{h}$$

Tomando  $(\vec{v}, q, \tau) = (\bar{\vec{u}}_h, \bar{p}_h, \bar{\sigma}_h)$  facilmente obtemos

$$\Delta t^2 \parallel \nabla \cdot \bar{\sigma}_h - \nabla \bar{p}_h \parallel^2 + \frac{\Delta t}{2\eta} \parallel \bar{\sigma}_h \parallel = 0,$$

o que implica que  $\bar{\sigma}_h = 0$  e  $\bar{p}_h = 0$ .

Isto por sua vez trivialmente implica que:

$$\left(D(\vec{\tilde{u}}_h), \tau - qI\right) = 0 \quad \forall (q, \tau) \in Q_h \times \Sigma_h \tag{4.22}$$

Tentaremos estabelecer que a relação (4.22) implica também em  $\bar{\vec{u}}_h = 0$ . Com esse fim, tomamos sistematicamente q = 0. Agora, para cada nó P de  $\mathcal{T}_h$  não pertencente a  $\partial\Omega$ escolhemos N sistemas de coordenadas ortonormais  $B_P^i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , de tal maneira que um dos eixos de  $B_P^i$ , digamos  $e_P^i$ , seja a aresta de um elemento de  $T_h$  tendo P como vértice. Agora supomos que P seja o vértice de um elemento  $T_P$  tal que  $\bar{\vec{u}}_h$  se anula em todos os outros N vértices de  $T_P$ . Isso é por exemplo, o caso de elementos tendo uma aresta para N = 2 ou uma face para N = 3, contidos em  $\partial\Omega$ . Os eixos  $e_P^i$  de  $B_P^i$  serão escolhidos de tal forma que sejam orientados de P para os outros N vértices de  $T_P$ , digamos  $S_P^i$  para  $1 \le i \le N$ , respectivamente. Assim, numeramos os vetores unitários de  $B_P^i$ , de tal maneira que,  $e_P^i$  seja o primeiro, e tomamos  $\tau = \tau_P^i$  onde  $\tau_P^i$  é o tensor cuja representação em termos do sistema de coordenadas  $B_P^i$  é dado por:

$$\tau_P^i = \left( \begin{array}{ccc} f_P^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

sendo  $f_P^i$  a função de  $S_h$  cujos valores são iguais a um em  $S_P^i$  e zero em todo outro nó de  $T_h$ . Finalmente, definindo o subconjunto  $T_P^i$  de  $T_h$  como o formado pelos elementos que têm  $PS_P^i$  como aresta comum, por cálculos diretos obtemos:

$$\left(D(\bar{\vec{u}}_h), \tau_P^i\right) = \sum_{T \in T_P^i} \frac{area(T)}{N_T} \left(\frac{-\bar{\vec{u}}_h \cdot e_P^i}{l_P^i}\right)$$

onde  $l_P^i = \overline{PS_P^i}$ . Fazendo *i* variar de um a *N* imediatamente concluimos de (4.22) que  $\overline{\vec{u}}_h = 0$ .

Agora a questão é: é possível encontrar um caminho ligando todos os nós de  $T_h$ , começando de um nó P tendo N nós vizinhos em  $\partial\Omega$ , de tal forma que todo novo nó do caminho tem N nós vizinhos em que foi previamente estabelecido que  $\overline{\vec{u}}_h$  se anula? A resposta é sim de acordo com o seguinte argumento.

Uma vez que eliminamos da malha o conjunto  $\Gamma_h^1$  de todos os elementos de  $T_h$  tendo ao menos N vértices em  $\partial\Omega$ , em que  $\vec{u}_h$  se anula identicamente de acordo com o argumento acima, ficamos com um novo domínio  $\Omega_h^1 \subset \Omega - \Gamma_h^1$ . Isto é um conjunto de  $T_h$  em que  $\vec{u}_h$ possivelmente não se anula identicamente. Se  $\Omega_h^1$  é vazio, então a prova está completa. Caso contrário,  $\vec{u}_h$  se anula na fronteira de  $\Omega_h^1$ , e este domínio necessariamente contém ao menos um elemento tendo exatamente um vértice que não pertence à fronteira em que possivelmente  $\vec{u}_h$  é não nulo. Mais precisamente tal elemento tem uma face comum com um elemento de  $\Omega - \Omega_h^1$  e um vértice no interior de  $\Omega_h^1$ . Seja então  $\Gamma_h^2$  a união de tais elementos. Dessa forma, aplicamos a mesma construção para os elementos de  $\Gamma_h^1$ , para os de  $\Gamma_h^2$  e por meio disso estabelecemos que  $\vec{u}_h$  se anula identicamente em  $\Gamma_h^2$ também. Novamente, ficamos com um subdomínio  $\Omega_h^2 \not\subseteq \Omega_h^1 \not\subseteq \Omega$ , isto é a união de todos os elementos de  $\Omega_h^1$  em que possivelmente  $\vec{u}_h$  não se anula identicamente. Se  $\Omega_h^2$  é nulo, a prova está completa. Caso contrário, o procedimento continua da mesma maneira até que alcancemos um domínio  $\Omega_h^r \not\subseteq \Omega_h^{r-1} \cdots \not\subseteq \Omega_h^1 \not\subseteq \Omega$  para um certo interior r, que não contém tais elementos, que tem mais do que um vértice que não pertence à sua fronteira, onde possivelmente  $\vec{u}_h$  é não nulo. Finalmente tratando todos os elementos de  $\Omega_h^r$  da mesma maneira como os de  $\Gamma_h^1$ , estabelecemos que  $\vec{u}_h \equiv \vec{0}$  em toda a parte de  $\Omega$ .

**Teorema 4.4.1** Para todo  $\Delta t > 0$  a solução  $(\vec{u}_h^n, p_h^n, \sigma_h^n)$  de (4.17) converge para a solução  $(\bar{\vec{u}}_h, \bar{p}_h, \bar{\sigma}_h)$  de (4.20) na norma de  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)^{N \times N}$ , quando n tende ao infinito.

PROVA. Primeiro consideramos  $\bar{\vec{u}}_h^n = \vec{u}_h^n - \bar{\vec{u}}_h$ ,  $\bar{p}_h^n = p_h^n - \bar{p}_h$ ,  $\bar{\sigma}_h^n = \sigma_h^n - \bar{\sigma}_h$  e tomamos  $q = \bar{p}_h^n$ ,  $\vec{v} = \bar{\vec{u}}_h^n$  e  $\tau = \bar{\sigma}_h^n$  em ambas (4.17) e (4.20), obtendo após algumas combinações, as relações dadas por:

$$\frac{2\eta}{\lambda+\Delta t} \parallel \bar{u}_h^n \parallel^2 + \parallel \bar{\sigma}_h^n \parallel^2 - \frac{2\eta\Delta t}{\lambda+\Delta t} \left(\nabla \cdot \bar{\sigma}_h^n, \bar{u}_h^n\right) + \frac{2\eta\Delta t}{\lambda+\Delta t} \left(\nabla \bar{p}_h^n, \bar{u}_h^n\right) + \frac{2\eta\Delta t^2}{\lambda+\Delta t} \parallel \nabla \cdot \bar{\sigma}_h^n - \nabla \bar{p}_h^n \parallel = \frac{2\eta}{\lambda+\Delta t} \left(\bar{u}_h^{n-1}, \bar{u}_h^n\right) + \frac{\lambda}{\lambda+\Delta t} \left(\bar{\sigma}_h^{n-1}, \bar{\sigma}_h^n\right) + \frac{2\eta\Delta t}{\lambda+\Delta t} \left(\bar{u}_h^{n-1}, \nabla \bar{p}_h^n - \nabla \cdot \bar{\sigma}_h^n\right)$$

Fazendo  $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda + \Delta t} e \beta = \frac{2\eta}{\lambda + \Delta t}$ , temos:

$$(1-\alpha) \| \bar{\sigma}_{h}^{n} \|^{2} + \alpha \| \bar{\sigma}_{h}^{n} \|^{2} + \beta \left[ \| \bar{\vec{u}}_{h}^{n} \|^{2} + \Delta t \left( \bar{\vec{u}}_{h}^{n}, \nabla \bar{p}_{h}^{n} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n} \right) + \Delta t^{2} \| \nabla \bar{p}_{h}^{n} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n} \|^{2} \right] \leq \beta \left( \bar{\vec{u}}_{h}^{n-1}, \bar{\vec{u}}_{h}^{n} + \Delta t \left( \nabla \bar{p}_{h}^{n} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n} \right) \right) + \alpha \left( \bar{\sigma}_{h}^{n-1}, \bar{\sigma}_{h}^{n} \right)$$

$$(4.23)$$

De (4.23), após cálculos simples, obtemos para todo n:

$$(1 - \alpha) \| \bar{\sigma}_{h}^{n} \|^{2} + \frac{\alpha}{2} \| \bar{\sigma}_{h}^{n} \|^{2} + \frac{\beta}{2} \left[ \| \bar{\vec{u}}_{h}^{n} \|^{2} + \Delta t^{2} \| \nabla \bar{p}_{h}^{n} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n} \|^{2} \right] \\ \leq \frac{\beta}{2} \| \bar{\vec{u}}_{h}^{n-1} \|^{2} + \frac{\alpha}{2} \| \bar{\sigma}_{h}^{n-1} \|^{2}$$

Isto implica que  $[\beta \parallel \bar{\vec{u}}_h^n \parallel^2 + \alpha \parallel \bar{\sigma}_h^n \parallel^2]/2$  é uma seqüência decrescente de números positivos e dessa forma, é convergente. Portanto, visto que  $0 < \alpha < 1$  e  $\beta > 0$  temos  $\parallel \bar{\sigma}_h^n \parallel \rightarrow 0$  e  $\parallel \nabla \bar{p}_h^n - \nabla \cdot \bar{\sigma}_h^n \parallel \rightarrow 0$ , o que implica que  $\parallel \bar{p}_h^n \parallel \rightarrow 0$ , uma vez que  $\bar{p}_h^n \in L^2_0(\Omega)$  para todo n.

Enfim para provar a convergência de  $\overline{\vec{u}}_h^n$  para zero, empregamos um argumento similar ao utilizado na Proposição 4.4.1. De fato, da convergência para zero de  $\overline{\sigma}_h^n$  e  $\overline{p}_h^n$ , deduzimos de (4.20) e (4.17) que

$$(\vec{u}_h^n, \nabla \cdot \tau - \nabla q) \to 0 \quad \forall (q, \tau) \in (Q_h, \Sigma_h).$$

Então fazendo q = 0 e  $\tau = \tau_P^i$  (cf. Proposição 4.4.1), e percorrendo a malha da maneira indicada na prova daquele resultado, obtemos  $\overline{\vec{u}}_h^n(P) \to 0$  para todo vértice P da malha, o que conclui a prova.

A seguir, provamos o seguinte resultado de convergência:

**Teorema 4.4.2** Suponhamos que a solução de (4.6) pertença a  $H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)^N \times H^2(\Omega)^{N \times N}$  para todo n. Então quando h tende a zero, a solução  $(\bar{p}_h, \bar{\vec{u}}_h, \bar{\sigma}_h)$  de (4.20) converge para a solução  $(\bar{p}, \bar{\vec{u}}, \bar{\sigma})$  de (4.7) em  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)^{N \times N}$ .

PROVA. Sejam  $W = (\bar{p}, \bar{\vec{u}}, \bar{\sigma}) \in W_h = (\bar{p}_h, \bar{\vec{u}}_h, \bar{\sigma}_h)$ . Além disso, fazemos  $W^n = (\bar{p}^n, \bar{\vec{u}}^n, \bar{\sigma}^n)$  $e W_h^n = (\bar{p}_h^n, \bar{\vec{u}}_h^n, \bar{\sigma}_h^n)$ . Denotando por  $\|\cdot\|$  a norma de  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^N \times L^2(\Omega)^{N \times N}$ , temos:

$$|| W - W_h || \le || W - W^n || + || W^n - W_h^n || + || W_h^n - W_h ||$$

Agora para um dado  $\varepsilon > 0$  escolhemos n de tal maneira que  $|| W - W^n || < \varepsilon/3$  e  $|| W_h^n - W_h || < \varepsilon/3$ , o que é possível de acordo com os teoremas 4.2.1 e 4.4.1. Em seguida, para cada n escolhemos h de tal forma que  $|| W^n - W_h^n || < \varepsilon/3$ , o que é possível de acordo com as nossas hipóteses de regularidade e do teorema 4.3.1. Isto significa que para todo  $\varepsilon > 0$ , podemos escolher h de tal maneira que,  $|| W - W_h || < \varepsilon$ , o que demonstra o resultado.

Uma vez explanados os principais resultados da análise de convergência para o caso estacionário, passamos ao caso evolutivo na próxima seção.

## 4.5 O caso dos problemas evolutivos

Baseado na Seção 4.1, consideramos aqui, também como modelo, um fluido de Maxwell convectado superior, no domínio  $\Omega$ , definido anteriormente. Dessa forma, dada uma velocidade solenoidal  $\vec{u}^0$  e uma tensão-extra  $\sigma^0$  no tempo t = 0; para t > 0, o escoamento é governado pelo seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} - \nabla \cdot \sigma + \nabla p = \vec{f} \\
\sigma + \lambda \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \sigma - (\nabla \vec{u}) \sigma - \sigma (\nabla \vec{u})^T \right] = 2\eta D(\vec{u}) \\
\nabla \cdot \vec{u} = 0$$
em  $\Omega \times (0, T)$  (4.24)

onde T é um dado instante final e a densidade do líquido é suposta ser igual a um.

Agora, consideramos a seguinte discretização semi-implícita do sistema (4.24) no tempo que é em tudo análoga a (4.4), sendo que agora escolhemos o passo de tempo da forma  $\Delta t = T/M$ , sendo M um inteiro estritamente positivo. Denotando por  $\vec{u}^n$ ,  $p^n$ e  $\sigma^n$ , as aproximações de  $\vec{u}(n\Delta t)$ ,  $p(n\Delta t)$ ,  $\sigma(n\Delta t)$ , respectivamente, para todo inteiro estritamente positivo n, passamos à resolução de (4.4) partindo dos dados  $\vec{u}^0 \in \sigma^0$ . Como descrito na seção 4.1, para o caso estacionário, a partir do sistema (4.24), obtemos por linearização, o sistema de Stokes Generalizado, já mencionado e relembrado abaixo:

De um dado estado, no tempo t = 0, definido por uma velocidade solenoidal  $\vec{u}^0$  e uma tensão-extra  $\sigma^0$ , para t > 0, encontrar  $\vec{u}$ , p,  $\sigma$ , que resolvam o seguinte sistema, com  $\vec{u} = \vec{g}$  em  $\Gamma \times (0, T)$ :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \nabla \cdot \sigma + \nabla p = \vec{f} 
\sigma + \lambda \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 2\eta D(\vec{u}) 
\nabla \cdot \vec{u} = 0$$
em  $\Omega \times (0, T).$ 
(4.25)

**Observação 4.5.1** Nota-se que para satisfazer o princípio da objetividade (cf. [3]), o sistema (4.25) deve contemplar apenas uma descrição lagrangeana do movimento. Isso significa que, rigorosamente, ele deve ser visto como um sistema que descreve pequenas deformações de um sólido viscoelástico de Maxwell, do ponto de vista estritamente físico.

Partindo de (4.25), podemos apresentar a discretização implícita no tempo, descrita como segue:

Começando de  $\vec{u}^0 e \sigma^0$ , para n = 1, 2, ..., determinamos aproximações de  $\vec{u}(n\Delta t)$ ,  $p(n\Delta t)$ e  $\sigma(n\Delta t)$ , denotadas por  $\vec{u}^n$ ,  $p^n e \sigma^n$  respectivamente, como solução do seguinte problema:

$$\frac{\vec{u}^n - \vec{u}^{n-1}}{\Delta t} - \nabla \cdot \sigma^n + \nabla p^n = \vec{f}^n \\
\sigma^n + \lambda \left( \frac{\sigma^n - \sigma^{n-1}}{\Delta t} \right) = 2\eta D(\vec{u}^n) \\
\nabla \cdot \vec{u}^n = 0$$
em Ω. (4.26)

$$\vec{u}^n = \vec{g}^n \, \mathrm{em} \, \Gamma \tag{4.27}$$

Ainda denotamos por  $\|\cdot\|_m$  a norma padrão de  $H^m(\Omega)$  para  $m \in \mathbb{N}$  e por  $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$  a norma padrão de  $H^s(\Gamma)$  para  $s \in \mathbb{R}$  (cf. [1]), ambas na versão escalar ou não. O sistema (4.26)-(4.27) pode ser escrito na seguinte forma variacional equivalente:

$$\begin{aligned} & \Delta t^{2}(\nabla p^{n} - \nabla \cdot \sigma^{n}, \nabla q) = \Delta t^{2}(\vec{f^{n}}, \nabla q) + \Delta t(\vec{u^{n-1}}, \nabla q) - \\ & \Delta t < \vec{g^{n}}, q\vec{\nu} >_{1/2,\partial\Omega} \quad \forall q \in Q, \end{aligned}$$

$$(\vec{u^{n}} - \Delta t(\nabla \cdot \sigma^{n} - \nabla p^{n}), \vec{v}) = (\vec{u^{n-1}} + \Delta t\vec{f^{n}}, \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t + \lambda}{2\eta}(\sigma^{n}, \tau) + \Delta t^{2}(\nabla \cdot \sigma^{n} - \nabla p^{n}, \nabla \cdot \tau) = \frac{\lambda}{2\eta}(\sigma^{n-1}, \tau) - \\ & \Delta t^{2}(\vec{f^{n}}, \nabla \cdot \tau) - \Delta t(\vec{u^{n-1}}, \nabla \cdot \tau) + \Delta t < \vec{g^{n}}, \tau\vec{\nu} >_{1/2,\partial\Omega} \quad \forall \tau \in \Sigma. \end{aligned}$$

$$(4.28)$$

onde relembramos que  $Q := H^1(\Omega) \cap L^2_0(\Omega)$ , com  $L^2_0(\Omega) := \{q \mid q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q \, dx = 0\},$  $V = L^2(\Omega)^N \in \Sigma := \{\sigma, \sigma \in H(\operatorname{div}, \Omega)^N \in \sigma = \sigma^{\mathrm{T}}\}$  (cf. [30]).

**Proposição 4.5.1** Os sistemas (4.26)-(4.27) e (4.28) são equivalentes.

PROVA. Vamos primeiro provar que (4.26)-(4.27) implica em (4.28): Para iniciar observamos que a segunda equação de (4.28) é nada mais do que a primeira equação de (4.26) testada com  $\vec{v} \in V$ . Por outro lado, a terceira equação de (4.28) resulta da terceira equação de (4.26) testada com  $\tau \in \sum$ , com a adição de termos que resultam da primeira equação de (4.26) testada com  $\Delta t^2 \nabla \cdot \tau \in V$  (isto adiciona positividade e tem por função estabilizar o problema, similarmente ao realizado em trabalhos prévios tais como [25] e [28]); Usando também uma identidade bem conhecida para substituir o termo  $\Delta t(\vec{u}^n, \nabla \cdot \tau)$  por  $\Delta t[-(D(\vec{u}^n), \tau) + \langle \vec{g}^n, \tau \vec{\nu} \rangle_{1/2, \partial\Omega}]$ . Finalmente a primeira equação de (4.28) é obtida pelo teste da primeira equação de (4.26) com  $\Delta t^2 \nabla q \in V$ . Percebe-se que, a partir da segunda equação de (4.26) juntamente a equação (4.27), temos  $\Delta t(\vec{u}^n, \nabla q) = \Delta t \langle \vec{g}^n, q\vec{\nu} \rangle_{1/2, \partial\Omega} \forall q \in Q$ , de acordo com a fórmula de Green recordada no final da segunda parte da prova.

Em seguida, provamos que (4.28) implica em (4.26)-(4.27). Da segunda equação de (4.28) estabelecemos que a primeira equação de (4.26) se verifica. Agora para obter a terceira equação de (4.26), primeiro utilizamos da terceira equação de (4.28),  $\tau \in$  $\sum \cap \mathscr{D}(\Omega)^N$  sendo  $\mathscr{D}(\Omega)$  o espaço de funções-teste de distribuições Schwartz (veja exemplos em [36]). Feito isso podemos adicionar ao lado direito desta equação o termo  $\Delta t[(D(\vec{u}^n, \tau) - (\vec{u}^n, \nabla \cdot \tau)]$  que é igual a zero, de propriedade bem conhecida de distruições Schwartz. Dado que o termo dualidade da relação resultante necessariamente se

anula, tirando os termos correspondentes da primeira equação de (4.26) testados com  $\Delta t^2 \nabla \cdot \tau \in \mathscr{D}(\Omega)^N$ , prontamente estabelecemos que a terceira equação de (4.26) se verifica. Por outro lado, esta equação junto com a primeira inequação de Korn (veja em [21]), implica que  $\vec{u}^n$  é necessariamente um campo de  $H^1(\Omega)^N$  e assim por propriedades bem conhecidas deste espaço (ver em [1]), o traço de  $\vec{u}^n$  em  $\partial \Omega$  pertence a  $H^{1/2}(\partial\Omega)^N$ . Retornando a terceira equação de (4.28) e tomando desta vez tensores arbitrários  $\tau \in \sum$ , simples manipulações combinadas com as conclusões anteriores implicam que  $\Delta t [\langle \vec{g}^n - \vec{u}^n, \tau \vec{\nu} \rangle_{1/2, \partial \Omega}] = \vec{0}, \forall \tau \in \Sigma$ . Agora, usando o teorema do traço para  $H(div, \Omega) \text{ em } [30]$ , notamos que por escolhas convenientes das componentes de  $\tau$  podemos gerar qualquer vetor  $\vec{w} \in H^{-1/2}(\partial \Omega)^N$  representado na forma  $\tau \vec{\nu}$  para  $\tau \in \Sigma$ . Imediatamente segue que (4.27) se verifica. Finalmente, a primeira equação de (4.28) é nada mais do que a primeira equação de (4.26) testada com  $\Delta t^2 \nabla q \in V$ , exceto para o termo  $\Delta t(\vec{u^n}, \nabla q)$ , o qual é substituído por  $\Delta t < \vec{g^n}, q\vec{\nu} >_{1/2,\partial\Omega}$ . Desta maneira, a segunda equação de (4.26) resulta da combinação das duas primeiras equações de (4.28) e graças a (4.27) e a bem-conhecida Fórmula de Green  $(\vec{u}^n, \nabla q) = \langle \vec{u}^n, q\vec{\nu} \rangle_{1/2,\partial\Omega} - (\nabla \cdot \vec{u}^n, q),$  $\forall q \in Q.$ 

Na verdade, comparando estas duas relações, podemos ver prontamente que  $(\nabla \cdot \vec{u}^n, q) = 0, \forall q \in Q$  e portanto por densidade, para todo  $q \in L^2_0(\Omega)$ . Partindo de que  $\nabla \cdot \vec{u}^n \in L^2_0(\Omega)$  e tendo como fato que  $\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{u}^n dx = \int_{\partial\Omega} \vec{g}^n \cdot \vec{\nu} dS = 0$ , podemos tomar  $q = \nabla \cdot \vec{u}^n \in L^2_0(\Omega)$ , o que implica que  $\nabla \cdot \vec{u}^n = 0$  em  $\Omega$  e que completa a prova.

