

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

ANDRE ABEL AUGUSTO

**AVALIAÇÃO DA CAPACIDADE DE OBSERVAÇÃO DO
ESTADO OPERATIVO DE REDES ELÉTRICAS**

**Tese de Doutorado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em
Computação da Universidade Federal
Fluminense como requisito parcial para a
obtenção do Grau de Doutor em
Computação. Área de Concentração:
Computação Científica e Sistemas de
Potência**

Orientadores:

**Prof. Julio Cesar Stacchini de Souza, D.Sc.
Prof. Milton Brown do Coutto Filho, D.Sc.**

**Niterói
2016**

AVALIAÇÃO DA CAPACIDADE DE OBSERVAÇÃO DO ESTADO OPERATIVO DE REDES ELÉTRICAS

ANDRE ABEL AUGUSTO

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doutor em Computação. Área de Concentração: Computação Científica e Sistemas de Potência.

Apresentada em 25 de Fevereiro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Milton Brown Do Coutto Filho, D. Sc. – Orientador
UFF – Universidade Federal Fluminense

Prof. Julio Cesar Stacchini de Souza, D. Sc. – Orientador
UFF – Universidade Federal Fluminense

Prof. Débora Christina Muchaluat Saade, D.Sc.
UFF – Universidade Federal Fluminense

Prof. Carlos Alberto de Jesus Martinhon, D.Sc.
UFF – Universidade Federal Fluminense

Prof. Djalma M. Falcão, Ph.D.
COPPE/UFRJ – Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Reinaldo Castro Souza, D.Sc.
PUC-Rio – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

*"It matters not how straight the gate,
How charged with punishments the scroll,
I am the master of my fate:
I am captain of my soul"*

William Ernest Henley

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por cada dia de minha vida e por amparar-me em diversos momentos de minha caminhada, quando eu não possuía mais forças.

Agradeço à minha família, em especial Ricardo da Silva Augusto, meu pai, Maria Lúcia da Silva Augusto, minha tia e Zelinda da Silva Augusto, minha avó, por todo apoio e incentivo dado durante a realização do Mestrado.

Aos meus orientadores, Prof. Julio Cesar Stacchini de Souza e Prof. Milton Brown Do Coutto Filho, pela orientação atenciosa e técnica, sempre pautada na ética e no respeito mútuo. Agradeço também pelos conselhos e incentivos dados. Muito Obrigado !

Aos amigos, pelo incentivo e companheirismo em todas as minhas conquistas.

Agradeço ao CNPQ, CAPES e FAPERJ pelo apoio financeiro para consecução desta pesquisa.

A todos aqueles que direta ou indiretamente colaboraram na execução deste trabalho.

Resumo

A estimação de estado (EE) em sistemas de potência atua como um filtro de incertezas, primordialmente visando aquelas presentes na medição das grandezas que caracterizam o comportamento do sistema em condições normais de operação (equilíbrio entre carga e geração). Em especial, a função EE cumpre o papel de validador de dados em tempo real, realizando a detecção, identificação e remoção de erros grosseiros de medição.

Conceitualmente, essa função necessita ser alimentada com muitos dados e, quando privada destes, não apenas em quantidade, mas também em diversidade (diferentes tipos de grandezas) e espalhamento da rede elétrica, a EE se ressent, não cumprindo adequadamente seu papel, situação nem sempre do conhecimento de seus usuários, frustrando expectativas.

Uma das etapas da EE, conhecida por análise de observabilidade, destina-se à prévia verificação de condições mínimas para a realização do processo de estimação, em termos de dados necessários ao alcance de todas as barras da rede elétrica. Entretanto, para que a EE seja eficaz (como validador de dados) e eficiente (como ferramenta de tempo real), devem-se buscar mecanismos que avaliem riscos e limitações do processo de estimação, o que enseja uma análise mais ampla da capacidade de observação do estado do sistema.

Esta Tese propõe uma metodologia para a avaliação da capacidade de observação do estado de redes elétricas, trazendo à luz a integração das condições de criticalidade de medidas/ramos da rede e detectabilidade/identificabilidade de erros grosseiros de medição. O problema de determinação das criticalidades foi proposto alternativamente como um problema de otimização inteira multi-modal, cuja enumeração das diversas soluções – as tuplas críticas de medidas – se fez via métodos de Branch-and-Bound. Aspectos probabilísticos foram também considerados, levando-se em conta a indisponibilidade de medidas e ramos da rede na elaboração de índices de risco para a esperada atuação da EE. Para tal, adotou-se uma abordagem baseada na Simulação de Monte Carlo. Além disto, com base na Teoria da Informação, explorou-se a quantidade de informação contida nas medidas fornecida à EE.

De modo a ilustrar a aplicação da metodologia proposta, diversos exemplos são apresentados, usando-se redes elétricas de porte variado, frequentemente adotadas em estudos sobre a EE.

Abstract

Power system state estimation (SE) acts as an uncertainty filter, primarily aimed at those ones present in the measuring of the quantities that characterize the system behavior under normal operating conditions (load and generation balance). In particular, SE function fulfills the role of real time data validator, performing the detection, identification and removal of measurement gross errors.

Conceptually, this function needs to be fed with a plenty of data, and when deprived of that, not only in quantity but also in diversity (different quantities) and spreading the power grid, SE resents itself, not adequately fulfilling its role, situation not always known by its users, frustrating expectations.

One of the SE steps, known for observability analysis is intended to prior verification of minimum conditions for carrying out the estimation process, in terms of data needed within reach of all the bars of the grid. However, for the effectiveness of SE (as validator data) and efficient (such as real-time tool), it should be sought mechanisms to assess risks and limitations of the estimation process, which entails a wider analysis of observational capability the system state.

This Doctoral Thesis proposes a methodology for evaluating the capacity of observation of the operating state of power grids, bringing to light the integration of criticality conditions of measurement / network branches, and detectability / identifiability of gross measurement errors. The problem of determining the criticality conditions is proposed alternatively as a multi-modal integer optimization problem whose enumeration of the numerous solutions – the critical tuples of measurements and/or branches - was performed through Branch-and-Bound methods. Probabilistic aspects were also considered, taking into account the availability of measurements and network branches in the development of risk indices for the expected performance of the EE. To this end, it was developed an approach based on Monte Carlo Simulation. Furthermore, based on Information Theory, the information content of measurements provided to SE is exploited in determining the observation capacity.

In order to illustrate the application of the proposed methodology, several examples are presented, using electrical power networks of different sizes, frequently adopted in SE studies.

Sumário	Pág.
Capítulo 1 - Introdução	1
1.1 Considerações Gerais	1
1.2 Objetivos	3
1.3 Tópicos Abordados	4
1.4 Contribuições	4
1.5 Publicações	5
1.6 Estágio Doutoral no INESC Porto	5
Capítulo 2 – Observabilidade e Criticalidade	6
2.1 Introdução	7
2.2 Estimação de Estado em Sistemas de Potência	7
2.2.1 Etapas	8
2.2.2 Fundamentos	10
2.3 Revisão Bibliográfica	16
2.4. Criticalidades de medidas e ramos da rede	21
2.4.1 Tuplas críticas de medidas	21
2.4.2 Tuplas críticas de unidades de medição	26
2.4.3 Tuplas críticas de ramos da rede	27
2.5 Comentários Finais	31
Capítulo 3 – Simulação de Monte Carlo	33
3.1 Introdução	33
3.2 Sistema, Modelos e Simulação	33
3.3 Simulação de Monte Carlo	34

3.4 Simulação de modelos discretos e estáticos	37
3.5 Intervalos de confiança para a estimativa do desempenho	38
3.6 Técnicas de controle de variância	41
3.6.1 Amostragem Condicional	41
3.6.2 Amostragem Estratificada	43
3.6.3 Amostragem por Importância	46
3.6.4 Degeneração da razão de verossimilhança	53
3.8 Conclusões	56
Capítulo 4 – Metodologia proposta	57
4.1 Introdução	57
4.2 Capacidade de Observação de um Sistema de Medição	58
4.3 Análise de Criticalidades para a EE	62
4.3.1 Criticalidades de medidas	62
4.3.2 –Criticalidades de Unidades de Medição	76
4.3.3 – Criticalidades de ramos	78
4.4 – Avaliação da Capacidade de Observação	84
4.4.1 Indicadores da Capacidade de Observação	84
4.4.2 Simulação de Monte Carlo Simples (MCS)	88
4.4.3 Simulação de Monte Carlo por Amostragem por Importância e Rastreamento	92
4.4.4 Graus de Observação	96
4.4.5 Entropia Relativa e Capacidade de Observação	99
4.4.6 Coeficiente de Informação Relativa	102
4.5 Conclusões	105

Capítulo 5 – Testes e Resultados	106
5.1. Introdução	106
5.2 Sistema 6-barras	106
5.3 Sistema IEEE 24 barras	120
5.4 Sistema IEEE 30 barras	136
5.5 Sistema IEEE 118 barras	155
5.6 Comentários Finais	157
5.7 Conclusões	158
Capítulo 6 – Conclusões e Propostas de Continuidade	159
Apêndice A – Noções sobre Teoria de Probabilidades	165
Apêndice B – Propriedades Estatísticas da Estimação de Estado	181
Apêndice C – Criticalidade do Sistema IEEE 24 Barras	188
Referências Bibliográficas	201

Lista de Figuras	Pág.
Figura 2.1	Etapas básicas do processo de estimação de estado. 9
Figura 3.1	Modelo da rede elétrica. 35
Figura 4.1	Propostas de planos de medição. 59
Figura 4.2	Avaliação da Capacidade de Observação do Estado Operativo. 61
Figura 4.3	Algoritmo de identificação de tuplas críticas até ordem 3. 64
Figura 4.4	Sistema-exemplo de 3 barras. 66
Figura 4.5	Operação de Ramificação proposta. 69
Figura 4.6	Enumeração de Ck-tuplas pela técnica do Branch-and-Bound. 72
Figura 4.7	Árvore de soluções visitadas e lista LP após avaliação de $tu' = (1,1,1,1)$. 73
Figura 4.8	Árvore de soluções visitadas e lista LP após avaliação de $tu' = (1,1,1,0)$. 74
Figura 4.9	Árvore de soluções visitadas e lista LP após avaliação de $tu' = (1,1,0,0)$. 74
Figura 4.10	Árvore de soluções visitadas pelo algoritmo e lista de soluções LS . 75
Figura 4.11	Enumeração de Ck-tuplas de ramos pelo método <i>Branch-and-Bound</i> . 80
Figura 4.12	Enumeração de condições de não detecção de erro de topologia usando o método BB. 82
Figura 5.1	Sistema teste de 6 Barras 107
Figura 5.2	Sistema teste de 6 Barras após a inclusão do ramo 1-5 114
Figura 5.3	Sistema teste IEEE 24 Barras – Caso Base. 120
Figura 5.4	Distribuição das Ck-meds do Caso Base. 123
Figura 5.5	Distribuição das Ck-UMs do Caso Base. 123

Figura 5.6	Distribuição das Ck-ramos do Caso Base.	123
Figura 5.7	Distribuição das Ck-meds do Caso 1.	125
Figura 5.8	Distribuição das Ck-UMs do Caso 1.	125
Figura 5.9	Distribuição das Ck-ramos do Caso 1.	125
Figura 5.10	Distribuição das Ck-meds do Caso 2.	127
Figura 5.11	Distribuição das Ck-UMs do Caso 2.	127
Figura 5.12	Distribuição das Ck-ramos do Caso 2.	127
Figura 5.13	Distribuição das Ck-meds do Caso 3.	128
Figura 5.14	Distribuição das Ck-UMs do Caso 3.	129
Figura 5.15	Distribuição das Ck-ramos do Caso 3.	129
Figura 5.16	Distribuição das Ck-meds do Caso 4.	130
Figura 5.17	Distribuição das Ck-UMs do Caso 4.	131
Figura 5.18	Distribuição das Ck-ramos do Caso 4.	131
Figura 5.19	Distribuição das Ck-meds do Caso 5.	132
Figura 5.20	Distribuição das Ck-UMs do Caso 5.	132
Figura 5.21	Distribuição das Ck-ramos do Caso 5.	133
Figura 5.22	Distribuição das Ck-meds do Caso 6.	134
Figura 5.23	Distribuição das Ck-UMs do Caso 6.	134
Figura 5.24	Distribuição das Ck-ramos do Caso 6.	135
Figura 5.25	Sistema IEEE 30 Barras – Plano de Medição A	136
Figura 5.26	Ck-meds do sistema IEEE 30 Barras (Plano A).	137
Figura 5.27	Comparação entre as taxas de indisponibilidades das UMs – PLOC.	147

Figura 5.28	Comparação entre as taxas de indisponibilidades das UMs – PLIC.	147
Figura 5.29	Comparação entre as taxas de indisponibilidades das UMs – PLDC.	148
Figura 5.30	Sistema IEEE 30 Barras – Plano de Medição B.	149
Figura 5.31	Comparação entre criticalidades de UMs – Sistema IEEE 30 Barras.	151
Figura 5.32	Comparação entre as criticalidades de ramos – Sistema IEEE 30 Barras.	152
Figura 5.33	Comparação entre Índices probabilísticos – Sistema IEEE 30 Barras.	154
Figura 5.34	Sistema IEEE 118 barras.	156

Lista de Tabelas	Pág.
Tabela 3.1 – Simulação de Monte Carlo.	36
Tabela 4.1 – Sumário das criticalidades de medida.	60
Tabela 4.2 – Sub-tuplas de medidas de $\mathbf{z}(\mathbf{tu}) = (P_{1-3}, P_2, P_3)$.	67
Tabela 4.3 – Enumeração de estados.	87
Tabela 4.4 – Graus de Observação.	97
Tabela 4.5 – Coeficiente de Informação Relativa.	105
Tabela 5.1 – Ck-meds do sistema de medição – sistema de 6 Barras.	108
Tabela 5.2 – Ck-UMs – sistema de 6 Barras.	110
Tabela 5.3 – Ck-ramos – sistema de 6 Barras.	111
Tabela 5.4 – Taxas de indisponibilidade dos medidores – sistema de 6 Barras.	111
Tabela 5.5 – Resultados do MCS para o sistema de 6 Barras.	112
Tabela 5.6 – Taxas de indisponibilidades ajustadas.	112
Tabela 5.7 – Resultados do MCAI-CER para o sistema de 6 Barras.	113
Tabela 5.8 – Coeficiente de informação relativa – sistema de 6 Barras.	113
Tabela 5.9 – Avaliação da capacidade de observação do sistema de 6 Barras.	113
Tabela 5.10 – Ck-meds após a inclusão do ramo 1-5.	114
Tabela 5.11 – Ck-UMs após a inclusão do ramo 1-5.	114
Tabela 5.12 – Ck-ramos após a inclusão do ramo 1-5	115
Tabela 5.13 – Resultados do MCS para o sistema de 6 Barras modificado.	115
Tabela 5.14 – Resultados do MCS para 10^6 amostras de medidas.	116
Tabela 5.15 – Taxas de indisponibilidades ajustadas – sistema de 6 Barras modificado.	116

Tabela 5.16 – Resultados do MCAI-CER para o sistema de 6 Barras modificado.	117
Tabela 5.17 – Taxas de indisponibilidades das UMs – sistema de 6 Barras.	117
Tabela 5.18 – Resultados da MCS para UMs.	117
Tabela 5.19 – Taxas de indisponibilidades ajustadas das UMs.	118
Tabela 5.20 – Resultados do MCAI-CER para UMs.	118
Tabela 5.21 – Coeficiente de informação relativa após a inclusão do ramo 1-5.	119
Tabela 5.22 – Comparativo entre Indicadores – Sistema de 6 Barras.	119
Tabela 5.23 – Taxas de indisponibilidade dos ramos – IEEE 24 Barras.	121
Tabela 5.24 – Índices probabilísticos – Caso Base.	122
Tabela 5.25 – Ck-meds do Sistema IEEE 24 Barras - Caso Base (até 2ª Ordem).	122
Tabela 5.26 – Índices probabilísticos – Caso 1.	124
Tabela 5.27 – Ck-meds do sistema de 24 Barras – Caso 1(até 2ª Ordem).	124
Tabela 5.28 – Índices probabilísticos – Caso 2.	126
Tabela 5.29 – Ck-meds do Sistema IEEE 24 Barras – Caso 2(até 2ª Ordem).	126
Tabela 5.30 – Índices probabilísticos – Caso 3.	128
Tabela 5.31 – Ck-meds do Sistema IEEE 24 Barras – Caso 3(até 2ª Ordem).	128
Tabela 5.32 – Índices probabilísticos – Caso 4.	129
Tabela 5.33 – Ck-meds do Sistema IEEE 24 Barras – Caso 4(até 2ª Ordem).	130
Tabela 5.34 – Índices probabilísticos – Caso 5.	131
Tabela 5.35 – Ck-tuplas do Sistema IEEE 24 Barras – Caso 5(até 2ª Ordem).	132
Tabela 5.36 – Índices probabilísticos – Caso 6.	133
Tabela 5.37 – Ck-meds do Sistema IEEE 24 Barras – Caso 6(até 2ª Ordem).	134
Tabela 5.38 – Classificação dos planos de medição - Sistema IEEE 24 Barras.	135
Tabela 5.39 – C1 e C2-meds do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).	137

Tabela 5.40 – Ck-UMs do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).	138
Tabela 5.41 – Ramos críticos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).	139
Tabela 5.42 – Pares de Ramos Críticos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).	139
Tabela 5.43 – Trios de Ramos Críticos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).	140
Tabela 5.44 – Comparação entre os Algoritmos 4.11 e 4.12.	142
Tabela 5.45 – C2-ramos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).	143
Tabela 5.46 – C3-ramos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).	144
Tabela 5.47 – Indisponibilidade das UMs – Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).	145
Tabela 5.48 – Taxas de indisponibilidades das UMs (Plano A).	146
Tabela 5.49 – Índices probabilísticos de Observação (Plano A).	148
Tabela 5.50 – Coeficiente de informação relativa – Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).	148
Tabela 5.51 – C1 e C2-meds do Sistema IEEE 30 Barras (Plano B).	149
Tabela 5.52 – Comparação entre criticalidades de medidas – Sistema IEEE 30 Barras.	150
Tabela 5.53– C1 e C2-UMs – Sistema IEEE 30 Barras (Plano B).	150
Tabela 5.54 – C1-ramos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano B).	151
Tabela 5.55 – C2-ramos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano B).	151
Tabela 5.56 – C2-ramos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano B).	152
Tabela 5.57 – Comparação entre coeficientes de informação relativa.	153
Tabela 5.58 – Índices probabilísticos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano B)	158
Tabela 5.59 – Índices probabilísticos – IEEE 118 Barras (Caso 1).	155
Tabela 5.60 – Índices probabilísticos – IEEE 118 Barras (Caso 2).	155
Tabela 5.61 –Comparação entre as capacidades de observação – IEEE 118 Barras.	157

Tabela A.1 – Famílias de distribuição exponencial.	171
	188
Tabela C.1 – Ck-tuplas de medidas o Caso Base	
Tabela C.2 – Ck-tuplas de unidades de medição - Caso Base	189
Tabela C.3 – Ck-tuplas de ramos - Caso Base	189
Tabela C.4 – Ck-tuplas de medidas – Caso 01	190
Tabela C.5 – Ck-tuplas de unidades de medição - Caso 01	191
Tabela C.6 – Ck-tuplas de ramos - Caso 01	191
Tabela C.7 – Ck-tuplas de medidas – Caso 02	192
Tabela C.8 – Ck-tuplas de unidades de medição - Caso 02	193
Tabela C.9 – Ck-tuplas de ramos - Caso 02	193
Tabela C.10 – Ck-tuplas de medidas – Caso 03	194
Tabela C.11 – Ck-tuplas de unidades de medição – Caso 03	194
Tabela C.12 – Ck-tuplas de ramos – Caso 03	195
Tabela C.13 – Ck-tuplas de medidas – Caso 04	196
Tabela C.14 – Ck-tuplas de unidades de medição – Caso 04	196
Tabela C.15 – Ck-tuplas de ramos – Caso 04	197
Tabela C.16 – Ck-tuplas de medidas – Caso 05	198
Tabela C.17 – Ck-tuplas de unidades de medição – Caso 05	199
Tabela C.18 – Ck-tuplas de ramos – Caso 05	199
Tabela C.19 – Ck-tuplas de medidas – Caso 06	200
Tabela C.20 – Ck-tuplas de unidades de medição – Caso 06	200
Tabela C.21 – Ck-tuplas de ramos – Caso 06	200

Lista de Quadros	Pág.
Quadro 2.1 Algoritmo de análise de observabilidade.	12
Quadro 2.2 Identificação de criticalidades	15
Quadro 3.1 Simulação de Monte Carlo Simples	38
Quadro 3.2 Versão completa do MCS	40
Quadro 3.3 Simulação de Monte Carlo Condicional	42
Quadro 3.4 Método de Monte Carlo com Amostragem Estratificada	44
Quadro 3.5 Monte Carlo com Amostragem por Importância e Cross-Entropia	52
Quadro 3.6 Método de Monte Carlo com Amostragem por Importância e Rastreo	55
Quadro 4.1 Algoritmo de Ramificação	70
Quadro 4.2 Algoritmo de enumeração de unidades de medição críticas.	77
Quadro 4.3 Algoritmo de identificação de pares críticos de unidades de medição.	78
Quadro 4.4 Geração de amostra aleatória	90
Quadro 4.5 Avaliação probabilística da capacidade de observação usando SMC Simples	92
Quadro 4.6 Avaliação probabilística da capacidade de observação usando SMC com amostragem por importância e rastreamento.	94
Quadro 5.1 Estrutura da Matriz de covariância E para o sistema de 6 barras.	107
Quadro 5.2 Estrutura da Matriz de covariância com a indisponibilidade da medida P_5 .	108

Lista dos Principais Símbolos e Abreviaturas

SCADA	Supervisory Control and Data Acquisition
UM	Unidade de Medição
UMF	Unidade de Medição Fasorial
UTR	Unidade Terminal Remota
MQP	Mínimos Quadrados Ponderados
DEI	Dispositivo Eletrônico Inteligente
COS	Centro de Operação de Sistemas
SGE	Sistema de Gerenciamento de Energia
IEEE	Institute of Electrical and Electronic Engineers
EG	Erro grosseiro
Cmed	Medida Crítica
Cconj	Conjunto Crítico
Ck-tupla	k-tupla crítica
Ck-meds	k-tupla crítica de medidas
Ck-UMs	k-tupla crítica de unidades de medição
Ck-ramos	k-tupla crítica de ramos
SMC	Simulação de Monte Carlo
fdp	Função densidade de probabilidade
MCS	Método de Monte Carlo Simples
MCcond	Método de Monte Carlo Condicional

MCAI-CE	Método de Monte Carlo com Amostragem por Importância e Minimização por Cross-Entropia
MCAI-CER	Método de Monte Carlo com Amostragem por Importância e Minimização por Cross-Entropia e Rastreo
ER	Erro Relativo
BB	Branch-and-Bound
PLOC	Probabilidade de perda de observabilidade
PLIC	Probabilidade de perda de capacidade de identificação de erros grosseiros
PLDC	Probabilidade de perda de capacidade de detecção de erros grosseiros
$Coef_{IR}$	Coeficiente de Informação Relativa
$\mathbf{z}$	Vetor de medidas adquiridas
$\mathbf{h}(\)$	Vetor de equações do problema do fluxo de potência
$\mathbf{x}$	Vetor de estado da rede elétrica
$\hat{\mathbf{x}}$	Vetor de estimativa <i>a posteriori</i> do estado da rede elétrica
$\mathbf{e}$	Vetor de erros das medidas
$\boldsymbol{\theta}$	Vetor de ângulo da tensão das Barras
$J(\)$	Função objetivo do problema de estimação de estado
$\mathbf{R}$	Matriz de covariância das medidas adquiridas
$\mathbf{H}$	Matriz Jacobiano da rede elétrica
$\mathbf{G}$	Matriz de Ganho da rede elétrica
$\mathbf{r}$	Vetor de resíduos das medidas adquiridas
$\mathbf{r}_N$	Vetor de resíduos normalizados das medidas adquiridas
$\mathbf{E}$	Matriz de Covariância dos resíduos
$\mathfrak{I}$	Matriz Identidade

M	Matriz de incidência medida-ramo
S	Matriz de sensibilidade dos resíduos devido a alterações na configuração da rede
$D(\)$	Função de Desempenho
$E[\]$ ou $E(\)$	Valor esperado de uma variável aleatória
$Var[\]$ ou $Var(\)$	Variância de uma variável aleatória
y	Vetor de estado de um sistema
Y	Vetor variável aleatória associada ao vetor de estado estado y
ℓ	Valor esperado da função de desempenho
$\hat{\ell}$	Estimativa do valor esperado da função de desempenho
σ^2	Variância da função de desempenho
s^2	Variância amostral da função de desempenho
$f(\cdot; \mathbf{p})$	Função densidade de probabilidade parametrizada pelo vetor de parâmetros p
$W(x)$	Função razão ou taxa de verossimilhança
β	Erro relativo
u	Vetor de parâmetros nominal
v	Vetor de parâmetros de referência
w	Vetor de parâmetros de tentativa
Div_{KL}	Divergência de Kullback-Leibler ou Entropia Relativa
Ω_{PG}^t	Conjunto de índices de parâmetros-gargalo na iteração t
Lred	Lista de medidas redundantes
Ltripla	Lista de trios críticos de medidas

LP	Lista de subproblemas
Ω_Z	Conjunto de medidas de um plano de medição
$\mathbf{z}(\mathbf{tu})$	Tupla de medidas da rede elétrica indicada por um vetor binário $\mathbf{tu}$
Ω_L	Conjunto dos ramos da rede elétrica
$\mathbf{l}(\mathbf{tu})$	Tupla de ramos da rede elétrica indicada por um vetor binário $\mathbf{tu}$
$\mathcal{S}(\mathbf{tu})$	Conjunto das super-tuplas da tupla de medidas $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$, indicada por um vetor binário $\mathbf{tu}$
$k_{\max}$	Máxima cardinalidade procurada
k_{lim}	Máxima cardinalidade teórica de uma tupla crítica de medidas

Capítulo 1

Introdução

1.1 Considerações Gerais

Modernamente, a operação de sistemas de energia elétrica tem sido realizada de forma hierarquizada em Centros de Operação de Sistemas (COS), por meio de sofisticadas facilidades computacionais, reunidas em Sistemas de Gerenciamento de Energia (SGEs). Dentre tais facilidades, os aplicativos de Análise de Redes têm suas funcionalidades amplamente reconhecidas e requisitadas pelas empresas de energia elétrica.

Em um regime de operação caracterizado pelo equilíbrio entre carga e geração, o estado do sistema se compõe pelas tensões nodais (nos barramentos da rede) complexas, expressas em módulos e ângulos de fase, correspondentes a uma determinada configuração da rede elétrica. Usualmente, o estado não é observado diretamente, mas através de um conjunto redundante de medidas a ele relacionado, colhidas por um sistema SCADA (Supervisory Control and Data Acquisition). Recentemente, medidas adicionais, concernentes à observação direta do estado e fornecidas por unidades de medição fasorial (UMFs), vêm sendo agregadas à EE [Phad08]. Todas estas medidas devem ser processadas, sendo analisada sua consistência. A principal ferramenta computacional encontrada em SGEs para este fim denomina-se Estimação de Estado (EE).

A função EE está entre um dos principais aplicativos de análise de redes em tempo real, tendo por objetivo básico atuar sistematicamente como um filtro para: suavizar erros estatisticamente pequenos, corriqueiros, inerentes à medição; bem como, e principalmente, por conta de eventual funcionamento inadequado do sistema de aquisição de dados, suprimir erros grosseiros (EGs) presentes em medidas e erros de *status* de dispositivos (posição aberto/fechado) usados para a configuração da rede elétrica. O processo clássico de EE adota o Método dos Mínimos Quadrados Ponderados (MQP) [Schw70], [Abur04] e [Mont98].

A disponibilidade de medidas redundantes, variadas e bem localizadas influencia significativamente o desempenho da EE. Por redundância entende-se o excedente de

medições disponíveis em relação a um número mínimo necessário para estimar todas as variáveis de estado. Para um processo de estimação de estado eficaz e eficiente, o sistema de medição deve atender os requisitos de: *observabilidade* – para permitir a supervisão da rede como um todo; *confiabilidade* – para tornar possível a detecção, identificação e substituição de dados errôneos; *qualidade* – para assegurar a precisão das grandezas estimadas; e *robustez* – para garantir que os requisitos anteriores serão atendidos, em caso de indisponibilidade de medidas.

Devido a restrições financeiras ou operacionais, o suprimento de medições torna-se um problema crônico, fazendo com que o monitoramento de redes extensas seja uma tarefa desafiadora. Acresça-se a isto, a crescente integração de sistemas elétricos, associada à forte penetração de tecnologias de controle e da informação, o que sofisticou ainda mais a operação de tais sistemas, requisitando maior capacidade de supervisão da rede. Durante a operação de um sistema de energia, a EE é exposta a eventos envolvendo o sistema de medição e rede elétrica, tais como: indisponibilidade de medidores, perda de canais de comunicação, ataques cibernéticos, desastres naturais, descoberta de medidas espúrias, alterações na configuração da rede etc. A ocorrência não determinística de tais eventos pode levar à ausência total ou parcial de um ou mais dos requisitos anteriormente mencionados. Como consequência, a EE não cumpre adequadamente suas tarefas, o que pode impor sérios riscos ao monitoramento da rede elétrica.

A análise de observabilidade clássica tem a finalidade de avaliar se o conjunto de medidas disponibilizado à EE é suficiente para se estimar o estado do sistema como um todo, não fornecendo, contudo, nenhuma informação sobre a confiabilidade do processo de estimação. Como consequência, a EE pode gerar expectativas de bom desempenho não alcançadas devido a limitações não explicitadas. Há assim a necessidade de uma melhor avaliação da qualidade do plano de medição e seu impacto na EE, de forma a conscientizar os usuários da ferramenta sobre a confiabilidade dos resultados que esta ferramenta poderá produzir. Complementarmente, ampliar a análise de observabilidade também se torna importante nos projetos de planos de medição (concepção ou reforço).

Na literatura especializada, algumas pesquisas já foram realizadas para ampliar a análise de observabilidade. [Gou12] propõe um conjunto de indicadores relacionados à qualidade do plano de medidas e precisão dos resultados da EE. Já os trabalhos de [Cout13] e [Tafur12] contêm uma metodologia de quantificação da observabilidade. Em [Krst14a] e [Krst14b] encontra-se o conceito de observabilidade estatística, enquanto

[Qiao13] investiga o uso da “Informação Mútua” para expressar a relação entre medida e estado. Todos estes trabalhos buscam a ampliação do entendimento sobre a observabilidade, aspecto da EE focalizado nesta Tese de Doutorado.

1.2 Objetivos

Embora a EE tenha uma longa história, iniciada por Schweppe há cerca de 45 anos [Schw70], tal função aparenta estar em constante evolução. Esta percepção tem feito com que vários aspectos da EE sejam revisitados de modo a aperfeiçoar seu desempenho. Nesta linha de raciocínio, entende-se que alcançar estimativas confiáveis constitui objetivo a ser alcançado permanentemente.

Por ser uma função ávida por dados, quando privada destes em quantidade, diversidade e espalhamento na rede elétrica, a EE se ressentida, não cumprindo adequadamente seu papel, situação nem sempre do conhecimento de seus usuários, frustrando expectativas.

Assim sendo, tornou-se um objetivo destacado nesta Tese criar meios para evidenciar circunstâncias em que a EE pode produzir resultados não confiáveis, quando processa as medidas disponíveis colhidas em determinada configuração da rede elétrica. Uma possível forma de fazê-lo consiste em se avaliar a capacidade do processo de estimação em observar o estado do sistema, de modo a apontar o risco em que a EE incorre em realizar ineficazmente a tarefa de depurar os dados que recebeu para o processamento. A seguir, desdobra-se tal objetivo nos seguintes itens:

- prover elementos que sejam capazes de indicar que, pelo menos em algum grau, o processo de estimação (como qualquer outro do mundo real) pode falhar;
- demonstrar que a escassez de medidas concorre para o insucesso da EE, situação que passa despercebida em um número razoável de casos;
- propor uma avaliação probabilística da capacidade de observação do estado através da EE, compreendendo a integração das análises de criticalidade e detectabilidade/identificabilidade de erros grosseiros de medição;
- estabelecer uma metodologia que permita levar em consideração o comportamento aleatório de componentes do sistema, caracterizado pela indisponibilidade de medidas e ramos da rede elétrica.

1.3 Tópicos Abordados

O presente documento está estruturado em seis capítulos, resumidamente a seguir descritos:

O Capítulo 2 apresenta os principais aspectos do processo de EE em sistemas de potência, assim como faz uma a revisão bibliográfica sobre os tópicos observabilidade e criticalidade.

No Capítulo 3 apresentam-se os aspectos básicos do método conhecido como simulação de Monte Carlo.

No Capítulo 4 descreve-se o que representa a capacidade de observação do estado, sua avaliação qualitativa (por meio da determinação das criticalidades) e quantitativa (através de índices de risco). Também se apresenta o estudo da capacidade de observação do estado sob o ponto de vista da Teoria da Informação.

O Capítulo 5 apresenta testes efetuados com sistemas conhecidos (6-barras, IEEE 24-, 30- e 118-barras), visando ilustrar a aplicação da metodologia proposta no Capítulo 4.

No Capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões do presente estudo e seus desdobramentos para nortear pesquisas futuras.

1.4 Contribuições

Esta Tese contribui para o desenvolvimento da função EE, no que tange à capacidade de observação do estado de sistemas de potência, estabelecendo os seguintes pontos:

- Extensão da análise de observabilidade com a caracterização da capacidade de observação do estado e proposição de metodologia para sua avaliação;
- Estudo das criticalidades de elementos necessários à EE;
- Formulação do problema de determinação das criticalidades como problema de otimização inteira, e proposição de algoritmos exatos para sua solução;
- Desenvolvimento de índices probabilísticos de observação do estado, que ampliam e generalizam os indicadores propostos em [Tafur12]. Modela-se, de forma mais realista as incertezas que afetam o desempenho da EE;
- Aplicação do método de Monte Carlo ao tratamento probabilístico da capacidade de observação do estado;

- Utilização de conceitos da Teoria da Informação no estudo da Estimação de Estado, em especial na análise de observabilidade e criticalidade;

1.5 Publicações

Até o momento, da presente Tese extraiu-se as seguintes publicações:

- [Augu13] A. A. Augusto, J. C. S. Souza, M. B. Do Coutto Filho, "Low-Cardinality Critical k-Tuples in Measurement Sets for State Estimation", IEEE Grenoble PowerTech, Grenoble, France, pp. 1-6, 2013.
- [Augu14a] Andre A. Augusto, M. B. Do Coutto Filho, J. C. Stacchini de Souza, "Áreas de Fraca Observabilidade para Estimação de Estado", Anais do V Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos (SBSE 2014), v.1, no. 1, pp.1-6, Foz do Iguaçu, Paraná, Brasil, 2014.
- [Augu14b] Andre A. Augusto, J. Pereira, V. Miranda, M. B. Do Coutto Filho, J. C. Stacchini de Souza, "Most Relevant Measurements for State Estimation According Information Theoretic Criteria", 13th Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems (13th PMAPS), v.1, no. 1, pp.1-6, Durham, UK, 2014.
- [Cout14a] M. B. Do Coutto Filho, J. C. Stacchini de Souza, Andre A. Augusto, "Critical Measuring Units for State Estimation", Proceedings of the 18th Power Systems Computation Conference (18th PSCC), v.1, no. 1, pp.1-7, Wroclaw, Poland, 2014.
- [Augu15] Andre A. Augusto, M. B. Do Coutto Filho, J. C. Stacchini de Souza, "Algoritmo Branch-and-Bound para Enumeração de Criticalidades de Medidas destinadas à Estimação de Estado", Anais do XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO 2015), resumo, Porto de Galinhas, Pernambuco, Brasil, 2015.

1.6 Estágio Doutoral no INESC Porto

Parte desta Tese foi desenvolvida no estágio doutoral, de abril de 2013 até março de 2014, no Instituto de Engenharia de Sistemas e Computadores, Tecnologia e Ciência – INESC TEC, sediado na cidade do Porto, em Portugal, sob orientação do Prof. Dr. Vladmiro Miranda e do Prof. Dr. Jorge Pereira. Durante a estadia no INESC TEC, concebeu-se, a partir da interação com os pesquisadores do instituto, o tratamento probabilístico da capacidade de observação por meio da Simulação de Monte Carlo, a

ser apresentado no Capítulo 4. Investigou-se durante o estágio doutoral a aplicação da Teoria da Informação em diferentes problemas associados a EE, entre eles a análise de observabilidade e criticalidade. Resultou-se desses estudos a identificação de relações entre a Estimação de Estado em Sistemas de Potência e a Teoria da Informação, que permitiram corroborar teoricamente as pesquisas em curso no INESC TEC. A caracterização da capacidade de informação em função da entropia relativa, assim como o coeficiente de informação relativa apresentados no Capítulo 4 são fruto do trabalho realizado. Adicionalmente, em parceria com o INESC-TEC, embora não sendo parte desta Tese, foram investigados procedimentos para determinação da topologia elétrica das redes elétricas a partir das medidas disponíveis na rede elétrica, sendo os resultados colhidos ainda incipientes, mas promissores.

Por fim, o estágio doutoral, realizado com ajuda do CNPQ – Programa Ciência sem Fronteiras, por si só mostra a relevância e interesse acadêmico dos assuntos abordados nesta Tese.

Capítulo 2

Observabilidade e Criticalidade

2.1 Introdução

Este capítulo apresenta aspectos básicos da EE, com enfoque nos tópicos observabilidade e criticalidade de medidas e ramos da rede, para os quais levanta os principais trabalhos em pesquisa bibliográfica recente.

2.2 Estimação de Estado em Sistemas de Potência

Uma das primeiras publicações sobre EE em sistemas de potência deve-se a Schweppe [Schw70]. Desde então, a EE tornou-se um campo fértil de pesquisa, que tem levado a seu contínuo desenvolvimento e a diversas implementações em COS. Apesar do seu amadurecimento ao longo de quase cinquenta anos, a EE pode ainda ser considerada como uma função que requer aprimoramento.

A tarefa primordial da EE é prover valores confiáveis de grandezas elétricas, correspondentes ao atual estado de operação do sistema de potência sob supervisão [Hand75]. Seja qual for o processo de estimação adotado, para que seja bem-sucedido, deverá lidar com um conjunto redundante, diverso e com bom espalhamento de medidas na rede elétrica. Avalia-se tal conjunto de medidas, considerando requisitos tais como: observabilidade (capacidade para obter do estado operativo da rede em sua totalidade); confiabilidade (capacidade para tratar dados espúrios), qualidade (capacidade de aumentar a precisão das estimativas) e robustez (resiliência a indisponibilidades de medidas/ramos da rede). Dentre de certos limites estruturais e de custo, dispor de sistemas que atendam tais requisitos é altamente desejável.

Entretanto, considerando o ambiente competitivo (onde se preconiza a aplicação otimizada de investimentos) em que se inserem as empresas de energia elétrica modernas, a supervisão de redes de potência, muitas vezes, se dá sem a devida redundância de dados. Contribuem para isto, condições operativas tais como: funcionamento temporariamente inadequado do sistema de comunicação de dados que resulte em perda de dados; indisponibilidades de medidas consideradas espúrias pelo

processo de estimação ou aquisição de dados; retirada de serviço de Unidades Terminais Remotas (UTRs), Dispositivos Eletrônicos Inteligentes (*DEIs*), e mais recentemente, Unidades de Medição Fasorial (UMFs) para manutenção; reconfigurações da rede. Como resultado, a EE pode apresentar problemas de desempenho ao longo da operação da rede elétrica.

2.2.1 Etapas

Tradicionalmente, o problema de EE compõe-se de várias etapas [Abur04]: pré-processamento; configuração da rede; análise de observabilidade; filtragem do estado; e processamento de erros grosseiros. Passa-se a uma breve descrição do conteúdo de tais etapas.

Etapa 1: Pré-processamento

Verifica-se limites de aceitabilidade dos valores das grandezas medidas, bem como dos estados atuais dos equipamentos de chaveamento, de maneira a eliminar medidas espúrias e corrigir eventuais erros e configuração da rede.

Etapa 2: Configuração da Rede

Transforma-se nesta etapa a representação da rede, sendo o modelo seção de barramentos, contendo disjuntores e chaves de forma explícita, convertido para o modelo barra-ramo.

Etapa 3: Observabilidade

Avalia-se, para o conjunto de medidas disponíveis em um dado instante, se a EE pode ser executada em toda a rede. Caso isto não seja possível, identificam-se as ilhas observáveis, os ramos não-observáveis, e as pseudomedidas a serem adicionadas para restaurar a observabilidade. Em geral, pseudomedidas são produzidas a partir do histórico de medição e cargas por rotinas de previsão [Cout14b].

Etapa 4: Filtragem do Estado

Parte central do processo de EE. Realiza-se nesta etapa a filtragem dos erros inerentes ao processo de medição, obtendo-se o atual estado da rede elétrica e correspondentes estimativas de medidas. O estimador comumente adotado para a determinação do estado baseia-se no método dos mínimos quadrados ponderados (MQP).

Etapa 5: Processamento de Erros Grosseiros

As medidas estimadas na etapa anterior são confrontadas com as medidas disponibilizadas pelo sistema supervisorio, com o objetivo de se identificar e remover os possíveis erros grosseiros (EGs) presentes nos dados, caso existam. Em geral, a identificação se dá por meio da análise dos resíduos de estimação.

A Figura 2.1 apresenta a sequência de etapas do processo de EE descritas anteriormente. Alguns aspectos básicos da EE convencional, com ênfase na análise de observabilidade e criticalidade, serão apresentados a seguir.

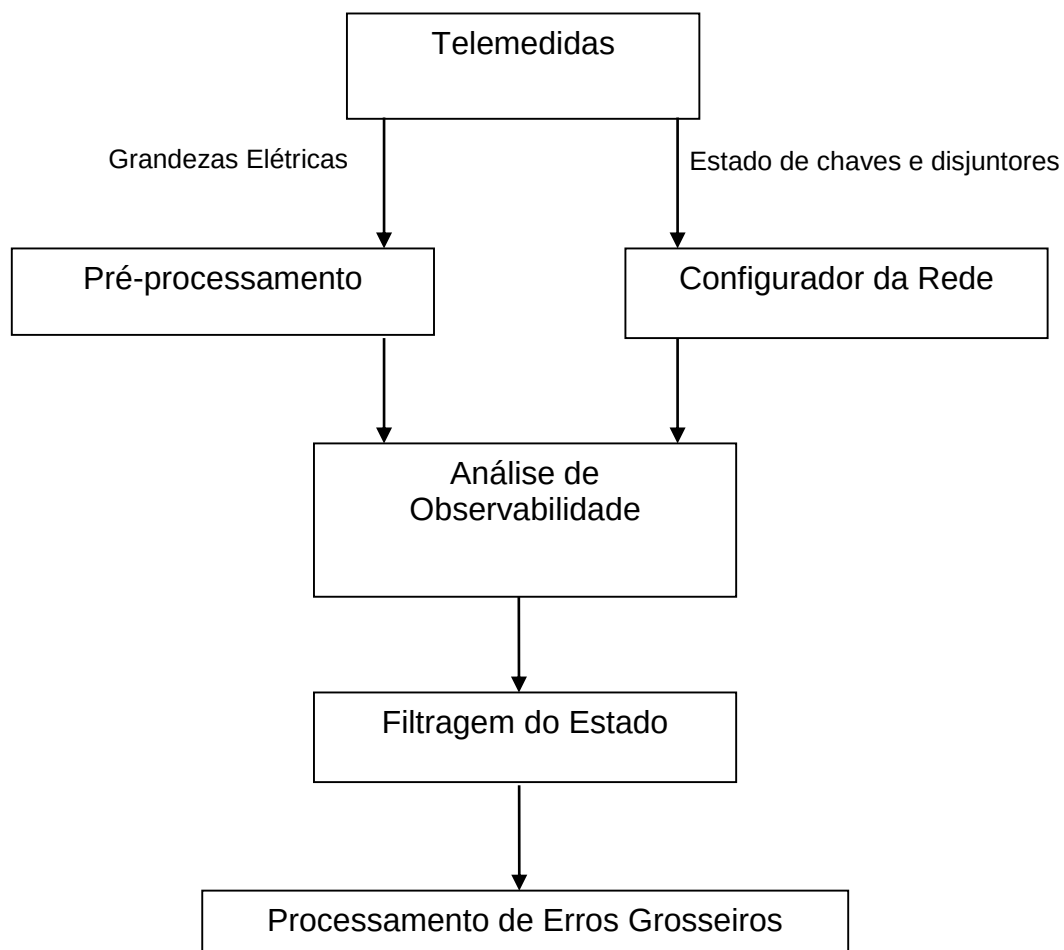


Figura 2.1 – Etapas básicas do processo de estimação de estado.

2.2.2 Fundamentos

A relação entre o estado e medidas pode ser descrita pelo modelo dado por:

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{e} \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{x}(n \times 1)$ e $\mathbf{z}(m \times 1)$ são os vetores de estado e de medidas adquiridas, respectivamente; $\mathbf{h}(\cdot)$ é o vetor de funções que relacionam o estado às medidas; $\mathbf{e}(m \times 1)$ é o vetor de erros das medidas, suposto com média zero e matriz de covariância $\mathbf{R}$.

Tendo por base a expressão (2.1), o estado da rede elétrica é, segundo critério dos mínimos quadrados ponderados, determinado como solução do problema de otimização:

$$\min_{\mathbf{x}} J(\mathbf{x}) = [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (2.2)$$

onde $J(\mathbf{x})$ é a função-objetivo do processo de estimação.

Ângulos e magnitudes das tensões das barras compõem o vetor de estado, enquanto que fluxos, injeções ativas/reativas de potência, magnitudes de tensão, e, mais recentemente, sincrofasores (de tensão e corrente) compõem o vetor das medidas. Nesta Tese, todas as matrizes serão designadas por letras maiúsculas em negrito. Serão empregadas letras minúsculas em negrito para nomear vetores. As grandezas escalares serão indicadas por letras ou símbolos em itálico.

A estimativa *a posteriori* do estado $\hat{\mathbf{x}}$, solução do problema (2.2), pode ser determinada resolvendo-se o seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] = 0 \quad (2.3)$$

Iterativamente, a solução do sistema (2.3) é obtida por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + [\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)] \quad (2.4)$$

onde $\mathbf{H} = \partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) / \partial \mathbf{x}$ é a matriz Jacobiano do sistema, $\mathbf{G} = [\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]$ é denominada matriz de ganho.

No processo de análise dos resultados do processo de estimação, o vetor de resíduos $\mathbf{r}$ (definido como sendo a diferença entre $\mathbf{z}$ e as correspondentes quantidades filtradas $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})$) é normalizado e submetido ao seguinte teste de validação:

$$\mathbf{r}_N(i) = |\mathbf{r}(i)| / \sigma_E(i) < \lambda \quad (2.5)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{R} - \mathbf{H}[\mathbf{H}^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}]^{-1} \mathbf{H}^t \quad (2.6)$$

Denomina-se $\sigma_E(i) = \sqrt{\mathbf{E}(i, i)}$ o desvio-padrão da i -ésima componente do vetor-resíduo, $\mathbf{E}$ é a matriz de covariância dos resíduos da estimação. Violações do limiar de detecção de erros grosseiros λ sinalizam inconsistências nos dados empregados pela EE.

A análise de observabilidade compreende a verificação, numérica ou topológica [Clem88], da possibilidade de solução do sistema de equações (2.3). Caso se ateste que o processo iterativo (2.4) converge para uma solução única, quando iniciado com as magnitudes de tensão das barras iguais a um e os ângulos das tensões das barras iguais a zero, declara-se a rede como numericamente observável. Alternativamente, considera-se o sistema topologicamente observável se for possível determinar unicamente todos os fluxos de potência na rede partindo-se das medidas disponibilizadas [Mont99].

Supondo-se que as medidas de injeção ativa e reativa de potência sejam tomadas aos pares, e que ao menos uma medida de magnitude de tensão esteja presente; adota-se nesta Tese, para fins de análise da observabilidade e de criticalidade, a linearização do modelo (2.1), com desacoplamento $P\theta$ [Hort77]:

$$\mathbf{H}_a \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}_a = \mathbf{z}_a \quad (2.7)$$

sendo:

- $\mathbf{H}_a(m \times n)$: matriz Jacobiano das medidas ativas;
- $\boldsymbol{\theta}(n \times 1)$: vetor de ângulos das tensões das barras;
- $\mathbf{e}_a(m \times 1)$: vetor aleatório de erro das medidas ativas, com média zero e matriz de covariância $\mathbf{R}_a$;
- $\mathbf{z}_a(m \times 1)$: o vetor de medidas ativas;
- m : total de medidas ativas;
- n : número de barras da rede elétrica.

Em um sistema topologicamente observável, para qualquer estado estimado $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ tal que $\mathbf{H}_a \hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$, os fluxos de potência nos ramos devem ser nulos. Isto equivale a dizer que $\mathbf{H}_a$ deverá ter posto completo, se ao menos uma medida de ângulo estiver presente no sistema. A observabilidade topológica depende apenas da relação entre as medidas e o estado da rede, representada na estrutura de $\mathbf{H}_a$. Portanto, costuma-se assumir nas análises de observabilidade e criticalidade que $\mathbf{R}_a = \mathfrak{I}$ (onde $\mathfrak{I}$ é matriz identidade) e que os ramos da rede possuem somente susceptâncias série (iguais à unidade).

Tendo isto em vista, constrói-se a matriz Jacobiano $\mathbf{H}_a$ como se segue:

- Fluxo de potência ativa P_{i-k} : $\mathbf{H}_a(\ell, i) = 1$; $\mathbf{H}_a(\ell, k) = -1$;
- Injeção de potência ativa P_i : $\mathbf{H}_a(\ell, i) = nb_i$; $\mathbf{H}_a(\ell, j) = -1, j \in \Omega_i$;
- Ângulo de tensão de barra A_i : $\mathbf{H}_a(\ell, i) = 1$;
- Corrente de ramo ativa Ia_{i-k} : $\mathbf{H}_a(\ell, i) = 1$; $\mathbf{H}_a(\ell, j) = -1$;

ℓ aponta para cada medida componente do plano de medição, ao passo que i e k indicam os ângulos das tensões das barras i e k , respectivamente. nb_i corresponde ao número de barras conectadas à barra i , enquanto Ω_i é o conjunto de índices das barras diretamente conectadas a barra i .

Nesta Tese, a verificação da observabilidade realiza-se através da fatoração da matriz de ganho $\mathbf{G}_a$, considerando-se $\mathbf{H}_a$ construída na forma previamente apresentada. Os principais passos para a construção de um algoritmo para a análise de observabilidade são descritos no Quadro 2.1:

ALGORITMO 2.1 – ANÁLISE DE OBSERVABILIDADE

- Passo 1 Construir a matriz Jacobiano $\mathbf{H}_a$, para a configuração da rede de interesse;
- Passo 2 Construir a Matriz de Ganho da rede elétrica $\mathbf{G}_a$;
- Passo 3 Obter matriz triangular superior $\mathbf{L}$, fatorando-se a matriz $\mathbf{G}_a$. A cada pivô nulo encontrado, substituir este por 1 e adicionar uma pseudo-medida de ângulo;
- Passo 4 Caso haja ao menos uma medida de ângulo no sistema de medição, ir ao Passo 7 se nenhum pivô-nulo for encontrado, senão ir ao Passo 6;
- Passo 5 Caso haja nenhuma uma medida de ângulo no sistema de medição, ir ao Passo 7 se apenas um pivô-nulo for encontrado, senão ir ao Passo 6;
- Passo 6 Declarar a rede como não observável e encerrar o algoritmo;
- Passo 7 Declarar a rede como observável e encerrar o algoritmo;

Quadro 2.1: Algoritmo de análise de observabilidade.

Se nenhum pivô-nulo for encontrado durante a obtenção da matriz triangular superior $\mathbf{L}$, $\mathbf{G}_a$ tem posto completo, e consequentemente, $\mathbf{H}_a$ também. Se somente um pivô-nulo for encontrado, o posto de $\mathbf{G}_a$ e $\mathbf{H}_a$ é $n - 1$. Entretanto, a atribuição de uma única pseudo-medida de ângulo (que equivale a adotar um ângulo de referência) permite a determinação de todos os fluxos da rede elétrica sendo esta, portanto, observável.

Durante a operação, o sistema de medição poderá apresentar deficiências temporárias, devido indisponibilidade de grupos de medias ou alterações na configuração da rede. Consequentemente, a redundância do sistema pode atingir níveis críticos, em que a perda de observabilidade torna-se iminente, situação que compromete o processo de estimação de estado.

Medidas, individualmente ou em grupos, podem se tornar essenciais, caracterizando limiares inferiores de redundância. Entende-se por redundância crítica as situações caracterizadas pela presença de medidas críticas (Cmeds) e conjuntos críticos (Cconjs):

- Uma medida crítica é aquela cuja ausência do conjunto de dados recebidos para processamento leva a rede supervisionada à perda de observabilidade.
- Um conjunto crítico de medidas é aquele constituído por duas ou mais medidas, de tal forma que, a remoção de qualquer uma destas torna todas as demais críticas e a remoção de qualquer par de medidas de tal conjunto torna a rede não observável.

Diferentes procedimentos de identificação de Cmeds e Conjs existem na literatura. Um método numérico simples e eficiente para identificação de situações críticas de redundância pode ser encontrado em [Cout07]. O processo de identificação de criticalidades adotado nesta Tese será baseado nas propriedades resíduos das Cmeds e Cconjs, a saber:

- Cmeds apresentam sempre resíduos e covariância nulos. Em outras palavras, Cmeds não se beneficiam do processo de EE, por serem totalmente descorrelacionadas a qualquer medida deste. Portanto, nestas condições, tais medidas saem do processo de EE tão “cruas” (até mesmo podendo conter EGs) como nele ingressaram. EGs em Cmeds não são detectáveis pela análise residual.
- Medidas de um mesmo Cconj apresentam sempre resíduos normalizados numericamente idênticos (podendo ser não-nulos) e com máxima correlação, que pode ser positiva ou negativa, entre si (coeficientes de correlação unitários). EGs simples em medidas de Cconjs são detectáveis, porém não identificáveis.

Caso o resíduo normalizado de uma medida de um Cconj viole o limite para a detecção de EGs, os resíduos das outras medidas constituintes do conjunto igualmente estarão (com o mesmo grau de intensidade) além de tal limite. Logo, todas as medidas

que integram o Cconj serão também declaradas como medidas suspeitas. Admitindo-se, como forma de identificar o EG, a escolha ao acaso uma das medidas suspeitas para ser eliminada do sistema de medição, não será possível identificar a medida incorreta através desse procedimento, pois todas as medidas remanescentes tornar-se-ão críticas.

Determinando-se os resíduos das medidas, pode-se, portanto, determinar numericamente a sua criticalidade. A estimativa do estado $\hat{\theta}$, adotando-se o modelo linear (2.7), é obtida a partir de (2.8), sendo a estimativa das medidas dada por (2.9):

$$\hat{\theta} = \mathbf{G}_a \mathbf{H}_a^t \mathbf{z}_a \quad (2.8)$$

$$\hat{\mathbf{z}}_a = \mathbf{H}_a \hat{\theta} \quad (2.9)$$

O vetor resíduo de estimação é dado por (2.10), sendo a matriz de sensibilidade dos resíduos referente às medidas ativas dada por (2.11):

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{z}_a - \hat{\mathbf{z}}_a = [\mathfrak{I} - \mathbf{H}_a (\mathbf{H}_a^t \mathbf{H}_a)^{-1} \mathbf{H}_a^t] \mathbf{z}_a \quad (2.10)$$

$$\mathbf{E}_a = [\mathfrak{I} - \mathbf{H}_a (\mathbf{H}_a^t \mathbf{H}_a)^{-1} \mathbf{H}_a^t] \quad (2.11)$$

Substituindo-se a equação (2.11) em (2.10), obtém-se (2.12):

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{E}_a \mathbf{z}_a \quad (2.12)$$

Supondo que as medidas sejam estatisticamente independentes e que suas variâncias sejam iguais à um, a matriz de sensibilidade e de covariância dos resíduos são idênticas. Consequentemente, o resíduo normalizado da i -ésima medida é dado por:

$$\mathbf{r}_{aN}(i) = \frac{|\mathbf{r}_a(i)|}{\sqrt{\mathbf{E}_a(i, i)}} \quad (2.13)$$

Usando a definição de coeficiente de correlação entre resíduos encontrada em [Mont99], tem-se para as medidas ativas i e j que:

$$\gamma_{ij} = \frac{|\mathbf{E}_a(i, j)|}{\sqrt{\mathbf{E}_a(i, i)} \sqrt{\mathbf{E}_a(j, j)}} \quad (2.14)$$

Conforme demonstração apresentada no Apêndice B, uma medida $\mathbf{z}_a(i)$ é crítica se $\mathbf{r}_a(i) = 0$ e $\mathbf{E}_a(i, i) = 0$. Por outro lado, caso o par de medidas $(\mathbf{z}_a(i), \mathbf{z}_a(j))$ pertença a um Cconj, então $\mathbf{r}_{aN}(i) = \mathbf{r}_{aN}(j)$ e $\gamma_{ij} = 1$. Portanto, a identificação de Cmeds e

Cconjs, pode ser feita empregando-se as expressões (2.8) -(2.14), como apresentado no procedimento indicado no Quadro 2.2:

ALGORITMO 2.2 –IDENTIFICAÇÃO DE CRITICALIDADES

- Passo 1 Construir a matriz Jacobiano $\mathbf{H}_a$, para a configuração da rede de interesse. Definir valores arbitrários para o vetor das medidas ativas $\mathbf{z}_a$;
- Passo 2 Para cada medida ativa $\mathbf{z}_a(i)$, calcular $\mathbf{E}_a(i, i)$ e $\mathbf{r}_a(i)$. Em seguida, verificar se tais valores são nulos. Em caso afirmativo, declarar $\mathbf{z}_a(i)$ como Cmed;
- Passo 3 Calcular o resíduo normalizado das medidas não críticas;
- Passo 4 Ordenar decrescentemente os resíduos normalizados calculados no Passo 3;
- Passo 5 Comparar sequencialmente as medidas não críticas, formando grupos de medidas com resíduos normalizados idênticos;
- Passo 6 Para cada grupo formado no Passo 5:
- Passo 6.1 Calcular o coeficiente de correlação de cada par de medidas presentes no grupo;
- Passo 6.2 Manter no grupo todas as medidas associadas a coeficientes de correlação $\gamma_{ij} = 1$;
- Passo 7 Classificar como Cconj os grupos contendo mais de uma medida;

Quadro 2.2: Identificação de criticalidades.

A análise de criticalidade apresentada nesta seção mostra claramente que sistemas observáveis possuem diferentes níveis de redundância de medidas, que se traduzirão em diversos graus de atendimento aos requisitos de observabilidade, confiabilidade, precisão e robustez. Cmeds e Cconjs, com base no exposto, correspondem a condições-limite, em que o requisito observabilidade é precariamente atendido. Como será visto mais adiante (Seção 2.4), outros níveis de criticalidade poderão ser estabelecidos e analisados.

2.3 Revisão Bibliográfica

Os principais elementos para a análise de observabilidade encontram-se em [Mont99] e [Abur04]. A seguir, os principais trabalhos sobre este tópico são levantados e comentados.

Métodos topológicos de análise de observabilidade baseiam-se estritamente nas relações, representadas por meio de grafos, entre elementos que compõem a rede elétrica, os diferentes tipos de medidas, e suas localizações. Como análise puramente estrutural do problema, não emprega cálculos numéricos em ponto flutuante. A primeira proposição de um método topológico para a análise de observabilidade deve-se a Clements e Wollenberg [Clem75], que buscaram aplicar conhecimentos heurísticos (extraídos da experiência com análise de redes elétricas) para avaliar a capacidade de cobertura de um conjunto de medidas distribuídas ao longo de uma rede supervisionada. Posteriormente, Allemong e outros [Alle80] evidenciaram o caráter conservador de tal método, no sentido de indicar como inobserváveis redes de fato observáveis, e sugeriram um novo algoritmo, também heurístico, para contornar o problema. Diferentes abordagens, desenvolvidas por Clements, Krumpholz e Davis [Krum80], [Clem81], [Clem82], [Clem83], se sucederam, ampliando a aplicação da análise topológica de observabilidade. Os trabalhos [Quin82], [Mori91] e [Nuce91] propuseram a utilização de da Teoria dos Grafos na análise de observabilidade. Posteriormente em [Simo90], estendeu-se o algoritmo apresentado em [Qui82] para também tratar Cmeds e Cconjs, sendo a criticalidade e observabilidade avaliadas de forma conjunta. As abordagens em [Simo02], [Kats03] e [Korr05] incluem explicitamente na análise de observabilidade dispositivos de chaveamento (disjuntores e chaves seccionadoras), como elementos da rede elétrica.

Por sua natureza combinatória, o enfoque topológico apresenta elevada complexidade computacional, sendo os métodos numéricos para análise da observabilidade alternativa a estes. Os trabalhos de Monticelli e Wu [Mont85a] e [Mont85b] apresentaram o conceito de ilha observável e ramo não-observável, além de explorar, na determinação da observabilidade, o uso da forma triangular da matriz de Ganho. Devido ao mal condicionamento desta, os referidos autores em [Mont86], desenvolveram uma metodologia baseada em transformações ortogonais da matriz Jacobiano.

Diversos autores exploraram o emprego da matriz Jacobiano na análise de observabilidade. Slutsker propôs em [Slut87] o uso de uma forma reduzida desta matriz, enquanto [Chen90] a emprega em um procedimento livre da manipulação de números

reais e complicadas lógicas combinatórias. O método apresentado em [Falc94] explorou o escalonamento da matriz Jacobiano no tratamento da observabilidade, enquanto em [Cast05] empregou-se seu espaço-nulo. A colocação da matriz Jacobiano em forma triangular é investigada em [Lond01] e [Lond07]. [Ding07] propôs um método simples de análise de observabilidade, baseado no aumento da matriz Jacobiano com pseudomedidas de fluxo de potência. Em [Sola09] é apresentado um método eficiente baseado na aplicação da Eliminação de Gauss na matriz Jacobiano e em aritmética binária.

Gou em [Gou00] propôs o uso dos fatores triangulares da matriz de Ganho na determinação das ilhas observáveis de forma não iterativa, sendo tais fatores também utilizados no planejamento do reforço de sistemas de medição, e na determinação de pseudomedidas para restauração da observabilidade. Um estudo comparativo entre as abordagens que empregam a matriz Jacobiano e aquelas que adotam a matriz de Ganho é apresentado em [Gou06].

Os trabalhos de Abur e Expósito [Abur95], [Abur97] e [Expo98] analisaram a participação de medidas de corrente no processo de EE, destacando-se [Expo98] por empregar variáveis de estado associadas aos ramos da rede, ao invés das barras, como costumeiramente empregado em estudos de observabilidade. Abordagens que tratam de forma integrada a análise de observabilidade, compreendendo a identificação de Cmeds, medidas redundantes e irrelevantes, provisão de pseudomedidas, entre outros aspectos, encontram-se nos trabalhos de Castilo e Pruneda [Cast06], [Prun10], e naqueles de Asada e outros [Alme08a] e [Alme08b], destacando-se estes por explorar alternativamente a fatoração da matriz de Gram. Metodologias híbridas, combinando os tratamentos topológico e numérico da análise da observabilidade, foram investigadas em [Cont88], [Korr03a] e [Korr03b]. Em [Göl13], analisou-se a observabilidade e criticidade para medições de correntes fornecidas por UMFs.

Alguns estudos têm sido direcionados ao problema de suprimento de medidas para a EE, com ênfase na determinação de pseudomedidas para restauração da observabilidade e na alocação de UMFs. [Mang00] aborda o problema de provisão de pseudomedidas para manutenção da observabilidade frente à ocorrência de erros grosseiros e alterações na configuração de ramos da rede. [Dönm11] apresenta um método, baseado em programação inteira e na fatoração da matriz Jacobiano, para restauração da observabilidade por meio de pseudomedidas. Em [Korr11b] e [Korr11a], explora-se, para esta finalidade, respectivamente, a fatoração da matriz de Jacobiano reduzida e da matriz de Gram.

Chen em [Chen08] investiga a relação entre observabilidade e capacidade de depuração de erros grosseiros. O referido artigo propõe a melhoria da capacidade de tratamento de erros topológicos por meio do planejamento da alocação de UMFs. Em [Chak08] é proposta a alocação ótima de UMFs para observabilidade completa, através de busca binária, enquanto os trabalhos [Gou08a] e [Gou08b] propõem o uso de programação linear inteira. O trabalho de Abbassy [Abba09] apresenta a solução o problema da alocação ótima de UMFs através de programação linear inteira binária. O método proposto em [Emam10] realiza a alocação de UMFs de ramo considerando situações de operação normais e com contingências. Entende-se como UMF de ramo aquela que mede a tensão da barra e a corrente em apenas um dos ramos conectados à barra em que tal UMF foi instalada.

Apresenta-se em [Li2013] um método de alocação de UMFs que utiliza como critério de alocação o princípio da maximização da informação mútua entre o estado da rede e as medidas. Demonstra-se neste trabalho a relação entre a informação mútua e a observabilidade, sendo um dos primeiros trabalhos aplicando a Teoria da Informação na análise de observabilidade. Recentemente, [Gou14] propôs um método de alocação ótima de UMFs que garante a observabilidade e a ausência de Cmeds e Cconjs, enquanto o método apresentado em [Huan14] garante a observabilidade plena da rede em condições normais de operação e de ilhamento controlado. Em Xiao Li [Xiao14], estuda-se a alocação de UMFs para estimadores de estado híbridos.

Castillo em [Cast08] apresenta um método de planejamento de sistemas de medição “ $m-k$ ” robustos, isto é, sistemas de medição que mantêm a observabilidade mesmo após a perda simultânea de k medidas. A questão do planejamento de sistemas de medição é também abordada por [Sing09] e [Sing12], que propõe um método probabilístico aplicável em estimadores de estado para sistemas de distribuição.

A caracterização do nível de redundância das medidas, em especial a avaliação de criticalidades das medidas e seu impacto na depuração de erros grosseiros, é também um aspecto importante à análise de observabilidade para a estimação de estado. Métodos topológicos e numéricos têm sido propostos para o problema de determinação das criticalidades. Os algoritmos topológicos dependem de rotinas especializadas, complexas, que podem ser construídas autonomamente, sem requerer a execução do processo de EE. As referências [Clem81] e [Clem83] resolvem o problema de identificação de Cmeds com base no conceito de árvores geradoras. A obtenção de tais árvores têm natureza combinatória, de difícil implementação computacional. Em [Simo90], o algoritmo topológico apresentado para identificação de

Cmeds utiliza a teoria da intersecção de matróides, sendo os Cconjs determinados executando-se repetidamente, após a remoção de cada medida não crítica do sistema de medição, o procedimento proposto para identificação de Cmeds.

As abordagens topológicas para determinação de criticalidades, por sua natureza combinatória, podem resultar em tempos de computação proibitivos. Como alternativa a estas, tem-se os algoritmos numéricos, conceitualmente simples, mas que utilizam resultados produzidos pela EE, requerendo assim sua execução. Em [Ayre86], Cconjs – também denominadas conjuntos minimamente dependentes – são identificados através de propriedades numéricas dos resíduos normalizados das medidas que os integram, e dos elementos correspondentes da matriz de covariância dos resíduos. Em [Expo98], o algoritmo de observabilidade generalizada também classifica as medições como críticas ou redundantes. [Cout01] emprega as propriedades dos resíduos normalizados das medidas em um procedimento de identificação conjunta de Cmeds e Cconjs. Este algoritmo tem a vantagem de ser independentemente da disponibilidade de um estimador de estado, sendo apenas necessário o conhecimento da topologia da rede e das medidas a serem utilizadas na EE. Abordagens híbridas, que combinam a teoria dos grafos e cálculos numéricos, também têm sido propostas para a identificação dos dados críticos. O algoritmo numérico-simbólico para classificação de Cmeds e Cconjs proposto por [Korr91], e que emprega os conceitos de ilhas de fluxo, áreas de propagação residual, e modelo reduzido da rede, constitui-se um exemplo desta forma de abordagem.

A análise de criticalidade generalizada diz respeito à identificação de tuplas críticas de medidas. Caracteriza-se uma tupla de crítica de k medidas (k -tupla crítica de medidas ou Ck-tupla de medidas) de um sistema de medição como aquela cuja ausência simultânea de todas estas medidas torna a rede elétrica não observável. A robustez do sistema de medição, assim como sua capacidade de auto recuperação, está associada às Ck-tuplas de medida presentes neste [Crai90]. Comparado a outros temas relacionados à observabilidade e criticalidade, são escassos os trabalhos relacionados à determinação de k -tuplas críticas. Clements em [Clem86] caracterizou a Ck-tupla de medidas e suas principais propriedades, sendo também apresentado um método geométrico para sua identificação. Os trabalhos subsequentes desenvolveram abordagens topológicas [Mont86], [Korr91] e numéricas [Van85], [Cout07], [Alme08a], [Alme08b], [Lond07], [Ayre86] para identificação de tuplas críticas para k inferior a três. Com base na relação entre as Ck-tuplas e a vulnerabilidade por parte da EE à ataques com dados maliciosos ([Kosu10] e [Liu09]), [Sou12] propôs um método de programação linear inteira mista para identificação da k -tupla crítica de medidas mais esparsa (isto,

é, maior k possível), do qual uma medida previamente especificada participa. O mencionado trabalho tem relevância por permitir a enumeração de tuplas críticas com número qualquer de medidas, diferentemente dos outros citados.

A necessidade de investigação da detecção e identificação de erros na configuração da rede levou à extensão da análise de criticalidade de medidas a ramos da rede. [Clem88], propôs um método baseado em análise residual para detecção e identificação de erros na configuração de ramos, sendo caracterizado diferentes criticalidades de ramos no referido trabalho. Wu e Liu [Wu89] estenderam o trabalho de Clements [Clem88], apresentando condições gerais de não detectabilidade e identificabilidade de erros topológicos de qualquer natureza.

Os estudos até aqui apresentados referem-se a avaliações qualitativas da observabilidade e da criticalidade. Alguns esforços têm sido realizados para quantizar a observabilidade da rede elétrica. O primeiro estudo nesse sentido foi realizado por Clements [Clem82], que propôs a avaliação da confiabilidade do processo de estimação, estabelecendo a probabilidade de a rede elétrica ser observável como medida da observabilidade da rede. Já no trabalho de Crainic [Crai90], surge o conceito de força de um sistema de medição, sendo proposta neste trabalho uma medida para quantificá-la. Recentemente, Do Coutto [Cout09] caracteriza numericamente a observabilidade por meio de indicadores de deficiências locais e globais do suprimento de medidas ao processo de estimação. No trabalho de Gou [Göl12], reconhece-se a necessidade de definição de métricas para avaliação da qualidade do processo de estimação e do suprimento de medidas à EE, sendo então apresentadas em tal artigo métricas de observabilidade e criticalidade relacionadas à redundância do sistema de medição e à qualidade do processo de estimação de estado. Em [Cout13] são apresentados índices de risco à observabilidade. Os índices são calculados em função das criticalidades da rede elétrica, e descrevem os riscos de observabilidade aos quais a rede está exposta, consoante diferentes eventos de indisponibilidade de grupos de medidas e de elementos da rede. [Xiao14] propõe, como parte da metodologia para alocação de UMFs, uma métrica para avaliação do desempenho, observabilidade e estabilidade numérica da EE.

A Teoria da Informação tem sido empregada na quantificação da observabilidade e criticalidade. No trabalho de Qiao Li [Qiao13], a Informação Mútua entre as medidas e o estado da rede elétrica é empregada na avaliação do sistema de medição, enquanto Krstulovic e Miranda [Krst14a] e [Krst14b] empregam tal conceito na construção de um índice de observabilidade, aplicado ao problema de seleção de medidas para estimação da configuração da rede usando redes auto associativas. Os trabalhos citados

evidenciam uma inédita e não explorada conexão entre a observabilidade-criticalidade e a Teoria da Informação.

Do exposto nesta seção, a capacidade de observação do estado de uma rede elétrica está entre os principais tópicos de pesquisa sobre a EE. Após este longo levantamento sobre as análises de observabilidade e criticalidade, pode-se depreender que requer especial atenção a quantificação do grau de observabilidade de uma rede elétrica, caracterizado por um conjunto de medidas disponíveis fornecido com determinada configuração de medidores e ramos que conectam as barras da rede.

2.4. Criticalidades de medidas e ramos da rede

Outras condições críticas de observabilidade devem ser analisadas, além da presença de Cmeds e Cconjs, a saber: a de grupos de medidas; unidades de medição; e ramos da rede. Tais condições referem-se a limites de observabilidade que comprometem o processamento de erros grosseiros de medição. As criticalidades usualmente de interesse dizem respeito a k-tuplas críticas de:

- a) Medidas quaisquer;
- b) Unidades de medição;
- c) Ramos da rede;

A seguir caracteriza-se as criticalidades citadas.

2.4.1 Tuplas críticas de medidas

Entende-se por Ck-tupla de medidas o grupo de k medidas que, tornadas todas elas indisponíveis simultaneamente, resultam na inobservabilidade da rede. Desta forma, medidas críticas correspondem a C1-tupla, isto é, aquelas com um elemento apenas. Já os pares de medidas que formam um Cconj são, portanto, C2-tuplas. A cardinalidade de uma tupla crítica corresponde ao número de elementos que a compõem. Conforme apresentado na Seção 2.3, destinou-se grande parte dos estudos de observabilidade e criticalidade às Ck-tuplas de cardinalidade até 2, sendo investigadas as propriedades numéricas e topológicas destas, e reconhecendo-se também sua maior probabilidade de ocorrência e risco à tomada de decisões operativas com base na EE. As Ck-tuplas de cardinalidade superior estão relacionadas a capacidade de processamento de erros grosseiros múltiplos por meio da análise residual [Clem88], [Kosu10] e [Liu09].

Uma tupla crítica de k medidas apresenta as seguintes propriedades:

Propriedade 1: Uma Ck-tupla não pode conter uma Cj-tupla, $j < k$.

De fato, se uma k -tupla for crítica, então a remoção de todas as k medidas de uma só vez torna a rede não observável. Portanto, a remoção de $j < k$ medidas quaisquer de uma Ck -tupla não torna a rede inobservável.

Propriedade 2: Se $j < k$ medidas de uma Ck -tupla tornam-se indisponíveis, as medidas remanescentes formam uma $(k-j)$ -tupla crítica.

Com base na Propriedade 1, a remoção de $j < k$ medidas de uma Ck -tupla resulta em um sistema de medidas para o qual a rede é plenamente observável. Para que ocorra a perda completa da observabilidade neste, basta que se tornem indisponíveis as $(k-j)$ medidas restantes daquela tupla crítica. Logo, as $(k-j)$ medidas remanescentes da Ck -tupla formam, para aquele sistema de medição resultante, uma $(k-j)$ -tupla crítica. As $C2$ -tuplas em um $Cconj$ exibem esta propriedade, conforme apresentado na Seção 2.2.

Propriedade 3: Para um plano de medição que contenha m medidas, a cardinalidade máxima de uma Ck -tupla é dada por:

$$k_{lim} = m - n + 1 \quad (2.15)$$

sendo n o número de componentes do vetor de estado a ser estimado.

Para uma rede elétrica com n variáveis de estado (já excluída qualquer referência angular) ser observável como um todo, o posto da matriz Jacobiano $\mathbf{H}(m \times n)$ precisa ser completo, i.e, obrigatoriamente igual a n . Para tal, a matriz $\mathbf{H}$ deve conter, ao menos n linhas linearmente independentes entre as $m \geq n$ linhas que possui, pois para sistemas observáveis, vale a condição:

$$n = \text{Posto}(\mathbf{H}) \leq \min(m, n) \quad (2.16)$$

Uma vez que a indisponibilidade de qualquer tupla de medidas de tamanho $m - n + 1$ faz com que a matriz Jacobiano tenha dimensão $(n - 1 \times n)$, tem-se, para qualquer remoção de $m - n + 1$ medidas, que:

$$\text{Posto}(\mathbf{H}') \leq \min(n - 1, n) < n \quad (2.17)$$

onde $\mathbf{H}'$ é a matriz Jacobiano após a eliminação das $m - n + 1$ medidas.

Se qualquer remoção de $m - n + 1$ medidores obrigatoriamente torna a rede inobservável, então a maior cardinalidade de uma tupla crítica não pode ser

superior a $k_{lim} = m - n + 1$, denominado nesta Tese como a máxima cardinalidade teórica das medidas. A desigualdade em (2.16) é consequência do Teorema do Posto das Matrizes, conhecido da Álgebra Linear.

Propriedade 4: As colunas da matriz de covariância dos resíduos correspondentes às medidas de uma Ck-tupla formam um conjunto linearmente dependente.

A comprovação desta propriedade está detalhada no Apêndice B.

Em função da Propriedade 4, toda Ck-tupla satisfaz (2.18) e (2.19):

$$\det(\mathbf{E}_u) = 0 \quad (2.18)$$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{E}(:, i) = \mathbf{0}, \alpha_i \neq 0, \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \Omega_u \quad (2.19)$$

onde:

$\mathbf{E}_u(k \times k)$: matriz formada pelas linhas e colunas da matriz de covariância dos resíduos correspondentes às medidas constituintes de uma k-tupla crítica;

$\mathbf{E}(:, i)$: coluna i da matriz de covariância dos resíduos associada a medida z_i que participa de k-tupla crítica;

α_i : um escalar;

Ω_u : conjunto de índices das medidas que formam k-tupla crítica.

Supondo que a análise de criticalidade é realizada conforme indicado na Seção 2.2, as matrizes de covariância dos resíduos e de sensibilidade são idênticas. Portanto, para o caso de uma 1-tupla, de (2.19) obtém-se a seguinte condição:

$$\mathbf{E}_a(i, :)^T = \mathbf{E}_a(:, i) = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

onde $\mathbf{0}(m \times 1)$ é o vetor-coluna nulo.

Combinando (2.20) e tendo em vista que $\mathbf{r}_a = \mathbf{E}_a \mathbf{z}_a$, obtém-se:

$$\mathbf{r}_a(i) = \mathbf{E}_a(i, :) \mathbf{z}_a = \mathbf{0}^T \mathbf{z}_a \quad (2.21)$$

$$\mathbf{r}_a(i) = 0, \forall \mathbf{z}_a \quad (2.22)$$

onde $\mathbf{z}_a$ é o vetor de medidas, $\mathbf{r}_a(i)$ e $\mathbf{E}_a(i, :)$ são o resíduo de estimação e a linha da matriz $\mathbf{E}_a$ correspondentes à medida $\mathbf{z}_a(i)$, respectivamente.

As expressões (2.20) e (2.22) correspondem às propriedades de uma medida crítica. Para uma C2-tupla qualquer $(\mathbf{z}_a(i), \mathbf{z}_a(j))$, a condição estabelecida em (2.19) implica em:

$$\alpha_i \mathbf{E}_a(:, i) + \alpha_j \mathbf{E}_a(:, j) = \mathbf{0}, \alpha_i \neq 0, \alpha_j \neq 0 \quad (2.23)$$

A expressão (2.23) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{E}_a(:, i) = -\frac{\alpha_j}{\alpha_i} \mathbf{E}_a(:, j), \alpha_i \neq 0, \alpha_j \neq 0 \quad (2.24)$$

O que permite dizer que, para um par crítico, as colunas da matriz de covariância dos resíduos são colineares. Combinando-se (2.24) e (2.21), obtém-se a seguinte relação para o par crítico $(\mathbf{z}_a(i), \mathbf{z}_a(j))$:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a(j) &= \mathbf{E}_a(j, :)\mathbf{z}_a \\ \mathbf{r}_a(i) &= -\frac{\alpha_j}{\alpha_i} \mathbf{E}_a(j, :)\mathbf{z}_a \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como a matriz $\mathbf{E}_a$ é simétrica (ver Apêndice B), conclui-se que:

$$\mathbf{r}_a(i) = -\frac{\alpha_j}{\alpha_i} \mathbf{r}_a(j) \quad (2.26)$$

A variância do resíduo de estimação da medida $\mathbf{z}_a(i)$ em função da variância da medida $\mathbf{z}_a(j)$ é dada por:

$$\mathbf{E}_a(i, i) = \left(-\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right)^2 \mathbf{E}_a(j, j), \alpha_i \neq 0, \alpha_j \neq 0 \quad (2.27)$$

Normalizando os resíduos obtém-se:

$$\mathbf{r}_{aN}(i) = \frac{\left|-\frac{\alpha_j}{\alpha_i} \mathbf{r}_{aN}(j)\right|}{\left|-\frac{\alpha_j}{\alpha_i}\right|^2 \sqrt{\mathbf{E}_a(j, j)}} \quad (2.28)$$

onde $\mathbf{r}_{aN}(i)$ representa o i-ésimo resíduo normalizado de estimação associado à i-ésima medida $\mathbf{z}_a(i)$.

O que resulta em:

$$\mathbf{r}_{a_N}(i) = \mathbf{r}_{a_N}(j) \quad (2.29)$$

Com base nas relações (2.27) e (2.29), é possível concluir que:

$$\gamma_{ij} = \frac{|\mathbf{E}_a(i, j)|}{\sqrt{\mathbf{E}_a(i, i)}\sqrt{\mathbf{E}_a(j, j)}} = 1 \quad (2.30)$$

$$\rho_{ij} = \frac{\mathbf{r}_{a_N}(i)}{\mathbf{r}_{a_N}(j)} = 1 \quad (2.31)$$

onde γ_{ij} e ρ_{ij} representam a correlação entre as medidas $(\mathbf{z}_a(i), \mathbf{z}_a(j))$ e a razão entre os resíduos normalizados $(\mathbf{r}_{a_N}(i), \mathbf{r}_{a_N}(j))$, respectivamente.

As equações (2.30) e (2.31) estabelecem as mesmas propriedades determinadas em [Cout07] para pares de medidas em Cconjs. Desta forma, comprova-se que pares de medidas em Cconjs são casos de 2-tuplas críticas, como previamente afirmado em seções anteriores. Sendo (2.23) válida para um trio crítico de medidas $\{\mathbf{z}_a(i), \mathbf{z}_a(j), \mathbf{z}_a(k)\}$, a aplicação da Eliminação de Gauss à matriz $\mathbf{E}_u$ associada a referida C3-tupla originará um pivô nulo em $\mathbf{E}_u$. Se esta tem a forma indicada a seguir, após a Eliminação Gaussiana, terá a forma de $\mathbf{E}'_u$.

	i	j	k
$\mathbf{E_u=}$	i	$\mathbf{E_u}(i, j)$	$\mathbf{E_u}(i, k)$
	j	$\mathbf{E_u}(j, j)$	$\mathbf{E_u}(j, k)$
	k	$\mathbf{E_u}(k, j)$	$\mathbf{E_u}(k, k)$

	i	j	k	
$\mathbf{E}'_{\mathbf{u}} =$	i	$\mathbf{E}'_{\mathbf{u}}(i, i)$	$\mathbf{E}'_{\mathbf{u}}(i, k)$	
	j	0	$\mathbf{E}'_{\mathbf{u}}(j, j)$	$\mathbf{E}'_{\mathbf{u}}(j, k)$
	k	0	0	$\mathbf{E}'_{\mathbf{u}}(k, k)$

Ao fim do processo de eliminação, tem-se que:

$$\begin{aligned} E'_u(k, k) = & E'_u(i, i)E'_u(j, j)E'_u(k, k) + 2E'_u(i, j)E'_u(i, k)E'_u(j, k) \\ & - E'_u(i, i)E'_u(j, k)^2 - E'_u(j, j)E'_u(i, k)^2 - E'_u(k, k)E'_u(i, j)^2 \end{aligned} \quad (2.32)$$

A relação (2.18) implica que $E'_u(k, k) = 0$. Logo:

$$\begin{aligned} E'_u(i, i)E'_u(j, j)E'_u(k, k) + 2E'_u(i, j)E'_u(i, k)E'_u(j, k) = \\ E'_u(i, i)E'_u(j, k)^2 + E'_u(j, j)E'_u(i, k)^2 + E'_u(k, k)E'_u(i, j)^2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Similarmente ao que ocorre com Cmeds e Cconjs, os resíduos de estimação de medidas pertencentes a k -tuplas críticas também estão relacionados entre si, o que pode ser útil na identificação de criticalidades, com impacto na capacidade de depuração dados da EE. As propriedades de Ck-tuplas têm parte importante nos algoritmos de enumeração de criticalidades desenvolvidos nesta Tese.

2.4.2 Tuplas críticas de unidades de medição

As Unidades de medição (UMs), que podem ser UTRs, DEIs ou UMFs, em subestações da rede elétrica sob monitoração, coletam as medidas utilizadas no processo de estimação. Consequentemente, considera-se com maior possibilidade de ocorrência eventos caracterizados pela indisponibilidade de UMs, sendo importantes as criticalidades a estas associadas.