Tendo por base os espaços ou subespaços associados a  $\mathcal{T}_h$  em (4.16), e as condições verificadas por  $u_h^0$ ,  $\sigma_h^0$  para todo vértice  $\wp$  de  $\mathcal{T}_h$ , definimos temporariamente o seguinte problema para aproximar (4.28), ou ainda, (4.26)-(4.27), para todo  $n, n = 1, 2, \ldots, M$ :

$$\begin{aligned} & \text{Encontrar } p_h^n \in Q_h, \vec{u}_h^n \in V_h, \text{ e } \sigma_h^n \in \Sigma_h \text{ tais que} \\ & (\nabla p_h^n - \nabla \cdot \sigma_h^n, \nabla q) = \left(\vec{f^n}, \nabla q\right) + \frac{1}{\Delta t} \left(\vec{u}_h^{n-1}, \nabla q\right) - \\ & \frac{1}{\Delta t} < \vec{g^n}, q\vec{\nu} >_{1/2,\Gamma}, \quad \forall q \in Q_h, \\ & (\vec{u}_h^n - \Delta t \left(\nabla \cdot \sigma_h^n - \nabla p_h^n\right), \vec{v}) = \left(\vec{u}_h^{n-1} + \Delta t \vec{f^n}, \vec{v}\right), \quad \forall \vec{v} \in V_h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t + \lambda}{2\eta} \left(\sigma_h^n, \tau\right) + \Delta t^2 \left(\nabla \cdot \sigma_h^n - \nabla p_h^n, \nabla \cdot \tau\right) = \frac{\lambda}{2\eta} \left(\sigma_h^{n-1}, \tau\right) - \\ & \Delta t^2 \left(\vec{f^n}, \nabla \cdot \tau\right) - \Delta t \left(\vec{u}_h^{n-1}, \nabla \cdot \tau\right) + \Delta t < \vec{g^n}, \tau \vec{\nu} >_{1/2,\Gamma} \quad \forall \tau \in \Sigma_h. \end{aligned}$$

Com respeito a esse sistema, o seguinte resultado foi provado em [10]:

#### **Proposição 4.5.2** O Problema (4.29) tem solução única para todo $\Delta t$ e para todo n.

Com vistas a uma resolução explícita das duas últimas equações de (4.29), conforme veremos mais adiante, trabalhamos com a técnica de condensação de massa (mass lumping) para termos do tipo  $(\varphi, \psi)$ , onde  $\varphi \in \psi$  são ambas velocidades ou tensores de tensão, que supomos pertencerem a  $L^2(\Omega)^L$ ,  $L \in \mathbb{N}$ . Como se sabe essa técnica tem origem em um produto interno aproximado  $(\varphi, \psi)_h$  obtido da aplicação da regra trapezoidal em cada N simplex de  $\mathcal{T}_h$ , se ambos os argumentos pertencerem a  $(S_h)^L$ . Mais especificamente, denotando por  $\pi_1^K$  o operador projeção padrão de  $L^2(K)^L$  em  $P_1(K)^L$ , com respeito ao produto interno padrão de  $L^2(K)$ , definimos:

$$(\varphi, \psi)_h := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\varphi, \psi)_K, \text{ com } (\varphi, \psi)_K := \frac{medida(K)}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} [\pi_1^K(\varphi_{/K}) \cdot \pi_1^K(\psi_{/K})](S_i^K),$$
(4.30)

 $S_i^K$  sendo os vértices de N-simplex K, i = 1, ..., N + 1. Além disso, definimos para  $\varphi, \psi \in L^2(\Omega)^L$ ,  $\|\varphi\|_h := (\varphi, \varphi)_h^{1/2} \in \epsilon_h(\varphi, \psi) := (\varphi, \psi)_h - (\varphi, \psi).$ 

Em seguida provamos um lema para funções escalares, o que obviamente se estende ao caso de campos de qualquer tipo:

**Lema 4.5.1**  $\forall u \in S_h$ ,  $\epsilon_h(u, u) \ge 0$ . Se  $\epsilon_h(u, u) = 0$  então u é constante em todo  $\Omega$  e a seguinte relação se verifica:

$$\frac{1}{\sqrt{N+2}}||u||_h \leq ||u|| \,\forall u \in S_h.$$

$$(4.31)$$

PROVA. Uma vez que  $\pi_1^K(u) = u_{/K}$  se  $u \in S_h$ , definindo  $\epsilon_K(u, v)$  como:

$$\epsilon_K(u,v) := \sum_{i=1}^{N+1} \frac{u_i^K v_i^K}{N+1} medida(K) - \int_K u_{/K} v_{/K} dx$$
(4.32)

temos  $\epsilon_h(u, u) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \epsilon_K(u, u)$  onde  $u_i^K = u(S_i^K)$  e  $v_i^K = v(S_i^K)$ . Sabemos que  $u_{/K} = \sum_{i=1}^{N+1} u_i^K \lambda_i^K$  e  $v_{/K} = \sum_{j=1}^{N+1} v_j^K \lambda_j^K$  onde  $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \dots, \lambda_{N+1}^K$  são as coordenadas baricêntricas de K. Assim, temos (cf. [54]):

$$\int_{K} u_{/K}^{2} dx = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^{N+1} u_{i}^{K} u_{j}^{K} \int_{K} \lambda_{i}^{K} \lambda_{j}^{K} dx = \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=i}^{N+1} u_{i}^{K} u_{j}^{K} \frac{2 \ medida(K)}{(N+1)(N+2)}$$

Assim, após cálculos simples, obtemos:

$$\epsilon_K(u_{/K}, u_{/K}) = (N+1) \int_K u_{/K}^2 dx - \frac{medida(K)}{N+1} \left(\sum_{j=1}^{N+1} u_j^K\right)^2$$
(4.33)

que prontamente resulta em (4.31). Por outro lado, para  $\vec{e} = (e_1, e_2, \dots, e_{N+1})$  com  $e_j = 1, \forall j$  temos:

$$\left(\sum_{j=1}^{N+1} u_j^K\right)^2 \le \sum_{j=1}^{N+1} \left(u_j^K\right)^2 \sum_{j=1}^{N+1} e_j^2 \tag{4.34}$$

Aplicando (4.34) em (4.33) e depois realizando algumas manipulações elementares, concluimos que  $\epsilon_K(u_{/K}, u_{/K}) \ge 0 \ \forall K \in \mathcal{T}_h$ , isto é,  $\epsilon_h(u, u) \ge 0$ . Finalmente, se  $\epsilon_h(u, u) = 0$ , necessariamente de (4.34),  $\left(\sum_{j=1}^{N+1} u_j^K e_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{N+1} (u_j^K)^2 \sum_{j=1}^{N+1} e_j^2$ . Mas neste caso  $\vec{u}^K :=$  $(u_1^K, u_2^K, ..., u_{N+1}^K)$  é paralelo a  $\vec{e}$  e assim u é constante em K. Como u é contínuo, deve ser constante em todo  $\Omega$ .

Agora, podemos considerar uma versão *lumped mass* (condensação de massa) do sistema (4.29), dada por:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } p_h^n \in Q_h, \vec{u}_h^n \in V_h, \text{ e } \sigma_h^n \in \Sigma_h \text{ tais que} \\ \Delta t^2 \left[ (\nabla p_h^n, \nabla q) - (\nabla \cdot \sigma_h^n, \nabla q) \right] = \Delta t^2 (\vec{f}_h^n, \nabla q) + \Delta t (\vec{u}_h^{n-1}, \nabla q) \\ -\Delta t < \vec{g}_h^n, q\vec{\nu} >_{1/2, \Gamma} \quad \forall q \in Q_h, \end{cases}$$

$$(4.35)$$

$$(\vec{u}_h^n, \vec{v})_h + \Delta t \left[ (\nabla p_h^n, \vec{v}) - (\nabla \cdot \sigma_h^n, \vec{v}) \right] = (\vec{u}_h^{n-1}, \vec{v})_h + \Delta t (\vec{f}_h^n, \vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in V_h, \end{cases}$$

$$\frac{\Delta t + \lambda}{2\eta} (\sigma_h^n, \tau)_h + \Delta t^2 \left[ (\nabla \cdot \sigma_h^n, \nabla \cdot \tau) - (\nabla p_h^n, \nabla \cdot \tau) \right] = \frac{\lambda}{2\eta} (\sigma_h^{n-1}, \tau)_h - \Delta t^2 (\vec{f}_h^n, \nabla \cdot \tau) - \Delta t (\vec{u}_h^{n-1}, \nabla \cdot \tau) + \Delta t < \vec{g}_h^n, \tau \vec{\nu} >_{1/2, \Gamma} \quad \forall \tau \in \Sigma_h. \end{cases}$$

onde  $\vec{g}_h^n$  e  $\vec{f}_h^n$  são aproximações adequadas de  $\vec{g}^n$  e  $\vec{f^n}$ .

**Proposição 4.5.3** Dados  $\vec{u}_h^{n-1}$ ,  $\sigma_h^{n-1}$ ,  $\vec{f}_h^n$ ,  $\vec{g}_h^n$ , o problema (4.35) tem solução única

 $(p_h^n, \vec{u}_h^n, \sigma_h^n).$ 

PROVA. Uma vez que  $Q_h, V_h \in \sum_h$ , sejam espaços de dimensão finita e (4.35) seja equivalente a um sistema linear de  $J_h$  equações, com  $J_h$  incógnitas, onde  $J_h = \dim Q_h + \dim V_h + \dim \sum_h$ , basta provar que se  $f_h^n = 0, g_n = g_h^n = 0, u_h^{n-1} = 0$  e  $\sigma_h^{n-1} = \mathcal{O}$ , isso implicará em  $p_h^n = 0, u_h^n = 0, \sigma_h^n = \mathcal{O}$ , onde  $\mathcal{O}$  denota o tensor nulo.

Sob esta hipótese, tomamos  $q = p_h^n \in Q_h$ ,  $\vec{v} = \vec{u}_h^n \in \vec{V}_h$  e  $\tau = \sigma_h^n$ . O que resulta no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \Delta t^{2} (\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}, \nabla p_{h}^{n}) = 0 \\ \|\vec{u}_{h}^{n}\|_{h}^{2} + \Delta t (\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}, \vec{u}_{h}^{n}) = 0 \\ \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} \|\sigma_{h}^{n}\|_{h}^{2} + \Delta t^{2} (\nabla \cdot \sigma_{h}^{n} - \nabla p_{h}^{n}, \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}) = 0 \end{cases}$$

$$(4.36)$$

Somando-se as três relações anteriores, é facilmente visto que

$$\Delta t^2 \|\nabla p_h^n - \nabla \cdot \sigma_h^n\|^2 + \|\vec{u}_h^n\|_h^2 + \frac{\lambda + \Delta t}{\eta} \|\sigma_h^n\|_h^2 + \|\Delta t(\nabla p_h^n - \nabla \cdot \sigma_h^n) + \vec{u}_h^n\|^2 + \epsilon_h(\vec{u}_h^n, \vec{u}_h^n) = 0.$$

Isto trivialmente leva a  $\vec{u}_h^n = \vec{0}, \sigma_h^n = \mathcal{O} \in \nabla p_h^n = \vec{0}$ . E uma vez que  $p_h^n \in L^2_0(\Omega)$ , temos também que  $p_h^n = 0$ .

A seguir, apresentamos uma versão do algoritmo dito de iteração interna (*inner iteration*), já considerado nesta seção, desta vez para resolver explicitamente o sistema (4.35) a cada passo de tempo, no que tange à velocidade e a tensão-extra:

Definimos para todo  $n \ge 0$ ,  $\sigma_h^{n,0} = \sigma_h^{n-1}$ . Então para  $s = 1, 2, \ldots$  determinamos aproximações  $p_h^{n,s} \in Q_h$ ,  $\vec{u}_h^{n,s} \in \vec{V}_h$  and  $\sigma_h^{n,s} \in \Sigma_h$  de  $p_h^n$ ,  $\vec{u}_h^n \in \sigma_h^n$  resolvendo sucessivamente

o seguinte problema:

$$\begin{cases} \Delta t^{2}(\nabla p_{h}^{n,s},\nabla q) = \Delta t^{2}[(\vec{f}_{h}^{n},\nabla q) + (\nabla \cdot \sigma_{h}^{n,s-1},\nabla q)] + \Delta t(\vec{u}_{h}^{n-1},\nabla q) - \\ \Delta t < \vec{g}_{h}^{n}, q\vec{\nu} >_{1/2,\Gamma} \quad \forall q \in Q_{h} \\ (\vec{u}_{h}^{n,s},\vec{v})_{h} = \Delta t(\vec{f}_{h}^{n} + \nabla \cdot \sigma_{h}^{n,s-1} - \nabla p_{h}^{n,s},\vec{v}) + (\vec{u}_{h}^{n-1},\vec{v})_{h} \quad \forall \vec{v} \in V_{h} \\ \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} (\sigma_{h}^{n,s},\tau)_{h} = \frac{\lambda}{2\eta} (\sigma_{h}^{n,s-1},\tau)_{h} - \Delta t^{2} (\vec{f}_{h}^{n} + \nabla \cdot \sigma_{h}^{n,s-1} - \nabla p_{h}^{n,s},\nabla \cdot \tau) - \\ \Delta t \left[ (\vec{u}_{h}^{n-1},\nabla \cdot \tau) - < \vec{g}_{h}^{n}, \tau\vec{\nu} >_{1/2,\Gamma} \right] \quad \forall \tau \in \Sigma_{h} \end{cases}$$

$$(4.37)$$

Este algoritmo não é passível de gerar sequências convergentes de aproximações de  $(p^n, \vec{u}^n, \sigma^n)$ quando s tende ao infinito no caso contínuo análogo (4.28). No entanto, aqui ele é aplicado no contexto do caso discreto de (4.28), ou seja, (4.29) onde  $Q, \vec{V} \in \Sigma$  são substituídos por espaços de dimensão finita  $Q_h, \vec{V}_h \in \Sigma_h$ , para os quais a desigualdade inversa clássica se verifica. Com base nessa desigualdade para os espaços  $Q_h, \vec{V}_h \in \Sigma_h$  (cf. CIARLET [16]), pode-se afirmar que existe uma constante C independente de h tal que

$$\mid \nabla \cdot \tau \parallel \leq \frac{C_I}{h} \parallel \tau \parallel \quad \forall \tau \in \Sigma_h.$$

$$(4.38)$$

Desta forma, fomos capazes de provar em [12] a seguinte proposição:

**Proposição 4.5.4** Seja  $\varepsilon$  um parâmetro satisfazendo  $0 < \varepsilon \leq 1$ , e C a constante da desigualdade inversa (4.38). Contanto que  $\Delta t$  seja escolhido de tal forma que

$$\Delta t \le \frac{h}{C} \sqrt{\frac{\lambda \varepsilon}{2\eta (1+\varepsilon)}},\tag{4.39}$$

A sequência  $\{(p_h^{n,s}, \vec{u}_h^{n,s}, \sigma_h^{n,s})\}_s$  definida por (4.37) converge para a solução  $(p_h^n, \vec{u}_h^n, \sigma_h^n)$  de (4.35) em  $Q_h \times \vec{V}_h \times \Sigma_h$  quando s tende ao infinito.

PROVA. Vamos definir  $\overline{\vec{u}}_h^{n,s} := \vec{u}_h^{n,s} - \vec{u}_h^n$ ;  $\overline{p}_h^{n,s} := p_h^{n,s} - p_h^n$ ;  $\overline{\sigma}_h^{n,s} := \sigma_h^{n,s} - \sigma_h^n$ 

Comparando (4.35) e (4.37),  $\bar{\vec{u}}_h^{n,s}$ ,  $\bar{p}_h^{n,s}$  e  $\bar{\sigma}_h^{n,s}$  são facilmente encontrados, os quais verificam:

$$\begin{split} \Delta t^2 (\nabla \bar{p}_h^{n,s}, \nabla q) &= \Delta t^2 (\nabla \cdot \bar{\sigma}_h^{n,s-1}, \nabla q) \; \forall q \in Q_h \\ (\bar{\vec{u}}_h^{n,s}, \vec{v})_h &= -\Delta t (\nabla \bar{p}_h^{n,s}, \vec{v}) + \Delta t (\nabla \cdot \bar{\sigma}_h^{n,s-1}, \vec{v}) \; \forall \vec{v} \in \vec{V}_h \\ \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} (\bar{\sigma}_h^{n,s}, \tau)_h &= \Delta t^2 (\nabla \bar{p}_h^{n,s}, \nabla \cdot \tau) - \Delta t^2 (\nabla \cdot \bar{\sigma}_h^{n,s-1}, \nabla \cdot \tau) \; \forall \vec{\tau} \in \Sigma_h \end{split}$$

$$\end{split}$$

Tomando  $\vec{v} = \bar{\vec{u}}_h^{n,s}, \ q = \bar{p}_h^{n,s}$  and  $\vec{\tau} = \bar{\vec{\sigma}}_h^{n,s}$ , obtemos :

$$\begin{cases} \Delta t^2 \|\nabla \bar{p}_h^{n,s}\|^2 = \Delta t^2 (\nabla \cdot \bar{\sigma}_h^{n,s-1}, \nabla \bar{p}_h^{n,s}) \\ \|\bar{u}_h^{n,s}\|_h^2 = -\Delta t (\nabla \bar{p}_h^{n,s}, \bar{u}_h^{n,s}) + \Delta t (\nabla \cdot \bar{\sigma}_h^{n,s-1}, \bar{u}_h^{n,s}) \\ \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} \|\bar{\sigma}_h^{n,s}\|_h^2 = \Delta t^2 (\nabla \bar{p}_h^{n,s}, \nabla \cdot \bar{\sigma}_h^{n,s}) - \Delta t^2 (\nabla \cdot \bar{\sigma}_h^{n,s-1}, \nabla \cdot \bar{\sigma}_h^{n,s}) \end{cases}$$
(4.41)

Somando-se as três relações em (4.41), obtemos:

$$\Delta t^{2} \|\nabla \bar{p}_{h}^{n,s}\|^{2} - \Delta t^{2} (\nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s-1}, \nabla \bar{p}_{h}^{n,s}) + \|\bar{\vec{u}}_{h}^{n,s}\|_{h}^{2} + \Delta t (\nabla \bar{p}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s-1}, \bar{\vec{u}}_{h}^{n,s})$$
$$- \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} \|\bar{\sigma}_{h}^{n,s}\|_{h}^{2} + \Delta t^{2} (\nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s-1}, \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}) - \Delta t^{2} (\nabla \bar{p}_{h}^{n,s}, \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}) = 0$$
(4.42)

o que resulta em:

$$\Delta t^{2} \|\nabla \bar{p}_{h}^{n,s}\|^{2} - 2\Delta t^{2} (\nabla \bar{p}_{h}^{n,s}, \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}) + \Delta t^{2} (\nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s-1}, \nabla \bar{p}_{h}^{n,s}) + \Delta t^{2} \|\nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}\|^{2} - \Delta t^{2} (\nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s-1}, \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}) + \Delta t (\nabla \bar{p}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}, \bar{u}_{h}^{n,s}) + \|\bar{u}_{h}^{n,s}\|_{h}^{2} + \Delta t (\nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s-1}, \bar{u}_{h}^{n,s}) + \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} \|\bar{\sigma}_{h}^{n,s}\|_{h}^{2} = 0$$

$$(4.43)$$

Segue-se que:

$$\Delta t^{2} \|\nabla \bar{p}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}\|^{2} + \left\|\bar{\vec{u}}_{h}^{n,s}\right\|_{h}^{2} + \Delta t (\nabla \bar{p}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}, \bar{\vec{u}}_{h}^{n,s}) + \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} \|\bar{\sigma}_{h}^{n,s}\|_{h}^{2} = -\Delta t (\nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s-1}, \bar{\vec{u}}_{h}^{n,s} + \Delta t (\nabla \bar{p}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s})) (4.44)$$

Partindo do fato de que  $(f,g) \leq \frac{1}{2} [ ||f||^2 + ||g||^2 ], \forall f, g$ , podemos escrever que:

$$\frac{\Delta t^{2}}{2} \|\nabla \bar{p}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}\|^{2} + \frac{1}{2} \|\bar{\bar{u}}_{h}^{n,s}\|_{h}^{2} + \frac{1}{2} \|\bar{\bar{u}}_{h}^{n,s} + \Delta t \left(\nabla \bar{p}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}\right)\|^{2} \\
+ \frac{1}{2} \epsilon_{h} (\bar{\bar{u}}_{h}^{n,s}, \bar{\bar{u}}_{h}^{n,s}) + \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} \|\bar{\sigma}_{h}^{n,s}\|_{h}^{2} \leq \frac{1}{2} \Delta t^{2} ||\nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s-1}||^{2} \\
+ \frac{1}{2} ||\bar{\bar{u}}_{h}^{n,s} + \Delta t (\nabla \bar{p}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s})||^{2}$$
(4.45)

Além disso, devido ao Lema 4.5.1, temos:

$$\Delta t^{2} \left\| \nabla \bar{p}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s} \right\|^{2} + \left\| \bar{\bar{u}}_{h}^{n,s} \right\|_{h}^{2} + \frac{\lambda + \Delta t}{\eta} \left\| \bar{\sigma}_{h}^{n,s} \right\|_{h}^{2}$$

$$\leq \Delta t^{2} \left\| \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s-1} \right\|^{2}.$$
(4.46)

o que nos dá:

$$\Delta t^{2} \|\nabla \bar{p}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}\|^{2} + \|\bar{\bar{u}}_{h}^{n,s}\|_{h}^{2} + \frac{\lambda + \Delta t}{\eta} \|\bar{\sigma}_{h}^{n,s}\|_{h}^{2} \leq 2\Delta t^{2} \left( ||\nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}||^{2} + ||\nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s-1}||^{2} \right)$$

$$(4.47)$$

Recordando (4.38), vimos que:

$$\Delta t^{2} ||\nabla \bar{p}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}||^{2} + ||\bar{\bar{u}}^{n,s}||_{h}^{2} + \frac{\lambda + \Delta t}{\eta} ||\bar{\sigma}_{h}^{n,s}||_{h}^{2}$$

$$\leq 2\Delta t^{2} \frac{C^{2}}{h^{2}} (||\bar{\sigma}_{h}^{n,s}||^{2} + ||\bar{\sigma}_{h}^{n,s-1}||^{2})$$
(4.48)

ou ainda:

$$\Delta t^{2} ||\nabla \bar{p}_{h}^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n,s}||^{2} + ||\bar{\bar{u}}_{h}^{n,s}||^{2} + \left(\frac{\lambda + \Delta t}{\eta} - 2\frac{C^{2}\Delta t^{2}}{h^{2}}\right) ||\bar{\sigma}_{h}^{n,s}||_{h}^{2} \leq 2\frac{C^{2}\Delta t^{2}}{h^{2}} ||\bar{\sigma}_{h}^{n,s-1}||_{h}^{2}$$

$$(4.49)$$

Agora escolhendo  $a = \frac{2C^2 \Delta t^2}{h^2}$  and  $b = \frac{\lambda}{\eta}$  momentaneamente supomos que  $b \ge a$ . Desta

forma:

$$||\bar{\sigma}_{h}^{n,s}||_{h}^{2} \leq \rho^{2} ||\bar{\sigma}_{h}^{n,s-1}||_{h}^{2} \text{ onde } \rho^{2} = \frac{a}{b-a+\Delta t/\eta}$$
(4.50)

Aplicando (4.50) reiterativamente para s = 1, 2, ... obtemos  $||\bar{\sigma}_h^{n,s}||_h \leq \rho^s ||\bar{\sigma}_h^{n,0}||_h = \rho^s ||\sigma_h^n - \sigma_h^{n-1}||_h$ ,  $\forall s$ . Em seguida, deixando s tender ao infinito,  $||\bar{\sigma}_h^{n,s}||_h$  tenderá a zero se  $\rho < 1$ ; Por (4.38),  $\nabla \cdot \bar{\sigma}_h^{n,s}$  tenderá a zero também.