Estabelece-se uma k -tupla crítica de UMs (k -UMs críticas ou Ck-UMs) como o conjunto de que destas, que simultaneamente indisponíveis tornam a rede não observável, sendo um análogo das Ck-tuplas para UMs. As k -UMs críticas, assim caracterizadas, possuem as seguintes propriedades:

Propriedade 5: As medidas em uma Ck-UM formam pelo menos uma tupla crítica.

A indisponibilidade das k UMs implica naquela das medidas por estas coletadas. Portanto, se indisponibilidade de tais medidas torna rede não observável, estas constituem ao menos uma Cj-tupla $j < m_u$, sendo m_u o número de medidas coletadas pelas k UMs.

Propriedade 6: Considere uma j -tupla crítica de UMs contendo m_u medidas. Se as k medidas apanhadas pela tupla crítica de UMs constituem uma k -tupla ($k \geq j$) de medidas, então obrigatoriamente j destas são coletadas por UMs distintas.

Suponha que k medidas sejam colhidas por somente i UMs de uma j -tupla de UMs. Se as k medidas formam uma k -tupla crítica de medidas, então basta a remoção apenas das i UMs para que a rede se torne não observável. Sendo assim, a j -tupla de UMs não pode ser crítica, a menos que $i=j$.

Propriedade 7: Uma C_j -UM não pode conter uma C_i -UM, $i < j$.

Esta é consequência direta das propriedades 5 e 6. Se i UMs em uma j -tupla de UMs formam uma C_i -UM. A indisponibilidade daquelas é suficiente para ocasionar a inobservabilidade da rede, sendo, portanto, a tupla de j UMs não-crítica, a menos que $i=j$.

2.4.3 Tuplas críticas de ramos da rede

A presença ou não de elementos da rede elétrica (estes fazem parte do estado operativo) têm influência na capacidade de observação da EE. Analogamente às medidas e unidades de medição, os ramos da rede elétrica também apresentam criticalidade, que se reflete na depuração de dados processados pela EE. Caracteriza-se as criticalidades de ramos da rede como se segue [Clem88]:

- ramo crítico (Cramo) – aquele que, caso se torne indisponível, acarreta inobservabilidade;
- par crítico de ramos (C2-ramos) – dupla que, se ambos os seus ramos se tornarem simultaneamente indisponíveis, causa inobservabilidade;
- k -tupla crítica de ramos (Ck-ramos) – tupla de k ramos que, se e somente indisponíveis simultaneamente, tornam a rede não observável.
- ramo irrelevante – ramo associado a nenhuma medida.

De acordo com [Clem88], um erro topológico simples é não-detectável se ocorrer em:

1. um ramo crítico;
2. um ramo irrelevante;
3. um ramo ao qual somente medidas críticas estejam associadas (repare que o ramo não é necessariamente crítico se possui medidas incidentes críticas);

Erros topológicos simples são não identificáveis se acontecem em:

1. um par crítico de ramos;
2. um par de ramos associado a um par crítico de medidas.

Outras relações podem ser encontradas em [Clem88], [Wu89] e [Chen08].

Tal como as criticalidades de medidas e UMs, as criticalidades de ramos possuem algumas propriedades que as particularizam. Uma vez que as alterações topológicas proporcionam modificações na estrutura do Jacobiano, não se restringindo apenas à remoção de medidas, as Ck-ramos afetam o processo de estimação de forma diversa das Ck-tuplas e Ck-UMs. Expressa-se a relação entre a matriz Jacobiano antes e depois da ocorrência de uma modificação na configuração da rede por:

$$\mathbf{H}_T = \mathbf{H}_E + \Delta\mathbf{H} \quad (2.40)$$

onde $\mathbf{H}_E$ é a matriz Jacobiano após a modificação topológica, $\mathbf{H}_T$ é a matriz antes da alteração topológica e $\Delta\mathbf{H}$ é a matriz que representa as modificações ocorridas na matriz Jacobiano.

As linhas de $\Delta\mathbf{H}$ associadas somente às porções da rede que não sofreram modificações são nulas. Suponha que a rede seja inicialmente observável. Se a remoção de uma tupla de k ramos torna a rede não observável, tem-se, segundo a análise de observabilidade, que $\mathbf{H}_E$ tem posto deficiente e $\mathbf{H}_T$ completo. Consequentemente, existe pelo menos um vetor de estado $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ que satisfaz as relações $\mathbf{H}_E \cdot \mathbf{c} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{H}_T \cdot \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$. Multiplicando ambos os lados de (2.40) por tal vetor resulta em:

$$\mathbf{H}_T \mathbf{c} = \Delta\mathbf{H} \mathbf{c} \neq \mathbf{0} \quad (2.41)$$

Se a matriz de sensibilidade dos resíduos para o sistema original é $\mathbf{E}_T$, multiplicando-se ambos os lados por $\mathbf{E}_T$ resulta em:

$$\mathbf{E}_T \mathbf{H}_T \mathbf{c} = \mathbf{E}_T \Delta\mathbf{H} \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

As mudanças na configuração da rede podem ser representadas por meio de modificações em nos fluxos dos ramos fazendo-se [Clem88]:

$$\Delta\mathbf{H} \mathbf{c} = \mathbf{M} \Delta\mathbf{f} \quad (2.43)$$

onde $\mathbf{M}(m \times nr)$ é a matriz de incidência medida-ramo; $\Delta\mathbf{f}(nr \times 1)$ é o vetor de alteração nos fluxos dos ramos da rede e nr o número de ramos da rede elétrica.

Os elementos nulos de Δf correspondem aos ramos cujo estado operativo não é modificado durante a alteração na configuração da rede. A matriz de incidência medida-ramo $\mathbf{M}$ (4.43) relaciona as alterações nos fluxos dos ramos causados pela alteração da configuração da rede às medidas do plano de medição. Constrói-se esta matriz da seguinte forma [Wu89], [Chen08]:

- Fluxo de potência ativa P_{i-j} associado ao ramo $i-j$: $\mathbf{M}_a(\ell, k) = 1$;
- Fluxo de potência ativa P_{j-i} associado ao ramo $i-j$: $\mathbf{M}_a(\ell, k) = -1$;
- Injeção de potência ativa P_i associado ao ramo $i-j$: $\mathbf{M}_a(\ell, k) = 1$;
- Injeção de potência ativa P_j associado ao ramo $i-j$: $\mathbf{M}_a(\ell, k) = -1$;
- Corrente de ramo ativa Ia_{j-i} associado ao ramo $i-j$: $\mathbf{M}_a(\ell, k) = 1$;
- Corrente de ramo ativa Ia_{i-j} associado ao ramo $i-j$: $\mathbf{M}_a(\ell, k) = -1$;

onde ℓ é a linha de $\mathbf{M}_a$ correspondente à medida ativa $z_a(\ell)$, enquanto k refere-se à coluna de $\mathbf{M}_a$ associada ao ramo que liga a barra i à barra j . Nota-se que se $z_a(\ell)$ é uma medida de ângulo, então $\mathbf{M}_a(\ell, :) = 0$ [Chen08].

Obtém-se, substituindo (2.42) em (2.43):

$$\mathbf{E}_T \mathbf{M} \Delta f = \mathbf{0} \quad (2.44)$$

Portanto, para uma k -tupla crítica de ramos as colunas da matriz $\mathbf{T} = \mathbf{E}_T \mathbf{M}$, associadas aos ramos de uma tupla crítica, constituem um conjunto linearmente dependente. Repare que a criticalidade do ramo depende da dependência linear das colunas de $\mathbf{E}_T$ e $\mathbf{M}$, sendo, portanto, a criticalidade de ramo diretamente relacionada à criticalidade das medidas a ele associadas.

Similarmente às medidas, modificações topológicas também podem comprometer o tratamento de EGs pela EE. Caso reporte-se indevidamente uma alteração na rede, a matriz Jacobiano associada à configuração verdadeira da rede é $\mathbf{H}_T$, enquanto $\mathbf{H}_E$ representa a matriz Jacobiano correspondente à rede erroneamente configurada.

Fazendo-se $\mathbf{H}_a = \mathbf{H}_T = \mathbf{H}_E + \Delta \mathbf{H}$ no modelo linear de medidas $z_a = \mathbf{H}_a \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}_a$, tem-se que:

$$z_a = \mathbf{H}_E \boldsymbol{\theta} + \Delta \mathbf{H} \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}_a = \mathbf{H}_E \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}_a \quad (2.45)$$

$$z_a = \mathbf{H}_E \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}_a \quad (2.46)$$

onde $\xi_a = \Delta \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}_a$; $\Delta \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$ é a componente adicional de erro nas medidas devido ao erro de configuração.

O processo de estimação, desconhecendo o erro topológico, obtém a estimativa do estado considerando-se o modelo de medidas $\mathbf{z}_a = \mathbf{H}_E \boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}_a$, o que resulta no seguinte vetor de resíduos:

$$\mathbf{r}_e = (\mathfrak{Z} - \mathbf{H}_E \mathbf{G}_E^{-1} \mathbf{H}_E^T) \mathbf{z}_a \quad (2.47)$$

sendo:

$\mathbf{G}_E$: matriz de Ganho associada modelo incorreto da rede elétrica;

$\mathbf{r}_e$: o vetor de resíduos de estimação devido a presença de erros de topologia.

Substituindo (2.45) em (2.47), tem-se que:

$$\mathbf{r}_e = (\mathfrak{Z} - \mathbf{H}_E \mathbf{G}_E^{-1} \mathbf{H}_E^T) (\mathbf{H}_E \boldsymbol{\theta} + \Delta \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}_a) \quad (2.48)$$

Sendo o valor esperado de $\mathbf{r}_e$ dado por:

$$\mathbb{E}[\mathbf{r}_e] = (\mathfrak{Z} - \mathbf{H}_E \mathbf{G}_E^{-1} \mathbf{H}_E^T) \Delta \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} \quad (2.49)$$

A expressão (2.49) afirma que os erros topológicos se manifestam na EE sob a forma de resíduos normalizados não-nulos e persistentes. Adicionalmente, também permite a identificação de condições nas quais o processamento de erros é comprometido devido a modificações na configuração da rede. Assumindo a ausência de erros grosseiros nas medidas, para que sejam detectáveis erros de configuração via análise residual é necessário que a condição seguinte deve ser satisfeita:

$$\mathbb{E}[\mathbf{r}_e] = (\mathfrak{Z} - \mathbf{H}_E \mathbf{G}_E^{-1} \mathbf{H}_E^T) \Delta \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0}, \Delta \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} \neq \mathbf{0} \quad (2.50)$$

Nas situações em que (2.50) não se verifica, a detecção de erros torna-se comprometida. Em uma primeira análise, observa-se que a satisfação da condição (2.50) depende da dependência linear entre as colunas da matriz de sensibilidade dos resíduos. Representando-se a componente adicional de erro nas medidas em função da variação dos fluxos nas linhas, por meio transformação $\Delta \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{M} \Delta \mathbf{f}$, (2.50) torna-se:

$$\mathbb{E}[\mathbf{r}_e] = \mathbf{S}_E \Delta \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.51)$$

onde $\mathbf{M}\Delta\mathbf{f} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{S}_E = (\mathbf{Z} - \mathbf{H}_E \mathbf{G}_E^{-1} \mathbf{H}_E^T) \mathbf{M}$ é a matriz de sensibilidade dos resíduos. Note que cada coluna desta matriz está associada a um ramo da rede elétrica.

A expressão (2.51) fornece condições gerais para a detectabilidade de erros de configuração dos ramos via análise residual. De acordo com a última expressão, se as colunas linearmente dependentes de $\mathbf{S}_E$ correspondem aos ramos envolvidos em certo erro de configuração, tal erro não será detectável em algumas circunstâncias. Tais cenários dependem das admitâncias dos ramos e do estado da rede.

Para as linhas de $\mathbf{S}_E$ nulas, erros topológicos simples são não-detectáveis, independentemente do estado da rede ou impedância dos ramos [Wu89]. Como exemplos desta propriedade, nota-se a não detectabilidade de erro topológico em ramos irrelevantes ou associados somente a medidas críticas.

A análise da dependência linear das colunas de matriz $\mathbf{S}_E$, quando construída para a rede elétrica com todos os ramos em operação, permite determinar os casos em que saídas não reportadas de ramos não são detectáveis ou identificáveis pela EE [Wu89]. Por fim, como informações pertinentes a respeito da criticalidade de ramos da rede apresentadas, destacam-se:

- As colunas da matriz $\mathbf{S}$ correspondentes aos ramos de uma Ck-ramos são linearmente dependentes. Portanto, com base nas expressões (2.50) e (2.51), a EE pode, em determinadas circunstâncias, não processar adequadamente EGs causados por erros de configuração da rede elétrica que porventura ocorram em Ck-ramos;
- Existem k -tuplas de ramos que, embora não sejam críticas em relação a observabilidade, são criticalidades que impactam o processamento de erros de configuração da rede via análise residual;
- As criticalidades dos ramos da rede que afetam a observabilidade são melhor caracterizadas a partir da matriz de Ganho, enquanto aquelas que influenciam o processamento de EGs podem ser estudadas tendo-se em vista a dependência linear entre as colunas da matriz $\mathbf{S}$.

2.5 Comentários Finais

Neste capítulo foram apresentadas as contribuições mais relevantes e recentes à análise de observabilidade e criticalidade. Descreveu-se também os fundamentos de

estimação de estado, sendo aqui detalhados procedimentos numéricos para avaliação da observabilidade e identificação de Cmeds e Cconjs. Por fim, as diferentes criticalidades a serem investigadas nesta Tese foram aqui caracterizadas, sendo também descritas suas principais propriedades.

As condições críticas aqui apresentadas dizem respeito somente àquelas que resultem em prejuízo à observabilidade. Entretanto, algumas criticalidades que não serão abordadas nesta Tese podem afetar somente a depuração de erros grosseiros, sem, todavia, impactar na observabilidade da rede. Como exemplo desta criticalidade destacam-se os pontos de alavancamento [Abur04].

Conforme apresentado, as criticalidades de um sistema de potência não se restringem a medidas e conjuntos críticos, como comumente apontado, devendo ser também avaliadas as criticalidades de grupos de medidas e de elementos da rede. A revisão bibliográfica realizada evidencia a necessidade de avaliação integrada da observabilidade, que agregue as diferentes formas de criticalidade presentes em uma rede elétrica, e explicita a corrente escassez de procedimentos para quantificação da observabilidade da rede elétrica. Tais aspectos serão abordados nos capítulos subsequentes desta Tese.

Capítulo 3

Simulação de Monte Carlo

3.1 Introdução

A Simulação de Monte Carlo (SMC) é uma técnica de simulação computacional que pode ser utilizada para estudar as características de um sistema, sem a necessidade de observá-lo diretamente. Sua ideia principal é determinar, por meio de amostragem probabilística das possíveis condições que o sistema pode assumir, o comportamento deste, sendo por esta razão empregada na análise de sistemas complexos ou que necessitam ser simulados com elevado grau de realismo. Este capítulo introduz de forma breve os aspectos básicos da simulação de sistemas via Simulação de Monte Carlo e as técnicas de redução de variância usualmente empregadas.

3.2 Sistema, Modelos e Simulação

Um sistema pode ser entendido como uma coleção de objetos que interagem entre si e com o meio em que estão inseridos. Estes objetos possuem certos atributos que, em conjunto, caracterizam o sistema em sua totalidade e de forma única. A esta coleção de atributos dá-se o nome de estado. As ações e informações que um sistema recebe do meio denominam-se entrada, enquanto aquelas fornecidas pelo sistema ao meio são chamadas de saída.

As interações entre objetos de um sistema, e entre este e o meio podem alterar o estado do sistema. Entende-se por realização do sistema a alteração de seu estado. Se as estas ocorrem de forma gradual ao longo do tempo, o sistema é dito contínuo, ao passo que, se estas acontecem de forma abrupta, isto é, o estado realiza “saltos”, denomina-se o sistema como sistema a eventos discretos.

Compreende-se por simulação a imitação do comportamento real de um sistema, em geral por meio de modelos. Estes têm a finalidade de representar e descrever, de forma simplificada, as interações entre os objetos que compõem o sistema e que sejam de interesse ao estudo. Um modelo pode ser discreto ou contínuo, a depender de como as transições entre estados são representadas. Em modelos estáticos o estado do sistema não evolui com o tempo, não sendo este representado na

simulação, ao passo que naqueles denominados dinâmicos ocorre evolução do estado, devendo-se o tempo ser explicitamente considerado na simulação.

Se um sistema é determinístico, então pode ser simulado computacionalmente resolvendo-se, analítica- ou numericamente, as equações do modelo matemático que descrevem seu comportamento ao longo do tempo. Para certos sistemas determinísticos e estocásticos, não é possível, ou é de grande dificuldade, a simulação do sistema da forma ulteriormente mencionada. Nestas situações, técnicas de simulação estocástica como a Simulação de Monte Carlo, são mais atrativas. Tais procedimentos têm como vantagens: serem conceitualmente mais simples, tratarem mais adequadamente a incerteza de um sistema e, através da inserção de aleatoriedade no processo de simulação, obterem um comportamento estimado do sistema, convergente em probabilidade para o comportamento exato deste.

3.3 Simulação de Monte Carlo

Na simulação de um sistema através da SMC, os possíveis estados que o sistema pode assumir são sorteados repetidamente, sendo inferido o comportamento geral do sistema a partir da amostra formada pelos estados escolhidos. A SMC, requer, além do modelo matemático do sistema, os seguintes elementos:

- Procedimento para sorteio dos estados, que pode ser amostragem a partir de uma distribuição de probabilidade caso o modelo do sistema seja estático, ou através de um processo estocástico, se o modelo empregado for dinâmico;
- Uma função que relacione os estados do sistema ao comportamento que se deseja observar, denominada Função de Desempenho ou simplesmente Desempenho.

Note que, semelhantemente ao estado do sistema, os valores da Função de Desempenho também ocorrerão aleatoriamente, sendo esta função uma variável aleatória. A propriedade ou característica do sistema que se pretende determinar corresponderá, na SMC, ao valor esperado da Função Desempenho, que será *estimado* pela média dos Desempenhos dos estados sorteados.

De forma a ilustrar o funcionamento da SMC, suponha uma rede elétrica constituída por 5 linhas de transmissão, uma estação geradora, um centro de consumo

e dois pontos de interligação das linhas. Este sistema pode ser modelado visualmente pelo grafo apresentado na Figura 3.1. Cada linha de transmissão tem uma probabilidade p de falhar e, portanto, não poder transmitir eletricidade. Assumir-se-á também que a falha das linhas não depende do tempo. Quando o sistema funciona adequadamente, a eletricidade produzida na Estação Geradora é totalmente fornecida ao Ponto de Consumo, por meio das linhas de transmissão que estabeleçam um caminho entre os dois pontos. Deseja-se determinar a probabilidade de funcionamento adequado do sistema de energia.

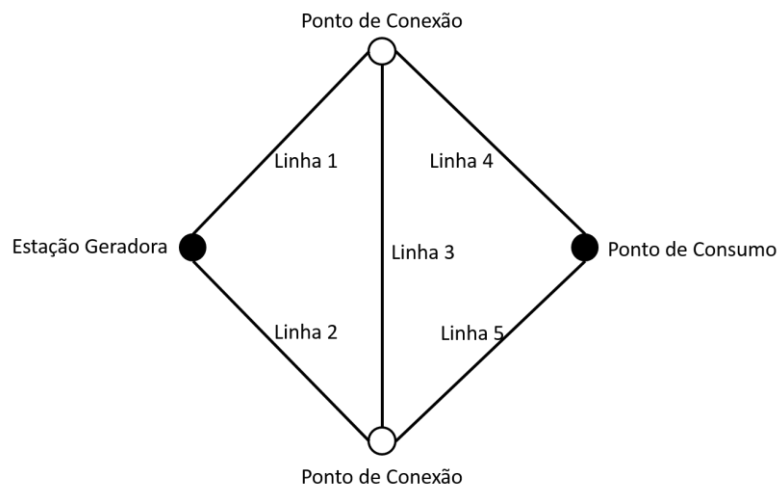


Figura 3.1 – Modelo da rede elétrica.

Com base na Figura 3.1, o fornecimento de energia depende exclusivamente do estado de funcionamento das linhas. Portanto, o estado do sistema pode ser definido como o vetor binário $y = (y_1, y_2, \dots, y_5)$, em que $y_k = 0$ indica que a linha k falhou sendo $y_k = 1$ caso contrário. Os estados que o sistema assume podem ser sorteados da seguinte maneira:

1. Seleciona-se uma linha de transmissão k ;
2. Escolhe-se um número aleatório uniformemente distribuído no intervalo $[0,1]$;
3. Se o número escolhido é menor do que p , a linha não está em funcionamento e $y_k = 0$, senão, a linha está em operação, logo $y_k = 1$;
4. Repetir os passos 1-3 até que todas as linhas de transmissão sejam selecionadas. Construir o vetor x a partir de $y_1, y_2, \dots, y_5$.

Sendo o comportamento a ser avaliado a frequência com que a energia produzida na estação geradora é entregue no ponto de consumo, a Função de Desempenho para o sistema pode ser dada por:

$$D(\mathbf{y}) = 1 - (1 - y_1 y_4)(1 - y_2 y_5)(1 - y_1 y_3 y_5)(1 - y_2 y_3 y_4) \quad (3.1)$$

A Função de Desempenho assume o valor um (1) se o sistema funciona adequadamente e zero (0) caso contrário. Repare que de acordo com a expressão (3.1), $D(\mathbf{y}) = 1$ somente quando pelo menos uma das tuplas de linhas de transmissão (1,4), (2,5), (1,3,5) ou (2,3,4) está em operação. Logo o Desempenho definido por (3.1) retrata adequadamente a relação entre o estado do sistema e o comportamento a ser avaliado. O valor esperado da Função de Desempenho pode ser *estimado* pela média dos Desempenhos, dada por:

$$\ell = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D(\mathbf{y}^{(i)}) \quad (3.2)$$

onde a amostra de N estados $(\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)})$ é obtida conforme indicado anteriormente.

Para os estados sorteados e respectivas performances mostradas na Tabela 3.1, o Desempenho médio do sistema é 0,6. Este valor corresponde ao valor estimado da probabilidade de o sistema de energia funcionar adequadamente, caso a probabilidade de falha de cada linha de transmissão for de 10%.

Tabela 3.1 – Simulação de Monte Carlo.

Probabilidade de falha:					0,1
Estados Sorteados					Performance
y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$H(\mathbf{y})$
0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	1
Média					0,6

O exemplo acima constitui uma forma rudimentar de simulação de Monte Carlo. Note que no processo de sorteios dos estados, cada componente y_k do estado é amostrada independentemente a partir de uma distribuição de Bernoulli com parâmetro p , sendo a amostragem do estado, portanto, descrita por um vetor variável aleatória com distribuição de Bernoulli e vetor de parâmetros $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_5), p_1 = p_2 = \dots p_5$. Outros aspectos relevantes a respeito da SMC podem ser observados a partir deste exemplo, dentre os quais vale destacar:

- A aleatoriedade da SMC provém do processo de sorteio dos estados, sendo o comportamento probabilístico do sistema, caso tenha, contabilizado por meio deste;
- O esforço computacional do método está diretamente associado ao número de sorteios realizados, isto, é, ao tamanho da amostra de estados;
- Não há a necessidade de se simular todos os estados do sistema, apenas uma porção destes representativa para o fenômeno estudado;
- Os resultados obtidos por meio da SMC são estimativas do comportamento do sistema, contendo por isto incertezas;
- Tanto o processo de sorteio dos estados quanto a Função de Desempenho utilizada têm impacto no resultado final da simulação.
- Amostras de estado diferentes podem levar a resultados diferentes, mas igualmente válidos, do ponto de vista estatístico;

Nas seções subsequentes será apresentado um tratamento formal da SMC, além de algoritmos especializados. As técnicas de Monte Carlo abordadas neste capítulo são aplicáveis somente na simulação de modelos discretos e estáticos.

3.4 Simulação de modelos discretos e estáticos

Seja $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ um vetor de tamanho d representando o estado de um sistema e $D(\mathbf{y})$ uma Função de Desempenho relacionada à propriedade que se deseja avaliar. Considere também que a escolha ao acaso de um dos estados do sistema é descrita por um vetor variável aleatória $\mathbf{Y}(d \times 1)$, com função densidade de

probabilidade (fdp) $f(\mathbf{Y} = \mathbf{y})$. O comportamento do sistema é representado pelo valor esperado da Função Desempenho, dado por:

$$\ell = E[D(\mathbf{y})] = \int_{-\infty}^{+\infty} D(\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (3.3)$$

Embora $f(\mathbf{y})$ e $D(\mathbf{y})$ possam ser conhecidos, a integral (3.3) é em geral de difícil cálculo. Uma estimativa não tendenciosa de (3.3) é a média aritmética, dada por:

$$\hat{\ell} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D(\mathbf{y}^{(k)}) \quad (3.4)$$

onde $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)})$ é uma amostra extraída de $f(\mathbf{y})$, isto é, $\mathbf{y} \sim f(\mathbf{y})$; e N é o tamanho da amostra.

Repare que o vetor variável aleatória $\mathbf{Y}$ assume os mesmos valores do estado. Além disso, assume-se que os elementos da amostra, isto é, as replicações do estado, são independentes. Com base no que foi anteriormente exposto, a versão básica da Simulação de Monte Carlo, denominada Simulação de Monte Carlo Simples (MCS) pode ser descrita pelos passos do Algoritmo no Quadro 3.1.

Procedimento MCS($N, f(\cdot), D(\cdot)$) Passo 1: Gerar uma amostra aleatória $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)})$, $\mathbf{y} \sim f(\mathbf{y})$; Passo 2: Obter a amostra de desempenhos $\mathcal{D} = (D(\mathbf{y}^{(1)}), \dots, D(\mathbf{y}^{(N)}))$; Passo 3: Obter a estimativa do desempenho usando (3.4).
--

Quadro 3.1 – Simulação de Monte Carlo Simples

Observe que o procedimento é elementar e geral, sendo aplicável a diferentes sistemas, desde que especificados: o processo de amostragem, a função de desempenho e o tamanho da amostra. Estas qualidades fazem da SMC uma ferramenta atrativa para simulações de sistemas com grande complexidade.

3.5 Intervalos de confiança para a estimativa do desempenho

A expressão (3.4) não fornece o valor exato de ℓ , mas sua estimativa pontual. Uma estimativa intervalar de ℓ pode ser alternativamente calculada construindo-se o intervalo de confiança. O Teorema do Limite Central estabelece que, para um número grande de amostras, a função densidade de probabilidade (fdp) de $\hat{\ell}$ se aproxima da

distribuição normal $\mathcal{N}(\ell, \sigma^2/N)$, onde σ^2 é a variância de $D(\mathbf{Y})$. Como σ^2 é comumente desconhecida, emprega-se em seu lugar a variância amostral da Função de Desempenho s^2 , dada por:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (D(\mathbf{y}^{(i)}) - \hat{\ell})^2 \approx \text{Var}(D(\mathbf{Y})) \quad (3.5)$$

Portanto, a variância da estimativa pode ser aproximada por:

$$\text{Var}(\hat{\ell}) \approx \frac{s^2}{N} \quad (3.6)$$

A expressão (3.6) sugere que tamanhos de amostras grandes proporcionam estimativas com menos variabilidade. Além disso, observa-se que $\text{Var}(\hat{\ell})$ depende da amostra $\mathcal{D}$, sendo a precisão da SMC também influenciada pelo processo de amostragem. Assumindo-se que o número de amostras é suficientemente grande, o intervalo de confiança $IC_\alpha(\hat{\ell})$, para um nível de confiança $1 - \alpha$, é dado por:

$$IC_\alpha(\hat{\ell}) = \left(\hat{\ell} - \frac{s}{\sqrt{N}} z_{1-\alpha/2}, \hat{\ell} + \frac{s}{\sqrt{N}} z_{1-\alpha/2} \right) \quad (3.7)$$

onde $z_{1-\alpha/2}$ é o valor variável aleatória $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ tal que o evento $|Z| \leq z_{1-\alpha/2}$ ocorre probabilidade $Pr(|Z| \leq z_{1-\alpha/2}) = (1 - \alpha)$.

A expressão (3.7) deve ser interpretada como se segue: se diferentes estimativas $\hat{\ell}$ forem realizadas com diferentes amostras de tamanho N , e os respectivos intervalos de confiança $IC_\alpha(\hat{\ell})$ forem construídos, em $(1 - \alpha) \times 100\%$ dos casos ℓ estará dentro dos intervalos de confiança calculados. Nesta Tese, adotar-se-á o nível de confiança de 95%. Logo, para todas as simulações de Monte Carlo:

$$z_{1-\alpha/2} = 1,96 \quad (3.8)$$

Os comprimentos absoluto e relativo do intervalo de confiança são dados pelas expressões (3.9) e (3.10), respectivamente:

$$La(\alpha) = 2 \frac{s}{\sqrt{N}} z_{1-\alpha/2} \quad (3.9)$$

$$Lr(\alpha) = \frac{La(\alpha)}{\hat{\ell}} \quad (3.10)$$

Tendo em vista o exposto, pode-se afirmar que, com um nível de confiança $(1 - \alpha)$, a magnitude máxima do erro cometido pelo estimador $\hat{\ell}$ será $La(\alpha)$. As expressões (3.9) e (3.10) estão associadas, portanto, a precisão da estimativa de ℓ , podendo ser utilizadas como critério de parada da SMC. Pode-se alternativamente utilizar o Erro Relativo (ER), que tem a vantagem de ser independente do nível de confiança utilizado. O Erro Relativo da estimativa $\hat{\ell}$ é dado pela seguinte expressão:

$$ER = \frac{\sigma}{\ell\sqrt{N}} \approx \frac{s}{\hat{\ell}\sqrt{N}} \quad (3.11)$$

Note que o ER depende o valor esperado da Função de Desempenho, sua variância, e do tamanho da amostra. A versão completa da SMC simples, que além de determinar a estimativa do Desempenho, calcula o Intervalo de Confiança e o Erro Relativo, pode ser resumida nos passos do algoritmo mostrado no Quadro 3.2.

Procedimento MCS($N, f(\cdot), D(\cdot)$)

Passo 1: Gerar uma amostra aleatória $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)})$, $\mathbf{y} \sim f(\mathbf{y})$;

Passo 2: Obter a amostra de desempenhos $\mathcal{D} = (D(\mathbf{y}^{(1)}), \dots, D(\mathbf{y}^{(N)}))$;

Passo 3: Obter a estimativa do desempenho usando (3.4):

Passo 4: Calcular o intervalo de confiança e o erro relativo de acordo com as expressões (3.7) e (3.11);

Quadro 3.2 –Versão completa do MCS.

Alternativamente, ao invés de se estabelecer à priori o tamanho da amostra, o algoritmo descrito no Quadro 3.2 pode ser ligeiramente modificado de forma que sejam sorteados quantos estados forem necessários até que o erro relativo ou o comprimento do intervalo de confiança alcancem um valor pré-determinado. Fixando-se o erro relativo em um valor β , e supondo $Var(D(\mathbf{Y})) = \sigma^2$ conhecida, o número de amostras pode ser escrito como:

$$N = \frac{1}{\beta} \frac{\sigma^2}{\ell^2} \approx \frac{1}{\beta} \frac{s^2}{\hat{\ell}^2} \quad (3.12)$$

A expressão (3.12) mostra que o número de amostras independe da dimensão do sistema, dependendo somente do valor esperado da Função de Desempenho, sua

variância e do erro relativo. O estudo de eventos raros de um sistema via simulação de Monte Carlo são caracterizados, em geral, por ℓ pequeno e σ elevado. Observa-se por meio de (3.12), que o número de amostras necessários para o estudo de tais eventos tende a ser alto.

Além disso, a expressão (3.12) sugere que o número de amostras da SMC pode ser reduzido, sem haver prejuízo à precisão exigida (representada por β), se for possível reduzir σ^2 . Introduzindo-se informação à priori sobre o sistema estudado simulação, é possível a diminuição de σ^2 , resultando em reduções drásticas do número de amostras e do erro relativo. Na próxima seção serão apresentados exemplos de procedimentos aplicáveis à SMC que visam reduzir a variância de ℓ , possibilitando a obtenção de estimativas de melhor qualidade sem onerar o custo computacional.

3.6 Técnicas de controle de variância

As técnicas de controle de variância podem ser vistas como formas de se utilizar o conhecimento disponível sobre o sistema a ser estudado para obtenção de simulações de maior qualidade [Rubi08], [Mira10]. Quanto maior a informação incorporada à SMC, maior redução da variância pode ser alcançada. Diferentes técnicas foram propostas na literatura, sendo as técnicas mais conhecidas [Rubi08], [Mira10] e [Ross12]: Variáveis Comuns e Antitéticas; Variáveis de Controle; Amostragem Condicional; Amostragem Estratificada; Amostragem por Importância; e o método da Transformação de Razão Verossimilhança (*Transform Likelihood Ratio method*).

Com o objetivo de demonstrar como a inclusão de informação sobre o sistema pode reduzir σ^2 , melhorando a qualidade da simulação, serão detalhadas as técnicas de Amostragem Condicional; Amostragem Estratificada; e a Amostragem por Importância, sendo esta última adotada nesta Tese, como alternativa a SMC simples.

3.6.1 Amostragem Condicional

O objetivo principal da SMC é obter o valor esperado da Função de Desempenho, $\ell = E(D(Y))$. Supondo que seja conhecido o vetor variável aleatória auxiliar $Y_C \sim g(y)$, sendo este estatisticamente dependente de Y , ℓ pode ser indiretamente calculado utilizando-se (3.13):

$$\ell = E_{Y_C}(E_Y(D(Y)|Y_C = y_C)) \quad (3.13)$$

onde E_Y e E_{Y_C} são os valores esperados em relação a $f(\mathbf{y})$ e $g(\mathbf{y}_C)$, respectivamente, e $E_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C)$ é o valor esperado condicionado de $D(\mathbf{Y})$, dado a ocorrência do evento $\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C$.

Tendo por base a expressão (3.13), $Var(D(\mathbf{Y}))$ pode ser decomposta como:

$$Var(D(\mathbf{Y})) = E_{Y_C}(Var_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C)) + Var_{Y_C}(E_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C)) \quad (3.14)$$

onde $Var_{Y_C}(E_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C))$ é a variância condicionada de $D(\mathbf{Y})$ dado a ocorrência do evento $\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C$.

Sendo as grandezas do lado direito da expressão (3.14) não-negativas, tem-se a seguinte relação:

$$Var_{Y_C}(E_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C)) \leq Var(D(\mathbf{Y})) \quad (3.15)$$

A expressão (3.15) permite afirmar que o emprego, no cálculo de ℓ , da variável aleatória $E_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C)$ ao invés de $D(\mathbf{Y})$, resultará na diminuição de $Var(\ell)$, e consequentemente, de $Var(\hat{\ell})$. Ou seja: o condicionamento sempre produz redução de variância, sendo a intensidade desta dependente de $E_{Y_C}(Var_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C))$ [Rubi08].

A partir do exposto, um sistema pode ser simulado via simulação de Monte Carlo Condicional seguindo-se os passos descritos no Algoritmo do Quadro 3.3. O valor estimado em (3.16) é chamado de estimador de Monte Carlo Condicional.

Procedimento MCC($N, g(\cdot), f(\cdot), D(\cdot), z_{1-\alpha/2}$)

Passo 1 Gerar uma amostra aleatória $\mathbf{y}_C = (\mathbf{y}_C^{(1)}, \mathbf{y}_C^{(2)}, \dots, \mathbf{y}_C^{(N)})$, $\mathbf{y}_C \sim g(\mathbf{y}_C)$;

Passo 2 Obter a partir de $\mathbf{y}_C$ a amostra $(E_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{y}_C^{(1)}), \dots, E_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{y}_C^{(N)}))$;

Passo 3 Obter a estimativa do desempenho utilizando a expressão:

$$\hat{\ell}_c = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{y}_C^{(i)}) \quad (3.16)$$

Passo 4 Calcular o intervalo de confiança e o erro relativo de acordo com as expressões (3.7) e (3.11);

Quadro 3.3 – Simulação de Monte Carlo Condicional

Para que a SMC condicional proporcione redução de variância significativa, o vetor variável aleatória auxiliar $\mathbf{Y}_C$ deve ser construído atendendo-se, de preferência, às seguintes condições:

- Facilidade de amostragem;
- O valor esperado condicionado $E_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C)$ deve ser calculado analiticamente;
- O valor esperado da variância condicionada $E_{Y_C}(\text{Var}_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C))$ deve ser elevado;

A simulação de Monte Carlo Condicional tem como desvantagem a dificuldade de construção de um vetor variável aleatória auxiliar $\mathbf{Y}_C$ que atenda as condições supracitadas. Em [Rubi08] e [Ross12] são mostrados exemplos complicados de construção de $\mathbf{Y}_C$ no estudo da confiabilidade de sistemas usando-se a SMC.

3.6.2 Amostragem Estratificada

Tal como a amostragem condicional, a amostragem estratificada também tem como objetivo reduzir a variância de ℓ utilizando-se $E_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C)$. Dividindo-se o espaço amostral de $\mathbf{Y}$ em m partições A_k , $k = 1, \dots, m$, pode-se construir uma variável aleatória $Y_C = 1, 2, \dots, m$ que represente a escolha ao acaso de uma das partições A_k . Se um evento $Y_C = k$, representante da escolha da partição A_k , tem probabilidade de ocorrência p_k , o valor esperado da Função de Desempenho pode ser calculado como:

$$\ell = E_{Y_C}(E_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C)) = \sum_{k=1}^m p_k E_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}_C = k) \quad (3.17)$$

Uma vez que Y_C particiona o espaço amostral de $\mathbf{Y}$, $E_Y(D(\mathbf{Y})|\mathbf{Y}_C = \mathbf{y}_C)$ corresponde ao valor esperado de $D(\mathbf{Y})$ considerando-se apenas os estados que pertencem à partição A_k . Obtém-se a estimativa de ℓ através do estimador de amostragem estratificada, dado por:

$$\hat{\ell}_s = \sum_{k=1}^m \left[p_k \frac{1}{N_k} \sum_{j=1}^{N_k} D(\mathbf{y}_k^{(j)}) \right] \quad (3.18)$$

onde $\mathbf{y}_k^{(j)}$ é o j -ésimo elemento da amostra $\mathbf{y}_k = (\mathbf{y}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{y}_k^{(N_k)})$ extraída de $f(\mathbf{Y}|\mathbf{Y}_C = k)$, e N_k é o tamanho da respectiva amostra.

Destaca-se que $f(\mathbf{Y}|Y_C = k)$ é a função densidade de probabilidade de $\mathbf{Y}$ condicionada à ocorrência da partição A_k . A variância de $\hat{\ell}$ é dada pela expressão (3.19):

$$\text{Var}(\hat{\ell}_s) = \sum_{k=1}^m \left(p_k^2 \frac{\text{Var}_Y(D(\mathbf{Y})|Y_C = k)}{N_k} \right) = \sum_{k=1}^m p_k^2 \frac{\sigma_k^2}{N_k} \quad (3.19)$$

onde $\sigma_k^2 = \text{Var}_Y(D(\mathbf{Y})|Y_C = k)$.

Considere, $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_m)$ e $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m)$ como os vetores contendo os tamanhos das amostras e a probabilidade de ocorrência de cada partição, respectivamente; e a função vetorial $\mathbf{F} = (f(\mathbf{Y}|Y_C = 1), \dots, f(\mathbf{Y}|Y_C = m))$, contendo as fdps de $\mathbf{Y}$ condicionadas a cada uma das partições do espaço amostral desta. A simulação de Monte Carlo por Amostragem Estratificada pode ser realizada por meio dos passos do Algoritmo mostrado no Quadro 3.4.

Procedimento MCAE($\mathbf{N}, D(\cdot), \mathbf{F}(\cdot), Y, \mathbf{p}, z_{1-\alpha/2}$)

Passo 1 Gerar uma amostra aleatória $\mathbf{y}_C = (y_C^{(1)}, y_C^{(2)}, \dots, y_C^{(N)})$, $\mathbf{y}_C \sim g(y_C)$;

Passo 1.1 Inicializar $\hat{\ell}_k = 0$;

Passo 1.2 Gerar amostra aleatória $\mathbf{y}_k = (\mathbf{y}_k^{(1)}, \dots, \mathbf{y}_k^{(N_k)})$, $\mathbf{y}_k \sim f(\mathbf{Y}|Y_C = k)$;

Passo 1.3 Obter amostra aleatória $\mathbf{D}_k = (D(\mathbf{y}_k^{(1)}), \dots, D(\mathbf{y}_k^{(N_k)}))$;

Passo 2 Calcular $\hat{\ell}_s$ usando a expressão (3.18);

Passo 3 Calcular o intervalo de confiança e o erro relativo de acordo com as expressões (3.7), (3.11) e (3.19);

Quadro 3.4 –Método de Monte Carlo com Amostragem Estratificada

Por realizar uma amostragem condicionada, a amostragem estratificada também proporciona redução de variância. Adicionalmente, a eficiência desta dependerá do número de amostras empregado para cada partição. Para um número máximo de N amostras que podem ser coletadas, o tamanho ótimo da amostra extraída da partição A_k é dado por:

$$N_k = N \frac{\sigma_k p_k}{\sum_{j=1}^m \sigma_j p_j} \quad (3.20)$$

onde $N = \sum_{j=1}^m N_j$ é número total de amostras que pode ser utilizado na simulação.

Se os tamanhos das amostras são determinados conforme (3.20), $\hat{\ell}$ terá variância mínima dada por:

$$\text{Var}(\hat{\ell}_s) = \frac{1}{N} \left[\sum_{j=1}^m p_k \sigma_k \right]^2 \quad (3.21)$$

Estes resultados são propriedades conhecidas da amostragem estratificada [Rubi08]. A obtenção do número amostras por (3.20) é difícil porque usualmente não se conhece a priori σ_k , $k = 1, \dots, m$. Contudo, fazendo-se N_k proporcional a p_k , ou seja, $N_k = p_k \times N$, $\text{Var}(\hat{\ell})$ será dada por:

$$\text{Var}(\hat{\ell}_s) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^m p_k s_k^2 \quad (3.22)$$

Combinando-se as expressões (3.15) e (3.22) se obtém (3.23) e (3.24):

$$N \cdot \text{Var}(\hat{\ell}) = \text{Var}(D(\mathbf{Y})) \geq E_{Y_C}(\text{Var}_Y(D(Y)|Y_C = y_C)) = N \cdot \text{Var}(\hat{\ell}_s) \quad (3.23)$$

$$\text{Var}(\hat{\ell}_s) \leq \text{Var}(\hat{\ell}) \quad (3.24)$$

onde $\text{Var}(\hat{\ell})$ é a variância de $\hat{\ell}$ quando empregada a SMC simples.

As expressões (3.23) e (3.24) garantem que a variância de $\hat{\ell}$ utilizando-se a SMC com amostragem estratificada não pode ser maior do que aquela que seria obtida por meio da SMC simples. A vantagem deste método em relação a SMC Condicional é o maior controle da variância da estimativa, através da definição das partições e do número de amostras alocado para cada uma destas. As dificuldades que podem ser enfrentadas ao utilizar-se a técnica são: a definição das partições, da variável aleatória auxiliar Y_C e a determinação das probabilidades de ocorrência das partições.

Em função do condicionamento de variáveis, a aplicação dos métodos apresentados depende da facilidade em construir-se o vetor variável aleatória Y_C que satisfaça os requerimentos de cada metodologia. O próximo método a ser apresentado objetiva reduzir a variância da simulação sem que seja necessário recorrer a variáveis aleatórias auxiliares, sendo mais flexível e também aplicável a uma gama maior de situações.

3.6.3 Amostragem por Importância

A amostragem por importância é a principal técnica de controle de variância. Enquanto as técnicas mencionadas anteriormente permitem reduções moderadas da variância, reduções drásticas podem ser obtidas empregando-se essa técnica, em especial quando aplicada na simulação de eventos raros [Rubi08].

Na SMC com amostragem por importância, sorteia-se os estados do sistema a partir de uma fdp alternativa que prioriza eventos com maior impacto na característica a ser estudada, sendo preteridos aqueles que tenham pouca ou nenhuma relação com esta. Note que a fdp alternativa pode diferir daquela originalmente associada ao estado do sistema. Ao privilegiar estados relacionados à propriedade do sistema a ser analisada, a SMC com amostragem por importância acaba por reduzir a variância de ℓ e, portanto, a variabilidade de $\hat{\ell}$.

Considere que os estados sorteados de um sistema sejam representados pelo vetor variável aleatória $\mathbf{Y} \sim f(\mathbf{y})$ e que a Função de Desempenho seja $D(\mathbf{y})$. Suponha também que exista uma fdp $g(\mathbf{y})$ para a qual $g(\mathbf{y}) = 0$ implique em $D(\mathbf{y})f(\mathbf{y}) = 0$. Para $f(\mathbf{y})$ e $g(\mathbf{y})$ é válida a seguinte relação:

$$\ell = \int_{-\infty}^{+\infty} D(\mathbf{y})f(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(D(\mathbf{y}) \frac{f(\mathbf{y})}{g(\mathbf{y})} \right) g(\mathbf{y})d\mathbf{y} \quad (3.25)$$

De acordo com (3.25), ℓ pode ser calculado a partir de $g(\mathbf{y})$ como:

$$\ell = E_g \left(D(\mathbf{Y}) \frac{f(\mathbf{Y})}{g(\mathbf{Y})} \right) \quad (3.26)$$

onde E_g é o valor esperado calculado em relação a fdp $g(\mathbf{y})$.

A estimativa de ℓ utilizando-se uma amostra $\mathbf{y}_g = (\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)})$ extraída de $g(\mathbf{y})$ é dada pelo estimador de amostragem por importância $\hat{\ell}_{IS}$:

$$\hat{\ell}_{IS} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(D(\mathbf{y}^{(i)}) \frac{f(\mathbf{y}^{(i)})}{g(\mathbf{y}^{(i)})} \right) \quad (3.27)$$

onde $g(\mathbf{y})$ é chamada função de importância, $f(\mathbf{y})/g(\mathbf{y})$ é a razão de verossimilhança ou peso de correção, sendo denotada por $W(\mathbf{y})$.

A variância de $\hat{\ell}_{IS}$ em função de g é dada por:

$$\text{Var}(\hat{\ell}_{IS}) \approx \text{Var}_g \left(D(\mathbf{Y}) \frac{f(\mathbf{Y})}{g(\mathbf{Y})} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(D(\mathbf{y}) \frac{f(\mathbf{y})}{g(\mathbf{y})} - \ell \right)^2 g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (3.28)$$

A expressão (3.28) mostra que, diferentemente de $\hat{\ell}_{IS}$, $\text{Var}(\hat{\ell}_{IS})$ depende de $g(\mathbf{y})$. A função de importância $g(\mathbf{y})$ deve ser escolhida de forma que $\text{Var}_g(D(\mathbf{Y})W(\mathbf{Y}))$ seja finita. Para que isto aconteça, $W(\mathbf{y})$ deve ser limitada, o que implica em $g(\mathbf{y})$ possuir cauda mais longa do que $f(\mathbf{y})$.

Para que a amostragem por importância proporcione redução de variância, basta que os estados sejam sorteados de acordo com uma fdp $g(\mathbf{y})$ para o qual $\text{Var}_g(D(\mathbf{Y})W(\mathbf{Y}))$ é mínima. A função de importância $g^*(\mathbf{y})$ com esta característica pode ser obtida através do problema de otimização:

$$\min_g \text{Var}_g(D(\mathbf{Y})W(\mathbf{Y})) \quad (3.29)$$

A solução analítica de (3.29), segundo [Rubi08], é dada por:

$$g^*(\mathbf{y}) = \frac{|D(\mathbf{y})|f(\mathbf{y})}{\int |D(\mathbf{y})|f(\mathbf{y})d\mathbf{y}} \quad (3.30)$$

Se a função de desempenho $D(\mathbf{x})$ é não-negativa, a última expressão se torna:

$$g^*(\mathbf{y}) = \frac{D(\mathbf{y})f(\mathbf{y})}{\ell} \quad (3.31)$$

Empregando-se $g^*(\mathbf{y})$ como função de importância, tem-se que $\text{Var}_{g^*}(D(\mathbf{Y})W(\mathbf{Y})) = 0$. Contudo, a obtenção de $g^*(\mathbf{y})$ requer o conhecimento de ℓ , que é exatamente o valor a ser determinado em uma simulação. Uma possibilidade é estimar ℓ por meio de uma execução piloto ou inicial. Entretanto, a amostragem do estado partir de $g^*(\mathbf{y})$ pode ser complicada e custosa computacionalmente.

Se a fdp $f(\mathbf{y})$ pertence à uma família de funções parametrizadas pelo vetor $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)$, $\mathcal{F} = \{f(\cdot; \mathbf{v}), \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$, pode-se escolher uma função de importância g que também pertença a esta família. Supondo que $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \mathbf{u})$, o vetor de parâmetros $\mathbf{v}^*$

da função de importância $g_{VM}^*(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \mathbf{v}^*)$ que minimiza a variância de $\hat{\ell}_{IS}$ pode ser encontrado resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\mathbf{v}} \text{Var}_{\mathbf{v}} \left(D(\mathbf{x}) \frac{f(\mathbf{y}; \mathbf{u})}{f(\mathbf{y}; \mathbf{v})} \right) \quad (3.32)$$

onde denominam-se $\mathbf{u}$ o vetor de parâmetros nominais de $\mathbf{Y}$, $\mathbf{v}$ o vetor de parâmetros de referência e $\mathbf{v}^*$ o vetor de parâmetros de referência ótimo. $\text{Var}_{\mathbf{v}}$ é a variância calculada em relação a $f(\mathbf{y}; \mathbf{v})$.

Tendo por base as propriedades da variância, reescreve-se (3.32) como:

$$\min_{\mathbf{v}} \left[\text{E}_{\mathbf{v}} \left(D(\mathbf{x})^2 \frac{f(\mathbf{x}\mathbf{y}; \mathbf{u})^2}{f(\mathbf{x}\mathbf{y}; \mathbf{v})^2} \right) - \ell^2 \right] \quad (3.33)$$

onde $\text{E}_{\mathbf{v}}$ é o valor esperado em relação a $f(\mathbf{y}; \mathbf{v})$.

Repare que ℓ independe de $\mathbf{v}$. Consequentemente, a relação (3.34) é válida:

$$\text{E}_{\mathbf{v}} \left(D(\mathbf{y})^2 \frac{f(\mathbf{y}; \mathbf{u})^2}{f(\mathbf{y}; \mathbf{v})^2} \right) = \text{E}_{\mathbf{u}} \left(D(\mathbf{y})^2 \frac{f(\mathbf{y}; \mathbf{u})}{f(\mathbf{y}; \mathbf{v})} \right) \quad (3.34)$$

onde $\text{E}_{\mathbf{u}}$ é o valor esperado em relação a $f(\mathbf{y}; \mathbf{u})$.

Note que na expressão (3.34) o valor esperado à direita é calculado em relação a fdp $f(\mathbf{y}; \mathbf{u})$. O problema de otimização (3.33) corresponde, portanto, ao seguinte problema de minimização:

$$\min_{\mathbf{v}} \text{E}_{\mathbf{u}} \left(D(\mathbf{y})^2 \frac{f(\mathbf{y}; \mathbf{u})}{f(\mathbf{y}; \mathbf{v})} \right) = \min_{\mathbf{v}} V(\mathbf{v}) \quad (3.35)$$

onde $\text{E}_{\mathbf{u}}$ é o valor esperado calculado em relação a $f(\mathbf{y}; \mathbf{u})$.

O problema (3.35) é denominado problema de minimização de variância. Na maioria dos casos, não existe expressão analítica para $V(\mathbf{v})$ ou esta é de difícil obtenção, sendo resolvido ao invés de (3.35) a sua versão estocástica, dada por:

$$\min_{\mathbf{v}} \hat{V}(\mathbf{v}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [D(\mathbf{y}^{(k)})]^2 \frac{f(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{u})}{f(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{v})} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [D(\mathbf{y}^{(k)})]^2 W(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (3.36)$$

onde $\mathbf{y}^{(k)}$ corresponde ao elemento k da amostra $\mathbf{y}_{\mathbf{u}} = (\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)})$ retirada de $f(\mathbf{y}; \mathbf{u})$, sendo $W(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{u}, \mathbf{v})$ o peso de correção.

É importante notar que $\hat{V}(\mathbf{v})$ é uma variável aleatória que depende da amostra $\mathbf{y}_u$. Entretanto, uma vez que a amostra $\mathbf{y}_u$ é fixada, $\hat{V}$ se torna uma função determinística. O problema (3.36) pode ser solucionado técnicas de otimização. Se $\mathbf{v}^*$ é o parâmetro de referência que soluciona o problema (3.36), $\hat{\ell}_{IS}$ é obtido utilizando-se o estimador de razão de verossimilhança:

$$\hat{\ell}_{IS} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (D(\mathbf{y}^{(k)}) W(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{u}, \mathbf{v}^*)) \quad (3.37)$$

onde $\mathbf{y}^{(k)}$ é o elemento k da amostra $\mathbf{y}_{\mathbf{v}^*} = (\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)})$ retirada de $g_{VM}^*(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \mathbf{v}^*)$.

A amostragem por importância e minimização da variância permite a obtenção da função de importância g_{VM}^* que maximize a redução de variância resolvendo-se um problema de otimização. É importante notar que não há a necessidade de procedimentos sofisticados de amostragem, como na SMC condicional ou com amostragem estratificada, uma vez que f e g_{VM}^* pertencem à mesma família de funções. Entretanto, a solução numérica de (3.35) ou (3.36) pode requerer um número considerável de iterações.

Ao invés de se determinar a função de importância minimizando-se diretamente $Var_g(D(\mathbf{Y})W(\mathbf{Y}))$, esta pode ser alternativamente obtida a partir de $g^*(\mathbf{y})$ empregando-se a Entropia Relativa ou Divergência de Kullback-Leibler (Div_{KL}). Seja $g'(\mathbf{y})$ uma função densidade de probabilidade. A Entropia Relativa entre g^* e h é dada por:

$$Div_{KL}(g^*, g') = \int g^*(\mathbf{y}) \ln \left(\frac{g^*(\mathbf{y})}{g'(\mathbf{y})} \right) d\mathbf{y} \quad (3.38)$$

A expressão (3.38) pode ser reescrita como:

$$Div_{KL}(g^*, g') = \int g^*(\mathbf{y}) \ln g^*(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int g^*(\mathbf{y}) \ln g'(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (3.39)$$

Note que $Div_{KL}(g^*, g') \geq 0$, sendo zero somente se $g^*(\mathbf{y}) = g'(\mathbf{y})$. A $Div_{KL}(g^*, g')$ quantifica a dissimilaridade entre as distribuições de probabilidade g^* e g' . Portanto, a função de importância que minimiza a variância pode ser encontrada solucionando-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{g'} Div_{KL}(g^*, g') \quad (3.40)$$

Uma vez que o primeiro termo do lado direito da expressão (3.39) não depende de g' , o problema (3.40) reduz-se a:

$$\min_{g'} D_{KL}(g^*, g') = \min_{g'} \left(- \int g^*(\mathbf{y}) \ln g'(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \quad (3.41)$$

onde $-\int g^*(\mathbf{y}) \ln(g'(\mathbf{y})) d\mathbf{y}$ é a Cross-Entropia entre g^* e g' .

Se for imposta a restrição de que $g'(\mathbf{y})$ e $f(\mathbf{y})$ pertençam à mesma família de funções $\mathcal{F} = \{f(\cdot; \mathbf{v}), \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$, fazendo-se $f(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \mathbf{u})$, pode-se escrever a função $g^*(\mathbf{y})$ como:

$$g^*(\mathbf{y}) = \frac{D(\mathbf{y})f(\mathbf{y}; \mathbf{u})}{\ell} \quad (3.42)$$

Combinando-se as expressões (3.41) e (3.42) e tendo em vista que $g'(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \mathbf{v})$, obtém-se o seguinte problema de otimização:

$$\min_{\mathbf{v}} Div_{KL}(g^*, f(\mathbf{y}; \mathbf{v})) = \min_{\mathbf{v}} \left(-\frac{1}{\ell} \int D(\mathbf{y})f(\mathbf{y}; \mathbf{u}) \ln f(\mathbf{y}; \mathbf{v}) d\mathbf{y} \right) \quad (3.43)$$

Pode-se descartar ℓ em (3.43) sem prejuízo à solução do problema, pois este não depende de $\mathbf{v}$. Consequentemente, o problema de minimização (3.43) corresponde ao seguinte problema de maximização:

$$\max_{\mathbf{v}} CE(\mathbf{v}) = \max_{\mathbf{v}} \int D(\mathbf{y})f(\mathbf{y}; \mathbf{u}) \ln f(\mathbf{y}; \mathbf{v}) d\mathbf{y} \quad (3.44)$$

onde $CE(\mathbf{v}) = \int D(\mathbf{y})f(\mathbf{y}; \mathbf{u}) \ln f(\mathbf{y}; \mathbf{v}) d\mathbf{y}$.

A expressão analítica de função $CE(\mathbf{v})$ é de difícil obtenção, em geral. No lugar do problema (3.44), pode-se resolver a versão estocástica deste, dada por:

$$\max_{\mathbf{v}} \widehat{CE}(\mathbf{v}) = \max_{\mathbf{v}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D(\mathbf{y}^{(k)}) \ln f(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{v}) \quad (3.45)$$

onde $\mathbf{y}^{(k)}$ o elemento k da amostra $\mathbf{y}_u = (\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)})$ retirada de $f(\mathbf{y}; \mathbf{u})$.

Assumindo-se que $\widehat{CE}(\mathbf{v})$ é convexa e diferenciável [Rubi08], a solução de (3.45) pode ser determinada resolvendo-se o sistema de equações:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D(\mathbf{y}^{(k)}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \ln f(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{v}) = 0 \quad (3.46)$$

Na expressão (3.46) os elementos da amostra também são extraídos de $f(\mathbf{y}; \mathbf{u})$. Se vetor de parâmetros $\mathbf{v}^*$ solução de (3.44) – (3.46) estiver muito distante de $\mathbf{u}$, a busca por este poderá ocorrer com dificuldade. Tendo-se em mente que $\int D(\mathbf{y})f(\mathbf{y}; \mathbf{u}) \ln f(\mathbf{y}; \mathbf{v}) d\mathbf{y}$ pode ser escrito como:

$$CE(\mathbf{v}) = \int D(\mathbf{y})f(\mathbf{y}; \mathbf{u}) \ln f(\mathbf{y}; \mathbf{v}) d\mathbf{y} = E_u(D(\mathbf{y}) \ln f(\mathbf{y}; \mathbf{v})) \quad (3.47)$$

onde E_u é o valor esperado calculado em relação a $f(\mathbf{y}; \mathbf{u})$.

Pode-se reescrever a expressão (3.47) como:

$$\int D(\mathbf{y})f(\mathbf{y}; \mathbf{u}) \frac{f(\mathbf{y}; \mathbf{w})}{f(\mathbf{y}; \mathbf{w})} \ln f(\mathbf{y}; \mathbf{v}) d\mathbf{y} \quad (3.48)$$

Logo, $CE(\mathbf{v})$ pode ser calculada em relação a $f(\mathbf{y}; \mathbf{w})$ utilizando-se:

$$CE(\mathbf{v}) = E_w(D(\mathbf{y}) \ln f(\mathbf{y}; \mathbf{v}) W(\mathbf{y}; \mathbf{u}, \mathbf{w})) \quad (3.49)$$

Por fim, o problema (3.45) pode ser substituído pelo seguinte:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D(\mathbf{y}^{(k)}) W(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{u}, \mathbf{w}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \ln f(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{v}) = 0 \quad (3.50)$$

onde $\mathbf{y}^{(k)}$ é o elemento k da amostra $\mathbf{y}_w = (\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)})$ retirada de $f(\mathbf{y}; \mathbf{w})$.

Denomina-se $\mathbf{w}$ como vetor de parâmetros de tentativa. Este vetor permite que a implementação de soluções iterativas para (3.44) - (3.45) e que as amostras sejam, extraídas de uma fdp diferente de $f(\mathbf{y}; \mathbf{u})$, caso seja necessário.

A grande vantagem da minimização da cross-entropia em comparação a minimização da variância é a possibilidade de obtenção de soluções analíticas para a equação (3.50). Caso $g'(\mathbf{y})$ e $f(\mathbf{y})$ pertençam à família exponencial de distribuições de probabilidades (ver anexo A), a componente $\hat{v}_i$ do vetor solução de (3.50) é dada por:

$$\hat{v}_i = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{y}_i^{(k)} D(\mathbf{y}^{(k)}) W(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\sum_{k=1}^N D(\mathbf{y}^{(k)}) W(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{u}, \mathbf{w})} \quad (3.51)$$

onde $\mathbf{y}_i^{(k)}$ é a componente i de $\mathbf{y}^{(k)}$, e $\mathbf{y}^{(k)}$ é o k -ésimo elemento da amostra $\mathbf{y}_w$.

Caso $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, $W(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1$, e (3.56) se reduz a (3.57):

$$\hat{v}_i = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{y}_i^{(k)} D(\mathbf{y}^{(k)})}{\sum_{k=1}^N D(\mathbf{y}^{(k)})} \quad (3.52)$$

Com base no exposto até aqui, a Simulação de Monte Carlo por amostragem por importância e minimização da cross-entropia pode ser descrita pelos passos apresentados no algoritmo descrito no Quadro 3.5.

Procedimento MCAI-CE($N, D(\cdot), f(\cdot), \mathbf{u}, \mathbf{w}$)

Passo 1: Obter amostra aleatória $\mathbf{y}_w = (\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)})$ a partir $f(\mathbf{y}; \mathbf{w})$;

Passo 2: Obter amostra aleatória $(D(\mathbf{y}^{(1)}), \dots, D(\mathbf{y}^{(N)}))$;

Passo 3: Obter amostra aleatória $(W(\mathbf{y}^{(1)}; \mathbf{u}, \mathbf{w}), \dots, W(\mathbf{y}^{(N)}; \mathbf{u}, \mathbf{w}))$;

Passo 4: Obter $\mathbf{v}^*$ resolvendo o problema estocástico (3.50) através de (3.51);

Passo 5: Obter nova amostra aleatória $\mathbf{y}_{v^*} = (\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(N1)})$ a partir $g_{CE}^*(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \mathbf{v}^*)$;

Passo 6: Calcular $\hat{\ell}$ usando o estimador:

$$\hat{\ell}_{IS} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (D(\mathbf{y}^{(k)}) W(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{u}, \mathbf{v}^*))$$

Passo 7: Calcular o intervalo de confiança e o erro relativo de acordo com as expressões (3.7) e (3.11);

Quadro 3.5 –Monte Carlo com Amostragem por Importância e Cross-Entropia

Os passos de 1 – 4 podem ser repetidos com o objetivo de refinar a estimativa dos parâmetros ótimos, fazendo ao fim do passo 4 de cada iteração $\mathbf{w}^{(t)} = \hat{\mathbf{v}}^{(t-1)}$, onde t é um contador do número de repetições. Entretanto, para problemas de grande dimensão convém realizar as etapas 1 – 4 poucas vezes, pois o procedimento tende a ser instável. No passo 5 do procedimento convém utilizar um número de amostras maior do que o empregado no passo 1.

3.6.4 Degeneração da razão de verossimilhança

O estimador de amostragem por importância é sensível à dimensão d do vetor variável aleatória $\mathbf{Y}(d \times 1)$ que representa os estados sorteados do sistema. Conforme d aumenta, o peso de correção $W(\mathbf{Y})$ degenera-se, tornando-se distorcido de tal forma que assume valores próximos de zero com alta probabilidade e valores elevados com probabilidade baixa, porém significativa [Rubi08]. A consequência da degeneração de $W(\mathbf{Y})$ é o funcionamento precário da técnica de amostragem por importância.

Nesta Tese, emprega-se o Método de Rastreio ou *Screening Method* [Rubi08], para prevenir ou atenuar a degeneração de $W(\mathbf{Y})$. Basicamente, o método identifica os parâmetros de referência que diferem substancialmente dos respectivos parâmetros nominais. A estes parâmetros dá-se o nome de parâmetros-gargalo ou *bottleneck*, sendo estes associados aos eventos mais influentes no comportamento a ser estudado via SMC. Os parâmetros não classificados como gargalo são fixados em seus valores nominais, ajustando-se pela técnica de amostragem por importância apenas os parâmetros-gargalo. Com este procedimento, reduz-se a o número de variáveis que afetam o comportamento de $W(\mathbf{Y})$, tornando-a menos ruidosa e atenuando sua degeneração.

Considere $\mathbf{Y} \sim f(\mathbf{y}; \mathbf{u})$ e a função de importância $g(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \mathbf{v}^*)$, sendo f e g pertencentes a mesma família de fdps $\mathcal{F} = \{f(\cdot; \mathbf{v}), \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$. Os parâmetros-gargalo podem ser identificados probabilisticamente calculando-se para cada parâmetro $v_i^* \in \mathbf{v}^*$ a variação relativa δ_i , dada por:

$$\delta_i = \frac{v_i^* - u_i}{v_i^*} \quad (3.53)$$

Se $\delta_i \geq \epsilon$, onde ϵ é a tolerância empregada, classifica-se o parâmetro i como parâmetro-gargalo. Considere $\Omega_{PG} \subset \{1, \dots, d\}$ o conjunto de índices dos parâmetros-gargalo e $\overline{\Omega_{PG}}$ seu conjunto complementar. Fixando-se os parâmetros não-gargalo em seus valores nominais, o peso de correção W_B é dado por:

$$W_B(\mathbf{y}_B; \mathbf{u}_B, \hat{\mathbf{v}}_B) = \frac{f_B(\mathbf{y}_B; \mathbf{u}_B)}{f_B(\mathbf{y}_B; \mathbf{v}_B^*)} \quad (3.54)$$

O subscrito B em $\mathbf{y}_B$, $\mathbf{u}_B$ e $\mathbf{v}_B^*$ indica que estes vetores são formados pelos elementos de $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}^*$, respectivamente, cujos índices pertencem a Ω_{PG} . A fdp marginal de $\mathbf{y}_B$ é f_B . Como os parâmetros não gargalo tem seus valores fixados em seus valores nominais, o número de variáveis que influenciam o peso de correção W_B é menor, o que

o torna menos suscetível a ruídos que venham a ocorrer durante a determinação da função de importância. Além disso, o menor número de variáveis resulta em diminuição da degeneração do peso de correção [Rubi08].

Vale ressaltar que os vetores $\hat{\mathbf{v}}_B$ e $\mathbf{u}_B$ contém somente os parâmetros-gargalo, e o vetor de parâmetros e de estado possuem o mesmo tamanho. Este último fato é consequência da suposição, realizada pela técnica, de que a fdp de cada componente de $\mathbf{Y}$ pertence à uma família exponencial de funções parametrizadas somente pela média [Rubi08]. O estimador de amostragem por importância, utilizando-se o peso de correção W_B , é dado por:

$$\hat{\ell}_{scr} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(D(\mathbf{y}^{(k)}) W_B(\mathbf{y}_B^{(k)}; \mathbf{u}_B, \mathbf{v}'_B) \right) \quad (3.55)$$

onde $\mathbf{y}^{(k)}$ é o elemento k da amostra $\mathbf{y}_{v'}$, e $\hat{\ell}_{scr}$ é o estimador de amostragem por importância e rastreo.

A amostra $\mathbf{y}_{v'} = (\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)})$ é extraída de $f(\mathbf{y}; \mathbf{v}')$, sendo $\mathbf{v}'$ formado pelos valores nominais dos parâmetros não-gargalo e pelos últimos valores de referência encontrados para os parâmetros-gargalo. Como base no exposto acima, o Método de Rastreo pode ser aplicado à simulação de Monte Carlo com amostragem por importância e cross-entropia através dos passos indicados no procedimento do Quadro 3.6.

Comparando-se os algoritmos apresentados nos Quadros 3.5 e 3.6, observa-se à primeira vista que o uso da técnica de rastreo implicará em maior esforço computacional. Todavia, este aumento é sobrepujado pela redução de variância alcançada em virtude da não degeneração de $W(\mathbf{Y})$, como pode ser observado nos exemplos descritos em [Rubi08].

Nos passos 2-7 do algoritmo apresentado no Quadro 3.6, o cálculo das variações relativas é realizado repetidas vezes. Adota-se este procedimento para atenuar o efeito da amostra nas variações relativas. Repare que a cada repetição o número de parâmetros-gargalo não cresce. Além disso, o passo 6.2 assegura que apenas os parâmetros cuja variação relativa é significativa na maioria das M repetições sejam considerados como gargalo no fim do processo.

O método também pode ser aplicado ao Monte Carlo com amostragem por importância e minimização da variância, bastando-se substituir o problema (3.46) por (3.37) no passo 4.

Procedimento MCAI-CER($N, N1, D(\cdot), f(\cdot), \mathbf{u}$)

Passo 1 Definir como conjunto gargalo $\Omega_{PG}^0 = \{1, \dots, d\}$, iniciar $t = 0$;

Passo 2 Obter amostra aleatória $\mathbf{y}_u = (\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)})$ a partir $f(\mathbf{y}; \mathbf{u})$;

Passo 3 Obter amostra aleatória $(D(\mathbf{y}^{(1)}), \dots, D(\mathbf{y}^{(N)}))$;

Passo 4 Obter $\hat{\mathbf{v}}^{(t)}$ resolvendo-se o problema estocástico (3.46) para $\mathbf{w} = \mathbf{u}$;

Passo 5 Obter as variações relativas de cada parâmetro $(\delta_1^{(t)}, \dots, \delta_d^{(t)})$ usando a expressão (3.53);

Passo 6 Para cada parâmetro:

Passo 6.1 Se $\delta_1^{(t)} < \epsilon$, então declarar o parâmetro como não-gargalo e fazer $\hat{v}_1^{(t)} = u_i$ e remover o índice i do conjunto Ω_{PG}^t ;

Passo 6.2 Se $\delta_1^{(t)} \geq \epsilon$, então declarar o parâmetro como gargalo;

Passo 7 Repetir M vezes os passos 2-6, fazendo-se a cada repetição $\Omega_{PG}^{t+1} = \Omega_{PG}^t$ e $t = t + 1$;

Passo 8 Construir o vetor $\mathbf{v}'$ a partir de $\hat{\mathbf{v}}^{(M)}$ e $\mathbf{u}$, fazendo-se $v'_i = v_i^*$, para $i \in \Omega_{PG}^M$ e $v'_i = u_i$, se $i \notin \Omega_{PG}^M$;

Passo 9 Obter amostra aleatória $\mathbf{y}_{v'} = (\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}, \dots, \mathbf{y}^{(N1)})$ a partir $f(\mathbf{y}; \mathbf{v}')$;

Passo 10 Obter amostra aleatória $(D(\mathbf{y}^{(1)}), \dots, D(\mathbf{y}^{(N1)}))$;

Passo 11 Obter valor de $\hat{\ell}_{scr}$ utilizando (3.55);

Passo 12 Calcular o intervalo de confiança e o erro relativo de acordo com as expressões (3.7) e (3.11);

Quadro 3.6 –Método de Monte Carlo com Amostragem por Importância e Rastreo

3.8 Conclusões

Este capítulo apresentou de forma breve os aspectos teóricos e básicos da simulação de Monte Carlo. As técnicas de amostragem condicionada, estratificada e amostragem por importância foram mostradas. As duas primeiras constituem exemplos de incorporação do conhecimento sobre o sistema a ser simulado por meio de uma variável aleatória auxiliar que, condicionando-se os estados sorteados a esta, resulta na redução da variância de ℓ . Ambos os métodos esbarram na dificuldade de se obter tal variável aleatória auxiliar, tendo aplicação limitada.

Como alternativa a estes, foi extensamente apresentado o método de amostragem por importância, empregado nas simulações de Monte Carlo realizadas nesta Tese. Nesta técnica, o conhecimento sobre o sistema é inserido na simulação através da função de importância, a partir do qual os estados são sorteados. A função de importância prioriza os eventos com maior relação com o comportamento estudado, o que acaba por diminuir a variabilidade de ℓ . Esta função é obtida por meio da otimização da variância de ℓ , seja diretamente ou através da minimização da cross-entropia.

A amostragem por importância e cross-entropia, para funções densidade de probabilidade pertencentes à família exponencial de funções, permite a determinação da função de importância analiticamente, sendo preferível à minimização da variância nestes casos. De maneira geral, a amostragem por importância, é sensivelmente afetada pela dimensionalidade do vetor de estado, podendo este problema ser contornado em parte, utilizando-se método de rastreamento, apresentado na última seção.

É importante destacar que os métodos apresentados não se destinam à simulação de eventos raríssimos, tendo performances razoáveis nestes casos. Este fato foi contornado nesta Tese aumentando-se o número de amostra das simulações. Entretanto, técnicas de simulação para estes casos existem na literatura [Rubi08].

Capítulo 4

Metodologia Proposta

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta a metodologia proposta para avaliação da capacidade de observação do estado operativo proporcionada por um sistema de medição. Trata-se de um novo enfoque para avaliar o que se pode esperar do desempenho da função estimação de estado no seu papel de ferramenta essencial para a supervisão de sistemas elétricos de potência.

Conforme apresentado no Capítulo 2, a eficácia da EE em suas tarefas depende do nível de redundância dos dados disponíveis. As análises de observabilidade e criticalidade têm por finalidade verificar, para um certo nível de redundância do sistema de medição, a possibilidade da execução do processo de estimação de estado e do tratamento de erros nos dados. Contudo, tais análises são usualmente realizadas de forma não integrada e para situações específicas, não sendo adequadamente representados os diferentes cenários aos quais a função EE pode estar submetida. Tais cenários podem corresponder, por exemplo, a situações nas quais o sistema de medição e a topologia da rede apresentam diferentes configurações, em função de indisponibilidades de medidores e componentes da rede, o que naturalmente ocorre ao longo do tempo e é inerente à própria operação do sistema de potência.

Há, portanto, a necessidade de uma análise integrada da capacidade de observação de um sistema de potência pela função EE, que leve em consideração aspectos como observabilidade e processamento de erros grosseiros, para as diferentes situações que a EE pode estar sujeita. A representação adequada de tais condições permite a revelação dos riscos e limitações da EE para a supervisão de um dado sistema de potência. Tais riscos e limitações não são externados pelas análises de observabilidade e criticalidade tradicionalmente realizadas

Nas seções subsequentes será abordada a forma como os diferentes aspectos que afetam o desempenho da função EE são considerados neste trabalho, bem como apresentada a modelagem adotada para representar a diversidade de cenários a serem

supervisionados. Finalmente, índices que descrevem a capacidade de observação pela EE são propostos.

4.2 Capacidade de Observação de um Sistema de Medição

Considere a rede elétrica e as diferentes alternativas de sistemas de medição, A, B, C, e D, apresentadas na Figura 4.1. Segundo a análise de observabilidade, o sistema A é não-observável, ao contrário dos sistemas B, C, e D. Intui-se, por exame da Figura 4.1, que há diferenças de desempenho da EE entre os três sistemas observáveis. A análise de criticalidade confirma parcialmente isto identificando no sistema B a presença de duas medidas críticas, não sendo constatados C_{meds} e C_{conjs} nos demais sistemas. Inspeccionando-se ainda a Figura 4.1, pode-se verificar que os planos de medição C e D tem configuração de medições diferentes, o que resulta em prováveis comportamentos distintos da EE para os dois casos. O sistema C por exemplo, em uma eventual indisponibilidade de medidas, é mais propenso à não-observabilidade do que o sistema D. O plano de medição D por sua vez é menos vulnerável à presença de dados espúrios do que o sistema C. Em suma: os sistemas C e D, embora idênticos do ponto de vista da observabilidade e criticalidade, apresentam comportamentos díspares em situações de alterações na rede elétrica e do sistema de medição, bem como quanto ao processamento de erros grosseiros.

Os sistemas A – D, se avaliados com base no atendimento aos requisitos de observabilidade, robustez e confiabilidade, podem ser melhor caracterizados em relação ao que se pode esperar do desempenho da EE. É possível observar que o plano de medição em A não atende a nenhum dos requisitos, enquanto aquele em B atende apenas o requisito de observabilidade na situação retratada na Figura 4.1. Embora os requisitos de observabilidade e confiabilidade (considerando a ocorrência de um erro grosseiro) sejam igualmente acatados pelos planos de medição em C e D, tais planos atendem com intensidades distintas ao requisito de robustez. É importante notar que a força com que este requisito é cumprido, todavia, não pode ser inferida sem que seja adequadamente representada as outras situações às quais tais sistemas podem estar submetidos, considerando a disponibilidade de medidas, UTRs e elementos da rede, bem como a possibilidade de ocorrência de erros grosseiros múltiplos.

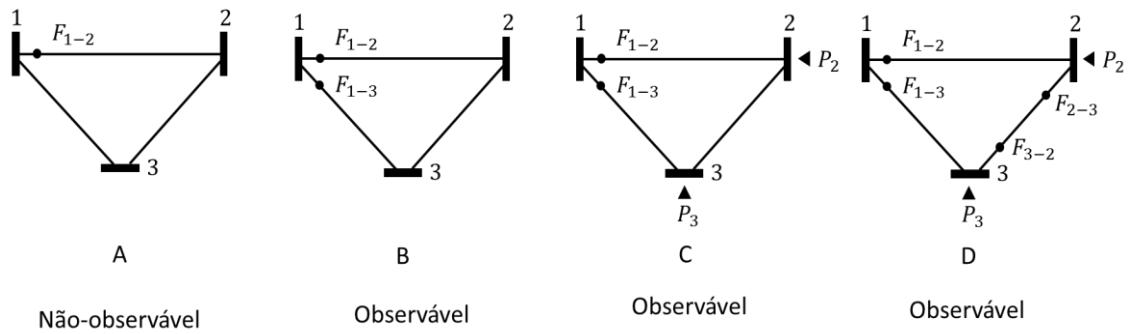


Figura 4.1 – Propostas de planos de medição

A capacidade de observação do estado operativo pode ser vista como o grau de atendimento, por parte do plano de medidas, aos requisitos de robustez, observabilidade, e confiabilidade da EE. Para o conhecimento da capacidade de observação, é necessária a avaliação da observabilidade e da possibilidade de depuração de erros grosseiros em diferentes cenários de operação, levando em consideração situações onde há indisponibilidade temporária de medidas e/ou de elementos da rede. A avaliação da capacidade observação envolve, portanto, o estudo das criticalidades apresentadas no Capítulo 2, devendo ser analisadas, para um determinado plano de medidas, as seguintes criticalidades:

- A. Criticalidades de medidas – Ck-meds;
- B. Criticalidades de Unidades de Medição – Ck-UMs;
- C. Criticalidades de ramos da rede – Ck-ramos;

A Tabela 4.1 apresenta um resumo das criticalidades de medidas e seu efeito no processo de estimação. Tabelas similares podem ser construídas para as criticalidades de ramos. De forma a ilustrar a caracterização da capacidade de observação em função das criticalidades, considere novamente os sistemas de medição da Figura 4.1. É possível concluir que o sistema D tem maior capacidade de observação que o sistema de medição C pelo fato do mesmo ter tuplas críticas de medidas cardinalidade quatro e cinco, enquanto o sistema C possui tuplas críticas de medidas de cardinalidade 3.

Embora ambos os sistemas sejam observáveis e capazes de tratar erros grosseiros simples, o sistema de medição D tende a ter mais sucesso no tratamento de erros grosseiros múltiplos e no atendimento aos requisitos de observabilidade e confiabilidade no caso de indisponibilidade de medidas e/ou de alterações topológicas da rede.

Tabela 4.1 – Sumário das criticalidades de medida.

Ck-tupla	Descrição	Propriedades Numéricas	Processamento de EGs	
			Deteção	Identificação
C1	Medida essencial à EE cuja ausência torna a rede não observável;	O resíduo de C1 e seu desvio padrão são iguais a zero.	Não	---
C2	Par de medidas redundantes, 100% correlacionadas. A indisponibilidade de uma medida torna a remanescente C1. A indisponibilidade de ambas torna a rede não observável.	Os resíduos normalizados das medidas em um C2 são idênticos. O coeficiente de correlação entre os resíduos normalizados de medidas em um C2j é um.	Sim	Não
C3	O trio redundante cuja indisponibilidade torna a rede não observável. A remoção de uma medida do trio torna as remanescentes C2 enquanto a remoção de duas torna a restante C1;	As colunas da matriz de covariância dos resíduos referentes ao C3 são linearmente dependentes.	Sim	Sim, para EG simples em C3; Não, para 2 ou 3 EGs em C3;
Ck	Grupo de k medidas cuja indisponibilidade de todas em simultâneo torna a rede não observável. A indisponibilidade de j medidas torna as restantes C(k-j).	As colunas da matriz de covariância dos resíduos referentes ao Ck são linearmente dependentes.	Sim	Sim, para até (k-2) EGs em Ck; Não, até (k-1) ou k EGs em Ck;

A capacidade de observação do estado operativo pode ser avaliada enumerando-se as criticalidades presentes no sistema de medição. Tal procedimento é computacionalmente oneroso, pois as criticalidades, que podem ser muitas, devem ser determinadas através de buscas combinatórias. Alternativamente, pode-se avaliar a capacidade de observação através de indicadores que refletem a adequação do plano de medição para fins de EE, sem que seja necessário identificar todas as criticalidades presentes. A Figura 4.2 ilustra a forma proposta para avaliação da capacidade de observação neste trabalho, envolvendo a análise de criticalidades e o cômputo de índices probabilísticos. Na análise de criticalidades, serão consideradas as criticalidades de medida, de ramos da rede e de unidades de medição. Para tal análise são propostos métodos que empregam propriedades numéricas e topológicas das criticalidades, as quais foram apresentadas no Capítulo 2. Os índices propostos para avaliação da capacidade de observação serão obtidos em função das criticalidades e considerando a representação dos diferentes cenários que devem ser supervisionados utilizando a função EE. Os métodos propostos para análise de criticalidades, representação da diversidade de cenários para supervisão e obtenção dos indicadores da capacidade de observação serão descritos nas seções seguintes.



Figura 4.2 – Avaliação da Capacidade de Observação do Estado Operativo.

4.3 Análise de Criticalidades para a EE

Como mostrado na Figura 4.2, para a avaliação da capacidade de observação é importante conhecer as criticalidades presentes, ou seja, as tuplas críticas de medidas, unidades de medição e ramos da rede elétrica. Tal processo envolve a solução de problemas combinatórios de elevada dificuldade, devido ao vasto espaço de soluções. Nesta seção são propostos métodos para a identificação de criticalidades de medidas, unidades de medição e ramos da rede. Inicialmente é apresentado um método para identificação de criticalidades de baixa cardinalidade, sendo posteriormente mostrado um procedimento que emprega o método *Branch-and-Bound* para a identificação de criticalidades de qualquer cardinalidade. Os métodos propostos são apresentados em detalhe para a identificação de criticalidades de medidas e então generalizados para a identificação de criticalidades de unidades de medição e de ramos da rede.

4.3.1 Criticalidades de medidas

Para um sistema contendo m medidas, um procedimento explícito de enumeração precisaria efetuar 2^{m-1} testes para determinar todas as k -tuplas críticas do sistema de medição. Consequentemente, se a enumeração é realizada desconhecendo-se as propriedades das k -tuplas críticas, o número de tuplas a serem verificadas cresce exponencialmente com a dimensão e redundância global do sistema de medição.

As Cmeds e Cconjs foram extensivamente estudadas ao longo do Capítulo 2, por estarem associadas a condições de redundância local muito críticas. Foram desenvolvidos eficientes métodos de contagem das medidas e pares críticos, fundamentados nas propriedades numéricas e topológicas da EE. Entretanto, para tuplas críticas de cardinalidade mais alta, não existem procedimentos de identificação que possam fazer uso de propriedades simples e conhecidas.

Os trios críticos de medidas ou C3-tuplas são as condições críticas imediatamente superiores à ocorrência de Cconjs (formados por C2-tuplas) na rede. Portanto, representam condições de perda iminente da capacidade de identificação de EGs. No Capítulo 2 foi visto que a indisponibilidade de j medidas participantes de uma mesma Ck-tupla reduz sua cardinalidade para $k-j$. Aplicando este raciocínio no caso dos trios críticos, segue-se que a remoção de uma medida participante de uma C3-tupla leva as medidas remanescentes a formarem C2-tuplas, o que se manifesta na EE como a formação de novos Cconjs. Baseado nisto, se porventura uma medida redundante (isto é, nem crítica e tampouco pertencente a Cconj) é temporariamente tornada indisponível

e sua ausência levar ao surgimento de novos Cconjs, então os pares de medidas dos Cconjs recém-formados, juntamente com a medida feita indisponível, constituem trios críticos. Esta constatação levou à construção do algoritmo de identificação de tuplas críticas de medidas até cardinalidade três, o qual será descrito a seguir.