Em seguida, já que  $\bar{\sigma}_h^{n,s} \to \mathcal{O}$ , temos imediatamente que  $\bar{u}_h^{n,s} \to \vec{0}$  e  $(\nabla \bar{p}_h^{n,s} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_h^{n,s}) \to \vec{0}$ . Portanto,  $\nabla \bar{p}_h^{n,s} \to \vec{0}$ , e assim  $\bar{p}_h^{n,s}$  tende a uma constante. No entanto,  $\bar{p}_h^{n,s} \in L^2_0(\Omega) \ \forall s$  o que implica que  $\bar{p}_h^{n,s}$  tende a zero também.

Finalmente, a fim de assegurar a convergência, devemos ter  $\rho < 1$ . Agora, se  $a \leq \frac{\varepsilon b}{1+\varepsilon}$  necessariamente b > a e  $\frac{a}{b-a} \leq \varepsilon$ . Como resultado, se  $\Delta t$  e h satisfizerem (4.39), então  $\rho^2 < \varepsilon \leq 1$ . E isso completa a prova.

Vale dizer que tal resultado se estende literalmente à versão natural desse algoritmo aplicado à n-ésima iteração da resolução no caso estacionário.

# Capítulo 5

# **Resultados Obtidos**

Neste capítulo apresentamos na seção 5.1 os resultados numéricos obtidos para o caso estacionário, bi- e tri- dimensionais. Na seção 5.2 são apresentados os resultados analíticos para o caso evolutivo, seguida da seção 5.3, onde os resultados numéricos para este caso são dados para duas e três dimensões do espaço.

Apresentamos como parte da seção 5.4, outros testes para problemas envolvendo escoamentos de fluidos viscoelásticos, para uma maior avaliação da funcionalidade da metodologia. Dentre os exemplos trabalhados, está o de um escoamento de Poiseuille de um fluido do tipo power-law, em um quadrante de cilindro e um escoamento de Couette em um dos quadrantes da seção anular, para o mesmo tipo de fluido.

Na seção 5.5 ilustramos os resultados referentes a execução do método em um duto de seção quadrada, com contração suave 2 : 1, para um fluido viscoelástico.

## 5.1 Resultados Numéricos - Caso estacionário

Apresentamos a seguir, os resultados numéricos para dois problemas-teste com soluções analíticas conhecidas, a fim de nos certificarmos da adequação de nossa abordagem numérica para problemas estacionários. Em ambos os testes, os valores iniciais para velocidade e tensão—extra são nulos. Devido à dimensão do domínio do escoamento e aos valores impostos de velocidade, o parâmetro característico  $\lambda$  coincide com o número de Weissenberg para fluidos viscoelásticos (cf [39]), em ambos os testes. Os termos não lineares incluindo o de aceleração foram computados explicitamente a cada iteração.

#### 5.1.1 Experimentos Bidimensionais

Os primeiros experimentos numéricos lidam com o escoamento cisalhante bidimensional com efeitos gravitacionais. As computações foram realizadas com uma malha triangular de elementos finitos construída sobre uma partição uniforme de  $21 \times 21$  quadrados unitários, desse modo gerando 882 triângulos idênticos. O termo de força é dado por  $\vec{f} = (-2, -2)$ . Condições de contorno de deslizamento são consideradas nos nós, situados sobre a placa plana, cuja posição é dada por  $x_1 = 1.0$ . Uma pressão é fixada no nó  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$ . Aqui tomamos valores de  $\Delta t$  iguais a 0.001, 0.01 e 0.05.

A solução analítica para este problema é dada por:

$$u_1 = 0 ; \ u_2 = x_1 ; \ p = -2(x_1 + x_2); \ \sigma_{11} = 0 ; \ \sigma_{12} = \eta ; \ \sigma_{22} = 2\lambda\eta.$$
 (5.1)

Na Tabela 5.1 e na Figura 5.1 os erros máximos de velocidade, de pressão e da tensão—extra são fornecidos para  $\lambda = 1.0$ . Esses erros correspondem aos valores de aproximações calculadas dos campos incógnitos, uma vez atingida a convergência para uma tolerância de  $10^{-7}$ .

| $\Delta t$ | $  \vec{u} - \vec{u}_h  _{max}$ | $  p - p_h  _{max}$ | $  \vec{\sigma} - \vec{\sigma}_h  _{max}$ |
|------------|---------------------------------|---------------------|---|
| 0.001      | 9.2456e-07                      | 1.5467e-5           | 2.7347e-07                                |
| 0.01       | 7.3671e-07                      | 1.6804e-6           | 1.6804 e-06                               |
| 0.05       | 8.3083 e-07                     | 1.7276e-6           | 2.2687 e-07                               |

Tabela 5.1: Erro para um problema linear estacionário com  $\lambda = 1, 0$ 



Figura 5.1: Erro para um problema linear estacionário com  $\lambda = 1, 0$ 

### 5.1.2 Experimentos Tridimensionais

Estes experimentos numéricos correspondem a um problema teste cuja solução analítica é dada por:

$$u_{1} = u_{2} = 0 ; u_{3} = x_{1}x_{2}(1 - x_{2}) ; \quad p = \eta(0.5 - 2x_{2}x_{3}); \quad \sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0;$$
  

$$\sigma_{33} = 2\lambda\eta[(x_{2} - x_{2}^{2})^{2} + (x_{1} - 2x_{1}x_{2})^{2}]; \quad \sigma_{13} = \eta(x_{2} - x_{2}^{2}); \quad \sigma_{23} = \eta(x_{1} - 2x_{1}x_{2}).$$
(5.2)

A resolução numérica foi realizada com uma malha  $10 \times 10 \times 10$  construída sobre uma partição uniforme de cubos unitários, gerando dessa forma 6000 tetraedros. O termo de força é dado por  $-\nabla \cdot \sigma + \nabla p$  e uma pressão nula é fixada no nó  $x_1 = x_2 = x_3 = 0.5$ . Neste exemplo, o valor de  $\Delta t$  é 0.0002, e os valores de  $\lambda$  variam de 0. até 5.0, com incrementos de 0.5.

Na Figura 5.2, indicamos a evolução com  $\lambda$  dos erros na norma  $L^2$  da velocidade, da pressão e da tensão—extra. Os erros correspondem aos valores das aproximações computadas dos campos incógnitos, uma vez atingida a convergência para uma tolerância de  $10^{-5}$  na norma do máximo.

Alguns comentários relevantes a respeito desses resultados são os seguintes:

A consistência do método fica comprovada no exemplo bidimensional, posto que a solução exata é reproduzida a menos de erros muito pequenos. De fato, essa solução pertence aos espaços de aproximação utilizados.



Figura 5.2: A evolução com  $\lambda$  dos erros na norma  $L^2$  da velocidade, da pressão e da tensão-extra para um problema estacionário tridimensional.

Por outro lado, do exemplo tridimensional, pode-se observar uma grande estabilidade do método em termos de tratamento das não linearidades do problema. Isto porque embora os erros de pressão e tensão aumentem com  $\lambda$ , o que é natural, esse efeito permanece moderado tendendo os erros a diminuirem no que tange à velocidade.

## 5.2 Análise Numérica - Caso Evolutivo

Para elucidar algumas questões sobre as estimativas de erro obtidas neste trabalho, discorremos aqui sobre os resultados obtidos, respectivamente distribuídos nas seções posteriores, Estabilidade, Consistência e Convergência.

#### 5.2.1 Estabilidade

**Observação 5.2.1** Daqui por diante, a letra C, combinada ou não com outros símbolos representará diferentes constantes estritamente positivas independentes de  $\Delta t$  e de h.

Nesta seção passaremos à análise da estabilidade de (4.35). Para isso, é conveniente supormos que estamos resolvendo um problema mais geral, a saber:

$$\Delta t^{2} (\nabla p_{h}^{n}, \nabla q) - \Delta t^{2} (\nabla \cdot \sigma_{h}^{n}, \nabla q) = \Delta t(\vec{u}_{h}^{n-1}, \nabla q) - \Delta t G_{h}^{n}(q\vec{\nu})$$

$$+ \Delta t^{2} L_{h}^{p,n} (\nabla q) \quad \forall q \in Q_{h}$$

$$(\vec{u}_{h}^{n}, \vec{v})_{h} + \Delta t (\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}, \vec{v}) = (\vec{u}_{h}^{n-1}, \vec{v}) + \Delta t L_{h}^{\vec{u},n}(\vec{v}) \quad \forall \vec{v} \in \vec{V}_{h}$$

$$\frac{\Delta t}{2\eta} (\sigma_{h}^{n}, \tau)_{h} + \frac{\lambda}{2\eta} (\sigma_{h}^{n}, \tau)_{h} + \Delta t^{2} (\nabla \cdot \sigma_{h}^{n}, \nabla \cdot \tau) - \Delta t^{2} (\nabla p_{h}^{n}, \nabla \cdot \tau) =$$

$$\frac{\lambda}{2\eta} (\sigma_{h}^{n-1}, \tau)_{h} - \Delta t (u_{h}^{n-1}, \tau)_{h} + \Delta t G_{h}^{n}(\tau \vec{\nu}) - \Delta t^{2} L_{h}^{p,n} (\nabla \cdot \tau)$$

$$+ \Delta t L_{h}^{\sigma,n}(\tau)$$
(5.3)

Supomos que  $L_h^{\vec{u},n}$ ,  $L_h^{p,n}$ ,  $L_h^{\sigma,n}$  e  $G_h^n$  são funções lineares satisfazendo:

$$\begin{aligned}
L_{h}^{\vec{u},n}(\mathbf{d}) &\leq |L_{h}^{\vec{u},n}| \, ||\mathbf{d}||, \, \forall \mathbf{d} \in \mathbf{D}_{h}, \\
L_{h}^{p,n}(\vec{v}) &\leq |L_{h}^{p,n}| \, ||\mathbf{d}||, \, \forall \mathbf{d} \in \mathbf{D}_{h}, \\
L_{h}^{\sigma,n}(\tau) &\leq |L_{h}^{\sigma,n}| \, ||\tau||, \, \forall \tau \in \Sigma_{h}, \\
G_{h}^{n}(\vec{w}) &\leq [G_{h}^{n}] \, ||\vec{w}||_{-1/2,\partial\Omega}, \, \forall \vec{w} \in \Gamma_{h}.
\end{aligned}$$
(5.4)

onde  $|\cdot|$  e  $[\cdot]$  denotam normas funcionais padrão.  $\mathbf{D}_h := \{\vec{v} | \vec{v}_{/K} \in P_1(K)^N, \forall K \in \mathcal{T}_h\},\$   $\Gamma_h := \{\vec{w} : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N \mid \vec{w}_{/F} \in P_1(F)^N \forall \text{ face ou aresta } F \text{ de } K \in \mathcal{T}_h \text{ tal que } F \subset \partial\Omega\}.$ Na prática,  $L_h^{\vec{u},n}(\vec{v}) = (\vec{f}_h^n, \vec{v}) \ \forall \vec{v} \in L^2(\Omega)^N, \ L_h^{p,n} = L_h^{\vec{u},n}, \ L_h^{\sigma,n} = 0 \ e \ G_h^n(\vec{w}) = \langle \vec{g}_h^n, \vec{w} \rangle_{1/2,\partial\Omega} \ \forall \vec{w} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)^N.$ 

**Teorema 5.2.1** Supondo que  $\Delta t < \frac{1}{2}$  o seguinte resultado de estabilidade se verifica para (5.3):

$$\forall n \leq M : ||\vec{u}_h^n||^2 + \epsilon_h(\vec{u}_h^n, \vec{u}_h^n) + \frac{\Delta t^2}{2} ||\nabla p_h^n - \nabla \cdot \sigma_h^n||^2 + \frac{\lambda}{2\eta} ||\sigma_h^n||_h^2 \leq e^{4T} \\ \left[ ||\vec{u}_h^0||^2 + \epsilon_h(\vec{u}_h^0, \vec{u}_h^0) + \frac{\lambda}{2\eta} ||\sigma_h^0||_h^2 + \tilde{C}\Delta t \sum_{i=1}^n \left( |L_h^{p,i}|^2 + |L_h^{\vec{u},i}|^2 + |L_h^{\sigma,i}|^2 + \frac{[G_h^i]^2}{\Delta t^2} \right) \right] 5.5)$$

Anteriormente à prova deste teorema, esclarecemos que o mesmo foi provado para o nosso esquema e que se verifica independentemente dos parâmetros de discretização  $h \in \Delta t$  exceto para o último termo; no entanto, ele pode ser feito arbitrariamente pequeno na

análise de convergência. Isso não é surpreendente, uma vez que o resultado foi obtido para um esquema totalmente implícito aplicado a um problema linear. Contudo, lembramos que a condição de que  $\Delta t$  seja limitado por uma constante multiplicada por h, deve ser satisfeita se o algoritmo (4.12)-(4.14), que fornece um procedimento de iteração explícita for empregado em todo passo de tempo. Novamente, isso não é surpresa, devido à natureza predominantemente hiperbólica do sistema de três campos em estudo para  $\lambda$  não muito pequenos.

PROVA.

Escolhendo  $\vec{v} = \vec{u}_h^n$ ,  $q = p_h^n$  e  $\tau = \sigma_h^n$  em (5.3) obtemos:

$$\Delta t^{2} \parallel \nabla p_{h}^{n} \parallel^{2} -\Delta t^{2} (\nabla \cdot \sigma_{h}^{n}, \nabla p_{h}^{n}) = \Delta t^{2} L_{h}^{p,n} (\nabla p_{h}^{n}) - \Delta t G_{h}^{n} (p_{h}^{n} \vec{\nu}) + \Delta t (\vec{u}_{h}^{n-1}, \nabla p_{h}^{n})$$

$$||\vec{u}_{h}^{n}||_{h}^{2} + \Delta t (\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}, \vec{u}_{h}^{n}) = \Delta t L_{h}^{\vec{u},n} (\vec{u}_{h}^{n}) + (\vec{u}_{h}^{n-1}, \vec{u}_{h}^{n})_{h}$$

$$\frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} ||\sigma_{h}^{n}||_{h}^{2} + \Delta t^{2} ||\nabla \cdot \sigma_{h}^{n}||^{2} - \Delta t^{2} (\nabla p_{h}^{n}, \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}) = \frac{\lambda}{2\eta} (\sigma_{h}^{n}, \sigma_{h}^{n-1})_{h}$$

$$-\Delta t (\vec{u}_{h}^{n-1}, \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}) + \Delta t G_{h}^{n} (\sigma_{h}^{n} \vec{\nu}) - \Delta t^{2} L_{h}^{p,n} (\nabla \cdot \sigma_{h}^{n}) + \Delta t L_{h}^{\sigma,n} (\sigma_{h}^{n})$$
(5.6)

Somando-se as três relações acima, ficamos com:

$$\begin{aligned} ||\vec{u}_{h}^{n}||_{h}^{2} + \Delta t(\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}, \vec{u}_{h}^{n}) + \Delta t^{2}||\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}||^{2} + \frac{\lambda}{2\eta}||\sigma_{h}^{n}||_{h}^{2} \\ + \frac{\Delta t}{2\eta}||\sigma_{h}^{n}||_{h}^{2} = (\vec{u}_{h}^{n-1}, \vec{u}_{h}^{n})_{h} + \Delta t(\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}, \vec{u}_{h}^{n-1}) + \frac{\lambda}{2\eta}(\sigma_{h}^{n}, \sigma_{h}^{n-1})_{h} \\ -G_{h}^{n}(p_{h}^{n}I - \sigma_{h}^{n}) + \Delta t^{2}L_{h}^{p,n}(\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}) + \Delta tL_{h}^{\vec{u},n}(\vec{u}_{h}^{n}) + \Delta tL_{h}^{\sigma,n}(\sigma_{h}^{n}) \end{aligned}$$
(5.7)

Isto leva a

$$\frac{1}{2} \left[ ||\vec{u}_{h}^{n}||_{h}^{2} + \Delta t^{2} ||\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}||^{2} + ||\vec{u}_{h}^{n} + \Delta t (\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n})||^{2} + \frac{\lambda}{\eta} ||\sigma_{h}^{n}||_{h}^{2} + \frac{\Delta t}{\eta} ||\sigma_{h}^{n}||_{h}^{2} \right] + \epsilon_{h} (\vec{u}_{h}^{n}, \vec{u}_{h}^{n}) = \epsilon_{h} (\vec{u}_{h}^{n-1}, \vec{u}_{h}^{n}) + \frac{\lambda}{2\eta} (\sigma_{h}^{n}, \sigma_{h}^{n-1}) + (\vec{u}_{h}^{n-1}, \vec{u}_{h}^{n} + \Delta t (\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n})) - \Delta t \ G_{h}^{n} (p_{h}^{n} I - \sigma_{h}^{n}) + \Delta t L_{h}^{\sigma,n} (\sigma_{h}^{n}) + \Delta t L_{h}^{\rho,n} (\vec{u}_{h}^{n} + \Delta t (\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n})) + \Delta t (L_{h}^{\vec{n},n} - L_{h}^{p,n}) (\vec{u}_{h}^{n}).$$
(5.8)

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade  $|yz| \leq \frac{y^2}{2\kappa} + \frac{\kappa}{2}z^2$ ,  $\forall \kappa > 0, \forall y, z \in \mathbb{R}$  juntamente as propriedades dos funcionais  $L_h^{p,n}$ ,  $L_h^{\vec{u},n}$ ,  $L_h^{\sigma,n} \in G_h^n$ , para  $\alpha, \beta$ ,

 $\gamma,\,\delta>0,$  dado que  $\alpha+\Delta t\beta=1,$  obtemos:

$$\begin{cases}
\frac{1}{2} \left[ ||\vec{u}_{h}^{n}||^{2} + \epsilon_{h}(\vec{u}_{h}^{n},\vec{u}_{h}^{n}) + \Delta t^{2}||\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}||^{2} + \frac{\lambda}{2\eta} ||\sigma_{h}^{n}||_{h}^{2} + \frac{\Delta t}{\eta} ||\sigma_{h}^{n}||_{h}^{2} \right] \\
\leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\alpha} ||\vec{u}_{h}^{n-1}||^{2} + \frac{\Delta t}{\beta} |L_{h}^{p,n}|^{2} + \epsilon_{h}(\vec{u}_{h}^{n-1},\vec{u}_{h}^{n-1}) \\
+ \frac{\lambda}{2\eta} ||\sigma_{h}^{n-1}||_{h}^{2} + \Delta t \left\{ \frac{[G_{h}^{n}]^{2}}{\gamma} + \gamma ||(p_{h}^{n}I - \sigma_{h}^{n})\vec{\nu}||_{-1/2,\partial\Omega}^{2} \right\} \\
+ \Delta t \left( \frac{|L_{h}^{\sigma,n}|^{2}}{\delta} + \delta ||\sigma_{h}^{n}||_{h}^{2} \right) + \Delta t \left[ \frac{|L_{h}^{p,n}|^{2}}{\beta} + (|L_{h}^{\vec{u},n} + |L_{h}^{p,n}|)^{2} + ||\vec{u}_{h}^{n}||^{2} \right]$$
(5.9)

Supondo que  $\Delta t < \frac{1}{2}$  tomamos  $\alpha = 1 - \Delta t$  and  $\beta = 1$ .

Por outro lado de resultado padrão (cf. Girault-Raviart [30]) temos:

$$\begin{aligned} ||(p_{h}^{n}I - \sigma_{h}^{n})\vec{\nu}||_{-1/2,\partial\Omega} &\leq C_{1} \{ || \ p_{h}^{n}I - \sigma_{h}^{n} \ || + || \ \nabla \cdot (p_{h}^{n}I - \sigma_{h}^{n}) \ || \} \\ &\leq C_{1} \{ || \ p_{h}^{n} \ || + || \ \sigma_{h}^{n} \ || + || \ \nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n} \ || \} \end{aligned}$$
(5.10)

Por um resultado bem conhecido (cf. Braess [8] p.33),  $\exists C_2$  such that  $\parallel q \parallel \leq C_2 \parallel \nabla q \parallel$ ,  $\forall q \in Q$ .

Aplicando esta relação a (5.10) obtemos:

$$\left|\left|(p_h^n I - \sigma_h^n)\vec{\nu}\right|\right|_{-1/2,\partial\Omega} \le C_1 \left\{C_2 \parallel \nabla p_h^n \parallel + \parallel \sigma_h^n \parallel + \parallel \nabla p_h^n - \nabla \cdot \sigma_h^n \parallel\right\}$$

$$\leq C_1 \left[ C_2 \parallel \nabla \cdot \sigma_h^n \parallel + \parallel \sigma_h^n \parallel + (C_2 + 1) \parallel \nabla p_h^n - \nabla \cdot \sigma_h^n \parallel \right]$$

Recordando (4.38) somos levados a

$$||(p_h^n I - \sigma_h^n)\vec{\nu}||_{-1/2,\partial\Omega} \leq \frac{C_3}{h} \parallel \sigma_h^n \parallel + C_4 \parallel \nabla p_h^n - \nabla \cdot \sigma_h^n \parallel$$

onde  $C_3 = CC_2 + C_1H \operatorname{com} H = \max_{\tau_h \subset \mathcal{P}} h$ ,  $\mathcal{P}$  sendo a família quasi-uniformes de partições em uso e  $C_4 = C_1(1 + C_2)$ . Em seguida, escolhemos  $\gamma \in \delta$  tais que  $\gamma \times \frac{C_3^2}{h^2} + \frac{\delta}{2} \leq \frac{1}{2\eta} \in \gamma C_4^2 \leq \frac{\Delta t}{4}$ . Tomando  $\delta = \frac{1}{2\eta}$  e definindo  $\Delta t = \mu h$ , escolhemos  $\gamma = \min\left\{\frac{1}{C_4^2}, \frac{\Delta t}{\mu^2 C_3^2 \eta}\right\} \frac{\Delta t}{4}$ . A partir disso, obtemos:

$$(1 - \Delta t) ||\vec{u}_h^n||^2 + \epsilon_h(\vec{u}_h^n, \vec{u}_h^n) + \frac{\Delta t^2}{2} ||\nabla p_h^n - \nabla \cdot \sigma_h^n||^2 + \frac{\lambda}{2\eta} ||\sigma_h^n||_h^2 \le \frac{||\vec{u}_h^{n-1}||^2}{(1 - \Delta t)} + \epsilon_h(\vec{u}_h^{n-1}, \vec{u}_h^{n-1}) + \frac{\lambda}{2\eta} ||\sigma_h^{n-1}||_h^2 + \bar{C} \left[ \Delta t \left( |L_h^{p,n}|^2 + |L_h^{\vec{u},n}|^2 + |L_h^{\sigma,n}|^2 \right) + \frac{[G_h^n]^2}{\Delta t} \right]$$
(5.11)

Usando a relação  $\frac{1}{1-\Delta t} \le 1+2\Delta t$  para  $\Delta t < \frac{1}{2}$ , após cálculos simples, obtemos:

$$||\vec{u}_{h}^{n}||^{2} + \epsilon_{h}(\vec{u}_{h}^{n},\vec{u}_{h}^{n}) + \frac{\Delta t^{2}}{2}||\nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n}||^{2} + \frac{\lambda}{2\eta}||\sigma_{h}^{n}||_{h}^{2}$$

$$\leq (1 + 2\Delta t)^{2} \left[||\vec{u}_{h}^{n-1}||^{2} + \epsilon_{h}(\vec{u}_{h}^{n-1},\vec{u}_{h}^{n-1}) + \frac{\lambda}{2\eta}||\sigma_{h}^{n-1}||_{h}^{2} + \tilde{C}\Delta t \left(|L_{h}^{p,n}|^{2} + |L_{h}^{\vec{u},n}|^{2} + |L_{h}^{\sigma,n}|^{2} + \frac{[G_{h}^{n}]^{2}}{\Delta t^{2}}\right)\right]$$
(5.12)

Agora podemos seguir as linhas principais do Lema de Gronwall em [52]. Mais especificamente, aplicando (5.12) reiterativamente a partir de n = 1, obtemos:

$$\| \vec{u}_{h}^{n} \|^{2} + \epsilon_{h}(\vec{u}_{h}^{n}, \vec{u}_{h}^{n}) + \frac{\Delta t^{2}}{2} \| \nabla p_{h}^{n} - \nabla \cdot \sigma_{h}^{n} \|^{2} + \frac{\lambda}{2\eta} \| \sigma_{h}^{n} \|_{h}^{2}$$

$$\leq (1 + 2\Delta t)^{2n} \left[ \| \vec{u}_{h}^{0} \|^{2} + \epsilon_{h}(\vec{u}_{h}^{0}, \vec{u}_{h}^{0}) + \frac{\lambda}{2\eta} \| \sigma_{h}^{0} \|_{h}^{2} \right]$$

$$+ \tilde{C}\Delta t \sum_{i=1}^{n} (1 + 2\Delta t)^{2(n-i+1)} \left( |L_{h}^{p,i}|^{2} + |L_{h}^{\vec{u},i}|^{2} + |L_{h}^{\sigma,i}|^{2} + \frac{[G_{h}^{i}]^{2}}{\Delta t^{2}} \right)$$

$$(5.13)$$

Uma vez que  $(1 + 2\Delta t)^{2n} \leq \left(1 + \frac{2T}{M}\right)^{2M} \leq e^{4T} \forall n$ , finalmente obtemos o resultado de estabilidade (5.5).

**Corolário 5.2.1** Supondo que  $\Delta t < 1/2$ , o seguinte resultado de estabilidade se verifica para(4.35):

$$\begin{aligned} \forall n \le M : \quad ||\vec{u}_h^n||^2 + \epsilon_h(\vec{u}_h^n, \vec{u}_h^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \sum_{i=1}^n ||\nabla p_h^i - \nabla \cdot \sigma_h^i||^2 + \frac{\lambda}{2\eta} ||\sigma_h^n||_h^2 \\ \le e^{4T} \left[ ||\vec{u}_h^0||^2 + \epsilon_h(\vec{u}_h^0, \vec{u}_h^0) + \frac{\lambda}{2\eta} ||\sigma_h^0||_h^2 + \tilde{C}\Delta t \sum_{i=1}^n \left( 2||\vec{f}_h^i||_2^2 + \frac{1}{\Delta t^2} ||\vec{g}_h^i||_{1/2,\partial\Omega}^2 \right) \right] \end{aligned} (5.14)$$

Prova.

Relembrando que no caso em estudo  $L_h^{u,n}(\vec{v}) = L_h^{p,n}(\vec{v}) = (\vec{f_h^n}, \vec{v}), L_h^{\sigma,n} = 0$  e  $G_h^n(\vec{w}) = \langle \vec{g_h^n}, \vec{w} \rangle_{1/2,\partial\Omega}$  este resultado é uma mera consequência de (5.5).

Provado o resultado de estabilidade, seguimos a próxima seção, ao resultado de consistência.

### 5.2.2 Consistência

Como um passo preparatório para provar a convergência do nosso esquema, estabelecemos nesta seção que ele é consistente no sentido apropriado. Com essa finalidade, definimos  $\forall n$ ,

$$\tilde{\vec{u}}_h^n = \tilde{\vec{u}}_h(n\Delta t) \tag{5.15}$$

onde  $\tilde{\vec{u}}_h(t) \in V_h$  é dado por

$$(\vec{u}_h(t), \vec{v})_h = (\vec{u}(t), \vec{v})_h \ \forall \vec{v} \in V_h,$$
(5.16)

juntamente com o par  $[\tilde{p}_h^n, \tilde{\sigma}_h^n] \in Q_h \times \Sigma_h$  definido por

$$\frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} (\tilde{\sigma}_h^n, \tau)_h + \Delta t^2 (\nabla \tilde{p}_h^n - \nabla \cdot \tilde{\sigma}_h^n, \nabla q - \nabla \cdot \tau) = \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} (\sigma^n, \tau)_h + \Delta t^2 (\nabla p^n - \nabla \cdot \sigma^n, \nabla q - \nabla \cdot \tau) \ \forall [q, \tau] \in Q_h \times \Sigma_h$$
(5.17)

Onde  $(\tilde{\vec{u}}^n, \tilde{p}^n, \sigma^n) = (\vec{u}(t), p(t), \sigma(t)) | t = n\Delta t$ , sendo  $(\vec{u}(t), p(t), \sigma(t))$  a solução de (4.25)

no instante t.

**Proposição 5.2.1** Se  $\vec{u}(t) \in H^2(\Omega)^N$ ,  $t \in [0,T]$ , a seguinte estimativa se verifica:

$$||\vec{u}(t) - \tilde{\vec{u}}_h(t)|| \le Ch^2 ||\vec{u}(t)||_2 \tag{5.18}$$

Prova.

 $\pi_h$  denota o operador interpolação padrão- $V_h$  de qualquer campo com componentes em  $H^2(\Omega)$ . Pela definição de  $\tilde{\vec{u}}_h(t)$  podemos escrever  $(\vec{u}(t) - \tilde{\vec{u}}_h(t), \pi_h[\vec{u}(t)] - \tilde{\vec{u}}_h(t))_h = 0$ , que produz,

$$||\vec{u}(t) - \vec{u}_h(t)||_h \le ||\vec{u}(t) - \pi_h[\vec{u}(t)]||_h$$
(5.19)

Em seguida, notamos que, devido a associação de (4.33) a estimativa clássica  $||[\pi_h(\vec{v}) - \vec{v}]_{/K}||_{0,K} \leq Ch^2 ||\vec{v}||_{2,K}$ , para todo  $K \in \mathcal{T}_h$  e  $\forall \vec{v} \in H^2(\Omega)^N$ , podemos escrever:

$$(\vec{w} - \pi_h(\vec{w}), \vec{v} - \pi_h(\vec{v}))_K \le C ||\vec{w}||_{2,K} ||\vec{v}||_{2,K} \, \forall \vec{w}, \vec{v} \in [H^2(K)^N]^2,$$

onde  $(\cdot, \cdot)_K$  é definido em (4.30).

Utilizando o fato de que:  $\pi_1^K(w_{/K}) \in P_1(K)$  tal que  $\int_K \pi_1^K(w_{/K})v = \int_K w_{/K}v, \ \forall v \in P_1(K), \forall w \in L^2(\Omega)$  e introduzindo  $a_K : H^2(K) \times H^2(K) \to \mathbb{R}$  dada por:

$$a_K(w,v) = \frac{medida(K)}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ \pi_1 \left[ w - \pi_K(w) \right] \pi_1^K \left[ v - \pi_K(v) \right] \right\} \left( S_i^K \right)$$

uma forma bilinear, onde  $\pi_K$  é o operador de interpolação nos vértices  $S_i^K$  de K,  $i = 1, \ldots, N+1$  temos que  $|| u(t) - \pi_h(u) ||_h = \left[\sum_K a_K(u, u)\right]^{1/2}$ .

Seja ainda  $\hat{K}$  um elemento de referência e  $F_k$  a transformação linear afim de K em  $\hat{K}$ . Para toda função f definida sobre  $K \in \mathcal{T}_h$  designamos por  $\hat{f}$  a função definida sobre  $\hat{K}$  pela transformação:  $\hat{f}(\hat{x}) = f(x) \operatorname{com} \hat{x} = F_K(x)$ .

Seja $a_{\hat{K}}: H^2(\hat{K}) \times H^2(\hat{K}) \to \mathbb{R}$ a forma bilinear dada por:

$$a_{\hat{K}}(\hat{w}, \hat{v}) = \frac{medida(\hat{K})}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ \pi_1^{\hat{K}} \left[ \hat{w} - \hat{\pi}(\hat{w}) \right] \pi_1^{\hat{K}} \left[ \hat{v} - \hat{\pi}\hat{v} \right] \right\} \left( S_i^K \right)$$

 $\hat{\pi}(\hat{v})$  é o operador interpolação  $P_1(\hat{K})$  de  $\hat{v}$  nos vértices  $S_1^{\hat{K}}, S_2^{\hat{K}}, \dots, S_{N+1}^{\hat{K}}$  de  $\hat{K}$ .

Provemos que:

$$a_K(w,v) = \frac{medida(K)}{medida(\hat{K})} \hat{a}(\hat{w}, (v)).$$

Obs:  $f(x) = f(\hat{x}), x$  é a transformada de  $\hat{x}$ .

Em primeiro lugar temos  $\pi_1^K(f) = \pi_1^{\hat{K}}(\hat{f}), \forall f \in L^2(K) \text{ onde } \int_{\hat{K}} \pi_1^{\hat{K}}(\hat{f})\hat{v}d\hat{x} = \int_{\hat{K}} \hat{f}\hat{v}d\hat{x}, \forall \hat{v} \in P_1(\hat{K})$ 

$$\int_{K} \pi_{1}^{K}(f)vdx = \int_{K} fvdx = \frac{medida(K)}{medida(\hat{K})} \int_{\hat{K}} \hat{f}\hat{v}d\hat{x} = \frac{medida(K)}{medida(\hat{K})} \int_{\hat{K}} \pi_{1}^{\hat{K}}(\hat{f})\hat{v}d\hat{x}, \forall v \in P_{1}(\hat{K})$$

Por outro lado,

$$\int_{\hat{K}} \widehat{\pi_1^K(f)} \hat{v} = \frac{medida(\hat{K})}{medida(K)} \int_K \pi_1^K(f) v, \; \forall v$$

Temos então que:

$$\int_{\hat{K}} \widehat{\pi_1^K(f)} \hat{v} = \int_{\hat{K}} \pi_1^{\hat{K}}(\hat{f}) \hat{v}, \forall v$$

A partir desta observação podemos escrever que:

$$\pi_1^K(f)\left[\widehat{w-\pi_h(w_{/K})}\right] = \pi_1^{\hat{K}}\left[\widehat{w-\pi_K(w)}\right] = \pi_1^{\hat{K}}\left[\widehat{w-\pi_K(w)}\right]$$

Ora, como é bem conhecido (cf. Ciarlet [16]),  $\widehat{\pi_K(w)} = \hat{\pi}(\hat{w})$  onde  $\hat{\pi}$  é o operador interpolação análogo a  $\pi_K$  sobre  $\hat{K}$ .

Em resumo:

$$\pi_1^K \left[ \widehat{w - \pi_K(w_{/K})} \right] = \pi_1^{\hat{K}} \left[ \widehat{w} - \widehat{\pi}(\widehat{w}) \right]$$

e por conseguinte:

$$a_{K}(w,v) = \frac{medida(K)}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \left\{ \pi_{1}^{\hat{K}} \left[ \hat{w} - \hat{\pi}(\hat{w}) \right] \pi_{1}^{\hat{K}} \left[ \hat{v} - \hat{\pi}(\hat{v}) \right] \right\} \left( S_{i}^{\hat{K}} \right)$$

o que nos dá,

$$a_{K}(w,v) = \frac{medida(K)}{medida(\hat{K})} \frac{medida(\hat{K})}{N+1} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \pi_{1}^{\hat{K}} \left[ \hat{w} - \hat{\pi}(\hat{w}) \right] \pi_{1}^{\hat{K}} \left[ \hat{v} - \hat{\pi}(\hat{v}) \right] \right\} \left( S_{i}^{K} \right)$$

$$a_K(w,v) = \frac{medida(K)}{medida(\hat{K})} \hat{a}(\hat{w},\hat{v})$$
(5.20)

Lema 5.2.1  $\hat{a}: H^2(\hat{K}) \times H^2(\hat{K}) \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua

Prova.

$$\hat{a}(\hat{w}, \hat{v}) \le \hat{C} \max_{\hat{x} \in \hat{K}} \left\{ \left| \pi_1^{\hat{K}} \left[ \hat{w} - \hat{\pi} \left( \hat{w} \right) \right] (\hat{x}) \times \pi_1^{\hat{K}} \left[ \hat{v} - \hat{\pi}(\hat{v}) \right] (\hat{x}) \right| \right\}$$

$$\hat{C} \parallel \pi_1^{\hat{K}} [\hat{w} - \hat{\pi}(\hat{w})] \parallel_{\infty, \hat{K}} \parallel \pi_1^{\hat{K}} [\hat{v} - \hat{\pi}(\hat{v})] \parallel_{\infty, \hat{K}}$$

Como se trata de argumentos em  $P1(\hat{K})$ , temos:

$$\hat{a}(\hat{w},\hat{v}) \le \hat{C} \times \left(\hat{C}'\right)^2 \| \pi_{1\hat{K}} \left[\hat{w} - \hat{\pi}(\hat{w})\right] \|_{\hat{K}} \| \pi_{1\hat{K}} \left[\hat{v} - \hat{\pi}(\hat{v})\right] \|_{\hat{K}}$$

pois no espaço  $P1(\hat{K})$ todas as normas são equivalentes, ou seja,

$$\| \hat{v} \|_{\infty, \hat{K}} \leq \hat{C}' \| \hat{v} \|_{\hat{K}} \quad \forall \hat{v} \in P_1(\hat{K})$$

onde  $\hat{C}$ só depende de  $\hat{K}.$ Logo,

$$\leq \hat{C} \left( \hat{C}' \right)^2 \| \hat{w} - \hat{\pi}(\hat{w}) \|_{\hat{K}} \| \hat{v} - \hat{\pi}(\hat{v}) \|_{\hat{K}}$$
$$\leq \hat{C} \left( \hat{C}' \right)^2 (\| \hat{w} \|_{\hat{K}} + \| \hat{\pi}(\hat{w}) \|_{\hat{K}}) (\| \hat{v} \|_{\hat{K}} + \| \hat{\pi}(\hat{v}) \|_{\hat{K}})$$

Ora, sendo os  $\hat{\lambda_i}'$  as coordenadas baricêntricas de  $\hat{K},$ 

$$\| \hat{\pi}(\hat{v}) \|_{\hat{K}} = \| \sum_{i=1}^{N+1} \hat{\lambda}_{i} \hat{v}\left(S_{i}^{\hat{K}}\right) \|_{\hat{K}} \leq \sum_{i=1}^{N+1} \left| \hat{v}\left(S_{i}^{\hat{K}}\right) \right| \| \hat{\lambda}_{i} \|_{\hat{K}}$$
  
$$\leq medida(\hat{K})^{1/2} \sum_{i=1}^{N+1} \left| \hat{v}\left(S_{i}^{\hat{K}}\right) \right| \leq medida(\hat{K})^{1/2} (N+1) \| \hat{v} \|_{\infty,\hat{K}}$$
(5.21)

$$\leq \hat{C} \left( \hat{C}' \right)^2 \left[ \| \hat{w} \|_{2,\hat{K}} + \hat{C}'' \| \hat{w} \|_{\infty,\hat{K}} \right] \left[ \| v \|_{2,\hat{K}} + \hat{C}'' \| \hat{v} \|_{\infty,\hat{K}} \right]$$

Por outro lado, pelo Teorema de Imersão de Sobolev,  $\exists \hat{C}^{'''}$  que só depende de  $\hat{K}$ , tal que:

 $\parallel \hat{v} \parallel_{\infty, \hat{K}} \leq \hat{C}^{'''} \parallel \hat{v} \parallel_{2, \hat{K}} \forall \hat{v} \in H^2(\hat{K})$ 

**Proposição 5.2.2**  $\exists \hat{\tilde{C}} | \hat{a}(\hat{w}, \hat{v}) \leq \hat{\tilde{C}} | \hat{w} |_{2,\hat{K}} | \hat{v} |_{2,\hat{K}}$ .

Por construção, observamos que:

$$\forall \hat{w} \in H^2(\hat{K}) \in \forall \hat{v} \in P_1(\hat{K}) \ \hat{a}(\hat{w}, \hat{v}) = 0$$

$$\forall \hat{w} \in P_1(\hat{K}) \in \forall \hat{v} \in H^2(\hat{K}) \ \hat{a}(\hat{w}, \hat{v}) = 0$$

então, de acordo com o lema bilinear de Ciarlet (5.2.2) e levando em conta o lema , temos o resultado. ■

Ora, combinando (5.20) e o resultado provado na proposição (5.2.2), temos:

$$a_K(w,v) = \frac{medida(K)}{medida(\hat{K})} \ \hat{a}(\hat{w},\hat{v}) \leq \frac{medida(K)}{medida(\hat{K})} \ \widehat{\tilde{C}} \mid \ \hat{w} \mid_{2,\,\hat{K}} \mid \ \hat{v} \mid_{2,\,\hat{K}}$$

então voltando ao elemento K, vem:

$$a_{K}(w,v) \leq \frac{medida(K)}{medida(\hat{K})} \hat{\tilde{C}} \left[ \tilde{C}medida(K)^{-1/2}h^{2} \mid w \mid_{2,K} \tilde{C} medida(K)^{-1/2}h^{2} \mid v \mid_{2,K} \right]$$

com  $\tilde{C}$  independente de h e

$$= \bar{C}^2 h^4 \mid \hat{w} \mid_{2,K} \mid \hat{v} \mid_{2,K}$$

com  $\bar{C}$  independente de K.