1) Identificação de Trios Críticos

Os passos que compõem o algoritmo são apresentados na Figura 4.3. O algoritmo se inicia com a identificação das medidas críticas e das medidas participantes de pares críticos. Diferentes procedimentos para tal existem na literatura, sendo utilizado nesta Tese o método numérico desenvolvido em [Cout07] e descrito no Capítulo 2. As medidas não listadas nesta etapa como Cmeds ou participantes de Cconjs compõem a lista de medidas redundantes, **Lred**. A medida redundante z_r é removida de **Lred** e tornada temporariamente indisponível no sistema de medição, sendo então verificada a formação de novos Cconjs. Em caso afirmativo, cada par crítico pertencente aos novos Cconjs forma um trio crítico com z_r , sendo armazenado na lista **Ltripla**. A medida z_r é tornada novamente disponível e uma nova medida redundante é removida de **Lred** para identificação de outros trios críticos. Repete-se este processo até que todas as medidas redundantes contidas em **Lred** tenham sido efetivamente testadas ou seja, **Lred** esteja vazia.

O algoritmo proposto identifica todos os trios críticos de medidas em m_r passos, onde m_r é número de medidas redundantes, tendo, portanto, custo linear. A determinação dos trios críticos por enumeração bruta, por sua vez, tem custo computacional $O(m_r^3)$.

É importante notar que o algoritmo proposto efetua a contagem de Ck-tuplas até cardinalidade 3, uma vez que as C1- e C2-tuplas são determinadas nas etapas iniciais do procedimento. Assim sendo, o método proposto permite determinar, de uma única vez e de forma computacionalmente atrativa, as condições de perda iminente de observabilidade e da capacidade de detecção e identificação de EGs simples.

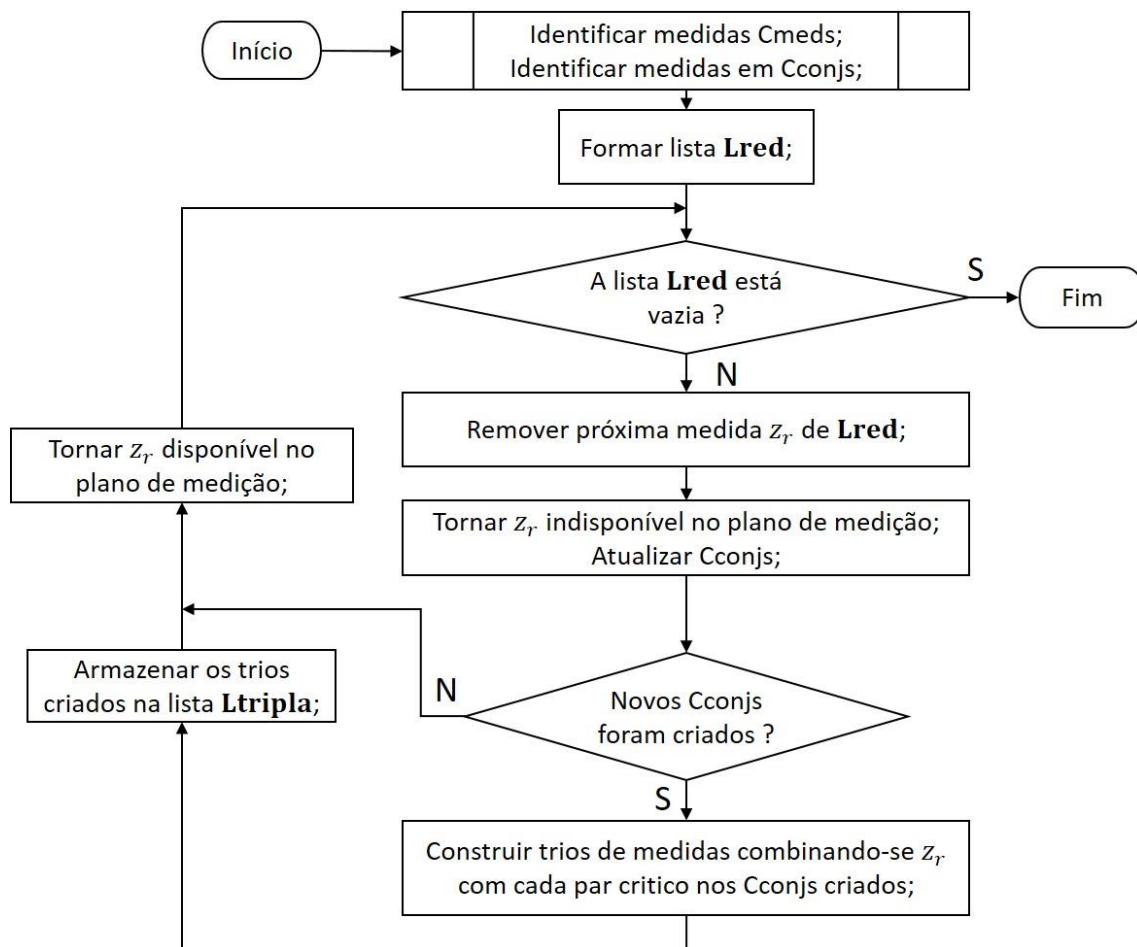


Figura 4.3 – Algoritmo de identificação de tuplas críticas até ordem 3.

O procedimento acima não é extensível para cardinalidades superiores a 3, pois pares críticos resultantes da indisponibilidade de $k - 2$ medidas não formam, necessariamente, k -tuplas críticas com as medidas tornadas ausentes. Como exemplo, considere a tentativa de obtenção de uma quádrupla crítica. Se forem tornadas temporariamente indisponíveis duas medidas e atestada a formação de novos Cconjs, existem duas situações igualmente possíveis: as medidas ausentes podem participar conjuntamente de uma quádrupla crítica ou comporem separadamente dois trios críticos. Assim sendo, seriam necessários complicados e computacionalmente custosos processos de validação das k -tuplas desta forma construídas.

O procedimento anterior representa um avanço na identificação de criticalidades. Contudo, não se obtém a partir deste um procedimento geral para contagem de C_k -tuplas. Tais procedimentos são interessantes por permitirem o entendimento do impacto da indisponibilidade de diferentes agrupamentos de medidores do plano de medição. Não são conhecidas, até o presente momento, técnicas que efetivamente executem esta tarefa, sendo a enumeração explícita das k -tuplas a única alternativa disponível.

Entretanto, a elevada quantidade de combinações a testar torna o processo enumerativo inviável, mesmo para cardinalidades baixas.

Uma característica importante do algoritmo proposto para identificação de trios críticos é a enumeração implícita das combinações de medidas realizada por este. Repare que o método descarta, sem sequer testar a criticalidade, combinações de medidas contendo Cmeds ou pares de medidas em um Cconj. Adicionalmente, o método substitui o problema de contagem dos trios críticos por diversos subproblemas de identificação de Cconjs, empregando, portanto, tanto a estratégia de divisão-e-conquista quanto aquela de relaxação na solução do problema de enumeração. Estas constatações sugerem que o algoritmo de identificação de C3-tuplas tem características de um procedimento de *Branch-and-Bound* (BB). Conforme será ilustrado a seguir, tais características permitem o uso do método de BB para a contagem geral das Ck-tuplas.

Utilizando-se as propriedades apresentadas no Capítulo 2, pode-se formular para o problema combinatório de contagem de Ck-tuplas aquele de otimização inteira cujas soluções correspondam às tuplas procuradas. Considere um sistema de medição contendo m medidas e representado pelo conjunto $\Omega_Z = \{z_1, \dots, z_m\}$. Se $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$ é uma tupla de medidas deste plano de medição, representa-se esta por meio do vetor binário $\mathbf{tu}(m \times 1)$, dado por:

$$tu_i = \begin{cases} 0, & z_i \in \mathbf{z}(\mathbf{tu}) \\ 1, & z_i \notin \mathbf{z}(\mathbf{tu}) \end{cases}, 1 \leq i \leq m \quad (4.1)$$

onde tu_i é o elemento i do vetor $\mathbf{tu}$; e z_i corresponde a i -ésima medida do plano de medição Ω_Z .

As medidas que integram a tupla $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$ são indicadas pelos elementos nulos do vetor $\mathbf{tu}$, sendo a cardinalidade da tupla, portanto, igual ao número de elementos nulos deste. As medidas componentes de uma tupla qualquer $\mathbf{z}(\mathbf{tv})$ podem ser indicadas através do vetor binário $\mathbf{tv}(m \times 1)$, também construído conforme a expressão (4.1. A relação $\mathbf{tv} > \mathbf{tu}$ estabelece que $tv_i \geq tu_i$, $i = 1, \dots, m$ e $tv_j > tu_j$ para pelo menos ao um elemento tv_j de $\mathbf{tv}$. Se a tupla $\mathbf{z}(\mathbf{tv})$ é uma sub-tupla de $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$ então $\mathbf{tv} > \mathbf{tu}$. Por outro lado, se $\mathbf{z}(\mathbf{tv})$ é uma super-tupla de $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$ então $\mathbf{tv} \leq \mathbf{tu}$.

Uma k-tupla crítica de medidas, não pode conter outra de cardinalidade inferior. Além disso, a matriz formada pelas linhas e colunas da matriz de covariância dos resíduos $\mathbf{E}$, referentes às medidas de uma Ck-tupla, é singular.

Portanto, se a tupla $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$ é crítica, então são válidas para esta as seguintes relações:

$$\det(\mathbf{E}_{\mathbf{tu}}) = 0 \quad (4.2)$$

$$nz(\mathbf{tu}) = \sum_{i=1}^m (1 - tu_i) = k \quad (4.3)$$

$$\det(\mathbf{E}_{\mathbf{tv}}) > 0, \quad \forall \mathbf{tv} > \mathbf{tu} \quad (4.4)$$

onde $nz(\mathbf{tu})$ é o número de elementos nulos do vetor $\mathbf{tu}$; $\mathbf{E}_{\mathbf{tu}}(k \times k)$ é a matriz formada pelas linhas e colunas de $\mathbf{E}$ associadas às medidas da k-tupla $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$, sendo $\mathbf{E}_{\mathbf{tv}}$ a matriz formada pelas linhas e colunas de $\mathbf{E}$ associadas às medidas da sub-tupla $\mathbf{z}(\mathbf{tv})$.

As relações (4.2) e (4.3) afirmam que a cardinalidade de $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$ é k e que sua ausência do plano de medição torna rede não observável. A condição (4.5) garante que nenhuma sub-tupla $\mathbf{z}(\mathbf{tv})$ de $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$ seja crítica. Para clarificar o exposto anteriormente, considere o sistema-exemplo de 3 barras apresentado na Figura 4.4, onde o conjunto de medidas é $\Omega_Z = \{P_{1-2}, P_{1-3}, P_2, P_3\}$.

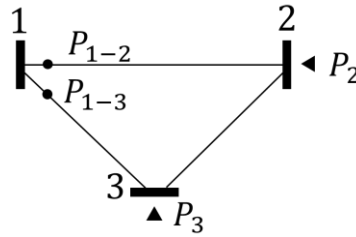


Figura 4.4 – Sistema-exemplo de 3 barras.

Se $\mathbf{tu}$ indica o trio crítico $\mathbf{z}(\mathbf{tu}) = (P_{1-3}, P_2, P_3)$ tem-se pelo anteriormente exposto que $\mathbf{tu} = (1,0,0,0)$. A Tabela 4.2 apresenta os vetores $\mathbf{tv}_i$ que satisfazem a relação $\mathbf{tv}_i > \mathbf{tu}$ e as tuplas de medidas correspondentes a estes. Observa-se que todas as tuplas listadas correspondem a sub-tuplas de $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$. Inspeccionando-se a Figura 4.4, observa-se que a ausência de $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$ torna a rede não-observável. Consequentemente, $\det(\mathbf{E}_{\mathbf{tu}}) = 0$. Como a rede se mantém observável caso uma das tuplas indicadas na Tabela 4.2 se torne indisponível, então $\det(\mathbf{E}_{\mathbf{tv}}) > 0$ para todas as tuplas mostradas na tabela. Adicionalmente, nenhuma sub-tupla de $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$ pode ser crítica o que permite afirmar que $\mathbf{z}(\mathbf{tu}) = (P_{1-3}, P_2, P_3)$ é um trio crítico.

Tabela 4.2 – Sub-tuplas de medidas de $\mathbf{z}(\mathbf{tu}) = (P_{1-3}, P_2, P_3)$.

i	$tv_i > tu$	$\mathbf{z}(tv_i)$
1	(1,1,0,0)	(P_2, P_3)
2	(1,0,1,0)	(P_{1-3}, P_3)
3	(1,0,0,1)	(P_{1-3}, P_2)
4	(1,1,1,0)	(P_3)
5	(1,1,0,1)	(P_2)
6	(1,0,1,1)	(P_{1-3})
7	(1,1,1,1)	$(\emptyset)$

Repare no exemplo anterior que as condições (4.2) - (4.4) são atendidas para a tupla crítica $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$ sendo, portanto, adequadas para caracterizar matematicamente as Ck-tuplas críticas. Tendo em vista a modelagem apresentada, se uma tupla $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$ é crítica, então vetor $\mathbf{tu}$ que a indica é uma das soluções do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } f_{obj}(\mathbf{tu}) = |\det(\mathbf{E}_{tu})| \\
 &\text{Sujeito a} \\
 &\det(\mathbf{E}_{tv}) > 0, \forall \mathbf{tv} > \mathbf{tu} \\
 &tu_i \in (0,1), i = 1, \dots, m \\
 &tv_i \in (0,1), i = 1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Note que o menor valor absoluto para $\det(\mathbf{E}_{tu})$ é zero. Logo, se a tupla $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$ indicada por $\mathbf{tu}$, atende as condições (4.2) – (4.4), então o conjunto de restrições em (4.5) é satisfeito e a função-objetivo do problema é mínima, o que permite concluir que o vetor $\mathbf{tu}$ a solução ótima de (4.5).

2) Algoritmo *Branch-and-Bound*

O problema (4.5) é um problema de otimização inteira não-linear, podendo ser resolvido empregando-se técnicas de programação inteira, entre elas o método de *Branch-and-Bound* [Bala68], [Mitt70]. Esta técnica enumera implicitamente as soluções de um problema inteiro, descartando, sem sequer avaliar, as porções do espaço de busca nas quais se garante que a solução ótima não está presente.

Para resolver um problema, o método divide o espaço de busca a este associado, sendo resolvidas relaxações do problema em cada subespaço gerado. Quando a solução encontrada para um subproblema é ótima, não se divide o subespaço correspondente a este. Caso contrário, tal subespaço é partido. Além disso, calcula-se os limites inferior e superior da função-objetivo para cada subconjunto/subproblema. Estes permitem resolver de forma simplificada os subproblemas e seguramente desprezar as soluções candidatas que não sejam as ótimas.

A técnica *Branch-and-Bound* em um problema inteiro envolve obrigatoriamente a aplicação de duas operações:

- Ramificação (*branching*): divide o problema $\mathcal{P}$ em subproblemas $\mathcal{SP}_1, \dots, \mathcal{SP}_q$. Conforme previamente mencionado, isto é realizado partindo-se o espaço de busca.
- Limitação (*bouding*): determina os valores mínimo e máximo que a função objetivo assume no espaço de soluções associado a um problema;

A construção de um método BB para problema (4.5) requer a especificação destes componentes, o será feito a seguir.

Para a construção do procedimento de ramificação, deve-se primeiramente caracterizar o espaço de busca de forma adequada. Considere o conjunto $\mathcal{S}(\mathbf{tu}) = \{\mathbf{z}(\mathbf{tv}) | \mathbf{tv} \leq \mathbf{tu}\}$. A relação $\mathbf{tv} \leq \mathbf{tu}$ obriga que a tupla $\mathbf{z}(\mathbf{tv})$ seja uma super-tupla de $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$. Logo, as tuplas $\mathbf{z}(\mathbf{tv})$ em $\mathcal{S}(\mathbf{tu})$ contém, pelo menos, todas as medidas de $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$. Por exemplo, considere o conjunto $\mathcal{S}(\mathbf{tu})$ indicado na Figura 4.5. Os vetores que satisfazem a relação $\mathbf{tw} \leq \mathbf{tu} = (1,1,1,0)$ são mostrados dentro da elipse à esquerda. Note que as tuplas associadas a estes vetores são super-tuplas de $\mathbf{Z}(\mathbf{tu}) = (P_3)$. Se $\mathbf{z}(\mathbf{tu}_0)$ é a tupla de medidas indicada pelo vetor binário $\mathbf{tu}_0$, pode-se reescrever o problema (4.5) em função de $\mathcal{S}(\mathbf{tu}_0)$ como:

$$\text{Minimizar } f_{obj}(\mathbf{tu}) = |\det(\mathbf{E}_{\mathbf{tu}})|$$

Sujeito a

$$\det(\mathbf{E}_{\mathbf{tv}}) > 0, \forall \mathbf{tv} > \mathbf{tu} \quad (4.6)$$

$$tv_i \in (0,1), i = 1, \dots, m$$

$$tu_i \leq u_{0i}, i = 1 \dots, m$$

onde tu_i , tv_i e tu_{0i} são elementos i dos vetores $\mathbf{tu}$, $\mathbf{tv}$ e $\mathbf{tu}_0$, respectivamente.

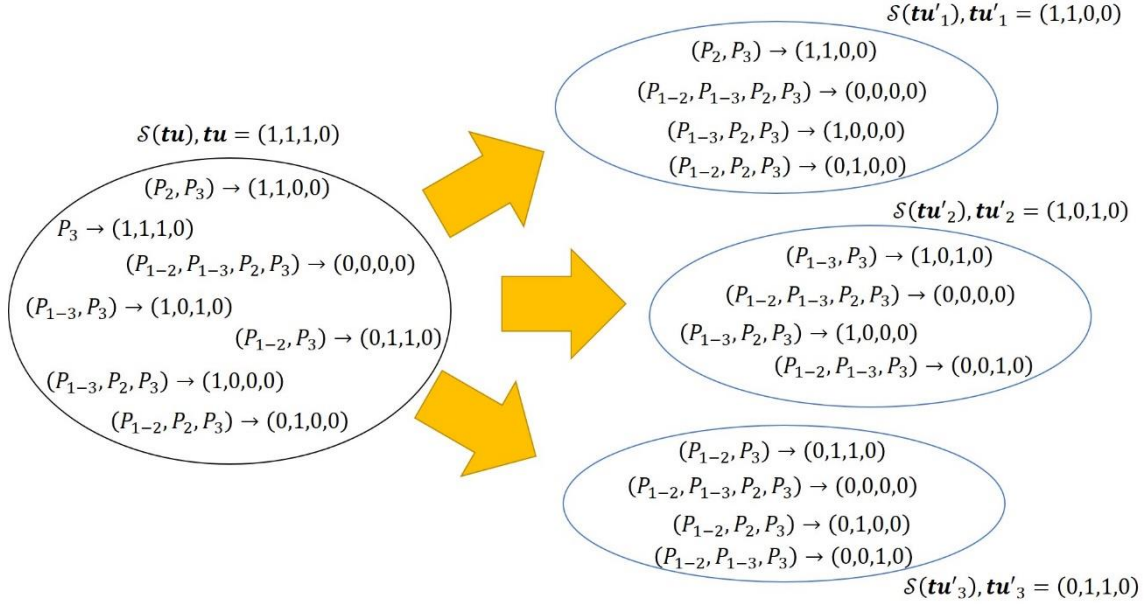


Figura 4.5 – Operação de Ramificação proposta.

Sendo o espaço de busca em (4.6) a coleção de vetores $\mathbf{tu} \in \mathcal{T} = \{\mathbf{tu} | \mathbf{tu} \leq \mathbf{tu}_0\}$, conclui-se que as tuplas indicadas por estes pertencem ao conjunto $\mathcal{S}(\mathbf{tu}_0)$. É importante notar que se fazendo $\mathbf{tu}_0 = (1, \dots, 1)$, $\mathcal{S}(\mathbf{tu}_0)$ corresponderá ao conjunto de todas as combinações de medidas de Ω_Z . Logo, o problema (4.6) e (4.5) se tornam equivalentes. Por outro lado, se $\mathbf{tu}_0 \neq (1, \dots, 1)$, as k-tuplas críticas indicadas pelas soluções ótimas (quando existirem) de (4.6) conterão todas as medidas constituintes da tupla $\mathbf{z}(\mathbf{tu}_0)$.

Para dividir o espaço de busca em (4.6), constrói-se a partir de $\mathbf{tu}_0$ os vetores $\mathbf{tu}'_1, \mathbf{tu}'_2, \dots, \mathbf{tu}'_k$ tornando-se, um por vez, os k elementos não-nulos de $\mathbf{tu}_0$ iguais a zero. Observe que esta divisão satisfaz é uma regra de ramificação válida [Balas68] pois satisfaz a condição $\bigcup_{i=1}^k \mathcal{T}'_i = \mathcal{T} - \{\mathbf{tu}_0\}$, onde $\mathcal{T} = \{\mathbf{tw} | \mathbf{tw} \leq \mathbf{tu}_0\}$ e $\mathcal{T}'_i = \{\mathbf{tw} | \mathbf{tw} \leq \mathbf{tu}'_i\}, i = 1, \dots, k$. O algoritmo que implementa a operação de ramificação proposta está descrito no Quadro 4.1. Neste procedimento, os vetores $\mathbf{tu}'_1, \mathbf{tu}'_2, \dots, \mathbf{tu}'_k$ são construídos a partir do vetor $\mathbf{tu}_0 (m \times 1)$ e armazenados em uma lista de problemas **LP**. Se $\mathcal{P}$ é o problema (4.6) para um vetor $\mathbf{tu}_0$, obtêm-se a partir deste os subproblemas $\mathcal{SP}_i$ substituindo-se $\mathbf{tu}_0$ por $\mathbf{tu}'_i$ em (4.6). Portanto, pode-se dizer que **LP** representa a lista de subproblemas de (4.6). Considerando novamente o sistema de medição da Figura 4.4, tem-se, como mostra a Figura 4.5 que $\mathbf{tu}_0 = (1,1,1,0)$ e $Z(\mathbf{tu}) = (P_3)$. Utilizando-se o algoritmo do Quadro 4.1, constrói-se a lista **LP** = $[\mathbf{tu}'_1, \mathbf{tu}'_2, \mathbf{tu}'_3]$, sendo os vetores $\mathbf{tu}'_1, \mathbf{tu}'_2, \mathbf{tu}'_3$ e os correspondentes conjuntos $\mathcal{S}(\mathbf{tu}'_1)$, $\mathcal{S}(\mathbf{tu}'_2)$ e $\mathcal{S}(\mathbf{tu}'_3)$ também indicados na Figura 4.5. Repare que $\bigcup_{i=1}^3 \mathcal{S}(\mathbf{tu}'_i) = \mathcal{S}(\mathbf{tu}_0) - \{\mathbf{tu}_0\}$.

Procedimento RAMIFICA($\mathbf{tu}_0, \mathbf{LP}$)	
Passo 1	Inicializar $i = 1$ e $j = 1$;
Passo 2	Enquanto $i \leq m$
Passo 2.1	Se $tu_{0i} = 0$, ir até o Passo 2.6, senão ir até o passo 2.2;
Passo 2.2	$\mathbf{tu}'_j = \mathbf{tu}_0$;
Passo 2.3	$tu'_{ji} = 0$;
Passo 2.4	Inserir $\mathbf{tu}'_j$ em $\mathbf{LP}$;
Passo 2.5	$j = j + 1$;
Passo 2.6	$i = i + 1$;
Passo 3	Retornar $\mathbf{LP}$;

Quadro 4.1 – Algoritmo de ramificação proposto.

O conjunto $\mathcal{S}(\mathbf{tu})$ possui as seguintes propriedades:

- I. A tupla de medidas em $\mathcal{S}(\mathbf{tu})$ que tem a menor cardinalidade é a $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$.
- II. A tupla de medidas em $\mathcal{S}(\mathbf{tu})$ com a maior cardinalidade aquela é a tupla $\mathbf{z}(\mathbf{0})$, onde $\mathbf{0}(m \times 1)$ é o vetor cujo todos elementos são nulos.

As propriedades I e II decorrem do fato de que as tuplas $\mathbf{z}(\mathbf{tv})$ em $\mathcal{S}(\mathbf{tu})$ são todas super-tuplas de $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$. Como consequência das propriedades I e II tem-se as propriedades III e IV:

- III. Se $\mathbf{z}(\mathbf{tu})$ é uma tupla cuja ausência do plano medição torna a rede não observável, cada uma das as tuplas em $\mathcal{S}(\mathbf{tu})$, quando ausente do sistema de medição, também leva a rede à não-observabilidade.
- IV. Se $\mathcal{T} = \{\mathbf{tu} | \mathbf{tu} \leq \mathbf{tu}_0\}$ representa o conjunto de vetores que indicam as tuplas no conjunto $\mathcal{S}(\mathbf{tu}_0)$, então o valor máximo da função objetivo em $\mathcal{T}$ é $fobj_{m\acute{a}x} = fobj(\mathbf{tu}_0)$. Já o valor mínimo desta função em $\mathcal{T}$ corresponde a $fobj_{m\acute{i}n} = 0$.

Tendo em mente as propriedades I-IV, a operação de limitação do problema (4.6) consiste, portanto, no cálculo de $fobj(\mathbf{tu}_0) = |\det(\mathbf{E}_{\mathbf{tu}_0})|$, sendo os limites superior ($Ub(\mathbf{tu}_0)$) e inferior ($Lb(\mathbf{tu}_0)$) dados por:

$$Ub(\mathbf{tu}_0) = |\det(\mathbf{E}_{\mathbf{tu}_0})| \quad (4.7)$$

$$Lb(\mathbf{tu}_0) = 0 \quad (4.8)$$

É importante notar que se $Ub(\mathbf{tu}_0) > Lb(\mathbf{tu}_0)$, existe uma tupla crítica em $\mathcal{S}(\mathbf{tu}_0)$. Por outro lado, se $Ub(\mathbf{tu}_0) = Lb(\mathbf{tu}_0)$, então $\mathbf{z}(\mathbf{tu}_0)$ é uma Ck-tupla ou nenhuma das tupla em $\mathcal{S}(\mathbf{tu}_0)$ é crítica. Tendo em mente as operações de ramificação e limitação propostas, o algoritmo descrito pelo fluxograma da Figura 4.6 implementa a técnica do *Branch-and-Bound* para a enumeração Ck-tuplas de cardinalidade até k_{max} .

O procedimento se inicia adotando-se como solução inicial o vetor $\mathbf{tu}_0 = (1,1,\dots,1)$, que corresponde a tupla de medidas $\mathbf{z}(\mathbf{tu}_0) = (\emptyset)$. Repare que a matriz $\mathbf{E}_{\mathbf{tu}_0}$ não é definida. Supondo que o sistema seja observável para o plano de medidas Ω_Z , assume-se sem prejuízo ao problema que $\det(\mathbf{E}_{\mathbf{tu}_0}) = +\infty$. Os vetores $\mathbf{tu}'$ gerados ao longo da execução do algoritmo, são armazenados na lista **LP**. A cada iteração um subproblema é visitado, removendo-se um vetor $\mathbf{tu}'$ de **LP** e fazendo-se $\mathbf{tu}_0 = \mathbf{tu}'$ em (4.6). Se a cardinalidade da tupla de medidas $\mathbf{z}(\mathbf{tu}')$ indicada por $\mathbf{tu}'$ é superior à k_{max} , o subproblema é prontamente descartado. Caso contrário, é determinado seu limite superior $Ub(\mathbf{tu}')$.

Se $Ub(\mathbf{tu}') > Lb(\mathbf{tu}')$, o procedimento $RAMIFICA(\mathbf{tu}', \mathbf{LP})$ é invocado e a lista **LP** recebe novos k vetores. Quando $Ub(\mathbf{tu}') = Lb(\mathbf{tu}')$, a operação de ramificação não é aplicada, sendo $\mathbf{tu}'$ colocado na lista de soluções **LS** caso atenda às restrições de (4.6). Cada visita a um subproblema diminui a lista **LP**, ao passo que cada ramificação adiciona novos elementos nesta. Logo, quando **LP** estiver vazia, todos os subproblemas foram visitados ou descartados, e o algoritmo se encerra, retornando a lista **LS** como as soluções do problema (4.6). As tuplas de medidas $\mathbf{z}(\mathbf{tu}')$ indicadas pelos vetores $\mathbf{tu}'$ presentes na lista **LS** são as Ck-tuplas do sistema de medição com cardinalidade até k_{max} .

A lista de subproblemas **LP**, que contém os vetores $\mathbf{tu}'$ gerados ao longo do processo, pode ser implementada empregando-se uma estrutura de dados do tipo Pilha ou Fila. A escolha de uma ou outra implementação impacta na forma como as combinações de medidas serão pesquisadas. Se empregada uma estrutura do tipo Fila

(LIFO), as Ck-tuplas serão pesquisadas por ordem de cardinalidade, sendo realizada uma busca em largura. Caso **LP** seja implementada na forma de pilha (FIFO), o algoritmo da Figura 4.6 encontrará primeiramente todas as Ck-tuplas contendo uma determinada combinação de medidores, sendo realizada uma busca em profundidade.

A implementação em fila exige mais memória, sendo adequada para situações em que as cardinalidades mais baixas são predominantes. Já o emprego da pilha, apesar de requerer menos memória, tem seu desempenho fortemente afetado pela ordenação das medidas. Caso as medidas correspondentes às primeiras posições do vetor **tu** não participem de tuplas críticas de baixa cardinalidade, serão necessárias muitas ramificações, o que certamente afetará o desempenho do método.

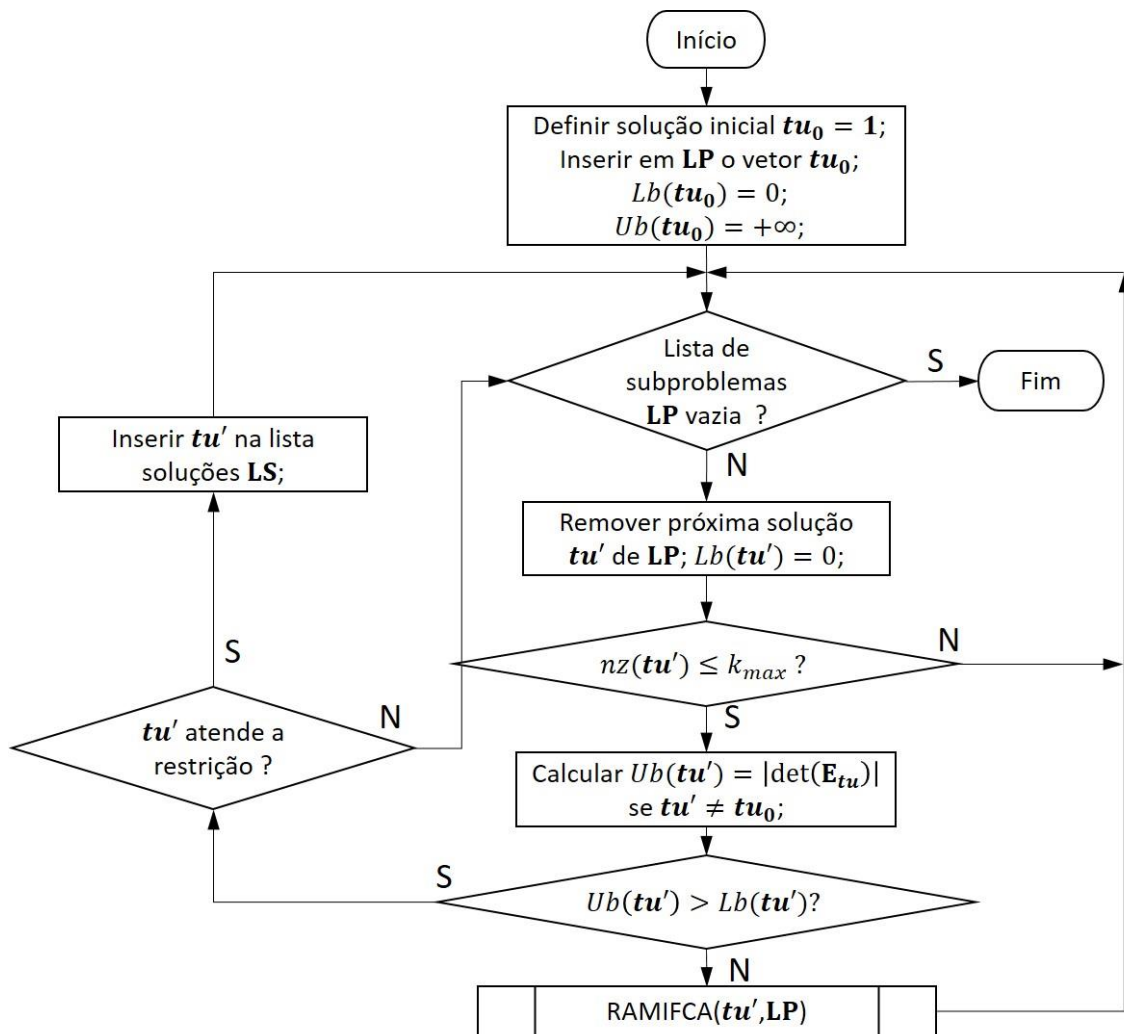


Figura 4.6 – Enumeração de Ck-tuplas pela técnica do *Branch-and-Bound*.

Para ilustrar o procedimento proposto, o algoritmo da Figura 4.6 será aplicado à rede elétrica mostrada da Figura 4.4. O conjunto de medidas que compõem o plano de medição é $\Omega_z = \{P_{1-2}, P_{1-3}, P_2, P_3\}$. Iniciando-se com $tu_0 = (1,1,1,1)$, **LP** conterá o

elemento $(1,1,1,1)$, sendo $Ub(\mathbf{tu}_0) = +\infty$ e $Lb(\mathbf{tu}_0) = 0$. Como **LP** não está vazia, o próximo elemento de **LP** – neste caso o próprio vetor $(1,1,1,1)$ – é removido e tem-se $\mathbf{tu}' = (1,1,1,1)$. De acordo com (4.3), $nz(\mathbf{tu}') = 0 \leq k_{max}$, e o algoritmo prossegue, examinando-se os limites superior e inferior para $\mathbf{tu}'$. Devido ao fato de que $Ub(\mathbf{tu}') > Lb(\mathbf{tu}')$, o procedimento RAMIFICA é invocado, sendo inserido em **LP** os vetores $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$ e $(1,1,1,0)$.

A Figura 4.7 mostra tanto **LP** quanto os estados gerados pelo procedimento RAMIFICA. Contendo a lista **LP** ainda 4 elementos, estes são sequencialmente retirados desta, sendo o procedimento RAMIFICA invocado para cada um destes, pois $Ub(\mathbf{tu}') > Lb(\mathbf{tu}')$, para todos os elementos removidos de **LP**. Supondo que **LP** seja uma estrutura de dados do tipo Fila, os elementos são inseridos ao final de **LP**, de forma que **LP** tem, após a remoção de $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$ e $(1,1,1,0)$, a forma indicada na Figura 4.8.

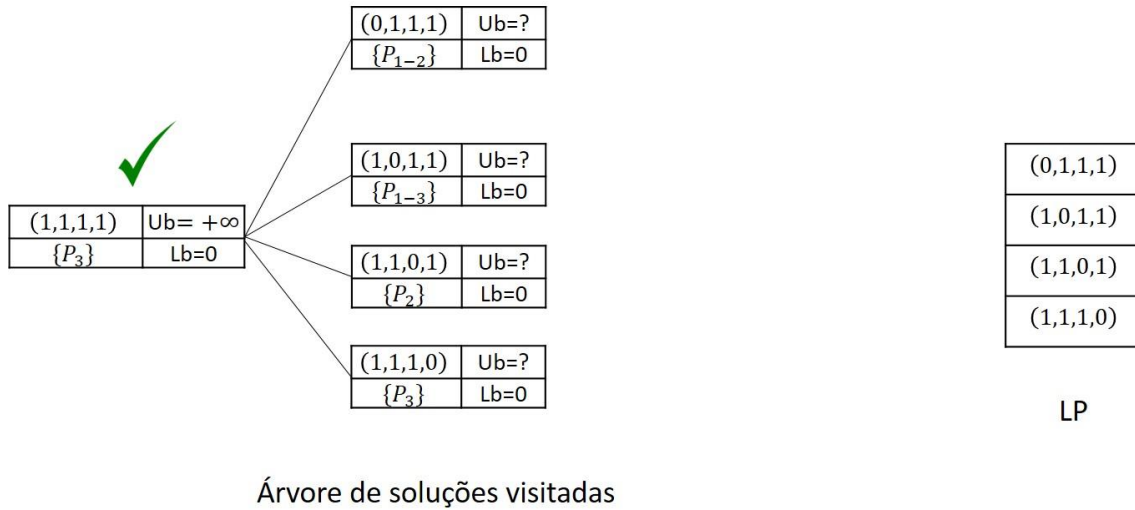


Figura 4.7 – Árvore de soluções visitadas e lista **LP** após avaliação de $\mathbf{tu}' = (1,1,1,1)$.

É importante notar que, por razões de espaço, as soluções repetidas não são mostradas em **LP** e na árvore de soluções visitadas. O exame das soluções na lista **LP** da Figura 4.8 resulta na árvore de soluções e na lista **LP** mostrada na Figura 4.9. Como os determinantes ainda são positivos (embora alguns valores sejam bem próximos de zero), todos os subproblemas testados são subdivididos, resultando na fila **LP** formada pelos vetores $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,0)$, $(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)$.

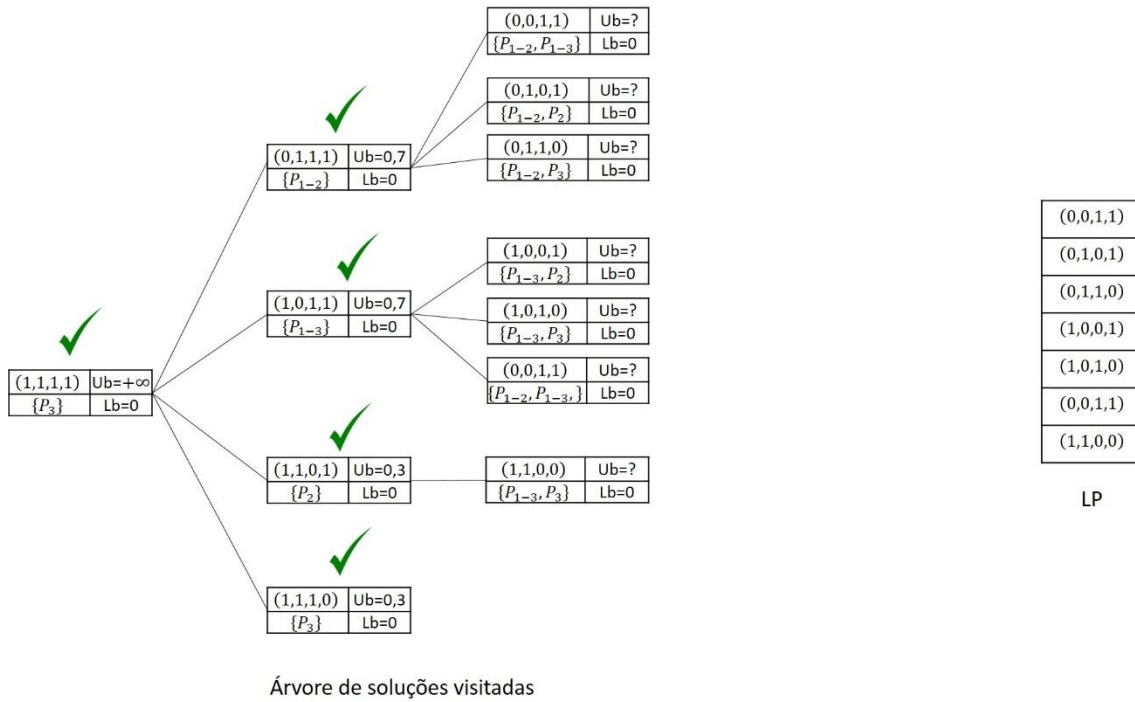


Figura 4.8 – Árvore de soluções visitadas e lista **LP** após avaliação de $\mathbf{tu}' = (1,1,1,0)$.

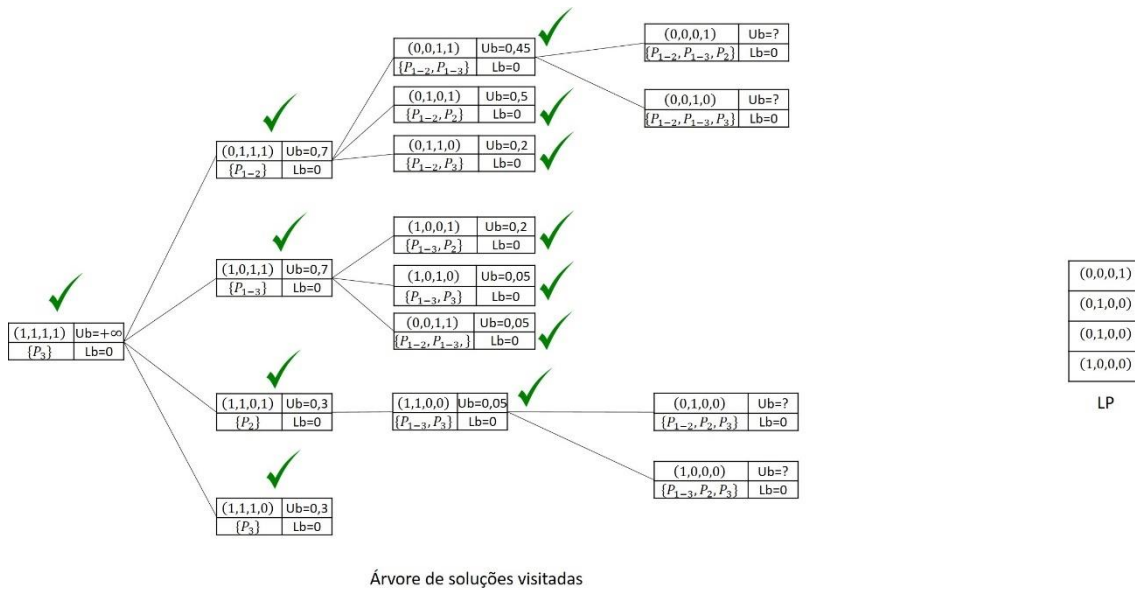


Figura 4.9 – Árvore de soluções visitadas e lista **LP** após avaliação de $\mathbf{tu}' = (1,1,0,0)$.

Examina-se agora as soluções na lista **LP** na Figura 4.9. Para todas as soluções contidas nesta lista, $Ub(\mathbf{tu}') = Lb(\mathbf{tu}')$. Além disso, verifica-se pela inspeção dos vetores já testados – que são subtuplas dos vetores avaliados nesta etapa - que o conjunto de restrições em (4.6) é atendido. Logo, estes vetores são considerados soluções do problema e armazenados em **LS**, não havendo necessidade de subdividir os problemas a eles associados. A Figura 4.10 mostra a árvore de soluções visitadas

ao final do algoritmo e a lista de soluções **LS**. Os vetores contidos em **LS** indicam as Ck-tuplas (P_{1-2}, P_2, P_3) , (P_{1-3}, P_2, P_3) , (P_{1-2}, P_{1-3}, P_2) e (P_{1-2}, P_{1-3}, P_3) .

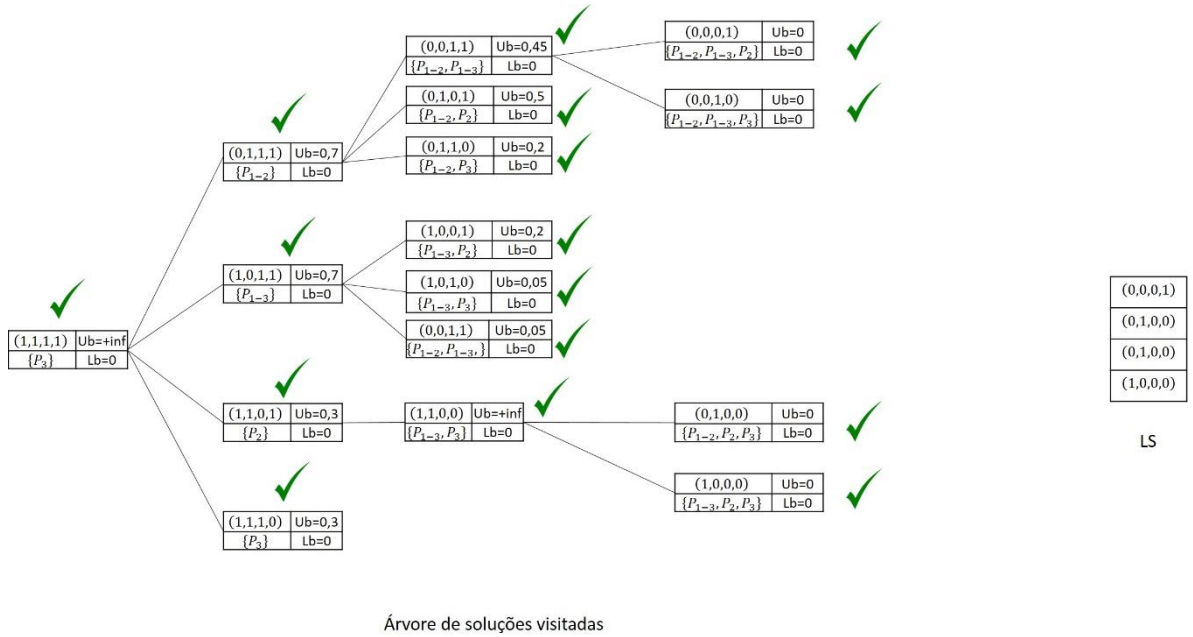


Figura 4.10 – Árvore de soluções visitadas pelo algoritmo e lista de soluções **LS**.

Neste exemplo ilustrativo foram necessários 16 testes para identificar as Ck-tuplas. Isso ocorre porque as Ck-tuplas encontradas são todas de máxima cardinalidade ($k_{lim} = 4 - 2 + 1 = 3$). Uma importante diferença entre método *Branch-and-Bound* e a enumeração explícita das soluções é que, ao testar uma combinação de medidas, não é necessário verificar se as subtuplas daquela testada são críticas. Suponha, por exemplo, que a tupla (P_{1-2}, P_{1-3}, P_2) fosse testada em um procedimento de enumeração explícita. Uma vez que comprovada que ausência da tupla torna a rede não observável, para confirmar sua criticidade seria necessário avaliar se ao menos uma das subtuplas de medidas (P_{1-2}) , (P_{1-3}) , (P_2) , (P_{1-2}, P_{1-3}) , (P_{1-2}, P_2) e (P_{1-3}, P_2) é crítica, o que demanda grande esforço computacional.

No pior caso, o algoritmo proposto enumera $\sum_{i=0}^{k_{max}} \binom{m}{i}$ soluções, sendo a complexidade limitada por $O(m^{k_{max}})$. Entretanto, devido a estratégia de descarte de subproblemas, a complexidade média do algoritmo tende a ser consideravelmente menor do que a aquela de pior caso. Além disso, para que não seja necessário armazenar a matriz **E**, em geral cheia, durante o processo, a matriz $\mathbf{E}_{tu}$ pode ser alternativamente construída por meio da relação:

$$\mathbf{E}_{tu} = \mathbf{\Im}_{tu} - \mathbf{H}_{tu} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H}_{tu}^T \quad (4.9)$$

onde $\mathbf{H}_{tu}(k \times n)$ é a matriz jacobiano referentes a k-tupla de medidas $\mathbf{z}(tu)$, $\mathbf{G}(n \times n)$ é a matriz de ganho original do sistema de medição e $\mathbf{I}_{tu}(k \times k)$ é a matriz identidade.

A inversa da matriz de ganho é calculada somente uma vez, podendo ser obtida eficientemente por meio de decomposições matriciais [Abur04]. Finalmente, é importante notar que o algoritmo mostrado na Figura 4.6 pode ser empregado para identificar tuplas críticas associadas a um grupo específico de medidas, bastando utilizar como solução inicial o vetor $\mathbf{tu}_0$ que indique as medidas do grupo.

4.3.2 –Criticalidades de Unidades de Medição

A identificação das Ck-tuplas de unidades de medição, com base nas propriedades listadas no Capítulo 2, pode ser efetuada examinando-se a dependência linear das colunas da matriz de covariância dos resíduos $\mathbf{E}$. Para que uma k-tupla de unidades de medição seja crítica, a matriz $\mathbf{C}_u$, formada pelas linhas e colunas de $\mathbf{E}$ referentes às medidas coletadas pela k-tupla de UMs, deve satisfazer as seguintes condições:

- a) $\mathbf{C}_u$ deve ser singular, ou seja $\det(\mathbf{C}_u) = 0$;
- b) Nenhuma sub-tupla de UMs deve ser crítica;

A matriz $\mathbf{C}_u$ é obrigatoriamente simétrica e de dimensão $(mu \times mu)$, onde mu é número de medidas da UM selecionada. Esta pode também ser obtida através da expressão (4.9). Para identificação de UMs críticas (C1-UMs), apenas a singularidade de $\mathbf{C}_u$ necessita ser verificada. Isto pode ser feito observando-se o surgimento de pivôs nulos em $\mathbf{C}_u$ durante a sua triangulação. Este raciocínio é aplicado no algoritmo apresentado no Quadro 4.2.

Nota-se que este procedimento realiza, no pior caso, n_{UM} Eliminações de Gauss para identificar as UMs críticas, sendo n_{UM} o número de unidades de medição instaladas na rede elétrica. Com o intuito de reduzir o esforço computacional do algoritmo, pode-se previamente identificar todas as Cmeds e Cconj do plano de medição e classificar como UMs críticas aquelas que contenham pelo menos uma Cmed ou par de medidas em um CConj. As UMs contendo medidas redundantes serão então classificadas usando o algoritmo mostrado no Quadro 4.2.

Procedimento UM-Crit(E)

- Passo 1 Enquanto todas as UMs não forem classificadas, selecionar próxima UM não classificada. Caso contrário, encerrar algoritmo;
- Passo 2 Formar a matriz simétrica $C_u(mu \times mu)$ a partir da matriz E;
- Passo 3 Inicializar o processo de Eliminação de Gauss na matriz C_u ;
- Passo 4 Se durante o processo de Eliminação Gaussiana, algum pivô nulo for encontrado, encerrar o processo e ir ao passo 5. Ir ao passo 6 caso nenhum pivô nulo tenha sido encontrado ao longo do processo;
- Passo 5 Classificar a UM selecionada como crítica, ir ao passo 1;
- Passo 6 Classificar a UM selecionada como não-crítica, ir ao passo 1;

Quadro 4.2– Algoritmo de enumeração de unidades de medição críticas.

O procedimento mostrado no Quadro 4.2 pode ser modifica para que também sejam identificados pares críticos de UMs. Primeiro, determina-se as UMs críticas do plano de medição. Em seguida, constrói-se para cada par de UMs não-críticas a matriz C_u . Se C_u é singular, então classifica-se o par de UMs como crítico. O algoritmo mostrado no Quadro 4.3 descreve os passos para identificação das C1- e C2-UMs. Este algoritmo opera de forma similar àquele descrito no Quadro 4.2, porém avaliando pares de unidades de medição. Para satisfazer a condição b) apresentada no início desta seção, o algoritmo possui um passo prévio de determinação das UMs críticas. No pior caso, o algoritmo realiza n_{UM} testes para determinar as UMs críticas e $(n_{UM} - 1)n_{UM}/2$ testes para determinar os pares críticos de UMs, sendo a complexidade do método polinomial (quadrática) no número de unidades de medição.

Os algoritmos propostos apenas identificam as C1- e C2-UMs, sem detalhar as Ck-tuplas contidas nestas. Resolvendo-se o problema de otimização (4.6) para um vetor tu_0 que indique somente as medidas coletadas pela tupla crítica de UMs, pode-se determinar as Ck-tuplas presentes nesta.

Procedimento UM-Crit2(E)	
Passo 1	Determinar todas as UMs críticas empregando o procedimento UM-Crit;
Passo 2	Enquanto todos os pares UMs não-críticas não forem classificadas, selecionar um par de UMs não-críticas. Caso contrário, encerrar algoritmo;
Passo 3	Formar a matriz simétrica $C_u(mu \times mu)$;
Passo 4	Inicializar o processo de Eliminação de Gauss na matriz C_u ;
Passo 5	Se durante o processo de Eliminação, algum pivô nulo for encontrado, encerrar o processo e ir ao passo 6; caso contrário ir ao passo 7;
Passo 6	Classificar o par de UMs selecionado como par crítico, ir ao passo 2;
Passo 7	Classificar o par de UMs selecionado como par não-crítico, ir ao passo 2;

Quadro 4.3 – Algoritmo de identificação de pares críticos de unidades de medição.

4.3.3 – Criticalidades de ramos

No Capítulo 2 foram apresentadas as criticalidades da EE associadas às alterações na configuração da rede. Estas criticalidades são importantes na avaliação da robustez da EE frente a alterações na rede que podem ser causadas tanto por falhas isoladas ou sistêmicas, como por procedimentos operativos que envolvem o chaveamento de linhas de transmissão ou de outros ramos da rede. Como toda alteração topológica pode ser expressa em função das variáveis de fluxo de potência nos ramos [Wu89], este trabalho se focará nas criticalidades de ramos. Com base no que foi visto nos capítulos anteriores, serão enumeradas as seguintes criticalidades:

- I. Criticalidades que caracterizem situações em que há perda da observabilidade, representadas pelas k-tuplas críticas de ramos;
- II. Criticalidades que caracterizem situações em que não a depuração de erros topológicos (via análise residual) não é não é garantida;

Correspondem às criticalidades do item II os ramos irrelevantes e as tuplas de k ramos em que a saída não reportada de todos estes não é detectável em todas as situações, sendo a saída de até k-1 ramos do grupo detectável em qualquer circunstância.

As criticalidades de ramos mencionadas se manifestam através da dependência linear das colunas da matriz $\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{M}$, onde $\mathbf{E}$ é a matriz de covariância dos resíduos e $\mathbf{M}$ a matriz de incidência medida-ramo. Entretanto, as k -tuplas críticas de ramos são mais facilmente identificadas através da análise de observabilidade, isto é, da singularidade da matriz de ganho, enquanto os ramos irrelevantes são determináveis inspecionando-se a matriz $\mathbf{M}$. As demais k -tuplas, por outro lado, só podem ser identificadas a partir da matriz $\mathbf{S}$.

O método *Branch-and-Bound* também pode ser utilizado para determinar as criticalidades dos ramos da rede. Analogamente às C_k -tuplas de medidas, deve-se construir primeiramente um problema de otimização inteira cujas soluções correspondam às tuplas de ramos desejadas. Considere o conjunto de nr ramos da rede elétrica $\Omega_L = \{l_1, \dots, l_{nr}\}$. Se $\mathbf{l}(\mathbf{tu})$ é uma k -tupla de ramos, esta pode ser representada pelo vetor $\mathbf{u}(m \times 1)$ dado por:

$$u_i = \begin{cases} 0, l_i \in \mathbf{l}(\mathbf{tu}) \\ 1, l_i \notin \mathbf{l}(\mathbf{tu}) \end{cases}, 1 \leq i \leq m \quad (4.10)$$

onde l_i é o ramo i da rede elétrica.

Uma C_k -tupla de ramo crítica quando ausente da rede elétrica torna-a não observável. Além disso, nenhuma sub-tupla desta poderá ser crítica, conforme mostrado no Capítulo 2. Logo, se $\mathbf{l}(\mathbf{tu})$ é uma k -tupla crítica de ramos, então as condições (4.11) - (4.13) são satisfeitas:

$$\det(\mathbf{G}_{\mathbf{tu}}) = 0 \quad (4.11)$$

$$nz(\mathbf{tu}) = \sum_{i=1}^m (1 - tu_i) = k \quad (4.12)$$

$$\det(\mathbf{G}_{\mathbf{tv}}) > 0, \quad \forall \mathbf{tv} > \mathbf{tu} \quad (4.13)$$

onde $nz(\mathbf{tu})$ é o número de elementos nulos do vetor $\mathbf{tu}$; $\mathbf{G}_{\mathbf{tu}}$ é a matriz de ganho da rede elétrica quando os ramos da tupla $\mathbf{l}(\mathbf{tu})$ estão indisponíveis; e $\mathbf{G}_{\mathbf{tv}}$ é a matriz de ganho da rede elétrica quando ausentes os ramos da tupla $\mathbf{l}(\mathbf{tv})$;

Tal como estabelecido na seção 4.3.1, a relação $\mathbf{tv} > \mathbf{tu}$ obriga que a tupla de ramos $\mathbf{l}(\mathbf{tv})$ seja uma sub-tupla da tupla de ramos $\mathbf{l}(\mathbf{tu})$. Tendo em vista as condições

(4.11) - (4.13) se $l(\mathbf{tu})$ é uma k-tupla de ramo crítica, então o vetor $\mathbf{tu}$ que a indica corresponde à uma das soluções do seguinte problema de otimização:

$$\text{Minimizar } f_{obj}(\mathbf{tu}) = |\det(\mathbf{G}_{\mathbf{tu}})|$$

Sujeito a

$$|\det(\mathbf{G}_{\mathbf{tv}})| > 0, \forall \mathbf{tv} > \mathbf{tu} \quad (4.14)$$

$$tu_i = (0,1), i = 1, \dots, nr$$

$$tv_i = (0,1), i = 1, \dots, nr$$

Sendo o problema (4.5) análogo ao problema (4.14). As operações de ramificação desenvolvidas para aquele podem também ser utilizadas neste. Isto se justifica pelo fato das condições (4.11) - (4.13) serem idênticas às condições (4.2) - (4.4). Portanto, o algoritmo de enumeração de Ck-tuplas de ramos empregando-se a técnica do *Branch-and-Bound* pode ser implementada por meio do algoritmo cujos passos são apresentados na Figura 4.11.

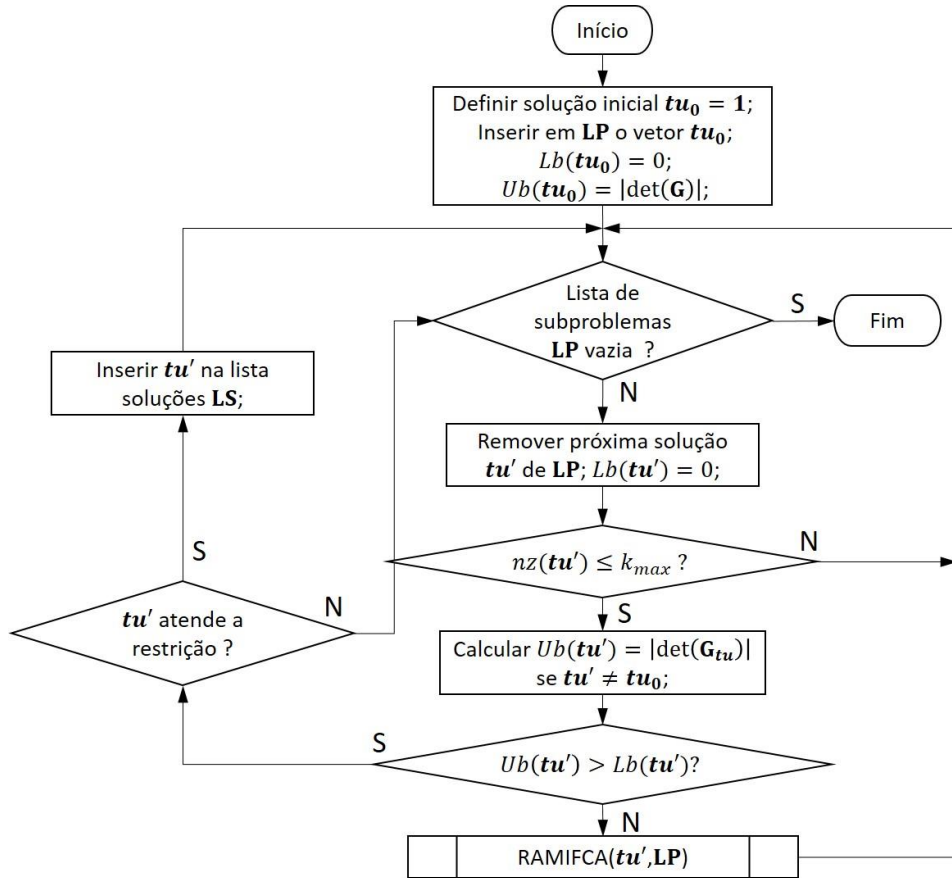


Figura 4.11 – Enumeração de Ck-tuplas de ramos pelo método *Branch-and-Bound*.

Em comparação com o algoritmo da Figura 4.6, repare que as únicas diferenças residem na função-objetivo e no cálculo do limite superior $Ub(\mathbf{tu}) = |\det(\mathbf{G}_{tu})|$. Note também que $Ub(\mathbf{tu}_0) = |\det(\mathbf{G})|$, sendo $\mathbf{G}$ a matriz de ganho da rede com todos os ramos presentes.

A determinação das condições de erro topológico não detectável será feita avaliando-se a dependência linear das colunas de $\mathbf{S}$. Considere a matriz $\mathbf{S}_{tu}$ formada pelas colunas de $\mathbf{S}$ referentes a tupla de ramos $\mathbf{l}(\mathbf{tu})$. A dependência linear entre as colunas de $\mathbf{S}_{tu}$ é idêntica àquela entre as colunas da matriz $\mathbf{S}_{tu}^t \mathbf{S}_{tu}$. Portanto, se $\mathbf{S}_{tu}^t \mathbf{S}_{tu}$ é singular, então as colunas de $\mathbf{S}_{tu}$ são também linearmente dependentes. Analogamente a um k -tupla crítica de ramo, seja $\mathbf{l}(\mathbf{tu})$ uma tupla de ramos indicada pelo vetor binário $\mathbf{tu}(m \times 1)$, se $\mathbf{l}(\mathbf{tu})$ é uma k -correspondente às criticalidades do item II, então são válidas as seguintes condições:

$$\det(\mathbf{S}_{tu}^t \mathbf{S}_{tu}) = 0 \quad (4.15)$$

$$nz(\mathbf{tu}) = \sum_{i=1}^m (1 - tu_i) = k \quad (4.16)$$

$$\det(\mathbf{S}_{tv}^t \mathbf{S}_{tv}) > 0, \quad \forall \mathbf{v} > \mathbf{u} \quad (4.17)$$

A expressão (4.17) estabelece que nenhum conjunto de colunas de $\mathbf{T}$ referentes às subtuplas de $\mathbf{l}(\mathbf{tu})$ é linearmente dependente. Consequentemente, a saída não reportada de qualquer sub-tupla de ramos $\mathbf{l}(\mathbf{tv})$ de $\mathbf{l}(\mathbf{tu})$ é detectável via análise residual. As relações (4.15) – (4.17) representam adequadamente as criticalidades correspondentes ao item II. A partir das condições anteriormente apresentadas, estas são indicadas pelas soluções do seguinte problema de otimização:

$$\text{Minimizar } fobj(\mathbf{tu}) = |\det(\mathbf{S}_{tu}^t \mathbf{S}_{tu})|$$

Sujeito a

$$|\det(\mathbf{S}_{tv}^t \mathbf{S}_{tv})| > 0, \forall \mathbf{tv} > \mathbf{tu} \quad (4.18)$$

$$tu_i = (0,1), i = 1, \dots, nr$$

$$tv_i = (0,1), i = 1, \dots, nr$$

Sendo este problema similar aos problemas (4.5) e (4.14), são aplicáveis as mesmas operações de ramificação e limitação. O procedimento para do problema (4.18) é apresentado na Figura 4.12. A matriz $\mathbf{S}_{tu}^t \mathbf{S}_{tu}$ não precisa ser calculada a cada iteração,

bastando-se calcular a matriz $\mathbf{S}^t\mathbf{S}$ ao início do processo e formar a submatriz $\mathbf{S}_{tu}^t\mathbf{S}_{tu}$ a partir das linhas e colunas de $\mathbf{S}^t\mathbf{S}$ correspondentes aos ramos indicados por tu . A vantagem de $\mathbf{S}^t\mathbf{S}$ é sua dimensão reduzida ($nr \times nr$) em relação à matriz $\mathbf{S}(m \times nr)$.

O algoritmo da Figura 4.12 também determina os ramos irrelevantes da rede. Para isto, quando um ramo satisfaz as condições (4.15) – (4.17), inspeciona-se $\mathbf{M}_{tu'}$, a coluna da matriz $\mathbf{M}$ referente a tal ramo. Caso esta seja toda nula, nenhuma medida do plano de medição está associada ao ramo, sendo este, portanto, irrelevante e inserido em **LI** ao invés de **LS**. A lista **LI** corresponde às soluções de (4.18) cuja 1-tupla associada corresponde aos ramos irrelevantes. As demais soluções são inseridas na lista **LS**.

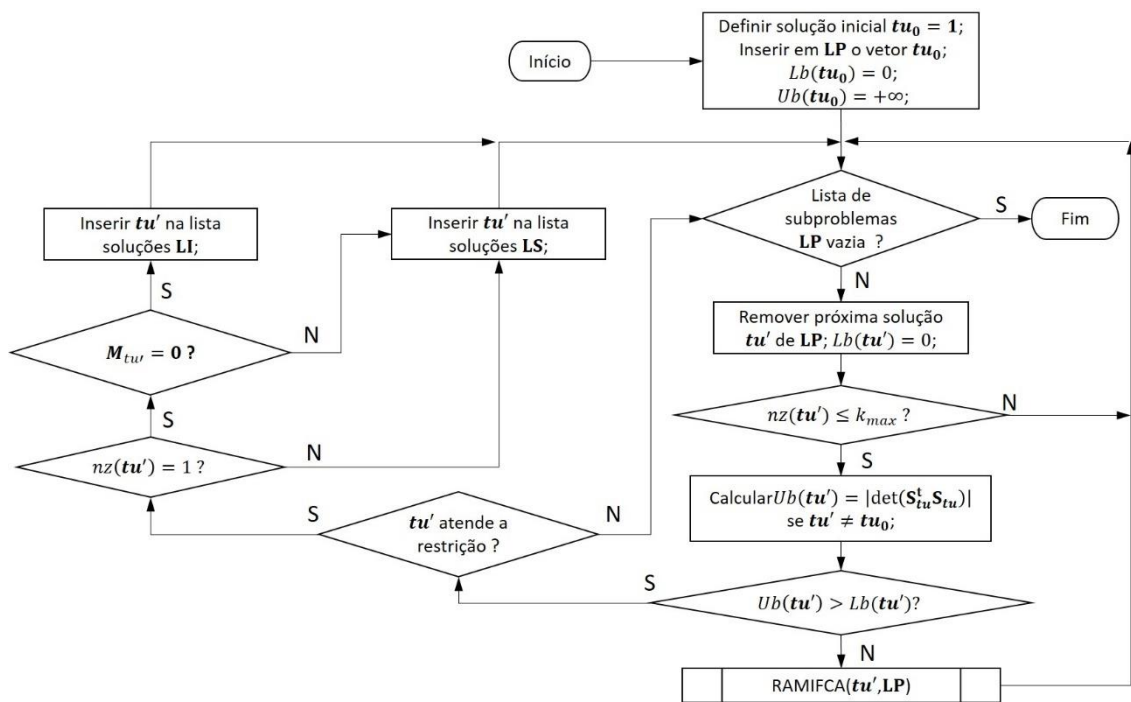


Figura 4.12 – Enumeração de condições de não detecção de erro de topologia usando o método BB.

É importante ressaltar que, para as criticalidades identificadas por meio do algoritmo apresentado na Figura 4.12, a detecção de um erro topológico dependerá do estado e parâmetros da rede elétrica. Somente para os ramos e pares de ramos obtidos por meio do algoritmo a detecção e identificação de erros de topologia não é possível, independentemente do vetor do estado e dos parâmetros dos ramos. Além disso algumas sub-tuplas das tuplas críticas de ramos podem ser indicadas pelos vetores solução do problema (4.18). Tal fenômeno decorre da forma de incidência das C_k -tuplas de medidas na tupla de ramos. É importante lembrar que se constrói a matriz $\mathbf{S}$ supondo que todos os ramos da rede presentes. Portanto, de acordo com o apresentado no

Capítulo 2, assume-se implicitamente que os erros de configuração considerados correspondem a saídas não reportadas de ramos [Wu89].

Os algoritmos propostos nesta seção permitem a descrição das condições em que o sucesso da EE fica comprometido, seja em relação à observabilidade, seja em relação à depuração de erros grosseiros de medidas ou topologia. A capacidade de observação pode ser avaliada em função da frequência de ocorrência de diferentes criticalidades em um sistema de medição, levando-se em consideração a cardinalidade de tais criticalidades. De maneira geral, quanto menos frequentes forem as tuplas críticas de baixa cardinalidade, maior será a capacidade de observação.

As criticalidades enumeradas pelos procedimentos propostos podem ser sumarizadas através de gráficos, tabelas de frequência e outras ferramentas de estatística descritiva, sendo a capacidade de observação inferida a partir de tais dados organizados. Entretanto, conforme será visto adiante, este procedimento é de grande dificuldade, em função do grande esforço envolvido na enumeração das criticalidades, que cresce conforme a redundância e o tamanho do sistema aumentam; e também pelo elevado número de tuplas críticas existentes, o que torna a análise da capacidade de observação por este caminho demasiado complicado. Uma alternativa para contornar esta dificuldade será apresentada na próxima seção e consiste no emprego da Simulação de Monte Carlo para obter índices que expressam, de forma puramente numérica, a capacidade de observação proporcionada pelo plano de medição em análise, sendo para tal levados em consideração as criticalidades presentes.

4.4 – Avaliação da Capacidade de Observação

Nesta seção são propostos índices a partir dos quais é possível descrever a capacidade de observação de uma rede elétrica proporcionada pelo emprego da função EE. Para tal, são levados em consideração as possíveis indisponibilidades de medidas, unidades de medição e ramos da rede, ou seja, as diferentes configurações do sistema de medição e da rede elétrica que podem ocorrer em um sistema de potência durante a sua operação. Como será visto nas seções seguintes, os índices propostos são obtidos a partir de uma análise probabilística que leva em conta os diversos cenários que podem surgir em função das indisponibilidades associadas ao sistema de medição e à rede elétrica, assim como as criticalidades presentes em cada caso. O objetivo com a proposição de tais índices é prover ao analista e/ou planejador informações que permitam inferir sobre o comportamento esperado da função EE na supervisão de um dado sistema de potência com base em um determinado sistema de medição. A partir dos índices propostos, é ainda apresentada uma proposta de classificação do plano de medição quanto à capacidade de observação que este proporciona à função EE. Tal classificação, intuitiva e de fácil entendimento, pode ser interpretada como uma chancela de qualidade conferida ao plano de medição, a qual pode ser útil para o entendimento do desempenho da função EE ou mesmo para auxílio a estudos para planejamento ou reforço do sistema de medição.

4.4.1 Indicadores da Capacidade de Observação

Nesta seção são propostos índices que buscam mensurar a capacidade de observação na forma do risco de não atendimento aos requisitos de observabilidade, robustez e confiabilidade pela função EE. Para tal, considera-se um comportamento realista do sistema de medição e da rede elétrica, ou seja, durante a operação do sistema de potência o sistema de medição pode sofrer diminuições temporárias de redundância em função de alterações na configuração da rede ou na disponibilidade das medidas e unidades de medição.

Propõe-se nesta Tese a avaliação probabilística da capacidade de observação de um sistema de potência. Considere como experimento aleatório o estado de funcionamento das medidas, unidades de medição e ramos da rede elétrica em um determinado instante de tempo. O espaço amostral associado a este experimento é qualquer combinação de medidas, UMs e ramos que a rede elétrica dispõe. O tamanho do espaço amostral é definido como N_E e corresponde ao total de combinações possíveis dos elementos anteriormente citados.

Em relação ao requisito de observabilidade, propõe-se a determinação do índice de probabilidade de perda de observabilidade (PLOC), apresentado na expressão (4.19), onde N_E é o número de eventos possíveis na rede (indisponibilidade de medidores, ramos da rede, unidades de medição, etc), incluindo-se o sistema em pleno funcionamento (todas as UMs, medidas e ramos disponíveis) como um dos eventos; N_{unobs} é o número de eventos na rede na qual a rede é não observável.

$$PLOC = \frac{N_{unobs}}{N_E} \quad (4.19)$$

O índice PLOC indica a frequência com que a rede perde a observabilidade, sendo uma medida do risco de o processo de EE não ser sequer executado para a rede a ser supervisionada. O PLOC também contém informação sobre as tuplas críticas presentes, uma vez que reflete a forma com que a indisponibilidade de medidas, UMs e ramos afeta a observabilidade da rede. É importante ter em mente que a frequência com que ocorre a indisponibilidade simultânea de muitos elementos (podendo conter tuplas críticas de alta cardinalidade) é muito menor que a frequência de ocorrência da indisponibilidade de um ou poucos elementos (que, neste caso, podem conter tuplas críticas de baixa cardinalidade). Assim, um PLOC elevado indica significativa presença de tuplas críticas de baixa cardinalidade, enquanto um PLOC de valor pequeno indica a predominância de tuplas críticas de cardinalidade mais elevada. O PLOC tem um valor mínimo (ideal) igual a zero, quando não há criticalidades no sistema, e máximo igual a 1, quando em todas as situações o sistema é não observável, mesmo quando todas as UMs, medidas e ramos estão disponíveis. Apesar de avaliar o risco de não observabilidade, o PLOC também reflete, ainda que indiretamente, a capacidade de detecção e identificação de erros grosseiros por parte da EE, pois nele tem impacto a presença de C1 e C2-tuplas críticas de medidas e ramos da rede. É importante notar que (4.19) assume implicitamente que os eventos do espaço amostral são equiprováveis.

O segundo indicador proposto diz respeito à capacidade de detecção de erros grosseiros, denominada probabilidade de perda da capacidade de detecção (PLDC). O PLDC é definido de acordo com a expressão (4.20):

$$PLDC = \frac{1}{N_{obs}} \sum_{i=1}^{N_{obs}} \frac{N_{Cmeds}(i)}{m(i)} \quad (4.20)$$

onde N_{obs} é o número de eventos observáveis, $m(i)$ e $N_{Cmeds}(i)$ são o número de medidas e o número de C1-tuplas do i -ésimo cenário observável, respectivamente.

Para cada cenário observável, a relação $N_{cmeds}(i)/m(i)$ expressa a proporção de medidas em que a ocorrência de erros grosseiros não é detectável em nenhuma hipótese. Se considerada a probabilidade de ocorrência de erros grosseiros em cada medida como equiprovável, então $N_{cmeds}(i)/m(i)$ pode ser entendida como a probabilidade de um erro de grosseiro não ser detectado, dado que o i -ésimo evento (observável) da rede tenha ocorrido. Consequentemente, a expressão (4.20) representa a probabilidade total de não detectabilidade de EGs nas medidas, assumindo que os eventos do espaço amostral são também equiprováveis. Tendo por base que a razão $N_{cmeds}(i)/m(i)$ assume valores, para cada cenário observável, entre 0 e 1, é esperado que o PLDC também varie entre 0 e 1. Seu valor mínimo (0) ocorre quando nenhuma medida crítica for verificada para cada possível cenário, ou seja, não há medidas críticas no plano de medição e nenhum evento na rede leva ao surgimento de tais medidas; enquanto o valor máximo (1) ocorre quando todos os cenários em que a estimação de estado é completada possuem somente medidas críticas.

A satisfação ao requisito de confiabilidade requer que a EE seja também capaz de identificar EGs. Portanto, um índice específico a esta tarefa é também necessário. Propõe-se o indicador Probabilidade de Perda de Capacidade de Identificação (PLIC), apresentado na expressão (4.21):

$$PLIC = \frac{1}{Nobs} \sum_{i=1}^{Nobs} \frac{N_{cmeds}(i) + M_{cconj}(i)}{m(i)} \quad (4.21)$$

onde $M_{cconj}(i)$ é o número de medidas participantes de conjuntos críticos.

Analogamente ao PLDC, a proporção $(N_{cmeds}(i) + M_{cconj}(i))/m(i)$ indica a proporção de medidas, em um determinado cenário observável i , nas quais a incidência de um EG é não identificável. Erros grosseiros simples em pares críticos de medidas (portanto, em Cconjs) não são identificáveis. Um erro não detectável é também não identificável, o que justifica a contabilização do número de medidas Cmeds em (4.21). A razão $(N_{cmeds}(i) + M_{cconj}(i))/m(i)$ corresponde à probabilidade de não identificação de EGs condicionada ao evento i .

O PLIC, tal como o PLDC, varia de 0 a 1. A condição ideal, no qual PLIC é nulo, é um sistema suficientemente robusto, de forma que, nenhuma medida, em nenhum cenário, esteja envolvida em tuplas críticas de cardinalidade menor ou igual a 2. Por outro lado, quando todas as medidas, em todos os possíveis cenários, estão envolvidas

em tuplas críticas de cardinalidade igual ou inferior a 2, o valor do PLIC é máximo, sendo igual à unidade.

É importante ressaltar que o PLDC e PLIC são índices específicos, computados para os casos em que o sistema é observável. A correta interpretação deles, portanto, é a proporção de casos observáveis em que não é possível detectar ou identificar EGs. Como exemplo ilustrativo, os indicadores PLOC, PLDC e PLIC serão calculados para o sistema-exemplo de 3 barras empregado na Seção 4.4.1, ilustrado na Figura 4.4. Considere a topologia fixa e somente indisponibilidades de medidas. Portanto, para a rede em questão há um total de 16 eventos. De acordo com a Tabela 4.3 existem 5 cenários neste sistema em que a rede é não observável. Portanto, o PLOC é igual a 0,3125, ou seja, é esperado que não seja possível executar a função EE em 31,25% das vezes em que ela for invocada. Analogamente, PLDC e o PLIC valem 0,5454 e 0,9090 respectivamente. Logo, existe uma probabilidade de 55% de não ser possível sequer detectar a ocorrência de EGs, enquanto a probabilidade de também não os identificar é de aproximadamente 91%.

Tabela 4.3 – Enumeração de estados.

Sistema de medição	m	Observabilidade	N_{cmeds}	M_{Cconj}
$P_{1-2}, P_{1-3}, P_2, P_3$	4	Observável	0	0
P_{1-3}, P_2, P_3	3	Observável	0	3
P_{1-2}, P_2, P_3	3	Observável	0	3
P_{1-2}, P_{1-3}, P_3	3	Observável	0	3
P_{1-2}, P_{1-3}, P_2	3	Observável	0	3
P_2, P_3	2	Observável	2	0
P_{1-3}, P_3	2	Observável	2	0
P_{1-3}, P_2	2	Observável	2	0
P_{1-2}, P_3	2	Observável	2	0
P_{1-2}, P_2	2	Observável	2	0
P_{1-2}, P_{1-3}	2	Observável	2	0
P_{1-2}	1	Não-Observável	---	---
P_{1-3}	1	Não-Observável	---	---
P_2	1	Não-Observável	---	---
P_3	1	Não-Observável	---	---
$\emptyset$	0	Não-Observável	---	----

Conclui-se a partir dos índices, que o sistema tem considerável risco de não ser observável e não é confiável, visto os elevados valores de PLIC e PLDC. Isto está de acordo com a análise realizada na seção anterior, que apontou que o sistema contém, nestas condições, apenas trios críticos, estando, portanto, na iminência de perda da capacidade de identificação de EGs.

Como pode ser visto no exemplo anterior, as criticalidades do sistema de medição estão refletidas nos índices propostos. Tais índices podem ser calculados de forma determinística, na forma que foram aqui apresentados, ou de forma aproximada,

empregando-se métodos de simulação. A grande vantagem destes reside no menor esforço computacional (visto que não há necessidade de enumerar o espaço amostral, o que seria inviável para um sistema de grandes dimensões) e em uma modelagem mais sofisticada e realista dos índices, visto que a hipótese de equiprobabilidade sobre a qual os indicadores PLOC, PLIC e PLDC foram construídos podem não corresponder à realidade. Propõe-se nesta Tese, o cômputo do PLIC, PLOC e PLDC por meio de simulação de Monte Carlo, o que será detalhado nas próximas seções.

4.4.2 Simulação de Monte Carlo Simples (MCS)

Como apresentado no Capítulo 3, a SMC quantifica o comportamento de um sistema por meio de amostragem aleatória do seu estado. O comportamento a ser observado é descrito por meio de uma função de desempenho que represente de forma suficientemente detalhada o comportamento do sistema a ser analisado. A SMC se justifica como opção atrativa para cálculo da capacidade de observação devido à simplicidade com a qual permite solucionar modelos de alta complexidade e pelo baixo (ou controlável) custo computacional. Conforme também mostrado no Capítulo 3, a SMC não depende das dimensões do sistema, mas do tamanho da amostra empregada, o que pode ser uma vantagem, principalmente em sistemas de grande porte.

O cálculo dos indicadores PLIC, PLOC e PLDC via SMC requer a definição do sistema e seus estados (ou entradas), do processo de amostragem e das funções de desempenho. Neste trabalho o sistema é caracterizado pela rede elétrica e as medidas instaladas para supervisioná-la.

A capacidade de observação dependerá, de forma geral, da configuração da rede, da localização e do tipo de medidores utilizados no processo de EE. Portanto, neste contexto, um estado do sistema é definido pelos estados individuais dos ramos, medidas e unidades de medição. Logo, o estado do sistema será representado pelo vetor binário $\mathbf{y}(d \times 1)$ que indica a disponibilidade ou indisponibilidade de cada elemento, compreendido aqui como um ramo da rede elétrica, uma medida ou uma unidade de medição. A i -ésima componente de $\mathbf{y}$ é definida como:

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{se o elemento } i \text{ está disponível} \\ 1, & \text{se o elemento } i \text{ está indisponível} \end{cases} \quad (4.22)$$

Observe que o vetor nulo $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ corresponde à rede elétrica em pleno funcionamento, com todas as medidas, ramos e UMs disponíveis. A indisponibilidade de cada elemento ocorre, em geral, devido a diferentes fatores, tais como: rejeição por suspeita de erro grosseiro; falhas no sistema de aquisição; chaveamento de linhas de

transmissão, etc. Neste trabalho modelou-se a indisponibilidade de cada elemento como um experimento aleatório de Bernoulli [Mey84], com probabilidade de ocorrência p_i . É importante notar que se considera como “sucesso” (atribuição de valor igual a 1) no experimento o evento “*elemento não está em funcionamento*”.

Consequentemente, cada componente y_i de $\mathbf{y}$ corresponderá a uma variável aleatória de Bernoulli com a seguinte distribuição de probabilidade, valor esperado e variância (ver anexo A):

$$\Pr(y_i) = \begin{cases} p_i, & y_i = 0 \\ q_i, & y_i = 1 \end{cases} \quad (4.23)$$

$$E[y_i] = p_i \quad (4.24)$$

$$\text{Var}[y_i] = p_i q_i \quad (4.25)$$

onde $q_i = 1 - p_i$

Como cada componente de $\mathbf{y}$ é uma variável aleatória, então o próprio vetor $\mathbf{y}$ define um vetor variável aleatória $\mathbf{Y}$. Sendo as indisponibilidades de equipamentos eventos independentes, a probabilidade de ocorrência de um determinado evento $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ é dada por:

$$\Pr(\mathbf{Y} = \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \mathbf{p}) = \prod_i (p_i^{y_i} q_i^{1-y_i}) \quad (4.26)$$

onde $\mathbf{p}$ é o vetor de parâmetros da distribuição ou vetor de parâmetros nominais. O vetor $\mathbf{p}$ contém as probabilidades de cada elemento estar indisponível.

Em geral, a probabilidade de sucesso p_i é pequena, o que permite inferir a partir da expressão (4.26) que a probabilidade de ocorrência de indisponibilidade massiva de dados é altamente improvável, situação condizente com a verificada na prática. O modelo de Bernoulli foi adotado por representar de forma simples o estado dos elementos a serem simulados. Entretanto, outros modelos podem ser utilizados sem prejuízo aos métodos a serem apresentados adiante.

As probabilidades de “sucesso” (estado de indisponibilidade de um elemento), podem ser obtidas analiticamente ou atribuídas de forma heurística, devendo-se levar em conta todos os tipos de eventos que resultem na indisponibilidade do correspondente elemento. Por exemplo, o conhecimento de que certas medidas são, por alguma razão, mais propensas a serem descartadas do plano de medição, pode ser representado atribuindo-se uma probabilidade p_i maior para estas medidas do que para outras que

mais raramente estarão indisponíveis. Linhas de transmissão e unidades de medição antigas, em função do envelhecimento e tecnologia dos equipamentos, tem mais chance de estarem indisponíveis do que equipamentos recentemente instalados, devendo também ter p_i mais elevado que os demais. O mesmo ocorre para ramos da rede frequentemente envolvidos em operações de transferência de cargas ou unidades de medição cuja disponibilidade é baixa.

É importante reforçar que a expressão (4.26) presume que os elementos representados em $\mathbf{y}$ funcionam de forma independente. Embora haja casos em que esta hipótese não é verificável, tais casos não serão analisados nesta Tese, por requererem modelagem mais detalhada das distribuições de probabilidades dos elementos, bem como processos de amostragem sofisticados. Assim sendo, a metodologia proposta nesta Tese é capaz de abordar o comportamento da EE frente aos possíveis tipos de evento:

- a) Indisponibilidade de medidas individuais;
- b) Indisponibilidade de medidas agrupadas em unidades de medição;
- c) Indisponibilidade de ramos da rede;
- d) Indisponibilidade de medidas individuais e ramos da rede;
- e) Indisponibilidade de medidas agrupadas em unidades de medição e ramos da rede;

Para os eventos listados é razoável assumir a hipótese da independência de eventos. A SMC basicamente envolve a obtenção de uma amostra $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)}$ de tamanho N a partir da distribuição de probabilidade $f(\mathbf{y}; \mathbf{p})$. Como os componentes de $\mathbf{y}$ são independentes, pode-se obter $\mathbf{y}$ amostrando-se cada componente y_i de forma independente. O algoritmo GERAR-AMOSTRA, descrito no Quadro 4.4, apresenta como é realizado o processo de amostragem.