Logo,  $a_k(w, v) \leq \bar{C}^2 h^4 | \hat{w} |_{2, K} | \hat{v} |_{2, K}$ 

Então, como:

$$(u - \pi_h(u), u - \pi_h(u))_K = a_K(u, u)$$
 fazendo  $w = u$  e  $v = u$ 

temos:

$$a_K(u, u) \le \bar{C}^2 h^4 \mid u \mid_{2, K}^2$$

por isso,

$$||u - \pi_h(u)||_h^2 \le \bar{C}^2 h^4 \sum_K |u|_{2,K}^2 = \bar{C}^2 h^4 |u|_2^2$$

do que finalmente,

$$||\vec{u} - \pi_h(\vec{u})||_h \le \bar{C}h^2 ||\vec{u}||_2.$$
(5.22)

Por outro lado, uma vez que  $||\vec{v}|| \le ||\vec{v}||_h$ ,  $\forall \vec{v} \in \vec{V}_h$  temos

$$||\vec{u}(t) - \tilde{\vec{u}}_h(t)|| \le ||\pi_h[\vec{u}(t)] - \vec{u}(t)|| + ||\pi_h[\vec{u}(t)] - \tilde{\vec{u}}_h(t)||_h.$$
(5.23)

Então de (5.19) e (5.23) facilmente estabelecemos que,

$$||\vec{u}(t) - \vec{u}_h(t)|| \le ||\pi_h[\vec{u}(t)] - \vec{u}(t)|| + 2||\pi_h[\vec{u}(t)] - \vec{u}(t)||_h.$$

Finalmente, combinando esta relação com (5.22) e usando a estimativa padrão  $||\vec{u}(t) - \pi_h[\vec{u}(t)]|| \le Ch^2 ||\vec{u}(t)||_2$  (cf. [16]), o resultado segue.

O par  $[\tilde{\sigma}_h^n, \tilde{p}_h^n]$ , por sua vez é uma espécie de projeção ortogonal de  $[\sigma^n, p^n]$ . Assim, por argumentos semelhantes aos utilizados na prova da Proposição (5.2.1), podemos provar o seguinte resultado:

**Proposição 5.2.3** Se  $\sigma^n \in H^2(\Omega)^{N \times N}$  e  $p^n \in H^2(\Omega)$  temos:

$$\| \tilde{\sigma} \|_{h}^{n} - \tilde{\sigma}_{h}^{n} \le Ch\Delta t [||p^{n}||_{2} + (1 + h/\Delta t)||\sigma^{n}||_{2}]$$
(5.24)

$$\|\nabla \tilde{p}_h^n - \nabla \tilde{p}^n - \nabla \cdot \tilde{\sigma}_h^n\| + \nabla \cdot \tilde{\sigma}^n \le Ch [||\tilde{p}^n||_2 + (1 + h/\Delta t)||\tilde{\sigma}^n||_2]$$
(5.25)

Prova.

O par  $(\sigma_h^n, p_h^n)$  pode ser visto como solução de  $a(\tilde{\sigma}_h^n, \tilde{p}_h^n), (\tau, q)) = L((\tau, q)) \ \forall (\tau, q) \in \sum_h \times Q_h$  onde:

$$a((\sigma, p), (\tau, q)) := \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} (\sigma, \tau)_h + (\nabla \cdot \sigma - \nabla p, \nabla \cdot \tau - \nabla q) \Delta t^2$$

$$\forall (\sigma, n) \ (\tau, q) \in \sum \langle Q \rangle$$
(5.26)

$$\forall (\sigma, p), (\tau, q) \in \sum_{h} \times Q_{h}$$
(5.26)

$$L(\tau,q) := a((\sigma^n, p^n), (\tau, q)), \forall (\tau, q) \in \sum_h \times Q_h$$
(5.27)

Consideremos a norma

$$\|| (\sigma, p) |\|^{2} := \| \sigma \|_{h}^{2} + \| \nabla \cdot \sigma - \nabla p \|^{2} \Delta t^{2}$$
(5.28)

Temos trivialmente,

$$a((\sigma, p), (\tau, q)) \le max \left(\frac{\lambda + \Delta t}{2\eta}, 1\right) \parallel || (\sigma, p) || \parallel || (\tau, q) |||, \forall (\sigma, p)(\tau, q) \in \sum \times Q$$
(5.29)

е

$$a((\sigma, p), (\sigma, p)) \ge \min\left(1, \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta}\right) \parallel || (\sigma, p) \mid \parallel^2, \forall (\sigma, p) \in \sum \times Q$$
$$L(\tau, q) \le \max\left(\frac{\lambda + \Delta t}{2\eta}, 1\right) \parallel || (\sigma^n, p^n) \mid \parallel \parallel || (\tau, q) \mid \parallel, \forall (\tau, q) \in \sum \times Q$$
(5.30)

logo, a é contínua e coerciva e L é contínua.

Segue-se pelo Teorema de Lax-Milgram que o problema que resulta na determinação de

 $(\tilde{\sigma}_h^n,\tilde{p}_h^n),$ tem solução única e mais ainda, pelo Lema de Céa:

$$\begin{aligned} \|\| (\sigma^{n} - \tilde{\sigma}_{h}^{n}, p^{n} - \tilde{p}_{h}^{n}) \|\| &\leq C \inf_{(\tau,q) \in \sum_{h} \times Q_{h}} \|\| (\sigma^{n}, p^{n}) - (\tau, q) \|\| \\ &\leq \inf \left[ \| \sigma^{n} - \tau \|_{h}^{2} + \| \nabla \cdot \sigma^{n} - \nabla \cdot \tau - \nabla p^{n} + \nabla q \|^{2} \Delta t^{2} \right]^{1/2} \\ &\leq \inf \left[ \| \sigma^{n} - \tau \|_{h}^{2} + 2 \| \nabla \cdot \sigma^{n} - \nabla \cdot \tau \|^{2} \Delta t^{2} + 2 \| \nabla p - \nabla q \|^{2} \Delta t^{2} \right]^{1/2} \\ &\leq \left( C^{2}h^{4} \| \sigma^{n} \|_{2}^{2} + C^{2} \Delta t^{2}h^{2} \| \sigma^{n} \|_{2}^{2} + C^{2} \Delta t^{2}h^{2} \| p^{n} \|_{2}^{2} \right)^{1/2} \\ &= \left( C^{2} \left( h^{4} + h^{2} \Delta t^{2} \right) \| \sigma^{n} \|_{2}^{2} + C^{2} \Delta t^{2}h^{2} \| p^{n} \|_{2}^{2} \right)^{1/2} \\ &= \left( C^{2}h^{2} \Delta t^{2} \left[ \left( \frac{h^{2}}{\Delta t^{2}} + 1 \right) \| \sigma^{n} \|_{2}^{2} + \| p^{n} \|_{2}^{2} \right] \right)^{1/2} \\ &= Ch \Delta t \left[ \left( \frac{h^{2}}{\Delta t^{2}} + 1 \right)^{1/2} \| \sigma^{n} \|_{2}^{2} + \| p^{n} \|_{2}^{2} \right] \end{aligned}$$
(5.31)

Usando o fato de que  $\sqrt{\frac{h^2}{\Delta t^2} + 1} \le \left(1 + \frac{h}{\Delta t}\right)$ , obtemos:  $\le Ch\Delta t \left[ \left(1 + \frac{h}{\Delta t}\right) \parallel \sigma^n \parallel_2 + \parallel p^n \parallel_2 \right]$ (5.32)

logo:

$$\|| (\sigma^n - \tilde{\sigma}_h^n, p^n - \tilde{p}_h^n) |\| \le Ch\Delta t \left[ \left( 1 + \frac{h}{\Delta t} \right) \| \sigma^n \|_2 + \| p^n \|_2 \right] \blacksquare$$
 (5.33)

Aplicamos em seguida o esquema (4.35) a tripla  $(\tilde{\vec{u}}_h^n, \tilde{p}_h^n, \tilde{\sigma}_h^n) \in \vec{V}_h \times Q_h \times \Sigma_h$  supondo que  $\tilde{\vec{u}}_h^{n-1}$  e  $\tilde{\sigma}_h^{n-1}$ , n = 1, 2, ..., M sejam conhecidos. Mais especificamente, tomando  $\tilde{\vec{u}}_h^0 = \pi_h(\vec{u}^0)$  e  $\tilde{\sigma}_h^0 = \pi_h(\sigma^0)$ , determinamos os resíduos em (4.35), quando  $(\vec{u}_h^n, p_h^n, \sigma_h^n)$  for substituído por  $(\bar{\vec{u}}_h^n, \bar{p}_h^n, \bar{\sigma}_h^n) := (\tilde{\vec{u}}_h^n - \vec{u}_h^n, \tilde{p}_h^n - p_h^n, \tilde{\sigma}_h^n - \sigma_h^n)$  e  $[\vec{u}_h^{n-1}, \sigma_h^{n-1}]$  for substituído por  $[\bar{\vec{u}}_h^{n-1}, \bar{\sigma}_h^{n-1}] := [\tilde{\vec{u}}_h^{n-1} - \vec{u}_h^{n-1}, \tilde{\sigma}_h^{n-1} - \sigma_h^{n-1}]$ .

Por definição temos:

$$\begin{cases}
\Delta t^{2} \left[ (\nabla \bar{p}_{h}^{n}, \nabla q) - (\nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n}, \nabla q) \right] - \Delta t(\bar{u}_{h}^{n-1}, \nabla q) = \\
-\Delta t \mathcal{S}_{h}^{n}(q\vec{\nu}) + \Delta t^{2} \mathcal{R}_{h}^{p,n}(\nabla q) \\
(\bar{u}_{h}^{n}, \vec{v})_{h} + \Delta t(\nabla \bar{p}_{h}^{n} - \nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n}, \vec{v})_{h} - (\bar{u}_{h}^{n-1}, \vec{v})_{h} = \Delta t \, \mathcal{R}_{h}^{\vec{u},n}(\vec{v}) \\
\frac{\Delta t + \lambda}{2\eta} (\bar{\sigma}_{h}^{n}, \tau)_{h} - \frac{\lambda}{2\eta} (\bar{\sigma}_{h}^{n-1}, \tau)_{h} + \Delta t^{2} \left[ (\nabla \cdot \bar{\sigma}_{h}^{n}, \nabla \cdot \tau) - (\nabla \bar{p}_{h}^{n}, \nabla \cdot \tau) \right] \\
+ \Delta t(\bar{u}_{h}^{n-1}, \nabla \cdot \tau) = \Delta t \mathcal{S}_{h}^{n}(\tau \vec{\nu}) - \Delta t^{2} \mathcal{R}_{h}^{p,n}(\nabla \cdot \tau) + \Delta t \mathcal{R}_{h}^{\sigma,n}(\tau)
\end{cases} (5.34)$$

onde  $\mathcal{R}_{h}^{\vec{u},n}$ ,  $\mathcal{R}_{h}^{p,n} \in \mathcal{R}_{h}^{\sigma,n}$  são funcionais permanentes para os resíduos com relação a integrais de domínio e  $\mathcal{S}_{h}^{n}$  é aquele que representa os resíduos relacionados com integrais de contorno.

Quanto a segunda equação de (5.34) temos:

$$(\tilde{\vec{u}}_h^n, \vec{v})_h + \Delta t (\nabla \tilde{p}_h^n - \nabla \cdot \tilde{\sigma}_h^n, \vec{v}) - (\tilde{\vec{u}}_h^{n-1}, \vec{v})_h = (\tilde{\vec{u}}_h^n - \vec{u}^n, \vec{v})_h + \Delta t (\nabla \tilde{p}_h^n - \nabla \cdot \tilde{\sigma}_h^n - \nabla p^n + \nabla \cdot \sigma^n, \vec{v}) - (\tilde{\vec{u}}_h^{n-1} - \vec{u}^{n-1}, \vec{v})_h + (\vec{u}^n, \vec{v}) + \Delta t (\nabla p^n - \nabla \cdot \sigma^n, \vec{v}) - (\vec{u}^{n-1}, \vec{v}) + \epsilon_h (\vec{u}^n - \vec{u}^{n-1}, \vec{v})$$
(5.35)

Por outro lado, para todo campo  $\mathcal{F}$  suficientemente regular, temos  $\forall n$  (cf. [52]):

$$\mathcal{F}^n - \mathcal{F}^{n-1} = \Delta t \ \mathcal{F}^n_t - \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left[ s - (n-1)\Delta t \right] \mathcal{F}_{tt}(s) ds, \ \mathrm{com} \ \mathcal{F}^n(\cdot) = \mathcal{F}(\cdot, n\Delta t).$$
(5.36)

Assim usando (4.25) segue que:

$$(\vec{u}^n - \vec{u}^{n-1} + \Delta t(\nabla p^n - \nabla \cdot \sigma^n), \vec{v}) = \Delta t(\vec{f}^n, \vec{v}) - \left(\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left[s - (n-1)\Delta t\right] \vec{u}_{tt}(s) ds, \vec{v}\right)$$

Então, já que  $(\tilde{\vec{u}}_h^n - \vec{u}^n, \vec{v})_h = 0$  e  $(\tilde{\vec{u}}_h^{n-1} - \vec{u}^{n-1}, \vec{v})_h = 0$ , relembrando (5.35) e (4.35), obtemos facilmente:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{h}^{\vec{u},n}(\vec{v}) = (\nabla \tilde{p}_{h}^{n} - \nabla \cdot \tilde{\sigma}_{h}^{n} - \nabla p^{n} + \nabla \cdot \sigma^{n}, \vec{v}) + (\vec{f}^{n} - \vec{f}_{h}^{n}, \vec{v}) \\ -\frac{1}{\Delta t} \left( \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left[ s - (n-1)\Delta t \right] \vec{u}_{tt}(s) ds, \vec{v} \right) + \frac{1}{\Delta t} \epsilon_{h}(\vec{u}^{n} - \vec{u}^{n-1}, \vec{v}). \end{cases}$$
(5.37)

Quanto a primeira e a terceira equações de (5.34), levando em consideração (5.17), podemos obter:

$$\begin{split} &\frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} (\tilde{\sigma}_h^n, \tau)_h - \frac{\lambda}{2\eta} (\tilde{\sigma}_h^{n-1}, \tau)_h + \Delta t^2 [(\nabla \tilde{p}_h^n - \nabla \cdot \tilde{\sigma}_h^n, \nabla q) \\ &- (\nabla \tilde{p}_h^n - \nabla \cdot \tilde{\sigma}_h^n, \nabla \cdot \tau)] - \Delta t (\tilde{\vec{u}}_h^{n-1}, \nabla q - \nabla \cdot \tau) = -\Delta t (\tilde{\vec{u}}_h^{n-1} - \vec{u}^{n-1}, \nabla q - \nabla \cdot \tau) \\ &- \frac{\lambda}{2\eta} (\tilde{\sigma}_h^{n-1} - \sigma^{n-1}, \tau)_h + \Delta t^2 \left[ (\nabla p^n - \nabla \cdot \sigma^n, \nabla q - \nabla \cdot \tau) \right] \\ &+ \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} \left[ (\sigma^n, \tau) + \epsilon_h(\sigma^n, \tau) \right] - \Delta t (\vec{u}^n, \nabla q - \nabla \cdot \tau) \\ &+ \Delta t (\vec{u}^n - \vec{u}^{n-1}, \nabla q) - \nabla \cdot \tau) - \frac{\lambda}{2\eta} \left[ (\sigma^{n-1}, \tau) + \epsilon_h(\sigma^{n-1}, \tau) \right] \end{split}$$

Aplicando integração por partes juntamente a (5.36), obtemos:

$$\begin{split} &\frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} (\tilde{\sigma}_{h}^{n}, \tau)_{h} - \frac{\lambda}{2\eta} (\tilde{\sigma}_{h}^{n-1}, \tau)_{h} + \Delta t^{2} (\nabla \tilde{p}_{h}^{n} - \nabla \cdot \tilde{\sigma}_{h}^{n}, \nabla q - \nabla \cdot \tau) \\ &- \Delta t (\tilde{\vec{u}}_{h}^{n-1}, \nabla q - \nabla \cdot \tau) = -\Delta t (\tilde{\vec{u}}_{h}^{n-1} - \vec{u}^{n-1}, \nabla q - \nabla \cdot \tau) \\ &- \frac{\lambda}{2\eta} (\tilde{\sigma}_{h}^{n-1} - \sigma^{n-1}, \tau)_{h} + \Delta t^{2} (\vec{u}_{t}^{n} + \nabla p^{n} - \nabla \cdot \sigma^{n}, \nabla q - \nabla \cdot \tau) \\ &- \Delta t (\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} [s - (n-1)\Delta t] \, \vec{u}_{tt}(s) ds, \nabla q - \nabla \cdot \tau) + \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} \epsilon_{h}(\sigma^{n}, \tau) \\ &- \frac{\lambda}{2\eta} \epsilon_{h}(\sigma^{n-1}, \tau) + \frac{\Delta t}{2\eta} (\sigma^{n} + \lambda \sigma_{t}^{n} - \frac{\lambda}{\Delta t} \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} [s - (n-1)\Delta t] \, \sigma_{tt}(s) ds, \tau) \\ &- \Delta t [< \vec{g}^{n}, (qI - \tau) \vec{\nu} >_{1/2, \partial\Omega} - (\nabla \cdot \vec{u}^{n}, q) + (D(\vec{u}^{n}), \tau)] \end{split}$$

Uma vez que  $\vec{u}_t^n + \nabla p^n - \nabla \cdot \sigma^n = \vec{f}^n$ ,  $\nabla \cdot \vec{u}^n = 0$  e  $\sigma^n + \lambda \sigma_t^n = 2\eta D(\vec{u}^n)$ , recordando (4.35) obtemos:

$$\begin{split} &\frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} (\bar{\sigma}_h^n, \tau)_h - \frac{\lambda}{2\eta} (\bar{\sigma}_h^{n-1}, \tau)_h + \Delta t^2 (\nabla \bar{p}_h^n - \nabla \cdot \bar{\sigma}_h^n, \nabla q - \nabla \cdot \tau) \\ &- \Delta t (\bar{u}_h^{n-1}, \nabla q - \nabla \cdot \tau) = \Delta t^2 (\vec{f^n} - \vec{f}_h^n, \nabla q - \nabla \cdot \tau) \\ &- \Delta t (\tilde{u}_h^{n-1} - \vec{u}^{n-1}, \nabla q - \nabla \cdot \tau) - \frac{\lambda}{2\eta} (\tilde{\sigma}^{n-1} - \sigma^{n-1}, \tau)_h + \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} \epsilon_h (\sigma^n, \tau) \\ &- \frac{\lambda}{2\eta} \epsilon_h (\sigma^{n-1}, \tau) - \Delta t \left( \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} [s - (n-1)\Delta t] \, \vec{u}_{tt}(s) ds, \nabla q - \nabla \cdot \tau \right) \\ &- \frac{\lambda}{2\eta} \left( \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} [s - (n-1)\Delta t] \, \sigma_{tt}(s) ds, \tau \right) - \Delta t < \vec{g^n} - \vec{g}_h^n, \, (qI - \tau) \vec{\nu} >_{1/2, \partial\Omega} \, . \end{split}$$

o que significa que:

$$\begin{cases}
\mathcal{R}_{h}^{p,n}(\nabla q - \nabla \cdot \tau) = \left(\vec{f}^{n} - \vec{f}_{h}^{n} + \frac{1}{\Delta t}\left(\vec{u}^{n-1} - \tilde{\vec{u}}_{h}^{n-1} - \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left[s - (n-1)\Delta t\right]\vec{u}_{tt}(s)ds\right), \nabla q - \nabla \cdot \tau\right).
\end{cases}$$
(5.38)

$$\begin{cases}
\mathcal{R}_{h}^{\sigma,n}(\tau) = \frac{\lambda}{2\eta\Delta t} \left[ \left( \sigma^{n-1} - \tilde{\sigma}_{h}^{n-1}, \tau \right)_{h} + \epsilon_{h}(\sigma^{n}, \tau - \sigma^{n-1}, \tau) - \left( \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left[ s - (n-1)\Delta t \right] \sigma_{tt}(s) ds, \tau \right) \right] + \frac{1}{2\eta} \epsilon_{h}(\sigma^{n}, \tau)
\end{cases} (5.39)$$

$$S_{h}^{n}((qI-\tau)\vec{\nu}) = \langle \vec{g}^{n} - \vec{g}_{h}^{n}, (qI-\tau)\vec{\nu} \rangle_{1/2,\partial\Omega}$$
(5.40)

Agora, nos esforçamos para estimar as normas de  $\mathcal{R}_{h}^{\vec{u},n}$ ,  $\mathcal{R}_{h}^{p,n}$ ,  $\mathcal{R}_{h}^{\sigma,n} \in \mathcal{S}_{h}^{n}$ ,  $\vec{f}_{h}^{n}$  sendo definidas como interpolante constante por partes de  $\vec{f}^{n}$  e  $\vec{g}_{h}^{n}$  sendo o interpolante quadrático de  $\vec{g}^{n}$ 

nos vértices e nos pontos médios das arestas ou faces da malha.