Procedimento GERAR-AMOSTRA ($\mathbf{y}, \mathbf{p}, N$)

- Passo 1 Iniciar $k = 0$;
- Passo 2 Se $k \leq N$, ir ao passo 3. Caso contrário, encerrar o algoritmo;
- Passo 3 $k = k + 1$;
- Passo 4 Para cada elemento y_i de $\mathbf{y}$:
 - Passo 4.1 Gerar variável aleatória uniformemente distribuída $\tau \sim U(0,1)$;
 - Passo 4.2 $y_i = 0$ se $\tau < 1 - p_i$; $y_i = 1$ caso contrário;
- Passo 5 Retornar ao passo 2;

Quadro 4.4 – Geração de amostra aleatória

O comportamento da EE em função do vetor de estado $\mathbf{y}$ é avaliado por meio da função de desempenho. Para cada índice proposto, as respectivas funções de desempenho, avaliadas para o evento $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$, são dadas pelas seguintes expressões:

$$D_{PLOC}(\mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \text{se o sistema é observável na ocorrência de } \mathbf{y} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.27)$$

$$D_{PLDC}(\mathbf{y}) = \frac{N_{Cmeds}(\mathbf{y})}{m(\mathbf{y})} \quad (4.28)$$

$$D_{PLIC}(\mathbf{y}) = \frac{N_{Cmeds}(\mathbf{y}) + M_{Cconj}(\mathbf{y})}{m(\mathbf{y})} \quad (4.29)$$

onde $N_{Cmeds}(\mathbf{y})$ é o número de medidas críticas no cenário $\mathbf{y}$; $M_{Cconj}(\mathbf{y})$ o número de medidas em conjuntos críticos no cenário $\mathbf{y}$ e $m(\mathbf{y})$ o número de medidas do cenário $\mathbf{y}$.

Os indicadores PLOC, PLIC e PLDC são obtidos a partir de uma amostra aleatória $\mathbf{y} = [\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)}]$ por meio das expressões (4.30) - (4.32), onde ℓ_{PLOC} , ℓ_{PLIC} e ℓ_{PLDC} são os valores esperados das respectivas funções de desempenho.

$$PLOC \cong \hat{\ell}_{PLOC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_{PLOC}(\mathbf{y}^{(i)}) \quad (4.30)$$

$$PLDC \cong \hat{\ell}_{PLDC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_{PLDC}(\mathbf{y}^{(i)}) \quad (4.31)$$

$$PLIC \cong \hat{\ell}_{PLIC} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_{PLIC}(\mathbf{y}^{(i)}) \quad (4.32)$$

O algoritmo Índices-MCS do Quadro 4.5 apresenta o cálculo dos índices propostos empregando-se o método de Monte Carlo Simples. O PLIC e o PLDC são computados no procedimento substituindo-se D_{PLOC} por D_{PLOC} e D_{PLIC} por D_{PLDC} , respectivamente. É importante notar que somente os estados $\mathbf{y}$ observáveis são empregados para estes índices, sendo N nesses casos o número total de casos observáveis amostrados. Deve-se empregar um número elevado de amostras ou pode-se amostrar somente estados observáveis da distribuição de $\mathbf{y}$, empregando-se o método de amostragem da aceitação-e-rejeição [Rubi08]. O método é facilmente

programável inserindo-se um passo adicional no algoritmo GERAR-AMOSTRA que descarta a amostra que resulta em um caso em que o sistema é não observável.

Procedimento Índices-MCS()

- Passo 1 Definir os eventos a serem simulados;
- Passo 2 Definir a estrutura do vetor de estado $\mathbf{y}$;
- Passo 3 Definir as probabilidades de sucesso p_i de cada elemento y_i ;
- Passo 4 Gerar amostra $\mathbf{y} = \mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)}$ a partir de $f(\mathbf{y}; \mathbf{p})$;
- Passo 5 Obter amostra $(D_{PLOC}(\mathbf{y}^{(1)}), \dots, D_{PLOC}(\mathbf{y}^{(N)}))$;
- Passo 6 Calcular $\hat{\ell}_{PLOC}$;
- Passo 7 Calcular o erro relativo e o intervalo de confiança para $\hat{\ell}_{PLOC}$;
- Passo 8 Repetir os passos 1-7 para o PLIC e PLDC;

Quadro 4.5 – Avaliação probabilística da capacidade de observação usando SMC Simples

O algoritmo anterior permite a determinação, de forma simples, dos indicadores propostos. A sua vantagem é, distintamente das enumerações realizadas na seção 4.4, ser independente da dimensão do sistema, estando apenas limitado pelo número de amostras empregadas e pelo erro relativo desejado. Todavia, se a indisponibilidade dos equipamentos é pequena ou a redundância do sistema de medição é elevada, tornando pequenos os valores dos índices a serem estimados, o cálculo do PLOC, PLIC e PLDC por meio de simulação de Monte Carlo Simples não produz resultados confiáveis. Nestas situações, faz-se necessário o emprego de muitas amostras, o que pode inviabilizar o processo de simulação. Alternativamente, para que seja possível obter estimativas de melhor qualidade sem a necessidade de se recorrer a um número de amostras proibitivo, pode-se utilizar as técnicas de redução de variância.

4.4.3 Simulação de Monte Carlo por Amostragem por Importância e Rastreamento

Nesta Tese, a técnica de amostragem por importância com minimização por cross-entropia foi utilizada para a redução de variância. O objetivo desta técnica é ajustar os parâmetros da distribuição de probabilidade (4.26) para que seja a mais próxima possível da função de importância ótima g^* . Como a distribuição de probabilidade $f(\mathbf{y}; \mathbf{p})$ pertence à família exponencial de distribuições – cada componente segue o modelo de Bernoulli, que faz parte desta classe de distribuições (Ver Anexo A) – os parâmetros ótimos podem ser determinados analiticamente.

Conforme apresentado no Capítulo 3, os parâmetros de $f(\mathbf{y}; \mathbf{p})$ correspondentes à função de importância ótima $g = f(\mathbf{y}; \mathbf{v})$ são obtidos, para o caso do índice PLOC, pela resolução do sistema de equações (4.33), cuja solução é dada pela expressão (4.34).

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[D_{PLOC}(\mathbf{y}^{(k)}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \ln f(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{v}) \right] = 0 \quad (4.33)$$

$$v_i = \frac{\sum_{k=1}^N LR(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{p}, \mathbf{w}) D_{PLOC}(\mathbf{y}^{(k)}) y_i^{(k)}}{\sum_{k=1}^N LR(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{p}, \mathbf{w}) D_{PLOC}(\mathbf{y}^{(k)})} \quad (4.34)$$

onde:

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$: vetor de taxas de indisponibilidade originais;

$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_m)$: vetor de taxas de indisponibilidade de tentativa;

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$: vetor de taxas de indisponibilidade ajustadas;

Repare que a amostra $\mathbf{y} = [\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)}]$ é extraída de $f(\mathbf{y}; \mathbf{w})$ empregando-se o algoritmo GERAR-AMOSTRA. As expressões (4.33) e (4.34) obtidas para o índice PLOC podem ser empregadas para os índices PLDC ou PLIC, substituindo-se $D_{PLOC}(\mathbf{y}^{(k)})$ por $D_{PLDC}(\mathbf{y}^{(k)})$ ou $D_{PLIC}(\mathbf{y}^{(k)})$, respectivamente.

Como o número de parâmetros pode ser consideravelmente grande, a minimização por cross-entropia pode falhar, devido à degeneração da razão de verossimilhança. Para atenuar este fenômeno, propõe-se o uso da técnica de rastreo que identificará e modificará somente os parâmetros mais influentes no valor esperado da função de desempenho. Isto é feito através da análise de sensibilidade dos parâmetros da expressão (4.26) em relação a cada valor esperado da função de desempenho. Os parâmetros de menor sensibilidade são fixados em seus valores nominais (originais), enquanto os parâmetros de maior sensibilidade são determinados de acordo com as expressões (4.33) e (4.34). O algoritmo Índices-MC-SCR, mostrado no Quadro 4.6, descreve os passos para obtenção dos indicadores PLIC, PLOC e PLDC através da amostragem por importância e rastreo. O procedimento consiste de duas etapas: a primeira consiste na determinação (ou “rastreo”) dos parâmetros-gargalo, o que corresponde aos passos 4-10; na segunda são determinados os parâmetros da função de importância ótima $g = f(\mathbf{y}; \hat{\mathbf{v}}')$ e posteriormente calculado o índice PLOC,

correspondendo aos passos 11-15. Os índices PLDC e PLIC são calculados no passo 15 substituindo-se D_{PLOC} por D_{PLDC} e D_{PLIC} , respectivamente.

Procedimento Índices-MCAI-CER()

- Passo 1 Definir os eventos a serem simulados;
- Passo 2 Definir a estrutura do vetor de estado $\mathbf{y}$;
- Passo 3 Definir as probabilidades de sucesso p_i de cada elemento y_i ;
- Passo 4 Inicializar $t = 1$ e os conjuntos gargalos $\Omega_{PG}^0 = \{1, \dots, m\}$ e $\Omega_{PG}^t = \{\emptyset\}$. Definir a tolerância ϵ ;
- Passo 5 Obter amostra $\mathbf{y} = [\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N_0)}]$ a partir $f(\mathbf{y}; \mathbf{p})$;
- Passo 6 Obter amostra $(D_{PLOC}(\mathbf{y}^{(1)}), \dots, D_{PLOC}(\mathbf{y}^{(N_0)}))$;
- Passo 7 Obter $\hat{\mathbf{v}}^{(t)}$ utilizando a expressão (4.28);
- Passo 8 Obter as variações relativas de cada parâmetro $(\delta_1^{(t)}, \dots, \delta_m^{(t)})$ usando a expressão:

$$\delta_i = (p_i - v_i)/p_i, i = 1, \dots, m$$

- Passo 9 Para cada parâmetro i :
- Passo 9.1 Se $\delta_i^{(t)} < \epsilon$, então declarar o parâmetro como não-gargalo e fazer $\hat{v}_i^{(t)} = p_i$;
- Passo 9.2 Se $\delta_i^{(t)} \geq \epsilon$, então declarar o parâmetro como parâmetro-gargalo e incluir índice i no conjunto Ω_{PG}^t ;
- Passo 10 Repetir d vezes passos 2-6, fazendo-se $t = t + 1$ e $\Omega_{PG}^t = \{\emptyset\}$ a cada repetição;
- Passo 11 Construir o vetor $\hat{\mathbf{v}}'$ fazendo-se $\hat{v}'_i = \hat{v}_i^{(d)}$ sse o índice i está em Ω_{PG}^d e $\hat{v}'_i = p_i$ caso contrário;
- Passo 12 Obter amostra aleatória $\mathbf{y} = [\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(N)}]$ a partir $g(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}; \hat{\mathbf{v}}')$;
- Passo 13 Obter valor de $PLOC$ por meio da expressão:

$$PLOC \cong \hat{\ell}_{PLOC}^{SCR} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D_{PLOC}(\mathbf{y}^{(k)}) \frac{f(\mathbf{y}^{(k)}; \mathbf{p})}{f(\mathbf{y}^{(k)}; \hat{\mathbf{v}}')}$$

- Passo 14 Calcular o erro relativo e intervalo de confiança de $\hat{\ell}_{PLOC}^{SCR}$;
- Passo 15 Repetir os passos 4 -14 para calcular o PLDC e PLIDC;

Quadro 4.6 – Avaliação probabilística da capacidade de observação usando SMC com amostragem por importância e rastreamento.

A amostra extraída de $g = f(\mathbf{y}; \hat{\mathbf{v}}')$ (passo 12 do algoritmo) prioriza eventos que tenham maior influência no indicador a ser calculado. Tais eventos, em função da caracterização dos indicadores, têm forte relação com as criticalidades dos elementos simulados. Assim sendo, a simulação de Monte Carlo com amostragem por importância e rastreio possui a capacidade de evidenciar, probabilisticamente, as criticalidades com maior repercussão na observabilidade e na depuração de erros grosseiros. Além disso, a variação $p_i - \hat{v}'_i$ sofrida por cada parâmetro p_i reflete o impacto nos indicadores e, portanto, na criticalidade e observabilidade, do elemento i simulado.

A técnica da amostragem por importância e rastreamento requer somente como suposição que o modelo de probabilidade do estado seja paramétrico. Dentre os métodos apresentados no Capítulo 3, é o que geralmente proporciona redução de variância mais significativa [Rubi08]. Este método, todavia, é negativamente afetado pela dimensão do vetor de estado e pela raridade dos eventos de interesse, sendo indicado para avaliação da capacidade de observação nos casos em que as indisponibilidades dos elementos não são eventos raríssimos ou a redundância do sistema é elevadíssima.

Esta seção apresentou o cálculo de índices probabilísticos a partir dos quais se pode inferir sobre a capacidade de observação de um sistema de potência pela função EE. Os índices aqui propostos medem a capacidade de observação através do risco de desempenho inadequado da função EE. Foi apresentado o cálculo dos índices de forma determinística e também por simulação, através do método de Monte Carlo. Na próxima seção será apresentada uma forma concisa de se avaliar a capacidade de observação, com base nos índices calculados e por meio de um sistema de classificação que retrata a adequação do sistema de medição para o sucesso da função EE.

4.4.4 Graus de Observação

No mercado financeiro, é prática comum das instituições captarem recursos através da emissão de dívidas. As agências de risco ou rating atribuem a cada instituição, em função da sua capacidade de geração de caixa e pagamento das dívidas emitidas, uma classificação que indica ao investidor o risco de investimento nos ativos da empresa. Com base na classificação do ativo, as empresas podem oferecer maior ou menor remuneração ao valor investido, enquanto os investidores podem aplicar seus recursos com plena consciência do risco de retorno.

Esta prática pode ser aplicada para graduar a confiança no monitoramento com sucesso de um sistema de potência. Nesta situação, cada plano de medição seria classificado de acordo com o risco de insucesso do desempenho da função EE, expresso pelo atendimento aos requisitos de observabilidade e de capacidade de depuração de EGs. De posse desta classificação, o usuário da estimação de estado teria então consciência, para o plano de medição fornecido, da capacidade da EE em prover dados de forma continuada e confiável.

Propõe-se nesta Tese a classificação de planos de medição, em função dos riscos de desempenho inadequado da EE, através dos *Graus de Observação*. Define-se como Grau de Observação um conjunto de classificações atribuídas aos planos de medição de uma rede elétrica que ateste o risco de insucesso do processo de estimação de estado em um horizonte de tempo longo. Como o risco de falha da EE pode ser definido e avaliado de diferentes maneiras, diferentes metodologias para atribuição das notas podem ser empregadas, dependendo dos objetivos do operador/planejador. Em analogia ao sistema de notas de crédito adotado no mercado financeiro [Nye14], a cada sistema de medição pode ser atribuída uma nota de D (redundância insuficiente) até AAA (elevado atendimento aos aspectos observabilidade, robustez e capacidade de depuração de EGs). As notas podem ainda ser modificadas através de *tendências*, que podem ser positivas (+) ou negativas (-). A aplicação destas tendências busca retratar pequenas diferenças na capacidade de observação proporcionada por sistemas de medição distintos, mas cujo efeito sobre a função EE são similares.

Define-se também o chamado *Selo de Capacidade de Observação*, como a chancela atribuída a um sistema de medição que assegura que o risco da EE ser malsucedida é consideravelmente pequeno. Nesta Tese, somente os sistemas com notas superiores a BB+ possuirão Selo de Capacidade de Observação. A Tabela 4.4 apresenta as Graus, os Selos, e as características gerais dos planos de medição correspondentes a cada nota. Os requisitos a serem atendidos são os requisitos de

observabilidade, robustez e confiabilidade, representados pelos índices PLOC, PLIC e PLDC em valores percentuais. Com base no que foi exposto no Capítulo 4, o índice PLOC, apesar de estar associado ao requisito de observabilidade, também considera, de forma indireta, o requisito confiabilidade, por contabilizar as C1 e C2-tuplas. Portanto, o indicador PLOC será o indicador de referência, que definirá o grau de capacidade de observação. A tendência positiva ou negativa será atribuída em função dos indicadores PLIC e PLDC de acordo com as seguintes regras:

Regra 1: Se o PLDC porcentual for superior ao PLOC, então o viés será negativo (-). Caso contrário, verificar o PLIC porcentual e aplicar a regra 2.

Regra 2: Se o PLIC porcentual for inferior ao PLOC o viés será positivo (+). Caso contrário, a grau não possuirá tendência.

Um grau com tendência positiva indica melhor capacidade de detecção e identificação de EGs para sistemas de medição classificados com um mesmo grau. Por outro lado, um grau com tendência negativa aponta uma deterioração da capacidade de detecção quando comparado a outros sistemas de medição classificados com o mesmo grau. Como exemplo, seja o sistema de 4 barras empregado na Seção 4.4.1. Os indicadores PLIC, PLOC e PLDC obtidos na Seção 4.3.1 foram 31,25%; 66,67%; e 90,90%, respectivamente. De acordo com o sistema de classificação proposto, este sistema teria um grau de observação CCC. Portanto, o usuário da EE teria consciência de que o processo de EE produz resultados confiáveis apenas quando não há indisponibilidade de equipamentos da rede ou quando ocorrem erros em um seleto grupo de medidas e ramos da rede.

Tabela 4.4 – Graus de Observação.

	Nota	Grau	Descrição
<i>Selo de Capacidade de Observação</i>	AAA	Excelente	Extrema capacidade de atendimento aos requisitos. Intervalo (%) = [0-5]
	AA ⁺ AA AA ⁻	Alto	Elevada capacidade de atendimento aos requisitos. Difere do grau AAA em pequenos valores. Intervalo (%) = (5-10]
	A ⁺ A A ⁻	Médio-Alto	Grande capacidade de atendimento aos requisitos, porém é mais suscetível à efeitos adversos devido a alterações na rede do que nas categorias superiores. Intervalo (%) = (10-15]
	BBB ⁺ BBB BBB ⁻	Médio-baixo	Capacidade adequada de atendimento aos requisitos. Entretanto, condições adversas podem levar ao enfraquecimento da capacidade de atendimento aos requisitos. Intervalo (%) = (15-20]
	BB ⁺ BB BB ⁻	Baixo	Menos vulnerável do que as categorias inferiores. Entretanto, quando sujeito a situações adversas, pode não atender os requisitos. Intervalo (%) = (20-25]
	B ⁺ B B ⁻	Muito Baixo	Maior vulnerabilidade do que os sistemas 'BB'. Intervalo (%) = (25-30]
	CCC	Extremamente baixo	O sistema é consideravelmente vulnerável e atende os requisitos somente em condições favoráveis. Intervalo (%) = (30-35]
	CC	Razoável	Maior vulnerabilidade do que sistemas 'CCC' e atende os requisitos somente em condições muito favoráveis. Intervalo (%) = (35-40]
	C	Mínimo	Capacidade de detecção e identificação de EGs seriamente comprometida, alta probabilidade de não observação das variáveis de estado. Intervalo (%) = (40-45]
	D	Insuficiente	Medidas insuficientes para execução da EE. Intervalo (%) = (45-100]

4.4.5 Entropia Relativa e Capacidade de Observação

O grau de atendimento aos requisitos de observabilidade, confiabilidade e robustez pode ser mensurado através da quantidade de informação contida nas medidas processadas pela EE. Intuitivamente, constata-se que quanto maior a quantidade de medidas, melhor é o desempenho da EE na determinação do estado do sistema de potência e na depuração de erros nos dados. Portanto, a capacidade de observação pode ser relacionada com o volume de informação contida nas medidas que pode ser extraída e beneficiar o processo de EE.

No início do Capítulo 2, foi apresentado o modelo probabilístico das medidas adquiridas, o qual é novamente apresentado na expressão (4.30):

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{e} \quad (4.35)$$

onde $\mathbf{z}(m \times 1)$ é vetor contendo o valor das medidas, $\mathbf{x}(n \times 1)$ é o vetor de estado, $\mathbf{h}(m \times 1)$ é a função que relaciona o estado às medidas e $\mathbf{e}$ uma variável aleatória que representa o erro do processo de aquisição dos dados.

Por depender da variável aleatória $\mathbf{e}$, pode-se associar ao vetor de medidas adquiridas um vetor variável aleatória $\mathbf{Z}$ cuja função densidade de probabilidade pertence à uma família de distribuições parametrizada pelo estado da rede $f(\mathbf{z}; \mathbf{x})$. Tendo em vista a expressão (4.35), nota-se que a forma de $f(\mathbf{z}; \mathbf{x})$ depende da função $\mathbf{h}(\mathbf{x})$. Uma vez que esta representa a relação entre estado e medida por meio da configuração da rede elétrica, pode-se afirmar que $f(\mathbf{z}; \mathbf{x})$ ou uma amostra de medidas extraída desta distribuição contém informação, ainda que condensada, sobre o estado operativo da rede. O estado estimado $\hat{\mathbf{x}}$ determinado pela EE, por exemplo, é obtido a partir de uma amostra de medidas (aqui suposta desprovida de EGs) $\mathbf{z}_v \sim f(\mathbf{z}; \mathbf{x}_v)$, onde $\mathbf{x}_v$ é o estado verdadeiro da rede elétrica. A EE, portanto, extrai, indiretamente por meio da amostra $\mathbf{z}_v$, a informação sobre o estado operativo da rede contida na distribuição $f(\mathbf{z}; \mathbf{x}_v)$.

Foi visto no Capítulo 3 que a entropia relativa ou divergência de Kullback-Leibler entre duas distribuições de probabilidade f e g pode quantificar a dissimilaridade entre estas. Do ponto de vista da Teoria da Informação (TI), a entropia relativa reflete o aumento de incerteza sobre comportamento de uma variável aleatória quando esta é descrita por uma distribuição de probabilidade g ao invés da sua distribuição real f . A informação contida em f pode ser expressa por meio do aumento da incerteza quantificado pela entropia relativa [Rubi08].

Uma propriedade importante da divergência de Kullback-Leibler é que ela é não-negativa, sendo nula se e somente se as densidades de probabilidades forem iguais, isto é, $f = g$. Portanto, quanto menor a entropia relativa entre duas distribuições de probabilidade, mais idênticas serão as distribuições e menor será a perda de informação quando uma é utilizada no lugar da outra. Este aspecto como será visto a seguir, pode ser explorado na caracterização da capacidade de observação do estado operativo.

Considere que o estado de uma rede elétrica durante certo intervalo de tempo é $\mathbf{x}_v$ e que uma amostra de medidas $\mathbf{z}_v$ é coletada durante este intervalo. Portanto, a variável aleatória $\mathbf{Z}_v$ associada à amostra $\mathbf{z}_v$ terá distribuição de probabilidade $f(\mathbf{z}; \mathbf{x}_v)$. A entropia relativa quando se assume que o estado da rede elétrica é $\hat{\mathbf{x}}$ ao invés de $\mathbf{x}_v$ é dada por:

$$Div_{KL}(\hat{\mathbf{x}}) = \int f(\mathbf{z}; \hat{\mathbf{x}}) \log \frac{f(\mathbf{z}; \mathbf{x}_v)}{f(\mathbf{z}; \hat{\mathbf{x}})} d\mathbf{z} \quad (4.36)$$

A divergência de Kullback-Leibler, calculada conforme a expressão (4.36), quantifica o aumento da incerteza (isto é, da imprevisibilidade) dos valores de $\mathbf{Z}_v$ quando é assumido que o estado da rede elétrica é $\hat{\mathbf{x}}$ ao invés de $\mathbf{x}_v$. Pode-se associar à imprevisibilidade de $\mathbf{Z}_v$ a presença de resíduos normalizados elevados na EE. Repare que, se $\mathbf{x}_v \neq \hat{\mathbf{x}}$, então $E[\mathbf{r}] = E[\mathbf{z}_v - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}})] \neq \mathbf{0}$.

A partir da expressão (4.36), constata-se que se $\mathbf{x}_v = \mathbf{x}$, então $Div_{KL}(\hat{\mathbf{x}}) = 0$, não havendo aumento de incerteza. Entretanto a expressão anterior também afirma que $Div_{KL}(\hat{\mathbf{x}})$ pode ser próximo de zero quando as distribuições $f(\mathbf{z}; \hat{\mathbf{x}})$ e $f(\mathbf{z}; \mathbf{x}_v)$ forem similares, mesmo que $\mathbf{x}_v \neq \hat{\mathbf{x}}$. Ou seja: dependendo da forma de $f(\mathbf{z}; \mathbf{x})$ (e da função $\mathbf{h}(\mathbf{x})$) pode não haver aumento da incerteza nas medidas quando se assume que o estado da rede é $\hat{\mathbf{x}}$ ao invés de $\mathbf{x}_v$. É de se esperar nestes casos, que a EE tenha maior dificuldade em determinar corretamente o estado operativo da rede elétrica, pois sendo as distribuições de probabilidade $f(\mathbf{z}; \hat{\mathbf{x}})$ e $f(\mathbf{z}; \mathbf{x}_v)$ similares, ambas descrevem adequadamente o comportamento de $\mathbf{z}_v$.

Esta dificuldade se manifesta na EE como a não-observabilidade da rede ou a incapacidade em depurar erros grosseiros. Note que, se $Div_{KL}(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ e $\hat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{x}_v$, então $f(\mathbf{z}; \hat{\mathbf{x}}) = f(\mathbf{z}; \mathbf{x}_v)$ não sendo possível discernir se uma amostra de medidas $\mathbf{z}_v$ provém do modelo $\mathbf{z}_v = \mathbf{h}(\mathbf{x}_v) + \mathbf{e}$ ou de $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{e}$. Logo, o estado determinado pela EE não é único, sendo a rede, portanto, não-observável. Em relação à capacidade de depuração de EGs, considere o modelo das medidas quando há ocorrência de erros grosseiros pode ser dado por (4.32), onde $\mathbf{bd}(\mathbf{x})$ é o vetor que representa o erro grosseiro. Quando

o erro ocorre nas medidas, $\mathbf{bd}(x)$ é constante, enquanto para erros de parâmetros ou topologia, $\mathbf{bd}(x)$ dependerá do estado da rede elétrica.

$$\mathbf{z} = \mathbf{h}(x) + \mathbf{e} + \mathbf{bd}(x) \quad (4.37)$$

Analisando-se a situação em que medidas contém erros grosseiros (portanto $\mathbf{bd}(x) = \mathbf{bd}$), para um estado verdadeiro x_v , a amostra de medidas empregada pela EE é representada por $\mathbf{z}_{bad} = \mathbf{h}(x_v) + \mathbf{bd} + \mathbf{e}$. A EE, por desconhecer a presença dos EGs na amostra $\mathbf{z}_{bad}$, obtém, a partir desta e tendo por base o modelo (4.35), o estado corrompido $x_{bad} \neq x_v$. Se $Div_{KL}(x_{bad})$ assume valores muito próximos de zero, porém não-nulos, então não há aumento significativo da incerteza ao se utilizar $\mathbf{z}_{bad} = \mathbf{h}(x_{bad}) + \mathbf{e}$ em lugar de $\mathbf{z}_v = \mathbf{h}(x_v) + \mathbf{e}$, pois as distribuições $f(\mathbf{z}; x_v)$ e $f(\mathbf{z}; x_{bad})$ são similares, embora não idênticas. Entretanto, como $\mathbf{z}_{bad} = \mathbf{z}_v + \mathbf{bd}$, conclui-se que, à medida que $Div_{KL}(x_{bad})$ se aproxima de zero, fica cada vez mais difícil determinar se o vetor de medidas $\mathbf{z}_{bad}$ contém EGs ou não. Logo, pode-se afirmar que as situações em que $Div_{KL}(\hat{x})$ é próximo de zero e $\hat{x} \neq x_v$ refletem a dificuldade de EE em processar erros grosseiros.

Nota-se pelo exposto que há certa correspondência entre o atendimento aos requisitos de observabilidade e capacidade de depuração de erros grosseiros e a entropia relativa dada pela expressão (4.36). Esta relação pode ser explicitada por meio da aproximação quadrática (ver Apêndice A) mostrada na expressão (4.37):

$$Div_{KL}(\hat{x}) \approx [\hat{x} - x_v]^T \mathbf{G}(\hat{x}) [\hat{x} - x_v] \quad (4.37)$$

Ao menos localmente, constata-se que $Div_{KL}(\hat{x})$ é uma função do estado verdadeiro x_v , do estado $\hat{x}$ e da matriz de ganho $\mathbf{G}(\hat{x})$. Sendo a matriz de ganho positiva-semidefinida, $Div_{KL}(\hat{x})$ possui, em torno do ponto x_v , pelo menos um mínimo global, sendo um deles obrigatoriamente $\hat{x} = x_v$. Caso a rede elétrica seja observável, a matriz de ganho não é singular. Logo, o sistema de equações $\mathbf{G}(\hat{x})[\hat{x} - x_v] = \mathbf{0}$ admite uma única solução, sendo o mínimo global de $Div_{KL}(\hat{x})$ único. Por outro lado, a matriz de ganho para redes não observáveis é singular. Consequentemente, a solução de $\mathbf{G}(\hat{x})[\hat{x} - x_v] = \mathbf{0}$ não é única e $Div_{KL}(\hat{x})$ possuirá mais de um mínimo global. Depreende-se do exposto que a observabilidade da rede elétrica está relacionada à unicidade do mínimo global de $Div_{KL}(\hat{x})$.

Considere agora $\mathbf{G}_0$ como a matriz de ganho original da rede elétrica e $\mathbf{G}_1$ a matriz após a indisponibilidade de uma tupla de medidas, unidades de medição ou ramos da rede, a relação entre $\mathbf{G}_0$ e $\mathbf{G}_1$ pode ser quantificada como:

$$\mathbf{G}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_0(\mathbf{x}) - \Delta\mathbf{G}(\mathbf{x}) \quad (4.38)$$

onde $\Delta\mathbf{G}$ representa as alterações no sistema elétrico/plano de medidas.

Se porventura a indisponibilidade de uma tupla de elementos torna a rede não observável, então existe $\mathbf{c} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_v \neq \mathbf{0}$ tal que:

$$Div_{KL}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}^T \mathbf{G}_1(\hat{\mathbf{x}}) \mathbf{c} = 0 \quad (4.39)$$

Substituindo a expressão (4.39) na expressão (4.38) resulta nas expressões (4.40) e (4.41):

$$Div_{KL}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{c}^T [\mathbf{G}_0(\hat{\mathbf{x}}) - \Delta\mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}})] \mathbf{c} = 0 \quad (4.40)$$

$$\mathbf{c}^T [\mathbf{G}_0(\hat{\mathbf{x}})] \mathbf{c} = \mathbf{c}^T [\Delta\mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}})] \mathbf{c} \quad (4.41)$$

Pode-se concluir das expressões (4.40) e (4.41), que uma criticalidade contém toda informação necessária para distinguir certo estado $\hat{\mathbf{x}}$ do estado verdadeiro da rede $\mathbf{x}_v$. Isto pode ser constatado na EE, pelo fato de que uma tupla crítica, quando removida do sistema, gera ilhas observáveis, conectadas por ramos não-observáveis [Mont99]. Conclui-se, tendo por base as características anteriormente apresentadas, que a $Div_{KL}(\hat{\mathbf{x}})$ reflete adequadamente o atendimento de um plano de medição aos requisitos de observabilidade, robustez e capacidade de depuração de EGs. Propõe-se nesta Tese, a quantificação da capacidade de observação do estado por meio da entropia relativa $Div_{KL}(\hat{\mathbf{x}})$.

4.4.6 Coeficiente de Informação Relativa

Foram apresentadas na seção anterior as propriedades da entropia relativa que justificam seu uso como quantificadora da capacidade de observação. Entretanto, mesmo a expressão (4.36) ou (4.37) esbarra em dificuldades de uso prático. A maior dificuldade reside na dependência de (4.36) ou (4.37) dos estados aproximado, $\hat{\mathbf{x}}$, e verdadeiro, $\mathbf{x}_v$. O mais adequado seria um indicador que representasse uma propriedade intrínseca do sistema que não fosse dependente dessas variáveis, mas apenas da relação entre as medidas e a topologia da rede. Para que isto seja possível, uma alternativa seria aplicar a simulação de Monte Carlo, amostrando-se os estados verdadeiro e aproximado e computar o valor esperado de (4.36) ou (4.37) para os

estados sorteados. Outra possibilidade, computacionalmente mais barata, é estudar as propriedades algébricas da matriz de ganho empregada nos estudos de observabilidade e criticalidade. Esta matriz embute as relações estruturais entre as medidas da rede e o estado, contendo desta forma, a informação intrínseca da rede, que independe dos estados que a rede assume e depende somente da relação entre o estado, a configuração da rede elétrica, e as medidas presentes no sistema de medição.

Realizando uma mudança de coordenadas em (4.37), é possível mostrar que $D_{KL}(\hat{\mathbf{x}})$ depende dos autovalores da matriz de Ganho, mais precisamente da relação:

$$\lambda_{min}\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_v\|^2 \leq Div_{KL}(\hat{\mathbf{x}}) \leq \lambda_{max}\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_v\|^2 \quad (4.42)$$

onde λ_{min} e λ_{max} são o menor e maior autovalor de $\mathbf{G}(\hat{\mathbf{x}})$, respectivamente.

Conforme mostra a expressão (4.42) os autovalores fornecem os limitantes superior e inferior para a entropia relativa $Div_{KL}(\hat{\mathbf{x}})$. Além disso, nota-se que qualquer variação nestes tem influência na entropia relativa de qualquer estado. Portanto, a capacidade de observação, na ótica da TI e tendo em vista as características desejadas ao indicador, pode ser concisamente expressa através dos autovalores da matriz de Ganho.

Nesta Tese, propõe-se o uso do determinante da matriz de ganho, sendo aqui definido o indicador coeficiente de informação relativa ($Coef_{IR}$) através da expressão (4.39):

$$Coef_{IR} = \ln \left(\frac{\det(\mathbf{G}_u)}{\det(\mathbf{G}_{max})} \right) \quad (4.43)$$

onde $\det(\mathbf{G}_u)$ é o determinante da matriz de ganho $\mathbf{G}_u$, formada pelas medidas que estão presentes no plano de medição e $\det(\mathbf{G}_{max})$ é o determinante da matriz de ganho $\mathbf{G}_{max}$, considerando o sistema com máxima redundância.

A escolha do determinante da matriz de ganho está relacionada à melhor caracterização de situações em que a rede é não observável (menor autovalor da matriz de ganho é nulo), pois para sistemas não observáveis, $\det(\mathbf{G}_u) = 0$ e, portanto $Coef_{IR} = -\infty$. Os determinantes das matrizes de ganho são, em geral, elevados, justificando o emprego do logaritmo da razão dos determinantes para a obtenção de valores menores e de melhor entendimento. A razão entre determinantes em (4.43) tem como objetivo expressar a informação relativa entre o plano de medição avaliado e um plano de medição idealizado que contém todas as medidas possíveis do sistema. Sendo assim,

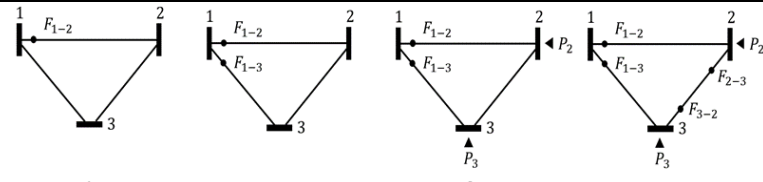
a expressão (4.43) reflete o decréscimo da entropia relativa (e portanto, a degradação da capacidade de informação) quando um plano de medição de menor redundância é utilizado ao invés de um plano com redundância completa. A razão $\det(\mathbf{G}_u)/\det(\mathbf{G}_{\max})$ varia de 0 a 1, sendo 0 para sistemas não observáveis e 1 para sistemas com redundância completa. O coeficiente de informação relativa é, portanto, uma grandeza não-positiva, variando entre $-\infty$ (redundância insuficiente) e 0 (redundância máxima).

Para demonstrar as propriedades do índice proposto, considere os diferentes sistemas de medição indicados na Figura 4.1. O cálculo de (4.43) para cada sistema encontra-se na Tabela 4.5, onde, por conveniência, os sistemas de medição da Figura 4.1 são também mostrados.

O sistema D, conforme visto no início deste capítulo, possui a maior capacidade de observação. O $Coef_{IR}$ neste caso é próximo de zero, estando o sistema próximo da redundância máxima. No caso C, a remoção das medidas promove pequena degradação da capacidade de observação, o que pode ser percebido pelos valores do determinante de $\mathbf{G}_u$ e do $Coef_{IR}$ quando comparados aos obtidos para o caso D. Como apenas a redundância foi comprometida, verifica-se uma ligeira redução no $Coef_{IR}$ (-0,42 para -0,57). Já no sistema B, a perda das injeções faz com as medidas remanescentes tornem-se críticas. Este fato se reflete no valor do $Coef_{IR}$, que é significativamente menor do que aqueles obtidos para os sistemas C e D. Por fim, o sistema A que é não observável, tem determinante nulo, sendo o seu $Coef_{IR}$ igual a $-\infty$. Isto corresponde à falta de informação para observar o estado da rede em sua totalidade e em qualquer circunstância.

Este exemplo numérico mostra que o coeficiente de informação relativa quantifica adequadamente a capacidade da observação do estado. Diferentemente dos indicadores probabilísticos, este é calculado de maneira exata, com baixo custo computacional e considera de maneira integrada a observabilidade, robustez e capacidade de processamento de erros grosseiros. Sua aplicação, entretanto, esbarra na dificuldade de interpretação dos seus resultados. Por fim, a entropia relativa $Div_{KL}(\hat{x})$ é uma medida geral, válida para qualquer processo de EE, pois quantifica informação, que independe do método de estimação empregado. Além disso, tem importância por estabelecer uma conexão pouco explorada entre a EE e a Teoria da Informação. Estudos nesta linha estão ainda incipientes e precisam de maior aprofundamento.

Tabela 4.5 – Coeficiente de Informação Relativa

	 A B C D Não-observável Observável Observável Observável			
$\log(\det(\mathbf{G}_u))$	$-\infty$	0	+1,30	+1,45
$\log(\det(\mathbf{G}_{\max}))$	+1,87	+1,87	+1,87	+1,87
$Coef_{IR}$	$-\infty$	-1,87	-0,57	-0,42

4.5 Conclusões

Este capítulo apresentou diferentes formas de quantificação da capacidade de observação. Foram apresentados índices associados à observabilidade e à capacidade de depuração de erros por parte da EE. Propõe-se através dos índices a mensuração da capacidade de observação em termos probabilísticos, sendo empregada a simulação de Monte Carlo como uma ferramenta para obter de forma eficiente e confiável cada índice proposto. Foi investigada ainda a capacidade de observação sob o ponto de vista da teoria da informação, tendo sido proposto um índice que mede tal capacidade em função da quantidade de informação provida pelo sistema de medição. No próximo capítulo serão apresentados os resultados obtidos com as metodologias propostas utilizando diferentes sistemas testes.

Capítulo 5

Testes e Resultados

5.1. Introdução

Ilustra-se neste capítulo a aplicação das metodologias propostas no Capítulo 4. A capacidade de observação do estado de redes elétricas será aqui avaliada em sistemas testes comumente usados na literatura especializada, para diferentes cenários de medição, através da enumeração de criticalidades e dos indicadores propostos. Os sistemas testes utilizados foram o de 6 barras [Lond07], e os do IEEE de 24, 30 e 118 barras, considerando-se nas simulações diferentes planos de medição. Todos os algoritmos foram implementados em linguagem MATLAB, sendo todas as simulações executadas em um computador Intel Core i7, 3,4 GHz e 8GB de memória RAM. Para simplificar a descrição dos resultados, denominar-se-ão neste capítulo as k-tuplas críticas de medidas, de unidades de medição e as criticalidades de ramos por Ck-meds, Ck-UMs e Ck-ramos, respectivamente.

5.2 Sistema 6-barras

Para facilitar o entendimento da metodologia proposta, o sistema teste de 6 barras, da Figura 5.1 foi utilizado para os testes iniciais, devido a seu pequeno porte. O plano de medição indicado nesta figura compreende nove medidas sendo 4 de injeção de potência e 5 de fluxo de potência, coletadas por 6 unidades de medição localizadas em cada barra. De acordo com [Lond07], as Ck-tuplas de medidas deste sistema-teste são as seguintes:

- 1) 1-tupla: (P_3) ;
- 2) 2-tuplas: (P_{1-2}, P_1) , (P_{2-3}, P_1) , (P_{1-2}, P_{2-3}) e (P_{4-6}, P_6) ;
- 3) 3-tuplas: (P_{4-5}, P_{5-4}, P_5) ;

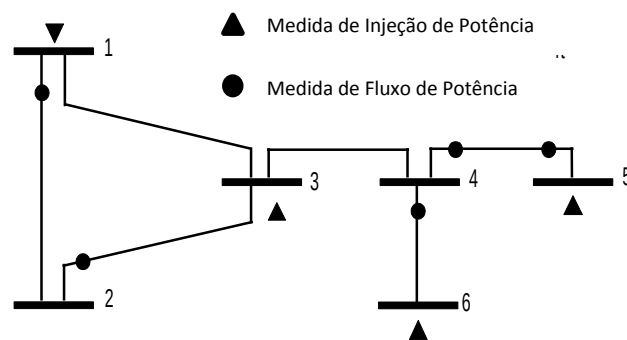


Figura 5.1 – Sistema teste de 6 Barras.

As criticalidades de medidas que representam maior risco à EE são as Ck-tuplas de cardinalidade até 3, que serão determinadas por meio do algoritmo de identificação de trios críticos. Para ilustrar este método, a matriz de covariância **E** correspondente ao plano de medição empregado é apresentada no Quadro 5.1. Com base nas propriedades das C1- e C2-tuplas, identifica-se a medida P_3 como crítica, pois a coluna correspondente a esta em **E** é nula. Sendo as colunas referentes aos pares (P_{1-2}, P_1) , (P_{2-3}, P_1) , (P_{1-2}, P_{2-3}) e (P_{4-6}, P_6) são colineares, classifica-se estes como críticos. As medidas redundantes deste sistema são, portanto, as medidas P_5 , P_{4-5} e P_{5-4} . Tornando-se a medida P_5 ausente, obtém-se a matriz de covariância com a estrutura apresentada no Quadro 5.2. Comparando-se as estruturas, conclui-se que sofrem alterações apenas as colunas/linhas referentes às medidas P_{4-5} e P_{5-4} . Estas medidas, conforme sugere o quadro 5.2, constituem um par crítico P_5 está indisponível. Por fim, conclui-se que as medidas, P_5 , P_{4-5} e P_{5-4} constituem um trio crítico.