Primeiro precisamos do seguinte resultado técnico:

**Lema 5.2.2**  $\exists C_E > 0$  tal que  $\forall \vec{u} \in H^1(\Omega)^N$  e  $\forall \vec{v} \in \vec{V}_h$  temos

$$|\epsilon_h(\vec{u}, \vec{v})| \le C_E h ||\vec{u}||_1 ||\vec{v}||. \tag{5.41}$$

PROVA. Provemos o lema tomando  $u \in H^1(\Omega)$  e  $v \in S_h$  pois o caso vetorial é uma extensão trivial desse caso. Temos  $\varepsilon_h(u,v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \varepsilon_K(u,v)$  onde  $\varepsilon_K(u,v) := (u,v)_K - \int_{\mathcal{T}_h} \varepsilon_K(u,v) = \int_{\mathcal{T}_h} \varepsilon_K(u,v)$ 

 $\int_{K} uv dx$  (cf. equação 4.30). Seja  $\varepsilon$  a forma bilinear tal que

$$\varepsilon_K(u,v) = \frac{\text{medida}(K)}{\text{medida}(\hat{K})} \,\widehat{\varepsilon}(\hat{u},\hat{v}) \le Ch^2 \,\widehat{\varepsilon}(\hat{u},\hat{v}) \tag{5.42}$$

mais especificamente  $\hat{\varepsilon}$  é definida por:

$$\hat{\varepsilon}: H^1(\hat{K}) \times P_1(\hat{K}) \to \mathbb{R} \operatorname{com} \hat{\varepsilon}(\hat{u}, \hat{v}) = (\hat{u}, \hat{v})_{\hat{K}} - \int_{\hat{K}} \hat{u}\hat{v}d\hat{x}$$

onde  $(.,.)_{\hat{K}}$  é definido de forma análoga a  $(.,.)_{K}$  em (4.30). Provemos que  $\hat{\varepsilon}$  é contínua. Em primeiro lugar temos:

$$\hat{\varepsilon}(\hat{u},\hat{v}) = (\hat{u},\hat{v})_{\hat{K}} - \int_{\hat{K}} \pi_1^{\hat{K}}(\hat{u})\hat{v}$$

do qual:

$$\hat{\varepsilon}(\hat{u},\hat{v}) \le |(\hat{u},\hat{v})|_{\hat{K}} + \| \pi_1^{\hat{K}}(\hat{u}) \|_{\hat{K}} \| \hat{v} \|_{\hat{K}} \le \| (\hat{u},\hat{v}) \|_{\hat{K}} + \| \hat{u} \|_{\hat{K}} |\hat{v}|_{\hat{K}}$$

logo,

$$\hat{\varepsilon}(\hat{u},\hat{v}) \le |(\hat{u},\hat{v})|_{\hat{K}} + \| \hat{u} \|_{H^{1}(\hat{K})} \| \hat{v} \|_{H^{1}(\hat{K})}$$
(5.43)

ora, por definição:

$$(\hat{u}, \hat{v})_{\hat{K}} = \frac{medida(\hat{K})}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \left[ \pi_1^{\hat{K}}(\hat{u})\hat{v} \right] \left( S_i^{\hat{K}} \right) \le medida(\hat{K}) \parallel \pi_1^{\hat{K}}(\hat{u}) \parallel_{\infty, \hat{K}} \parallel \hat{v} \parallel_{\infty, \hat{K}}$$

Como em um espaço de polinômios de grau  $\leq m$ , para um inteiro m, todas as normas são equivalentes, existe  $\hat{C}$  tal que:

$$\leq \hat{C} \parallel \pi_1^{\hat{K}}(\hat{u}) \parallel_{0,\hat{K}} \parallel v \parallel_{1,\hat{K}} \text{ pois } \pi_1^{\hat{K}}(\hat{u}) \in P_1(\hat{K}) \ e \ \hat{v} \in P_1(\hat{K})$$

Logo,

$$(\hat{u}, \hat{v})_{\hat{K}} \le \hat{C} \parallel \hat{u} \parallel_{0, \hat{K}} \parallel \hat{v} \parallel_{1, \hat{K}}$$

$$(5.44)$$

então por (5.43) e (5.44), temos:

$$\widehat{\varepsilon}(\hat{u}, \hat{v}) \leq \hat{C} \parallel \hat{u} \parallel_{1, \widehat{K}} \parallel \hat{v} \parallel_{1, \widehat{K}} + \parallel \hat{u} \parallel_{1, \widehat{K}} \parallel \hat{v} \parallel_{1, \widehat{K}}$$

 $\leq (\hat{C}+1) \parallel \hat{u} \parallel_{1,\hat{K}} \parallel \hat{v} \parallel_{1,\hat{K}}$ 

agora verifica-se facilmente que:

$$\hat{\varepsilon}(\hat{u}, \hat{v}) = 0 \quad \forall \hat{u} \in P_0(\hat{K}) \in \forall \hat{v} \in P_1(\hat{K})$$
$$\hat{\varepsilon}(\hat{u}, \hat{v}) = 0 \quad \forall \hat{u} \in H^1(\hat{K}) \in \forall \hat{v} \in P_0(\hat{K})$$

$$\int_{\hat{K}} \hat{u}\hat{v} = \hat{u} \int_{\hat{K}} \hat{v} = \hat{u} \int_{\hat{K}} \pi_1^{\hat{K}}(\hat{v}) = \pi_1^{\hat{K}}(\hat{u}) \quad medida(\hat{K}) \sum_{i=1}^{N+1} \frac{\pi_1^{\hat{K}}(\hat{v})(S_i^{\hat{K}})}{N+1}$$

Com<br/>o $\pi_1^{\hat{K}}(\hat{u})(S_i^{\hat{K}})$ é para todoiigual <br/>a $\pi_1^{\hat{K}}(\hat{u}),$ vem que:

$$\int_{\hat{K}} \hat{u}\hat{v} = \frac{medida(\hat{K})}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \pi_1^{\hat{K}}(\hat{u}) \pi_1^{\hat{K}}(\hat{v})(S_i^{\hat{K}})$$

trocando  $\hat{u}$  por  $\hat{v}$ , o resultado vem como no caso anterior. Logo, deduzimos que:

$$\hat{\varepsilon}(\hat{u},\hat{v}) \leq \underline{\hat{C}} \mid \hat{u} \mid_{1,\hat{K}} \mid \hat{v} \mid_{1,\hat{K}}$$

Por outro lado, como  $P_1(\hat{K})$  é de dimensão finita,  $\exists \hat{C}$  tal que  $\parallel \hat{v} \parallel_{1,\hat{K}} \leq \hat{C} \parallel \hat{v} \parallel_{0,\hat{K}}$  onde  $\hat{C}$  depende apenas de  $\hat{K}$ . logo,

$$\hat{\varepsilon}(\hat{u},\hat{v}) \leq \hat{C}' \mid \hat{u} \mid_{1,\hat{K}} \mid \hat{v} \mid_{0,\hat{K}}$$

Transformando de volta ao elemento  $K, \hat{u}$  e  $\hat{v},$  temos:

$$\hat{\varepsilon}(\hat{u},\hat{v}) \leq C \ medida(K)^{-1/2}h \mid u \mid_{1,K} \ medida(K)^{-1/2} \parallel v \parallel_{0,K}$$

ou seja,

$$medida(\hat{K})\hat{\varepsilon}(\hat{u},\hat{v}) \leq Ch \mid u \mid_{1,K} \parallel v \parallel_{0,K}$$

logo,

$$\frac{medida(K)}{medida(\hat{K})} \hat{\varepsilon}(\hat{u}, \hat{v}) \le \frac{C}{medida(\hat{K})} h \mid u \mid_{1, K} \parallel v \parallel_{0, K}$$

isto é, lembrando (5.42)

$$\varepsilon_K(u,v) \le Ch \mid u \mid_{1,K} \parallel v \parallel_{0,K}$$

Dessa forma,

$$\varepsilon_h(u,v) = \sum_K \varepsilon_K(u,v) \le Ch \sum_K | u |_{1,K} \| v \|_{0,K}$$

Como

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} a_k b_k \le \left(\sum_K a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_K b_k^2\right)^{1/2} \tag{5.45}$$

Fazendo  $a_k = | u |_{1,K} e b_k = || v ||_K$ , obtemos:

$$\sum_{K} a_{k} b_{k} = \sum_{K} | u |_{1,K} + \sum_{K} | v |_{0,K} \leq \left( \sum_{K} | u |_{1,K}^{2} \right)^{1/2} \left( \sum_{K} | v |_{K} \right)^{1/2}$$

onde:

$$\sum_{K} |u|_{1,K}^{2} = \sum_{K} \int_{K} |\nabla u|^{2} dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{2} dx = |u|_{1}^{2}$$
$$\sum_{K} |v|_{K}^{2} = \sum_{K} \int_{K} v^{2} dx = \int_{\Omega} v^{2} dx = ||v||^{2}$$

logo,

$$\varepsilon_h(u, v) \le Ch \sum_h |u|_{1,K} \| v \|_{0,K} \le Ch \|u\|_1 \|v\|$$

**Proposição 5.2.4** Supondo que  $\vec{f}(t) \in H^1(\Omega)^N \ \forall t, \ \tilde{p}^n \in H^2(\Omega), \ \vec{u}_t^n \in H^1(\Omega)^N, \ \tilde{\sigma}^n \in [H^2(\Omega)]^{N \times N}, \ \forall n \ e \ que \ \vec{u}_{tt} \in L^\infty \left[ (0,T), L^2(\Omega) \right]^N \ (cf. \ [29]), \ se \ verifica \ que$ 

$$|\mathcal{R}^{\vec{u},n}| \le C\alpha_{\vec{u}}^n (h + \Delta t + h^2/\Delta t)$$

$$onde \ \alpha_{\vec{u}}^n = ||\vec{f^n}||_1 + ||\tilde{p}^n||_2 + ||\vec{u}_t^n||_1 + \sup_{0 \le s \le T} \operatorname{ess} ||\vec{u}_{tt}(s)||.$$
(5.46)

PROVA. Lembrando (5.37), vem:
$$\left(\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left[s - (n-1)\Delta t\right] u_{tt}(s) ds, v\right) = \frac{(n-1)\Delta t}{n\Delta t} \left[s - (n-1)\Delta t\right] (u_{tt}(s), v) ds$$

$$\leq \parallel v \parallel \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left|s - (n-1)\Delta t\right| \cdot \parallel u_{tt}(s) \parallel ds$$

$$\leq \parallel v \parallel \sup_{0 \le s \le T} \operatorname{ess} \parallel u_{tt}(s) \parallel \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left[s - (n-1)\Delta t\right] ds$$

$$= \parallel v \parallel \sup_{0 \le s \le T} \operatorname{ess} \parallel u_{tt}(s) \parallel \frac{\Delta t^2}{2}$$
(5.47)

Logo,

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}_{h}^{u,n}(v)| &\leq \parallel \nabla \tilde{p}_{h}^{n} - \nabla \cdot \tilde{\sigma}_{h}^{n} - \nabla \tilde{p}^{n} + \nabla \tilde{\sigma}^{n} \parallel + \parallel f_{h}^{n} - f^{n} \parallel \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \sup_{0 \leq s \leq T} \operatorname{ess} \parallel u_{tt}(s) \parallel + \sup_{v \in V - \{0\}} \frac{|\varepsilon_{h}(\tilde{u}^{n} - \tilde{u}^{n-1}, v)|}{\Delta t \parallel v \parallel} \end{aligned}$$
(5.48)

Por outro lado, usando (5.36), podemos expandir  $\frac{1}{\Delta t}\varepsilon_h(u^n - u^{n-1}, v)$  da seguinte forma:

$$\frac{1}{\Delta t}\varepsilon_{h}(\tilde{u}^{n} - \tilde{u}^{n-1}, v) = \frac{1}{\Delta t}\varepsilon_{h}\left(\Delta t\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n} + \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left[s - (n-1)\Delta t\right]u_{tt}(s)ds, v\right)$$
$$= \varepsilon_{h}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n}, v\right) + \frac{1}{\Delta t}\varepsilon_{h}\left(\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left[s - (n-1)\Delta t\right]u_{tt}(s)ds, v\right)$$

pela linearidade de  $\varepsilon_h(., v)$  e pelo Lema (5.2.2), temos:

$$\frac{1}{\Delta t}\varepsilon_h(\tilde{u}^n - \tilde{u}^{n-1}, v) \le Ch \parallel \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^n \parallel_1 \parallel v \parallel + \frac{1}{\Delta t}\varepsilon_h\left(\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left[s - (n-1)\Delta t\right] u_{tt}(s)ds, v\right)$$
(5.49)

Provemos agora que  $\forall \tilde{w}, \tilde{v} \in L^2(\Omega)$  vale  $\varepsilon_h(\tilde{w}, \tilde{v}) \leq C \parallel \tilde{w} \parallel \parallel \tilde{v} \parallel;$ 

Temos:

$$\varepsilon_h(\tilde{w}, \tilde{v}) = \sum_K \left( \frac{medida(K)}{N+1} \left[ \sum_{i=1}^{N+1} \pi_1^K(\tilde{w}) \pi_1^K(\tilde{v}) \left( S_i^K \right) \right] - \int_K \tilde{w}\tilde{v} \right)$$

Fazendo  $\tilde{w}=\pi_1^K(w)$ e  $\tilde{v}=\pi_1^K(v)$ :

$$\begin{split} \varepsilon_h(\tilde{w}, \tilde{v}) &\leq \frac{medida(K)}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \left( \tilde{w}\tilde{v} \right) \left( S_i^K \right) + \parallel \tilde{w} \parallel_{\hat{K}} \parallel \tilde{v} \parallel_{\hat{K}} \\ \text{Ora,} \sum_{i=1}^{N+1} \left( \tilde{w}\tilde{v} \right) \left( S_i^K \right) &= \sum_{i=1}^{N+1} \left( \tilde{w}\tilde{v} \right) \left( S_i^{\hat{K}} \right) \leq \frac{1}{N+1} \max_{\hat{x} \in \hat{K}} \left| \hat{\tilde{w}}(\hat{x}) \right| \max_{\hat{x} \in \hat{K}} \left| \hat{\tilde{v}}(\hat{x}) \right| \\ &\leq \hat{C} \parallel \hat{\tilde{w}} \parallel_{\hat{K}} \parallel \hat{\tilde{v}} \parallel_{\hat{K}} \text{ pela equivalencia das normas } \parallel \cdot \parallel_{\infty, \hat{K}}. \end{split}$$

Então, 
$$\sum_{i=1}^{N+1} (\tilde{w}\tilde{v}) \left(S_i^K\right) \leq \tilde{C} \quad medida(K)^{-1} \parallel \tilde{w} \parallel_{\hat{K}} \parallel \tilde{v} \parallel_{\hat{K}} e \parallel \cdot \parallel_{\hat{K}} \text{ sobre } P_1(\hat{K}).$$

Por conseguinte,

$$\varepsilon_{h}(\hat{w}, \hat{v}) \leq \tilde{C} \sum_{K} \left[ \| \pi_{1}^{K}(w) \|_{\hat{K}} \| \pi_{1}^{K}(\tilde{v}) \|_{\hat{K}} + \| \tilde{w} \|_{\hat{K}} \| \tilde{v} \|_{\hat{K}} \right]$$
$$\leq \tilde{C} \sum_{K} \left[ \| \tilde{w} \| \hat{K} \| \tilde{v} \| \hat{K} + \| \tilde{w} \| \hat{K} \| \tilde{v} \| \hat{K} \right]$$

ou seja, (5.49) com  $C = \tilde{C} + 1$ . Voltando a expressão 5.49 e fazendo  $\tilde{w} = u_{tt}(s)$ , obtemos:

$$\varepsilon_h \left( \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left[ s - (n-1)\Delta t \right] u_{tt}(s) ds, v \right) = \left( \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left[ s - (n-1)\Delta t \right] \varepsilon_h u_{tt}(s), v \right) ds$$
$$\leq C \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} \left\| u_{tt}(s) \right\| \left\| v \right\| \left[ s - (n-1)\Delta t \right] ds \leq C \frac{\Delta t^2}{2} \sup_{0 \leq s \leq T} \exp \left\| u_t t(s) ds \right\| \left\| v \right\| \tag{5.50}$$

Em resumo, de (5.49) e (5.50)

$$\sup_{v \in D_h} \frac{\varepsilon_h(\tilde{u}^n - \tilde{u}^{n-1}, \tilde{v})}{\Delta t \, \|\tilde{v}\|} \le C \left[ h \, \|u_t^n\|_1 + \Delta t \, \sup_{0 \le s \le T} \operatorname{ess} \|u_{tt}(s) ds\| \right]$$

logo,

$$\begin{aligned} |\mathcal{R}^{u,n}| &\leq \|\nabla \tilde{p}_{h}^{n} - \nabla p^{n} - \nabla \cdot \tilde{\sigma}_{h}^{n} + \nabla \sigma^{n}\| + \|f_{h}^{n} - f^{n}\| \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \sup_{0 \leq s \leq T} \exp\|u_{tt}(s)ds\| + C \left[h \|u_{t}^{n}\|_{1} + \Delta t \sup_{0 \leq s \leq T} \exp\|u_{tt}(s)ds\|\right] \end{aligned} (5.51)$$

enfim, por (5.25) e pela estimativa clássica  $||f_h^n - f^n|| \le Ch ||f^n||_1$ , temos:

$$|\mathcal{R}^{u,n}| \le C \left[ h \left( \|p^n\|_2 + \left( 1 + \frac{h}{\Delta t} \right) \|\sigma^n\|_2 \right) + h \|f^n\|_1 + h \|u^n_t\|_1 + \Delta t \sup_{0 \le s \le T} \operatorname{ess} \|u_{tt}(s)\| \right]$$
(5.52)

De forma completamente análoga, podemos provar:

**Proposição 5.2.5** Sob as mesmas suposições da Proposição (5.2.4) aliadas as hipóteses de regularidade de que  $\sigma_t^n \in H^1(\Omega)^{N \times N}$  e  $\sigma_{tt} \in L^{\infty}[(0,T), L^2(\Omega)]^{N \times N}$  (cf. [29]), verificamos que:

$$|\mathcal{R}^{p,n}| \le C\alpha_p^n(h + \Delta t + h^2/\Delta t)$$
(5.53)

onde  $\alpha_p^n = ||\vec{f^n}||_1 + ||\tilde{\vec{u}}^{n-1}||_2 + \sup_{0 \le s \le T} \operatorname{ess} ||\vec{u}_{tt}(s)||, e$ 

$$|\mathcal{R}^{\sigma,n}| \le C\alpha_{\sigma}^{n}(h + \Delta t + h^{2}/\Delta t) \tag{5.54}$$

 $onde \quad \alpha_{\sigma}^n = ||\tilde{p}^n||_2 + ||\sigma_t^n||_1 + \sup_{0 \le s \le T} \mathrm{ess} \; ||\sigma_{tt}(s)||. \blacksquare$ 

Finalmente pela Teoria de Interpolação clássica (cf. [16]), a seguinte estimativa se verifica:

**Proposição 5.2.6** Se  $\vec{g}^n \in H^{5/2}(\partial \Omega)^N$  então:

$$[\varsigma_h^n] \le Ch^2 ||\vec{g}^n||_{5/2,\partial\Omega}.$$
(5.55)

#### 5.2.3 Convergência

Nesta seção provamos a convergência do método em normas naturais. O passo essencial para isto é a aplicação do resultado de estabilidade (5.14) para o problema (5.34). De fato, devido a (5.46), (5.53), (5.54), (5.55) e ao Lema (4.5.1), temos:

**Proposição 5.2.7** Seja  $\Delta t = T/M \mod M > 2T$ . Então sob as suposições das Proposições (5.2.4), (5.2.5) e (5.2.6),  $\mu$  sendo a razão  $\Delta t/h$ , considerada fixa,  $\exists C_{\mu}^{T} > 0$  tal que,  $\forall n \leq M$ , a seguinte estimativa se verifica:

$$\begin{aligned} ||\tilde{\vec{u}}_{h}^{n} - \vec{u}_{h}^{n}||^{2} + \frac{\Delta t^{2}}{2} \sum_{i=1}^{n} ||\nabla(\tilde{p}_{h}^{i} - p_{h}^{i}) - \nabla \cdot (\tilde{\sigma}_{h}^{i} - \sigma_{h}^{i})||^{2} + \frac{\lambda}{2\eta} ||\tilde{\sigma}_{h}^{n} - \sigma_{h}^{n}||^{2} \\ \leq \frac{C(T)h^{2}}{\mu^{2}} \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \left[ (\alpha_{\vec{u}}^{i})^{2} + (\alpha_{p}^{i})^{2} + (\alpha_{\sigma}^{i})^{2} \right] (\mu^{2} + \mu + 1)^{2} + ||\bar{g}^{i}||_{5/2,\partial\Omega} \right\} \end{aligned}$$
(5.56)

Antes de prosseguir, precisamos do seguinte lema técnico:

**Lema 5.2.3** Se  $\sigma^n \in H^2(\Omega)^{N \times N}$  e  $p^n \in H^2(\Omega)$  então,

$$||\tilde{\sigma}^{n} - \tilde{\sigma}_{h}^{n}|| \le C(h^{2} + h\Delta t)(||\tilde{\sigma}^{n}||_{2} + ||\tilde{p}^{n}||_{2})$$
(5.57)

PROVA. Primeiro escrevemos:

$$||\tilde{\sigma}^n - \tilde{\sigma}_h^n|| \le ||\tilde{\sigma}^n - \pi_h(\sigma^n)|| + ||\pi_h(\tilde{\sigma}^n) - \tilde{\sigma}_h^n||$$
(5.58)

então:

$$||\tilde{\sigma}^n - \tilde{\sigma}_h^n|| \le Ch^2 ||\tilde{\sigma}^n||_2 + ||\pi_h(\tilde{\sigma}^n) - \tilde{\sigma}_h^n||$$
(5.59)

Por outro lado, por definição de  $\tilde{\sigma}_h^n$ , temos que  $\forall q \in Q_h$  e  $\forall \tau \in \sum_h$ :

$$\frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} \left( \tilde{\sigma}_h^n - \pi(\tilde{\sigma}^n), \tau \right)_h + \Delta t^2 \left( \nabla(\tilde{p}_h^n - \pi_h(\tilde{p}^n)) - \nabla \cdot \left( \tilde{\sigma}_h^n - \pi_h(\tilde{\sigma}^n) \right), \nabla q - \nabla \cdot \tau \right)$$
(5.60)

$$=\frac{\lambda+\Delta t}{2\eta}\left(\tilde{\sigma}^{n}-\pi(\tilde{\sigma}^{n}),\tau\right)_{h}+\Delta t^{2}\left(\nabla(\tilde{p}^{n}-\pi_{h}(\tilde{p}^{n}))-\nabla\cdot\left(\tilde{\sigma}^{n}-\pi_{h}(\tilde{\sigma}^{n})\right),\nabla q-\nabla\cdot\tau\right)$$
(5.61)

Assim, tomando  $\tau = \tilde{\sigma}_h^n - \pi_h(\tilde{\sigma}^n)$  e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos:

$$\frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} \parallel \pi_h(\tilde{\sigma}^n) - \tilde{\sigma}_h^n \parallel_h^2 + \Delta t^2 \parallel \nabla(\tilde{p}_h^n - \pi_h(\tilde{p}^n)) - \nabla \cdot (\tilde{\sigma}_h^n - \pi_h(\tilde{\sigma}^n)) \parallel^2$$
$$\leq \frac{\lambda + \Delta t}{2\eta} \parallel \pi_h(\tilde{\sigma}^n) - \tilde{\sigma}^n \parallel_h^2 + \Delta t^2 \parallel \nabla(\tilde{p}_h^n - \pi_h(\tilde{p}^n)) - \nabla \cdot (\tilde{\sigma}^n - \pi_h(\tilde{\sigma}^n)) \parallel^2 5.62)$$

estendendo trivialmente (5.18) ao caso tensorial, temos:  $\| \pi_h \sigma^n - \sigma^n \|_h \leq Ch^4 \| \sigma^n \|_2^2$  logo:

$$\leq C \left( h^4 + \Delta t^2 h^2 \right) \left( \parallel \tilde{p}^n \parallel_2^2 + \parallel \tilde{\sigma}^n \parallel_2^2 \right)$$
 (5.63)

Relembrando (5.59) e percebendo que do Lema (4.5.1) temos  $\parallel \tau \parallel \leq \parallel \tau \parallel_h, \forall \tau \in \sum_h,$ a prova esta completa.  $\blacksquare$ 

Agora estamos prontos para dar os resultados de convergência principais:

**Teorema 5.2.2** Seja  $\Delta t = T/M < 1/2$ ,  $e \Delta t = \mu h$ . Sob as hipóteses de regularidade dos dados e da solução do problema (4.25) feitas ao longo deste trabalho, existe uma constante  $C_T^{\mu} > 0$  tal que  $\forall n \leq M$  a seguinte estimativa se verifica:

$$||\tilde{\vec{u}}^n - \vec{u}_h^n||^2 + \Delta t^2 \sum_{i=1}^n ||\nabla(\tilde{p}^i - p_h^i) - \nabla \cdot (\tilde{\sigma}^i - \sigma_h^i)||^2 + \frac{\lambda}{2\eta} ||\tilde{\sigma}^n - \sigma_h^n||^2 \le C_T^{\mu} h^2.$$
(5.64)

Mais especificamente, temos:

$$C_T^{\mu} = C(\mu, T) \left\{ \max_{1 \le i \le M} [||\tilde{\vec{u}}^i||_2^2 + ||\tilde{p}^i||_2^2 + ||\tilde{\sigma}^i||_2^2 + ||\vec{f}^i||_1^2 + ||\vec{g}^i||_{5/2,\partial\Omega}^2 + ||\vec{u}^i_t||_1^2 + ||\sigma^i_t||_1^2 + \sup_{0 \le s \le T} \operatorname{ess} ||\vec{u}_{tt}(s)||^2 + \sup_{0 \le s \le T} \operatorname{ess} ||\sigma_{tt}(s)||^2 \right\}.$$

Prova.

Usando ||  $\tilde{\vec{u}}^n - \vec{u}_h^n \parallel^2 \leq 2 \left[ \parallel \tilde{\vec{u}}^n - \tilde{\vec{u}}_h^n \parallel^2 + \parallel \tilde{\vec{u}}_h^n - \vec{u}_h^n \parallel^2 \right]$  e desigualdades análogas para ambas ||  $\tilde{\sigma}^n - \sigma_h^n \parallel^2$  e  $\sum_{i=1}^n \parallel \nabla(\tilde{p}^i - p_h^i) - \nabla \cdot (\tilde{\sigma}^i - \sigma_h^i) \parallel$ , este resultado segue do Lema 5.2.3, da Proposição 5.2.7 e das equações (5.18), (5.24), (5.25).

Como uma consequência do Teorema (5.2.2), a convergência de primeira ordem no sentido de  $L^2(\Omega)$  de  $\vec{u}_h^n$  para  $\vec{u}(t)$ , e de  $\sigma_h^n$  para  $\sigma(t)$  quando n tende para  $\infty$  e h tende a zero foi estabelecida, uma vez que  $t = n\Delta t$  permaneça fixo. A seguir, damos outro resultado declarando a convergência de  $p_h^n$  para p no sentido mais fraco. Mais precisamente no sentido da norma discreta  $L^2[(0,T), L^2(\Omega)]$  denotada por  $||\cdot||_M$  dada por,

$$||q||_{M} = \left[\sum_{i=1}^{M} \Delta t ||\tilde{q}^{i}||^{2}\right]^{1/2}, \text{ com } \tilde{q}^{i} = q(i\Delta t), \ i = 1, 2, \dots, M, \ \forall q \in C^{0}\{[0, T], L^{2}(\Omega)\}.$$

Aqui supomos que q varia linearmente com t entre  $i\Delta t$  e  $(i + 1)\Delta t$  para todo i, se a função q é definida somente nos tempos  $i\Delta t$  com i = 1, 2, ..., M.

**Teorema 5.2.3** Sob as mesmas condições de regularidade na solução de (4.25) feitas no Teorema (5.2.2) e para  $\Delta t = T/M < 1/2$ ,  $\mu = \Delta t/h$  fixos,  $\exists C_M$  tal que:

$$||p - p_h||_M^2 \le C_M h \tag{5.65}$$

onde  $p_h$  é definido por  $p_h(i\Delta t) = p_h^i$ ,  $i = 1, 2, \ldots, M$ .

PROVA. Primeiro reescrevemos:

$$||p - p_h||_M^2 = \sum_{i=1}^M \Delta t \left[ \sup_{q \in L_0^2(\Omega) - \{0\}} \frac{|(\tilde{p}^i - p_h^i, q)|}{||q||} \right]^2.$$

Por um resultado clássico (cf. [30])  $\forall q \in L_0^2(\Omega), q \neq 0, \exists \vec{v} \in H_0^1(\Omega)^N$  tal que  $\nabla \cdot \vec{v} = q$ e  $||\nabla \vec{v}|| \leq C||q||$ . Assim usando fórmula de Green adequada e a desigualdade de Friedrich-Poincaré, sucessivamente obtemos:

$$\sup_{q \in L^{2}_{0}(\Omega) - \{0\}} \frac{|(\tilde{p}^{i} - p_{h}^{i}, q)|}{||q||} \leq C \sup_{\vec{v} \in H^{1}_{0}(\Omega)^{N} - \{\vec{0}\}} \frac{|(\tilde{p}^{i} - p_{h}^{i}, \nabla \cdot \vec{v})|}{||\nabla \vec{v}||}$$
$$= C \sup_{\vec{v} \in H^{1}_{0}(\Omega)^{N} - \{\vec{0}\}} \left[ \frac{|(\nabla(\tilde{p}^{i} - p_{h}^{i}) - \nabla \cdot (\tilde{\sigma}^{i} - \sigma_{h}^{i}), \vec{v}) - (\tilde{\sigma}^{i} - \sigma_{h}^{i}, \nabla \vec{v})|}{||\nabla \vec{v}||} \right]$$
$$\leq C_{P} \left[ ||\nabla(\tilde{p}^{i} - p_{h}^{i}) - \nabla \cdot (\tilde{\sigma}^{i} - \sigma_{h}^{i})|| + ||\tilde{\sigma}^{i} - \sigma_{h}^{i}||] \right],$$

Isto leva a:

$$||p - p_h||_M^2 \le 2C_P \Delta t^{-1} \sum_{i=1}^M \Delta t^2 [||\nabla(\tilde{p}^i - p_h^i) - \nabla \cdot (\tilde{\sigma}^i - \sigma_h^i)||^2 + ||\tilde{\sigma}^i - \sigma_h^i||^2].$$

Finalmente usando (5.64), concluimos que:  $||p - p_h||_M^2 \leq C_U[\Delta t^{-1}h^2 + h^2]$  e o resultado segue.  $\blacksquare$ 

### 5.3 Resultados numéricos para o Caso Evolutivo

A fim de verificar as ordens de convergência do método acima fizemos alguns cálculos tridimensionais para um problema linear. Mais especificamente, aproximamos com nosso método (4.3) no domínio  $\Omega \times (0,T)$ ,  $\Omega$  sendo um cubo unitário  $(0,1)^3$  e T = 1. Apresentamos em seguida, alguns resultados relevantes para o caso particular onde a solução exata é dada por:

$$\vec{u}(x, y, z, t) = [x(y-z), y(z-x), z(x-y)]^{\mathrm{T}}t$$

$$p(x, y, z, t) = [x^{2}(z - y) + y^{2}(x - z) + z^{2}(y - x)]/2 \ \forall t$$

$$\sigma(x, y, z, t) = \eta(t - \lambda) \begin{bmatrix} 2(y - z) & x - y & z - x \\ x - y & 2(z - x) & y - z \\ z - x & y - z & 2(x - y) \end{bmatrix}$$

O segundo membro correspondente é dado por  $\vec{f}(x,y,z,t)$  =  $[y^2-z^2,z^2-x^2,x^2-x^$ 

 $y^2$ ]<sup>T</sup>/2  $\forall t$ , enquanto a velocidade prescrita na fronteira  $\vec{g}$ , assim como os dados iniciais  $\vec{u}_0 \in \sigma_0$  são óbvios. Resolvemos este problema com uma malha uniforme de tetraedros obtida pela primeira subdivisão de  $\Omega$  em  $M^3$  cubos iguais com aresta de comprimento h = 1/M, cada uma deles sendo por sua vez subdividido em seis tetraedros de maneira clássica. Mostramos nas Tabelas 5.2 e 5.3 e nas Figuras 5.3 e 5.4 os erros relativos na norma  $L^2$  da velocidade, da pressão e da tensão aproximadas, para diferentes valores de M, correspondendo t = 0, 1 e t = 1 respectivamente. Nestes casos, mantemos  $\lambda = 10$ ,  $\eta = 1$ , e  $\Delta t$  tomados iguais a h/50.

| М  | $ec{u}$         | p                             | σ               |
|----|-----------------|-------------------------------|-----------------|
| 2  | 0.20424657 E-04 | $0.87849969\mathrm{E}\!+\!00$ | 0.11637832E-04  |
| 4  | 0.31002633 E-01 | $0.44702548\mathrm{E}\!+\!00$ | 0.83090181E-05  |
| 8  | 0.18373583E-01  | $0.14006621\mathrm{E}\!+\!00$ | 0.71100717 E-05 |
| 16 | 0.90056909E-02  | 0.41192174 E-01               | 0.54772777E-05  |

Tabela 5.2: Erros relativos na norma  $L^2$  para  $\lambda = 10, \eta = 1$  e t = 0, 1

| М  | $\vec{u}$       | p                             | σ               |
|----|-----------------|-------------------------------|-----------------|
| 2  | 0.56647707 E-03 | $0.29960172\mathrm{E}\!+\!01$ | 0.97030262 E-03 |
| 4  | 0.68327049 E-02 | $0.54365712\mathrm{E}{+00}$   | 0.33282136E-03  |
| 8  | 0.31364798 E-02 | $0.18664163\mathrm{E}\!+\!00$ | 0.13640762 E-03 |
| 16 | 0.13763716E-02  | 0.70842154 E-01               | 0.67042529 E-04 |

Tabela 5.3: Erros relativos na norma  $L^2$  para  $\lambda = 10, \eta = 1$  e t = 1, 0

Como se pode inferir de ambas as tabelas, as taxas de convergência esperadas parecem ser confirmadas, de forma aproximada, pelos resultados numéricos, embora apenas um subpasso iterativo tenha sido utilizado nestes cálculos. Isto significa que realmente implementamos um esquema de integração totalmente explícito no tempo. Surpreendentemente, isto parece ter um desempenho muito bom e a esse respeito também nos referimos às conclusões gerais, a seguir.

**Observação 5.3.1** Similarmente ao caso considerado nesta seção, resolvemos com o nosso método problemas de escoamentos viscoelásticos com solução analítica conhecida



Figura 5.3: Erros relativos na norma  $L^2$  para  $\lambda = 10, \eta = 1$  e t = 0, 1

considerando todos os termos não lineares. Os resultados obtidos para tais problemas até valores moderados de  $\lambda$ , indicam um comportamento convergente similar àquele observado para o caso linear. Contudo, uma estabilização adicional se faz necessária para valores maiores deste parâmetro, (i.e. números de Deborah maiores) e a esse respeito nos referimos no último parágrafo da próxima seção.



Figura 5.4: Erros relativos na norma  $L^2$  para  $\lambda = 10, \eta = 1$  e t = 1, 0

### 5.4 Outros resultados numéricos envolvendo escoamentos de fluidos viscoelásticos

Para avaliar a funcionalidade do método numérico trabalhado nesta tese, foram realizados mais testes em escoamentos com solução exata conhecida. O objetivo dos testes foi o de comparar os resultados obtidos pelo método com os valores exatos dos problemas. Em todos os testes, foram feitas comparações nos três campos, velocidade, tensor extra de tensões e pressão. As comparações são apresentadas por meio de tabelas e gráficos, onde os erros relativos na norma  $L^2$  são utilizados. Em alguns problemas apresentados nesta seção, foram utilizados diferentes parâmetros do escoamento e da malha.

#### 5.4.1 Problema em um domínio tridimensional em forma de cubo

Este experimento representa o escoamento do fluido viscoelástico dentro de um domínio espacial tridimensional em forma de cubo e um intervalo de tempo limitado. Foram apresentados cinco conjuntos de resultados para este problema, com variação de seus parâmetros, no tempo e na malha. O parâmetro  $\alpha = 0$  representa o caso estacionário e  $\alpha = 1$  o caso evolutivo, m representa o número de divisões em uma dimensão da malha,  $\lambda$  representa o número de Deborah ou Weissenberg, t representa o instante de tempo e  $\eta$  representa a viscosidade.

Definição do problema: Escoamento sujeito a força de corpo  $\vec{f} = (-1 + 2\alpha t, \alpha - 1, \alpha - 1)$ com  $\alpha \in \mathbb{R}$ . No domínio  $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1);$  T = 1; com  $\eta = 1$ 

Solução exata:

$$\vec{u} = (y + z, \alpha t, \alpha t);$$
  $p = 1, 5 - x - y - z;$   $\sigma = \begin{bmatrix} 4\lambda \eta & \eta & \eta \\ \eta & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 

<u>Formato da malha:</u>  $m \times m \times m$  uniforme  $\rightarrow h = 1/m - 6m^3$  tetraedros, M = 250m (*i.e.*  $\mu = 1/250$ )

#### 5.4.1.1 Caso estacionário, com parâmetros: $\alpha = 0; \lambda = 1$ e m = 4

O primeiro conjunto de experimentos, representa o caso estacionário ( $\alpha = 0$ ). Aqui o valor de subdivisões da malha foi fixado em m = 4 diferentemente dos outros experimentos onde m varia. Aqui o valor do tempo t, que é fictício, varia. Quanto maior o valor de t, maior

o número de passos de tempo fictício, e um menor valor do erro é esperado. A Tabela 5.4 e a Figura 5.5 representam os resultados do experimento.

| t        | $ec{u}$ p       |                 | σ                         |  |
|----------|-----------------|-----------------|---------------------------|--|
| $0,\!01$ | 0,56663390 E-08 | 0,31517870 E-05 | $0,\!82505017\text{E-}10$ |  |
| $0,\!05$ | 0,99623811 E-08 | 0,42175629 E-05 | 0,29306382E-09            |  |
| $0,\!10$ | 0,85495033E-08  | 0,18018900 E-05 | $0,\!40171225\text{E-}09$ |  |

Tabela 5.4: Erros relativos na norma  $L^2$  para  $\lambda = 1$ ,  $\alpha = 0$  e m = 4



Figura 5.5: Erros relativos na norma  $L^2$  para  $\lambda = 1$ ,  $\alpha = 0$  e m = 4

#### 5.4.1.2 Caso evolutivo, com parâmetros: $\alpha = 1; \lambda = 1$ e t = 0, 1

O segundo conjunto de experimentos, representa um caso evolutivo ( $\alpha = 1$ ). O valor de  $\lambda$  é 1, e o instante de tempo escolhido é t = 0, 1. O experimento foi realizado para diferentes valores de m. Quanto maior o valor de m mais refinada é a malha e um valor menor de erro para os três campos é esperado. A Tabela 5.5 e a Figura 5.6 representam os resultados do experimento.

| $\overline{m}$ | $ec{u}$         | p                               | σ               |
|----------------|-----------------|---------------------------------|-----------------|
| 2              | 0,38677286E-02  | $0,\!16872036\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,27028876E-03  |
| 4              | 0,17852020 E-02 | 0,50457045 E-01                 | 0,18366586E-03  |
| 8              | 0,82323945 E-03 | $0,\!15595547\text{E-}01$       | 0,12156731E-03  |
| 16             | 0,40944267 E-03 | 0,57234983E-02                  | 0,77297824 E-04 |

Tabela 5.5: Erros relativos na norma  $L^2$  para  $t = 0, 1, \lambda = 1$  e  $\alpha = 1$ 



Figura 5.6: Erros relativos na norma  $L^2$  para  $t = 0, 1, \lambda = 1$  e  $\alpha = 1$ 

#### 5.4.1.3 Caso evolutivo, com parâmetros: $\alpha = 1; \lambda = 100$ e t = 0, 1

O terceiro conjunto de experimentos, representa um caso evolutivo ( $\alpha = 1$ ). O valor de  $\lambda$  é 100, e o instante de tempo escolhido é t = 0, 1. O experimento foi realizado para diferentes valores de m. Quanto maior o valor de m mais refinada é a malha e um valor menor de erro para os três campos é esperado. A Tabela 5.6 e a Figura 5.7 representam os resultados do experimento.

| $\overline{m}$ | $\vec{u}$                         | p                               | σ               |
|----------------|-----------------------------------|---------------------------------|-----------------|
| 2              | 0,29529827E-02                    | $0,\!57003534\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,18829781E-03  |
| 4              | 0,16455107 E-02                   | $0,\!37469527\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,12696408 E-03 |
| 8              | 0,81797707E-03                    | $0,\!23352401\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,75878830 E-04 |
| 16             | $0,\!42647656\mathrm{E}	ext{-}03$ | $0{,}12605987\mathrm{E}{+}00$   | 0,42962001 E-04 |

Tabela 5.6: Erros relativos na norma  $L^2$  para  $t = 0, 1, \lambda = 100 e \alpha = 1$ 



Figura 5.7: Erros relativos na norma  $L^2$  para  $t = 0, 1, \lambda = 100 e \alpha = 1$ 

#### 5.4.1.4 Caso evolutivo, com parâmetros: $\alpha = 1; \lambda = 1$ e t = 1

O quarto conjunto de experimentos, representa um caso evolutivo ( $\alpha = 1$ ). O valor de  $\lambda$ é 1, e o instante de tempo escolhido é t = 1. O experimento foi realizado para diferentes valores de m. Quanto maior o valor de m mais refinada é a malha e um valor menor de erro para os três campos é esperado. A Tabela 5.7 e a Figura 5.8 representam os resultados do experimento.

| m  | $ec{u}$                 | p                               | σ               |
|----|-------------------------|---------------------------------|-----------------|
| 2  | 0,22854952 E-02         | $0,\!20256092\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,13670291E-01  |
| 4  | 0,12844199E-02          | $0,\!90367652\text{E-}01$       | 0,11808625 E-01 |
| 8  | $0,95725170 	ext{E-03}$ | $0,\!10361442\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,14763368 E-01 |
| 16 | 0,41112755 E-02         | $0,\!19428864\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,35332631E-01  |

Tabela 5.7: Erros relativos na norma  $L^2$  para t = 1,  $\lambda = 1$  e  $\alpha = 1$ 



Figura 5.8: Erros relativos na norma  $L^2$  para  $t = 1, \lambda = 1$  e  $\alpha = 1$ 

#### 5.4.1.5 Caso evolutivo, com parâmetros: $\alpha = 1; \lambda = 10$ e t = 1

O quinto conjunto de experimentos, representa um caso evolutivo ( $\alpha = 1$ ). O valor de  $\lambda$  é 10, e o instante de tempo escolhido é t = 0, 1. O experimento foi realizado para diferentes valores de m. Quanto maior o valor de m mais refinada é a malha e um valor menor de erro para os três campos é esperado. A Tabela 5.8 e a Figura 5.9 representam os resultados do experimento.

| $\overline{m}$ | $ec{u}$                         | p                               | σ                             |
|----------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| 2              | 0,15464035 E-02                 | $0,\!51762366\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,12277070E-01                |
| 4              | 0,12907924 E-02                 | $0,\!30156010\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,74629458 E-02               |
| 8              | 0,27755001 E-02                 | $0,\!41218230\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,11554993 E-01               |
| 16             | $0,\!12160076\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,20817986E-02                  | $0,\!65506935\mathrm{E}{+}00$ |

Tabela 5.8: Erros relativos na norma  $L^2$  para t = 1,  $\lambda = 10$  e  $\alpha = 1$ 



Figura 5.9: Erros relativos na norma  $L^2$  para t = 1,  $\lambda = 10 e \alpha = 1$ 

#### 5.4.2 Problema em um domínio 3D de uma seção elíptica

Este problema representa o escoamento de Poiseuille de um fluido viscoelástico em um domínio tridimensional de uma seção elíptica em um intervalo de tempo limitado. Para este problema são apresentados dois conjuntos de testes. Em cada conjunto, são modificados o número de Weissenberg representado por  $\lambda$ , e o instante de tempo, representado por t. Cada conjunto possui quatro execuções, cada um com um diferente refinamento da malha, representado pelo parâmetro m.

Solução exata:

$$\vec{u} = (0, 0, w)t \quad \text{com} \quad w(x, y) = \frac{k^2(1 - y^2) - x^2}{2(1 + k^2)}$$

$$p = \eta(z - 0, 5)(\lambda - t) + 0, 5w(x_0, y_0) - zw(x, y)$$

$$x_0 = y_0 = \frac{3k^2}{8(1 + k^2)} \qquad \sigma_{zz} = 2\eta \frac{x^2 + k^4 y^2}{(1 + k^2)^2} (t^2 - 3\lambda t + 3\lambda^2)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0 \qquad \sigma_{xz} = \frac{\eta x (\lambda - t)}{1 + k^2} \qquad \sigma_{yz} = \frac{\eta k^2 y (\lambda - t)}{1 + k^2}$$

#### 5.4.2.1 Primeiro caso, com parâmetros: $\lambda = 1$ e t = 1

Aqui é apresentado o conjunto de resultados do primeiro caso. O valor de k da equação elíptica é fixado em 0,5, o valor de  $\lambda$  vale 1, e o instante de tempo escolhido é t = 1. A Tabela 5.9 e a Figura 5.10 representam os resultados do experimento.

|    | $\vec{u}$               | $\vec{u}$ p                     |                               |
|----|-------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| 2  | 0,54040425 E-01         | $0,\!14416970\mathrm{E}\!+\!01$ | $0,\!15507875\mathrm{E}{+}00$ |
| 4  | $0,28477946 	ext{E-01}$ | $0,\!88772595\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,70268013 E-01               |
| 8  | 0,18712191E-01          | $0,\!79964793\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,34278426 E-01               |
| 16 | 0,14246378 E-01         | $0,\!88101482\mathrm{E}\!+\!00$ | 0,43555163 E-01               |

Tabela 5.9: Erros relativos na norma  $L^2$  para k = 0, 5, t = 1 e  $\lambda = 1$ 



Figura 5.10: Erros relativos na norma  $L^2$  para k = 0, 5, t = 1 e  $\lambda = 1$ 

#### 5.4.2.2 Segundo caso, com parâmetros: $\lambda = 10$ e t = 0, 1

Aqui é apresentado o conjunto de resultados do segundo caso. O valor de k da equação elíptica é fixado em 0,5, o valor de  $\lambda$  vale 10, e o instante de tempo escolhido é t = 0, 1. A Tabela 5.10 e a Figura 5.11 representam os resultados do experimento.

| $\overline{m}$ | $\vec{u}$                     | p                         | σ               |
|----------------|-------------------------------|---------------------------|-----------------|
| 2              | $0{,}30445319\mathrm{E}{+00}$ | 0,90060476E-02            | 0,30492811E-03  |
| 4              | $0,\!20672637\mathrm{E}{+}00$ | 0,76136831 E-02           | 0,22384654 E-03 |
| 8              | $0,\!18065584\mathrm{E}{+}00$ | $0,\!69990628\text{E-}02$ | 0,30166429E-03  |
| 16             | 0,44370856E-01                | $0,\!32558862\text{E-}01$ | 0,37552777E-03  |

Tabela 5.10: Erros relativos na norma  $L^2$  para  $k = 0, 5, t = 0, 1 e \lambda = 10$ 



Figura 5.11: Erros relativos na norma  $L^2$  para  $k = 0, 5, t = 0, 1 e \lambda = 10$ 

#### 5.4.3 Fluidos power-law

Aqui são apresentados dois problemas de escoamento do tipo power-law. Para cada problema, foi gerado um conjunto de experimentos. No primeiro conjunto, o parâmetro de potência m do fluido power-law é mantido fixo, e a malha varia. Enquanto que no segundo conjunto, o número de elementos da malha é mantido fixo, e o parâmetro m é variado.

#### 5.4.3.1 Escoamento de Poiseuille

No primeiro problema, é apresentado um escoamento de Poiseuille para o fluido powerlaw. Para este problema, um conjunto de três execuções foi apresentado. Em todas as execuções, o valor da potência m foi fixada em 0,5. O número de elementos em cada execução é diferente. A malha é quasi-uniforme em três dimensões, com  $L \times L \times L$  cubos e  $6L^3$  tetraedros. Em cada execução, foram feitas 3500L iterações. O passo de tempo  $\Delta t$ está diretamente vinculado ao número de elementos, sendo  $\Delta t = 0, 02/L$ .  $\begin{array}{l} \underline{\text{Definição do problema:}} \text{ Escoamento de Poiseuille, com } \vec{f} = 0, \text{ e } Re = 1 \text{ no quadrante de cilindro } \Omega = \omega \times (0,1), \text{ onde } \omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1; x > 0; y > 0\}. \end{array}$ 

$$\sigma = 2|D(u)|^{(m-1)}D(u)$$
 com  $0 < m < 2$  e aproximações iniciais zero.

Solução exata:

$$\vec{u} = (0, 0, w(x, y)); \quad p = 0, 5 - z; \quad \text{com} \quad w = 2^{-1/m} \frac{\left[1 - (x^2 + y^2)^{(1+1/m)/2}\right]}{1 + \frac{1}{m}}$$

A Tabela 5.11 e a Figura 5.12 representam os resultados do experimento.

| $Nr.de\ tetraedros \rightarrow$ | 384                            | 3072        | 24576      |
|---------------------------------|--------------------------------|-------------|------------|
| $ec{u}$                         | $0,\!1717E-01$                 | 0,8277E-02  | 0,3987E-2  |
| p                               | $0,\!1268\mathrm{E}{+}00$      | 0,7572E-01  | 0,2259E-01 |
| $\sigma$                        | $0,\!8001\mathrm{E}\text{-}01$ | 0,5095 E-01 | 0,1421E-01 |

Tabela 5.11: Erros relativos na norma  $L^2$  para um crescente número de tetraedros



Figura 5.12: Erros relativos na norma  $L^2$  para um crescente número de tetraedros

#### 5.4.3.2 Escoamento de Couette

No segundo problema, é apresentado um escoamento de Couette para o fluido powerlaw. Para este problema, um conjunto de seis execuções foi apresentado. Em todas as execuções, a malha é mantida fixa, com um total de 2048 triângulos. O passo de tempo  $\Delta t$  e o número de iterações também são mantidos fixos, com os valores  $10^{-5}$  e 10000 respectivamente. O valor da potência do power-law varia, sendo um valor diferente para cada execução.

Definição do problema: Escoamento de Couette em um quadrante da seção anular com  $\vec{f} = 0$  e Re = 1, e domínio:

$$\begin{split} \Omega &= \{(x,y) \quad | \quad 1/4 < x^2 + y^2 < 1; \quad x > 0; \quad y > 0\}; \\ (i.e. \quad 1/4 < r^2 = x^2 + y^2 < 1 \quad e \quad 0 < \theta = atan(y/x) < \pi/2) \\ \sigma &= 2|D(u)|^{(m-1)}D(u) \quad \text{com} \quad 0 < m < 2 \quad e \text{ aproximações iniciais zero} \\ \text{Solução exata:} \end{split}$$

$$\vec{u}_r = 0; \quad \vec{u}_\theta = r \frac{[r^{(-2/m)} - 1]}{[2^{2/m} - 1]}; \quad p = p(r) \quad \text{solução de} \quad \frac{dp}{dr} = \frac{-[\vec{u}_\theta]^2}{r} \quad \text{com} \quad p(1) = 0.$$



A Tabela 5.12 e a Figura 5.13 representam os resultados do experimento.

Figura 5.13: Erros relativos na norma  $L^2$  para diferentes valores de m

| $m \rightarrow$ | 0,50       | $0,\!64$   | 0,80       | $1,\!00$   | 1,50       | 2,00       |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $\vec{u}$       | 0,2445     | $0,\!1115$ | $0,\!0951$ | $0,\!1452$ | $0,\!2292$ | 0,2703     |
| p               | 0,5780     | 0,2662     | 0,1989     | $0,\!2594$ | $0,\!3937$ | $0,\!4591$ |
| $\sigma$        | $0,\!4288$ | $0,\!5382$ | $0,\!6627$ | $0,\!8111$ | $0,\!5747$ | $0,\!3862$ |

Tabela 5.12: Erros relativos na norma  $L^2$  para diferentes valores de m

# 5.5 Visualização do escoamento viscoelástico em um duto

Com o objetivo de ilustrar o comportamento do escoamento, simulado pelo método estudado neste trabalho, foram gerados gráficos a partir de resultados obtidos pelo método, para os campos de velocidade, tensão e pressão. O duto utilizado tem a seção quadrada, e o escoamento se desenvolve no sentido do trecho mais largo para o mais estreito, caracterizando uma contração suave 2:1 em ambas as direções transversais.

#### 5.5.1 Campo velocidade

O campo de velocidade gerado a partir de valores obtidos de uma execução do método, é representado pela Figura 5.14. Nesta figura, cada vetor individualmente representa a velocidade em um nó da malha. Para uma melhor visualização do comportamento do campo velocidade, foram geradas figuras em duas dimensões do mesmo experimento. A Figura 5.15 representa um corte 2D ao longo do duto, no plano YZ posicionado em X = 0. As figuras (5.16), (5.17) e (5.18), representam cortes transversais ao duto, no plano XY, nos valores Z = 2,88, Z = 3,5 e Z = 4 respectivamente. Os valores de Z para os cortes foram escolhidos de modo a conter pontos da malha. O corte na posição Z = 2,88 foi feito numa região larga do duto, próximo da contração, enquanto o corte da posição Z = 3,5 foi feito dentro da região da contração. Por último, o corte da posição



Figura 5.14: Vetores dos campos de velocidade nos nós do duto.



Figura 5.15: Corte em perfil do duto, no plano YZna posição X=0.



Figura 5.16: Corte do duto no plano XY na posição Z = 2,88. Região larga do duto.



Figura 5.17: Corte do duto no plano XY na posição Z = 3, 5. Região central da contração.



Figura 5.18: Corte do duto no plano XY na posição Z = 4. Região estreita do duto.

#### 5.5.2 Campo tensor extra de tensões

Para representar o campo do tensor extra de tensões, foram geradas três figuras, cada uma representando a intensidade de cada componente cisalhante do tensor,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{zz}$ . Todas as figuras foram geradas a partir dos resultados obtidos de uma mesma execução, e cada ponto representa o valor de um componente do tensor em um ponto da malha. As Figuras 5.19, 5.20 e 5.21 representam as componentes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{zz}$  do tensor, respectivamente.

#### 5.5.2.1 Componentes $\sigma_{xx}$ do tensor extra de tensões

A figura 5.19 representa a componente  $\sigma_{xx}$  do tensor extra de tensões nos nós da malha.



Figura 5.19: Valores da componente  $\sigma_{xx}$  do tensor extra de tensões nos nós da malha

#### 5.5.2.2 Componente $\sigma_{xz}$ do tensor extra de tensões

A figura 5.20 representa a Componente  $\sigma_{xz}$  do tensor extra de tensões nos nós da malha.



Figura 5.20: Valores da Componente  $\sigma_{xz}$ do tensor extra de tensões nos nós da malha

#### 5.5.2.3 Componente $\sigma_{zz}$ do tensor extra de tensões

A figura 5.21 representa a Componente  $\sigma_{zz}$ do tensor extra de tensões nos nós da malha.



Figura 5.21: Valores da Componente  $\sigma_{zz}$ do tensor extra de tensões nos nós da malha

#### 5.5.3 Campo pressão

Para ilustrar o campo da pressão hidrostática, obtido pelo método deste trabalho, foi feita uma execução do método e, a partir dos resultados de pressão, gerado um gráfico, aqui representado pela Figura 5.22. Os pontos da figura representam o valor individual de pressão de cada ponto da malha.



Figura 5.22: Valores de pressão nos nós no interior do duto.

# Capítulo 6

## **Considerações Finais**

Concluímos este trabalho, apontando alguns de seus aspectos que em nossa opinião têm maior relevância. Primeiramente, todos os resultados obtidos aqui, evitaram a suposição de que os líquidos viscoelásticos se comportam parcialmente como um fluido newtoniano e parcialmente como um fluido não newtoniano, como a maioria dos autores de trabalhos similares têm feito. De fato, o que se mostra importante é que nossa aproximação pode ser aplicada também a leis constitutivas puramente viscoelásticas tais como as de Maxwell. Como é bem conhecido, neste caso tratar a tensão—extra de forma adequada em uma aproximação numérica, é obrigatório, se o interesse é obter simulações numéricas confiáveis de escoamentos (veja ex. em [39]). Além disso, gostaríamos de salientar que resultados de convergência para a pressão foram obtidos, ainda que os mais simples tipos de aproximação de elementos finitos espaço-tempo, tenham sido empregados para resolver um sistema de Stokes três campos.

Outro ponto importante, diz respeito a subpassos iterativos para executar a cada passo de tempo: como observamos nos experimentos para problemas estacionários, a convergência deste procedimento iterativo, até uma tolerância razoavelmente pequena, ocorre após duas iterações, pelo menos para valores de n não tão próximos de 1 (cf. [9]). Este é um ponto interessante que significa que estamos praticamente lidando com um esquema explícito, em velocidade e tensão, estável e convergente para valores de passo de tempo de mesma ordem do que o tamanho de passo de malha.

### Referências

- [1] ADAMS, R. A. Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.
- [2] AINSER, A.; DUPUY, D.; PANASENKO, G. P.; SIRAKOV, I. Flow in wavy tube structure: Asymptotic analysis and numerical simulation. *Comptes Rendus de l'Académie* des Sciences de Paris 331, 9 (2003), 609–615.
- [3] ASTARITA, G.; MARUCCI, G. Principle of Non-Newtonian Fluid Mechanics. Mc Graw Hill, 1974.
- [4] BARANGER, J.; SANDRI, D. Approximation par éléments finis d'écoulements de fluides viscoélastiques: Existence de solutions approchées et majorations d'erreur. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris 312*, I (1991), 541–544.
- [5] BARANGER, J.; WARDI, S. Numerical analysis of a fem for a transient viscoelastic flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 125, 1-4 (1995), 171–185.
- BIRD, R. B.; ARMSTRONG, R. C.; HASSAGER, O. Dynamics of Polymerics Liquids
   Vol. 1 Fluid Mechanics, second printing ed. John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [7] BONITO, A.; CLÉMENT, P.; PICASSO, M. Mathematical and numerical analysis of a simplified time-dependent viscoelastic flow. *Numerische Mathematik* 107, 2 (2007), 213–255.
- [8] BRAESS, D. Finite Elements. Cambridge University Press, Cambridge UK, 1997.
- [9] BRASIL JR., A.; H. CARNEIRO DE ARAÚJO, J.; RUAS., V. A new algorithm for simulating viscoelastic flows accommodating piecewise linear finite elements. *Journal* of Computational and Applied Mathematics 215 (2008), 311-319.
- [10] BRASIL JR., A. P.; CARNEIRO DE ARAÚJO, J. H.; RUAS, V. Piecewise linear finite elements approximation of a generalized stokes system related to viscoelastic flow. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 215 (2008), 311–319.
- [11] BREZZI, F.; FORTIN, M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [12] CARNEIRO DE ARAÚJO, J. H.; DIAS GOMES, P.; RUAS, V. Study of finite element method for the time-dependent generalized stokes system associated with viscoelastic flow. Journal of Computational and Applied Mathematics 234 (2010), 2562–2577.
- [13] CHORIN., A. Numerical simulation of the Navier-Stokes equations. Mathematics of Computation 22 (1966), 325–352.

- [14] CHRISPELL, J.; ERVIN, V.; JENKINS, E. A fractional step θ-method for viscolelastic fluid flow using a supg approximation. Int. J. of Comp. Sci., 2-3 (2008), 336–351.
- [15] CHRISPELL, J.; ERVIN, V.; JENKINS, E. A fractional step θ-method approximation of time-dependent viscolelastic fluid flow. Journal of Computational and Applied Mathematics 232 (2009), 159–175.
- [16] CIARLET, P. G. The Finite Element Method for Elliptic Problems. North Holland, Amsterdan, 1977.
- [17] CODINA, R. Finite element approximation of the three-field formulation of the stokes problem using arbitrary interpolations. SIAM J. Numerical Analysis 47, 1 (2009), 699-718.
- [18] CODINA, R.; ZIENKIEWICZ., O. CBS versus GLS stabilization of the incompressible Navier-Stokes equations and the role of the time step as a stabilization parameters. *Communications in Numerical Methods in Engineering 18* (2002), 99–112.
- [19] CROCHET, M. J.; DAVIS, A. R.; WALTERS, K. Rheology Series I Numerical Simulation of Non-Newtonian Flows. Elsevier, New York, 1984.
- [20] DUVAUT, G. Mécanique des milieux continuos. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise, Masson, Paris, 1990.
- [21] DUVAUT, G.; LIONS, J. L. Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, Paris, 1972.
- [22] ERVIN, V.; HEUER, N. Approximation of time-dependent viscoelastic flow: cranknicolson finite element approximation. Numerical Methods for Partial Differential Equations 20, 2 (2004), 248–283.
- [23] ERVIN, V.; MILES, W. Approximation of time-dependent viscoelastic fluid flow: Supg approximation. SIAM J. Numerical Analysis 41, 2 (2003), 457–486.
- [24] ESSELAOUI, D.; MACHMOUM, A. Finite element approximation of viscoelastic flow using characteristics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engine*ering 190, 42 (2001), 5603-5618.
- [25] FRANCA, L.; HUGES, T. J. R.; LOULA, A. F. D.; MIRANDA, I. A new family of stable element for nearly incompressible elasticity based on a mixed petrov-galerkin finite element formulation. *Numerische Mathematik* 53 (1988), 123–141.
- [26] FRANCA, L.; HUGHES, T. J. R.; LOULA, A. F. D.; MIRANDA, I. A new family of stable element for nearly incompressible elasticity based on a mixed petrov-galerkin finite element formulation. *Numerische Mathematik* 53 (1988), 123–141.
- [27] FRANCA, L.; STENBERG., R. Error analysis of some galerkin least-squares methods for the elasticity equations. SIAM Journal of Numerical Analysis 26, 6 (1991), 1680– 1697.
- [28] FRANCA, L.; STENBERG, R. Error analysis of some galerkin least-squares methods for the elasticity equations. SIAM Journal of Numerical Analysis 26 (1991), 1680– 1697.

- [29] FUJITA, H.; SUZUKI, T. Evolution problems Handbook of Numerical Analysis, Vol. II. Finite Element Methods (Part 1), P.G. Ciarlet, J.L. Lions eds. North Holland, New York, 1991.
- [30] GIRAULT, V.; RAVIART, P. A. Finite Element methods for Navier-Stokes equations - Springer Series in Computational Mathematics 5. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [31] GOLDBERG, D.; RUAS., V. A numerical study of projection algorithms in the finite element simulation of three-dimensional viscous incompressible flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids 30* (1999), 233-256.
- [32] GUENETTE, R.; FORTIN, M. A new mixed element method for computing viscoelastic flows. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 60 (1995), 27–52.
- [33] GUERMOND, J.; SHEN., J. A new class of truly consistent splitting schemes for incompressible flows. *Journal of Computational Physics 192* (2003), 262–276.
- [34] HU, X.; DING, Z.; LEE, J. Simulation of 2d transient viscoelastic flow using the connffessit approach. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 127 (2005), 107– 122.
- [35] KIM, J. M.; KIM, C.; KIM, J. H.; CHUNG, C.; AHN, K. H.; LEE, S. J. Highresolution finite element simulation of 4:1 planar contraction flow of viscoelastic fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 129* (2005), 23–37.
- [36] LIONS, J. L. Problémes aux limites dans les équations aux dérivées partielles. Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1962.
- [37] M. FORTIN, R. G.; PIERRE, R. Numerical analysis of the modified evss method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 143, 1-2 (1997), 79–95.
- [38] MARCHAL, J. M.; CROCHET, M. Hermitian finte elements for calculating viscoelastic flow. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 20 (1986), 187–207.
- [39] MARCHAL, J. M.; CROCHET, M. A new mixed finite element for calculating viscoelastic flow. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 26 (1987), 77-117.
- [40] PETERA, J. A new finite element scheme using the lagrangian framework for simulation of viscoelastic fluid flows. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 103 (2002), 1-43.
- [41] RAHMOUN, H.; RUAS, V. Simulation numérique d'écoulements instationnaires de fluides incompressibles visqueux par la méthode des éléments finis appliquée dans divers domaines. In Rapport de stage de DEA de mécanique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1993).
- [42] RAJAGOPALAN, D.; ARMSTRONG, R. C.; BROWN, R. A. Finite element methods for calculation of steady, viscoelastic flow using constitutive equations with a newtonian viscosity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 36* (1990), 159–192.
- [43] RANNACHER, R. On chorin's projection method for the incompressible Navier-Stokes equations. Lecture Notes in Mathematics 1530 (1991), 262–276.

- [44] RUAS, V. Finite elements methods for the three-fiels stokes system in r3. Mathematical Modelling and Numerical Analysis 30 (1992), 489–525.
- [45] RUAS, V. Galerkin least-square finite element methods for the stokes system in r3. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 143, 3 (1997), 235-256.
- [46] RUAS, V.; BRASIL JR., A. P. Explicit solution of the incompressible Navier-Stokes equations with linear finite elements. *Applied Mathematics Letters 20* (2007), 1005– 1010.
- [47] RUAS, V.; CARNEIRO DE ARAÚJO, J. H.; DIAS GOMES, P. Solving stationary incompressible flow problems in stress-velocity-pressure formulation with linear finite elements. In *Proceedings of COBEM 2007, E.N. Mamiya ed. (CD-ROM)* (2007).
- [48] RUAS, V.; CARNEIRO DE ARAÚJO, J. H.; SILVA RAMOS, M. A. M. Approximation of the three-field stokes system via optimized quadrilateral finite elements. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 27, 1 (1993), 107–127.
- [49] SARAMITO, P. A new θ-scheme algorithm and incompressible fem for viscoelastic fluid flows. RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 28, 1 (1994), 1-35.
- [50] STRANG, G.; FIX, G. An Analysis of the Finite Element Method. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- [51] TEMAM, R. Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes. In Bulletin de la Société des Mathématiques de France (1968), vol. 98, pp. 115–152.
- [52] THOMÉE, V. Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems. Springer Series in Computational Mathematics 25, Berlin, 1997.
- [53] XUE, S.; TANNER, R. I.; PHAN-THIEN, N. Numerical modelling of transient viscoelastic flows. Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics 123 (2004), 33–58.
- [54] ZIENKIEWICZ, O. C. The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. Mc Graw Hill, London, 1971.