	P_1	P_3	P_5	P_6	P_{1-2}	P_{2-3}	P_{4-5}	P_{4-6}	P_{5-4}
P_1	1/6	0	0	0	-1/3	-1/6	0	0	0
P_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P_5	0	0	2/3	0	0	0	1/3	0	-1/3
P_6	0	0	0	1/2	0	0	0	1/2	0
P_{1-2}	-1/3	0	0	0	2/3	1/3	0	0	0
P_{2-3}	-1/6	0	0	0	1/3	1/6	0	0	0
P_{4-5}	0	0	1/3	0	0	0	2/3	0	1/3
P_{4-6}	0	0	0	1/2	0	0	0	1/2	0
P_{5-4}	0	0	-1/3	0	0	0	1/3	0	2/3

Quadro 5.1 – Estrutura da matriz de covariância **E** para o sistema de 6 Barras.

Repetindo-se o processo até que todas as medidas redundantes tenham sido testadas, obtém-se os trios críticos restantes. Neste caso em particular, a remoção de P_5 , P_{4-5} ou P_{5-4} resulta na C3-tupla (P_{4-5}, P_{5-4}, P_5) . A Tabela 5.1 apresenta as Ck-tuplas identificadas por meio deste procedimento. Também se aplicou o método *Branch-and-Bound* para a identificação das k-tuplas críticas de medidas deste sistema. Como o plano de medição informado dispõe de 9 medidas e 5 variáveis de estado, a máxima cardinalidade teórica das tuplas críticas de medidas existentes será $k_{lim} = 5$. Os resultados obtidos pelo algoritmo da Figura 4.3 para $k_{max} = 5$ foram idênticos aos obtidos pelo procedimento de identificação de trios críticos.

	P_1	P_3	P_6	P_{1-2}	P_{2-3}	P_{4-5}	P_{4-6}	P_{5-4}
P_1	1/6	0	0	-1/3	-1/6	0	0	0
P_3	0	0	0	0	0	0	0	0
P_6	0	0	1/2	0	0	0	1/2	0
P_{1-2}	-1/3	0	0	2/3	1/3	0	0	0
P_{2-3}	-1/6	0	0	1/3	1/6	0	0	0
P_{4-5}	0	0	0	0	0	1/2	0	1/2
P_{4-6}	0	0	1/2	0	0	0	1/2	0
P_{5-4}	0	0	0	0	0	1/2	0	1/2

Quadro 5.2 – Estrutura da Matriz de covariância com a indisponibilidade da medida P_5 .

Tabela 5.1 – Ck-meds do sistema de medição – sistema de 6 Barras.

Cardinalidade k	Ck-meds	Total
1	(P_3)	0
2	$(P_{4-6}, P_6), (P_{1-2}, P_{2-3}), (P_{1-2}, P_1), (P_{2-3}, P_1)$	3
3	(P_5, P_{4-5}, P_{5-4})	1

Para avaliação das criticalidades de unidades de medição, será utilizado o procedimento de identificação de C1- e C2-UMs, apresentado no Capítulo 4. O algoritmo do Quadro 4.2 determina se uma UM é crítica verificando-se a singularidade da matriz auxiliar C_u . Avaliando-se UMs em ordem crescente do número de medidas coletadas, a matriz auxiliar referente à UM na barra 3, $C_3 = E(2,2) = 0$, é singular. Portanto, a UM3 é classificada como crítica. As UMs 2 e 6, são não-críticas, pois as matrizes auxiliares $C_2 = E(5,5) = 1/6$ e $C_6 = E(3,3) = 1/2$, são invertíveis. As mesmas conclusões poderiam ser obtidas inspecionando-se as Ck-tuplas apresentadas na Tabela 5.1. Repare que a única medida da UM3 é a medida crítica P_3 . Também note que nem P_{2-3} e P_6 são C1-meds.

Examinando-se as UMs contendo duas medidas, constrói-se a matriz C_1 , que tem a forma indicada a seguir:

$$C_1 = \begin{array}{c|cc} & P_{1-2} & P_1 \\ \hline P_{1-2} & 2/3 & -1/3 \\ \hline P_1 & -1/3 & 1/6 \end{array}$$

Por inspeção visual dos elementos desta matriz, observa-se que suas linhas são proporcionais, sendo esta, portanto, singular. Logo, C_1 é crítica. A matriz auxiliar C_5 é dada por:

$$C_5 = \begin{array}{c|cc} & P_{4-5} & P_5 \\ \hline P_{4-5} & 2/3 & 1/3 \\ \hline P_5 & 1/3 & 2/3 \end{array}$$

A Eliminação de Gauss aplicada às linhas de C_5 resulta na matriz C'_5 :

$$C'_5 = \begin{array}{c|cc} & P_{4-5} & P_5 \\ \hline P_{4-5} & 2/3 & 1/3 \\ \hline P_5 & 0 & 1/2 \end{array}$$

Observa-se, portanto, que a UM5 não é crítica. A repetição do procedimento para a UM4 permite classificá-la como não-crítica.

Com base no algoritmo do Quadro 4.3, as C2-tuplas de UMs, se existirem, serão formadas pelas UMs não-críticas, 2, 4, 5 e 6, combinadas duas a duas. A matriz auxiliar do par (UM2, UM5) é dada por:

$$C_{2,5} = \begin{array}{c|ccc} & P_{4-5} & P_5 & P_{2-3} \\ \hline P_{4-5} & 2/3 & 1/3 & 0 \\ \hline P_5 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ \hline P_{2-3} & 0 & 0 & 2/3 \end{array}$$

Após a Eliminação de Gauss esta matriz se torna:

$$\mathbf{C}'_{2,5} = \begin{array}{c|ccc} & P_{4-5} & P_5 & P_{2-3} \\ \hline P_{4-5} & 2/3 & 1/3 & 0 \\ \hline P_5 & 0 & 1/2 & 0 \\ \hline P_{2-3} & 0 & 0 & 2/3 \\ \hline \end{array}$$

Uma vez que não se encontrou pivôs nulos durante a Eliminação Gaussiana, classifica-se o par (UM2, UM5) como não-crítico. Efetuando o mesmo procedimento para outros pares possíveis, obter-se-ão todos os pares críticos de UMs. A Tabela 5.2 lista as UMs críticas e pares críticos de UMs identificados. Repare que um terço das UMs é crítica e que metade das UMs participam de pares críticos de UMs, sendo a rede significativamente vulnerável à perda de unidades de medição.

Tabela 5.2 – Ck-UMs – sistema de 6 Barras.

Cardinalidade <i>k</i>	Ck-UMs	Total
1	(UM1), (UM3)	2
2	(UM4, UM6), (UM4, UM5)	2

Para enumeração das criticalidades de ramos, será utilizado o método BB, que determinou as seguintes tuplas críticas de ramos:

- 1) C1-ramo: ramos 3-4, 4-5 e 4-6;
- 2) C2-ramos: pares de ramos (1-2,1-3); (1-2,2-3) e (1-3,2-3);

Observe que somente Ck-meds estão relacionadas com os Ck-ramos identificados. Além disso, a indisponibilidade dessas resulta na não observabilidade dos ramos a elas associados. Tomando por exemplo o C1-ramo 3-4, a única medida a este relacionada, de acordo com a Figura 5.1, é a Cmed P_3 . A remoção desta medida resulta nas ilhas observáveis {1, 2, 3} e {4, 5, 6} e consequentemente, o ramo 3-4 não é observável. A remoção do par crítico (P_{1-2} , P_1), provoca o surgimento das ilhas observáveis {1} e {2,3,4,5,6}. As duas ilhas são conectadas pelos ramos (1-2) e (1-3), sendo estes, portanto, inobserváveis. Conclusões similares podem ser obtidas para os Ck-ramos restantes. O resumo das criticalidades de ramos identificadas é apresentado na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Ck-ramos – sistema de 6 Barras.

Cardinalidade <i>k</i>	Ck-ramos	Total
1	(3-4)	1
2	(1-2, 1-3), (1-2, 2-3), (1-3, 2-3), (4-5, 4-6)	2

Para avaliar-se numericamente a capacidade de observação do estado, serão calculados os índices probabilísticos e a coeficiente de informação relativa. Obter-se-á primeiramente os indicadores PLIC, PLOC e PLDC através da simulação de Monte Carlo simples, assumindo-se fixa a topologia da rede. Serão adotadas as taxas de indisponibilidades apresentadas na Tabela 5.4. Estas foram escolhidas arbitrariamente.

Tabela 5.4 – Taxas de indisponibilidade dos medidores – sistema de 6 Barras.

Medida	Taxa de indisponibilidade
P₁	0,1
P₃	0,1
P₅	0,01
P₆	0,01
P₁₋₂	0,1
P₂₋₃	0,1
P₄₋₅	0,01
P₄₋₆	0,01
P₅₋₄	0,01

Os resultados obtidos para uma amostra de tamanho $N = 1000$ são apresentados na Tabela 5.5. O elevado valor do PLIC pode ser explicado pela alta concentração de pares e trios críticos. O PLDC alto pode ser atribuído a medida crítica P_3 e aos pares críticos presentes na rede. Chama atenção nestes resultados a variância do PLOC, que tem a mesma ordem de magnitude deste indicador. O erro relativo, contudo, é inferior a 10%, indicando que a precisão da estimativa $\hat{\ell}$ é razoável, como se pode ver pelo intervalo de confiança. Os indicadores PLDC e PLIC, conforme mostrado na tabela, possuem maior precisão. Isto se deve ao fato de eventos de perda de observabilidade – por requererem maior ausência de medidas – serem mais raros do que aqueles que resultam na perda da capacidade de detecção ou identificação.

Tabela 5.5 – Resultados do MCS para o sistema de 6 Barras.

<i>Índice</i>	$\hat{\ell}$ (%)	s^2	β (%)	N	<i>Intervalo de Confiança (95%)</i>
PLOC	13,0	0,113	8,2	10^3	[10,9; 15,1]
PLIC	39,8	0,015	1,0	10^3	[39,0; 40,5]
PLDC	17,3	0,013	2,1	10^3	[16,6; 17,9]

Com o objetivo de aprimorar o cálculo do índice PLOC, pode-se empregar as técnicas de redução de variância apresentadas no Capítulo 4. Utilizando-se a técnica da Amostragem por Importância e Rastreo, os valores das taxas de indisponibilidades serão ajustados de forma a tornar mais frequentes eventos que tornem a rede não observável. A Tabela 5.6 apresenta as taxas de indisponibilidades ajustadas obtidas pela técnica de redução de variância.

Tabela 5.6 – Taxas de indisponibilidades ajustadas.

Medida	Taxas de indisponibilidade	
	Original	Ajustada
P₁	0,1	0,21
P₃	0,1	0,71
P₅	0,01	0,01
P₆	0,01	0,01
P₁₋₂	0,1	0,14
P₂₋₃	0,1	0,36
P₄₋₅	0,01	0,07
P₄₋₆	0,01	0,01
P₅₋₄	0,01	0,01

Observa-se que as taxas de indisponibilidade que sofreram maior ajuste de valor se correspondem às medidas envolvidas na grande parte das C1- e C2-medts, como a medida crítica P₃ e as medidas do Cconj {P₁, P₁₋₃, P₂₋₃}. Além disso, foram modificadas mais intensamente as taxas das medidas com maior probabilidade de falha. Empregando-se as taxas de indisponibilidade ajustada da Tabela 5.6, amostra-se com mais frequência eventos de em que a rede é não observável, ocorrendo a redução da variância e do erro relativo constatada na Tabela 5.7.

Tabela 5.7 – Resultados do MCAI-CER para o sistema de 6 Barras.

<i>Índice</i>	$\hat{\ell}$ (%)	s^2	β (%)	N	<i>Intervalo de Confiança (95%)</i>
PLOC	13,3	0,040	4,7	10^3	[12,1; 14,6]

Além de fornecer uma estimativa de melhor precisão, a amostragem por importância e rastreo também evidencia, no caso particular do PLOC, os elementos da simulação que proporcionam mais risco à perda de observabilidade. A magnitude da variação das taxas de indisponibilidades reflete a influência dos elementos na observabilidade, conforme mencionado no Capítulo 4.

A Tabela 5.8 apresenta o valor do coeficiente de informação relativa determinado para o sistema de 6 barras. Nesta tabela, a matriz de ganho associada com o plano de medição da Figura 5.1 é G , enquanto G_{MAX} é a matriz de Ganho para um plano de medição idealizado, contendo todas as medidas de injeção e fluxo de potência. Conforme mostra tal tabela, o $Coef_{IR} = -2,3$, sendo o determinante de G pelo aproximadamente 10 vezes menor que o de G_{MAX} . Assim sendo, a deficiência de informação sobre o estado da rede que o sistema de medidas possui pode dificultar o processamento de EGs.

Tabela 5.8 – Coeficiente de informação relativa – sistema de 6 Barras.

<i>Coef_{IR}</i>	$\ln(\det(G))$	$\ln(\det(G_{MAX}))$
-2,28	1,56	3,84

A Tabela 5.9 resume a avaliação da capacidade de observação, para o sistema de 6 barras.

Tabela 5.9 – Avaliação da capacidade de observação do sistema de 6 barras.

Índice	Valor
PLOC (%)	13,0
PLIC (%)	39,9
PLDC (%)	17,3
Coef_{IR}	-2,28

Com o intuito de demonstrar, através da avaliação da capacidade de observação, o impacto da topologia no desempenho da EE, também se simulou uma alteração na configuração da rede em que um ramo fictício 1-5 é inserido na rede elétrica, como mostra a Figura 5.2. As criticalidades identificadas para as medidas,

unidades de medição e ramos da rede são apresentadas nas Tabelas 5.10, 5.11 e 5.12, respectivamente. O método *Branch-and-Bound* foi empregado na identificação das criticalidades de medidas e ramos da rede, sendo os algoritmos dos Quadros 4.2 e 4.3 utilizados na determinação das C1- e C2-tuplas de UMs.

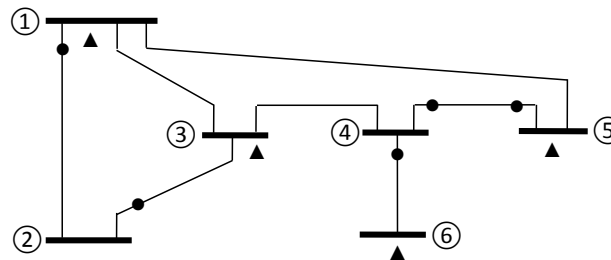


Figura 5.2 – Sistema teste de 6 Barras após a inclusão do ramo 1-5

Tabela 5.10 – Ck-meds após a inclusão do ramo 1-5.

<i>Criticalidade</i> <i>k</i>	<i>Ck-meds</i>	Total
1	---	0
2	(P_{4-6}, P_6)	1
3	$(P_{1-2}, P_{2-3}, P_1), (P_{1-2}, P_{2-3}, P_3), (P_{1-2}, P_{2-3}, P_5),$ $(P_{1-2}, P_1, P_3), (P_{1-2}, P_1, P_5), (P_{1-2}, P_3, P_5),$ $(P_{2-3}, P_1, P_3), (P_{2-3}, P_1, P_5), (P_{2-3}, P_3, P_5),$ (P_1, P_3, P_5)	10
4	$(P_{1-2}, P_{2-3}, P_{4-5}, P_{5-4}), (P_{1-2}, P_1, P_{4-5}, P_{5-4}),$ $(P_{1-2}, P_3, P_{4-5}, P_{5-4}), (P_{1-2}, P_5, P_{4-5}, P_{5-4}),$ $(P_{2-3}, P_1, P_{4-5}, P_{5-4}), (P_{2-3}, P_3, P_{4-5}, P_{5-4}),$ $(P_{2-3}, P_5, P_{4-5}, P_{5-4}), (P_1, P_3, P_{4-5}, P_{5-4}),$ $(P_1, P_5, P_{4-5}, P_{5-4}), (P_3, P_5, P_{4-5}, P_{5-4})$	10

Tabela 5.11 – Ck-UMs após a inclusão do ramo 1-5.

<i>Criticalidade</i> <i>k</i>	<i>Ck-UMs</i>	Total
1	---	0
2	$(UM1, UM2), (UM1, UM3),$ $(UM1, UM5), (UM4, UM6)$	4

Tabela 5.12 – Ck-ramos após a inclusão do ramo 1-5.

Criticalidade	Ck-ramos	Total
k		
1	---	0
2	(1-5,3-4), (1-2,2-3)	2
3	(3-4,4-5,4-6),(1-5,4-5,4-6)	6
	(1-3,2-3,3-4),(1-3,1-5,2-3)	
	(1-3,1-3,1-5),(1-2,1-3,3-4)	
4	(1-3,2-3,4-5,4-6)	2
	(1-2,1-3,4-5,4-6)	

Nota-se pelos resultados que a inserção do ramo 1-5 resulta em significativa alteração das criticalidades. Um grande número de triplas e quádruplas críticas são formadas. As unidades de medição críticas desaparecem, sendo formadas novas C2-UMs. O ramo 3-4 – que era crítico no caso anterior – agora participa das C3- e C4-ramos. É perceptível pelas Tabelas 5.10-5.12 que a capacidade de observação do sistema melhora significativamente após a inserção do ramo 1-5. Tal comprovação pode ser observada no cálculo dos índices probabilísticos e do $Coef_{IR}$. Os indicadores calculados utilizando-se o MCS são listados na Tabela 5.13. O índice PLOC cai de 13% para 0,5%. Entretanto, tal estimativa não é precisa, visto, o erro relativo do PLOC é de aproximadamente 45%. No caso do PLDC, houve melhora significativa também. O erro relativo do PLDC é superior a 10%, tendo a estimativa deste indicador precisão razoável. Repare que o PLIC não muda substancialmente. Este comportamento pode ser justificado pela presença de várias triplas críticas de medidas.

Para se tenha estimativas dos indicadores com maior acurácia, pode-se diminuir o erro relativo aumentando-se número de amostras. Utilizando-se 10^6 amostras, foram obtidos os valores indicados na Tabela 5.14.

Tabela 5.13 – Resultados do MCS para o sistema de 6 Barras modificado.

Índice	$\hat{p}$ (%)	s^2	β (%)	N
PLOC	0,5	0,005	44,6	10^3
PLIC	37,4	0,048	1,90	10^3
PLDC	2,9	0,011	11,5	10^3

Tabela 5.14 – Resultados do MCS para 10^6 amostras de medidas.

Índice	$\hat{t}$ (%)	s^2	β(%)	N
PLOC	0,4	0,004	1,5	10^6
PLIC	36,9	0,047	0,0587	10^6
PLDC	2,5	0,0096	0,396	10^6

Observa-se por esta, que maior precisão foi alcançada, porém às custas do aumento do esforço computacional. No sistema de 6 barras, este aumento foi significativo: o tempo total de simulação (cálculo dos três indicadores), empregando-se a SMC simples com 10^3 amostras foi de 0,30 segundos. O mesmo método, utilizando-se, porém, 10^6 amostras, estimou os três indicadores em aproximadamente 283 segundos.

Reduzindo-se o erro relativo por meio do método de Monte Carlo com Amostragem por Importância e Rastreio, obtém-se, para cada indicador, as taxas de indisponibilidades ajustadas listadas na Tabela 5.15. Nota-se que, em função do índice a ser calculado, tais taxas das medidas são alteradas de forma diferente. No caso do PLOC, aquelas que sofrem maior variação participam de parte considerável das Ck-meds indicadas na Tabela 5.10. A remoção de P_1 , P_{1-2} ou P_{2-3} faz com que várias C3-tuplas se tornem C2-tuplas. Coincidentemente, são estas medidas que, no caso do PLIC, tem suas taxas de indisponibilidade sensivelmente modificadas. Analogamente, a ausência das medidas P_1 , P_{2-3} , P_3 e P_{4-6} resulta no surgimento de várias Cmeds, sendo as taxas a estas associadas substancialmente alteradas quando o PLDC é calculado, conforme também mostra a Tabela 5.15.

Tabela 5.15 – Taxas de indisponibilidades ajustadas – sistema de 6 Barras modificado.

Medida	Taxa de Indisponibilidade Original	Taxa de Indisponibilidade Ajustada		
		PLOC	PLIC	PLDC
P₁	0,1	0,73	0,12	0,70
P₃	0,1	0,72	0,10	0,70
P₅	0,01	0,10	0,01	0,01
P₆	0,01	0,03	0,01	0,01
P₁₋₂	0,1	0,71	0,11	0,47
P₂₋₃	0,1	0,70	0,18	0,10
P₄₋₅	0,01	0,01	0,01	0,01
P₄₋₆	0,01	0,03	0,01	0,07
P₅₋₄	0,01	0,01	0,01	0,01

Os valores do PLIC, PLOC e PLDC calculados usando-se o MCAI-CER encontram-se na Tabela 5.16. O número de amostras neste caso é igual a 10^6 para o PLOC e 10^3 para o PLIC e PLDC. O número de amostras para o PLOC permanece alto devido à probabilidade de não observabilidade ser muito baixa, o que requer, mesmo se utilizando amostragem por importância, um grande número de amostras. Em comparação à Tabela 5.13, observa-se claramente a redução da variância dos três indicadores, que se reflete na diminuição do erro relativo.

Tabela 5.16 – Resultados do MCAI-CER para o sistema de 6 barras modificado.

Índice	$\hat{p}$ (%)	s^2	β(%)	N
PLOC	0,4	0,0009	0,7	10^6
PLIC	36,3	0,038	1,7	10^3
PLDC	3,4	0,008	8,6	10^3

Eventos relacionados a grupos de medidas são raros, de difícil estimação e pouco afetam a capacidade de observação. Por outro lado, eventos envolvendo unidades de medição têm maior probabilidade de ocorrência e considerável impacto na capacidade de observação, resultando assim em índices probabilísticos de mais fácil obtenção. Simulando-se agora somente eventos de perda de UMs, e considerando-se as taxas de indisponibilidades da Tabela 5.17, são determinados os índices PLOC, PLIC e PLDC mostrados na Tabela 5.18. O método utilizado é método de Monte Carlo Simples.

Tabela 5.17 – Taxas de indisponibilidades das UMs – sistema de 6 barras.

Unidade de Medição	Taxas de Indisponibilidade Original
UM1	0,1
UM2	0,1
UM3	0,1
UM4	0,01
UM5	0,01
UM6	0,01

Tabela 5.18 – Resultados da MCS para UMs.

Índice	$\hat{p}$ (%)	s^2	β(%)	N
PLOC	1,90	0,019	7,0	10^4
PLIC	33,6	0,0424	0,6	10^4
PLDC	4,40	0,0169	3,0	10^4

A aplicação do método MCAI-CER no cálculo do PLIC, PLOC e PLDC fornece as taxas de indisponibilidades ajustadas e os índices listados nas Tabelas 5.19 e 5.20, respectivamente. Note que a diminuição da variância da amostragem melhora a precisão dos valores calculados. O tempo total de simulação foi de 37 segundos. Este tempo pode ainda ser reduzido caso se permita valores maiores de erro relativo. Por exemplo, fixando-se o erro relativo em 5%, o número de amostras para cada indicador seriam: 4000 amostras para o PLOC, 1500 para o PLIC, e 2000 para o PLDC. Nestas condições, o tempo total de simulação é inferior a 10 segundos.

Tabela 5.19 – Taxas de indisponibilidades ajustadas das UMs.

Unidade de Medição	Taxas de Indisponibilidade Original	Taxas de Indisponibilidade Ajustada		
		PLOC	PLIC	PLDC
UM1	0,1	1,00	0,17	0,83
UM2	0,1	0,53	0,16	0,1
UM3	0,1	0,53	0,17	0,1
UM4	0,01	0,01	0,016	0,09
UM5	0,01	0,01	0,021	0,01
UM6	0,01	0,01	0,024	0,05

Tabela 5.20 – Resultados do MCAI-CER para UMs.

Índice	$\hat{p}$ (%)	s^2	β (%)	N
PLOC	1,9	0,0005	1,1	10^4
PLIC	34,6	0,013	0,33	10^4
PLDC	5,1	0,019	2,71	10^4

Os resultados mostram que o sistema possui resiliência quanto a perda de observabilidade e é capaz de detectar erros grosseiros. Entretanto, a identificação de EGs não é satisfatória visto que o PLIC é aproximadamente 35%.

A Tabela 5.21 apresenta o coeficiente de informação relativa para o sistema de 6 barras modificado. Repare que tanto $det(\mathbf{G})$ quanto $det(\mathbf{G}_{Máx})$ aumentaram. Portanto, a maior conectividade da rede, resulta em maior quantidade de informação a respeito do estado operativo da rede. Além disso, $det(\mathbf{G})$ é $e^{1,65} \approx 5$ vezes menor do que $det(\mathbf{G}_{Máx})$, o que significa que, do ponto de vista da Teoria da Informação, a inclusão do ramo 1-5 proporciona melhoria da capacidade de observação.

Tabela 5.21 –Coeficiente de informação relativa após a inclusão do ramo 1-5.

$Coef_{IR}$	$\ln(\det(G))$	$\ln(\det(G_{M\acute{a}x}))$
-1,65	2,62	4,27

A Tabela 5.22 compara os indicadores para o sistema de 6 barras original e após a inclusão do ramo 1-5. É notório o impacto da configuração da rede na capacidade de observação do estado de um sistema de medição, devendo este aspecto ser considerado nas análises.

Tabela 5.22–Comparativo entre Indicadores – Sistema de 6 Barras.

Índice	Rede elétrica	
	Original	Após a inclusão do ramo 1-5
PLOC (%)	19,0	1,9
PLIC (%)	37,8	34,6
PLDC (%)	14,3	5,1
CIR	-2,28	-1,65

Observou-se ao longo desta seção que os resultados alcançados para os diferentes métodos propostos para análise da capacidade de observação concordam entre si. Muito em função do tamanho da rede elétrica, a enumeração das criticalidades consumiu tempos computacionais aceitáveis, o que pode não acontecer para sistemas com maior porte. Em relação aos indicadores probabilísticos, observou-se que, dependendo de quão raro são os eventos estudados, tem-se maior ou menor dificuldade em calcular-se os índices probabilísticos. Também se constatou que eventos envolvendo alterações da configuração da rede podem impactar seriamente a capacidade de observação do estado, devendo estes serem considerados nas análises.

Nos próximos testes, serão simulados somente eventos relacionados à configuração da rede ou unidade de medidas, visto o considerável impacto destes na capacidade de observação. O método de Monte Carlo com Amostragem por Importância e Rastreo, conforme mostrado nos casos até aqui vistos, permitiu a obtenção de precisão satisfatória a custos computacionais não proibitivos, sendo este empregado nas simulações subsequentes.

Com base nos resultados obtidos, também se observou que os métodos propostos no Capítulo 4 são adequados para caracterizar a capacidade de observação do estado operativo das redes elétricas, podendo ser utilizados em conjunto ou separadamente.

5.3 Sistema IEEE 24 barras

Os testes realizados com sistema IEEE 24 barras apresentado na Figura 5.3 ilustram a aplicação dos Graus de Observação, proposto no Capítulo 4. A rede elétrica em questão consiste de 24 barras e 34 ramos, em dois níveis de tensão, 138kV e 230kV. O sistema 230kV corresponde à parte superior da Figura 5.3. O plano de medição que constitui o cenário básico, também indicado na Figura 5.3, contém 18 UMs, que coletam 27 medidas de fluxo e 10 de injeção de potência. As taxas de indisponibilidade das unidades de medição do lado 230kV (barras de 11 a 24) é de 0,01 enquanto aquelas do lado 138kV (barras de 1 até 10) é de 0,1. As indisponibilidades dos ramos da rede foram calculadas a partir dos dados de confiabilidade do sistema IEEE 24 barras, descritos em [RTS96], conforme procedimento indicado em [Mira10].

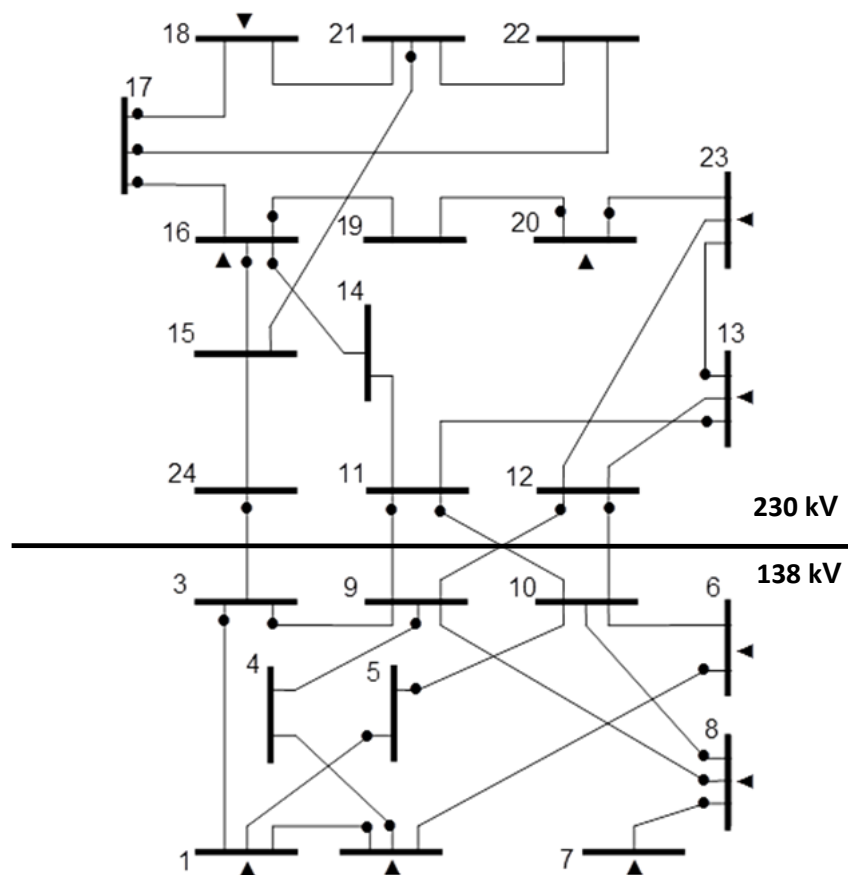


Figura 5.3–Sistema teste IEEE 24 Barras – Caso Base.

A Tabela 5.23 apresenta as indisponibilidades de cada ramo. Nas simulações realizadas empregou-se $N=10^4$ amostras e o método de Monte Carlo com amostragem por importância. Os cenários de medição a serem avaliados são seguintes:

Cenário-Base: indicado na Figura 5.18;

Caso 1: Remoção da UM₁₈ e da medida P₁₆ da UM₁₆;

Caso 2: Ausência da UM₃;

Caso 3: Ausência da UM₃ e da UM₂;

Caso 4: Adição da UM₁₀;

Caso 5: Adição da UM₁₀, UM₁₅ e UM₂₄;

Caso 6: Adição da UM₁₀; UM₁₄; UM₂₂; UM₂₃ e da medida P₃₋₂₄ na UM₃;

Os Casos 1 – 6 são obtidos através da aplicação das ações descritas no plano de medição do cenário-base. Tratam-se de exemplos do impacto, na capacidade de observação do estado, de modificações no plano de medição. As unidades de medição, que são adicionadas nos casos 4-6 UM₁₀; UM₁₄; UM₂₂ e UM₂₃ são todas UMFs, cada uma mensurando o ângulo da tensão da barra e a corrente em todos os ramos incidentes na barra em que cada UMF está localizada.

Tabela 5.23 – Taxas de indisponibilidade dos ramos – IEEE 24 Barras.

Ramo	Taxas de Indisponibilidade	Ramo	Taxas de Indisponibilidade
1-2	0,000438	11-13	0,000502
1-3	0,000582	11-14	0,00049
1-5	0,000377	12-13	0,000502
2-4	0,000445	12-23	0,000653
2-6	0,000548	13-23	0,000615
3-9	0,000434	14-16	0,000477
3-24	0,001753	15-16	0,000414
4-9	0,000411	15-24	0,000515
5-10	0,000388	15-21	0,000515
6-10	0,001318	16-17	0,000439
7-8	0,000342	16-19	0,000427
8-9	0,000502	17-18	0,000402
8-10	0,000502	17-22	0,000678
9-11	0,001753	18-21	0,000439
9-12	0,001753	19-20	0,000477
10-11	0,001753	20-23	0,000427
10-12	0,001753	21-22	0,000565

A seguir serão apresentadas as avaliações dos planos de medição. Para auxiliar nas análises, foram determinadas as Ck-meds até ordem 4, Ck-ramos até ordem 3 e Ck-UMs até ordem 2, determinadas utilizando-se o método BB e o algoritmo dos Quadros 4.2 e 4.3, respectivamente. As tabelas contendo todas as criticalidades enumeradas encontram-se no Apêndice C desta Tese.

5.3.1 Caso-Base

A Tabela 5.24 apresenta os indicadores PLIC, PLOC e PLDC para o Caso-Base.

Tabela 5.24 – Índices probabilísticos – Caso Base

<i>Índice</i>	$\hat{p}$ (%)	β (%)	<i>N</i>
<i>PLOC</i>	17,56	1,37	10^4
<i>PLIC</i>	25,53	0,24	10^4
<i>PLDC</i>	7,15	0,25	10^4
<i>Classificação</i>	BBB		

Comentários: As Figuras 5.4, 5.5 e 5.6 apresentam a distribuição das Ck-meds, Ck-UMs e Ck-ramos, respectivamente. As tuplas críticas são agrupadas nestas por cardinalidade. As C1- e C2-meds identificadas são apresentadas na Tabela 5.25. Observa-se nos resultados a presença de muitas triplas e quadruplas críticas, o que resulta, em situações de ausência das UMs, em vários C2- e C3-meds. Portanto, a capacidade de identificação de EGs fica comprometida em diferentes cenários. O número de UMs críticas é 6, sendo o sistema vulnerável à perda de observabilidade em certas situações. O ramo 3-24, que tem a maior taxa de indisponibilidade entre todos os ramos, é um dos 4 ramos críticos da rede, sendo a observabilidade da rede significativamente afetada por este.

Tabela 5.25 – Ck-meds do Sistema IEEE 24 Barras - Caso Base (até 2ª Ordem).

Cardinalidade <i>k</i>	<i>Ck-meds</i>	Total
1	$(P_{24-3}), (P_{17-22})$	2
2	$(P_{17-18}, P_{21-15}), (P_{16-14}, P_{16-19}), (P_{20-19}, P_{20}), (P_{18}, P_{21-15})$ $(P_{17-18}, P_{18}), (P_{16}, P_{16-19}), (P_{16}, P_{16-14})$	7

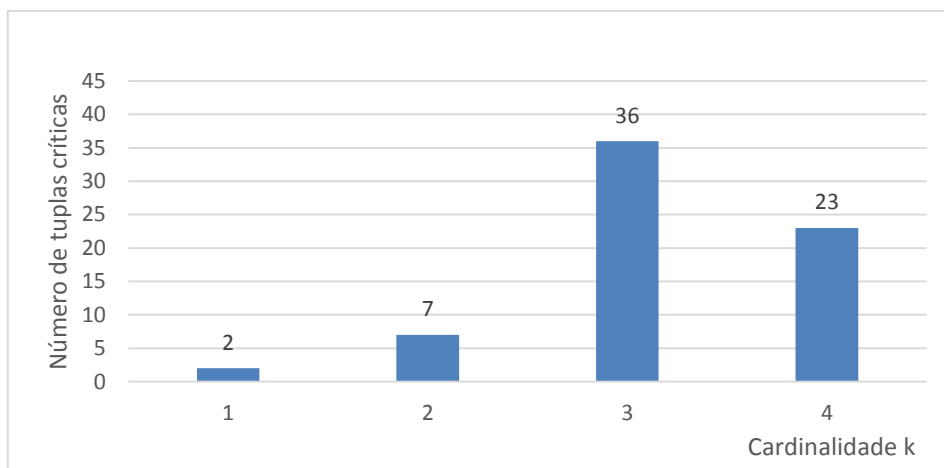


Figura 5.4–Distribuição das Ck-meds do Caso Base.

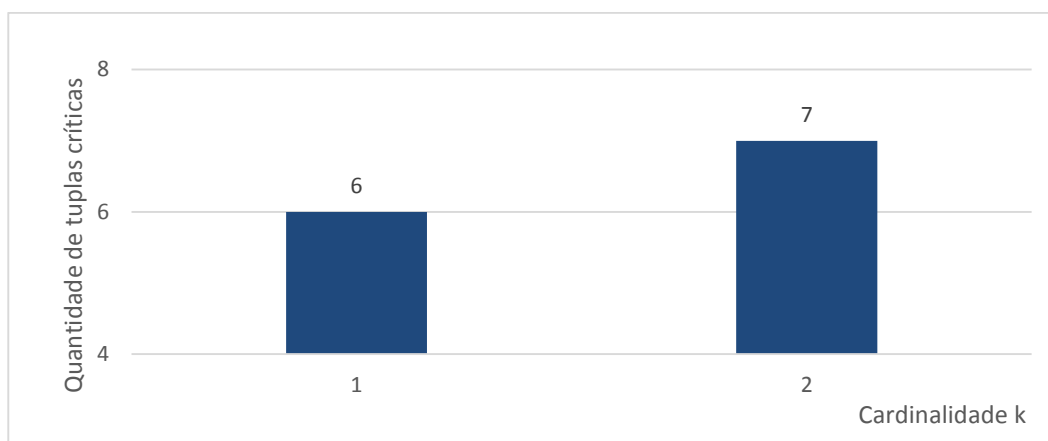


Figura 5.5– Distribuição das Ck-UMs do Caso Base.

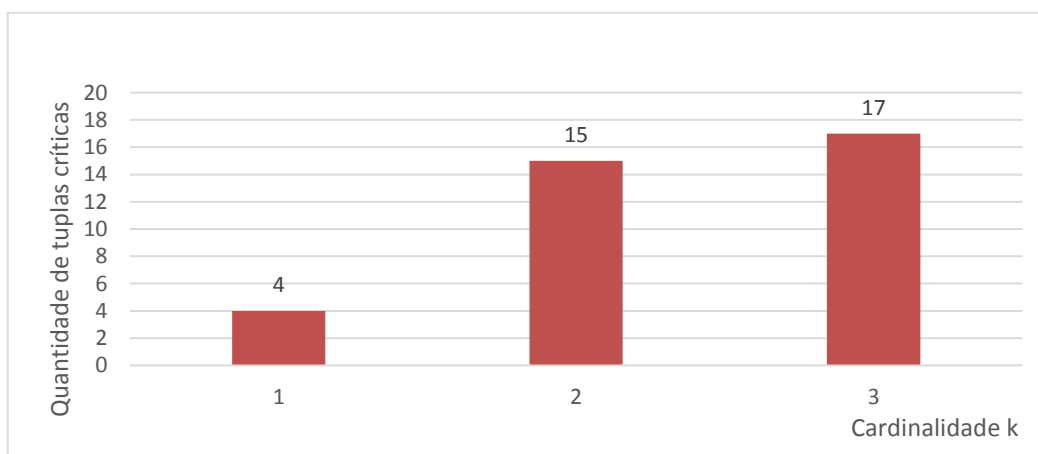


Figura 5.6– Distribuição das Ck-ramos do Caso Base.

5.3.2 Caso 1

A Tabela 5.26 apresenta os indicadores PLIC, PLOC e PLDC para o Caso 1.

Tabela 5.26–Índices probabilísticos – Caso 1.

<i>Índice</i>	$\hat{\ell}$ (%)	β (%)	<i>N</i>
PLOC	19,97	1,44	10^4
PLIC	35,30	0,17	10^4
PLDC	25,09	0,16	10^4
Classificação	BBB-		

Comentários: A remoção da UM18 e da medida P_{16} resulta no aumento das medidas críticas presentes na rede, como mostra a Figura 5.7. Nota-se que, comparando-se as Tabelas 5.25 e 5.27, as medidas remanescentes das C2-meds do Caso-Base, que tinham como membros as medidas P_{18} e P_{16} , se tornaram Cmeds neste Caso. O maior número de C1-tuplas explica significativo o aumento do índice PLDC e do PLIC. O aumento do PLOC deve-se, em parte, ao aumento do número de UMs críticas, como sugere a Figura 5.8. As novas Cmeds também afetam a criticalidade dos ramos. Constata-se pela Figura 5.9 que o número de ramos e trios de ramos críticos aumentou consideravelmente.

O aumento das Cmeds neste exemplo, apesar de não impactar fortemente a observabilidade - a maioria das UMs críticas (8, 13, 16, 17, 20, 21 e 24) tem baixa taxa de indisponibilidade – reduz a capacidade detecção de EGs, permanecendo o plano de medição no ainda no nível BBB, porém com tendência negativa devido ao aumento do risco de não detecção.

Tabela 5.27 – Ck-meds do sistema de 24 Barras – Caso 1(até 2ª Ordem).

Cardinalidade <i>k</i>	Ck-meds	Total
1	$(P_{24-3}), (P_{21-15}), (P_{17-22}), (P_{17-18}), (P_{17-16}),$ $(P_{16-19}), (P_{16-15}), (P_{16-14})$	8
2	(P_{20-19}, P_{20})	1

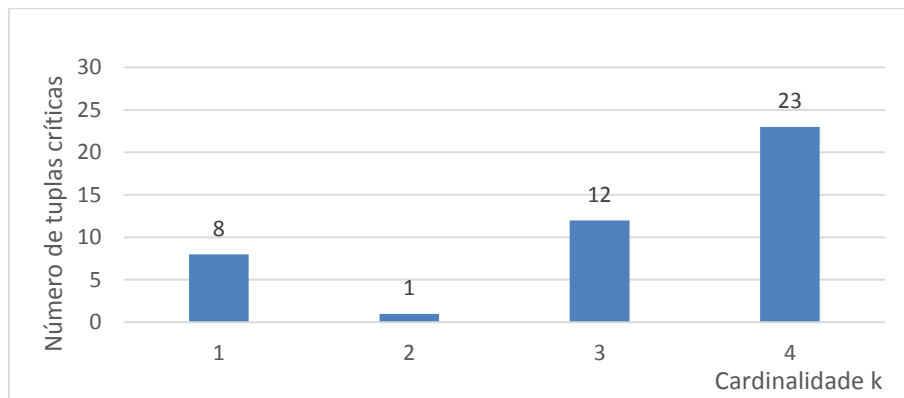


Figura 5.7–Distribuição das Ck-meds do Caso 1.

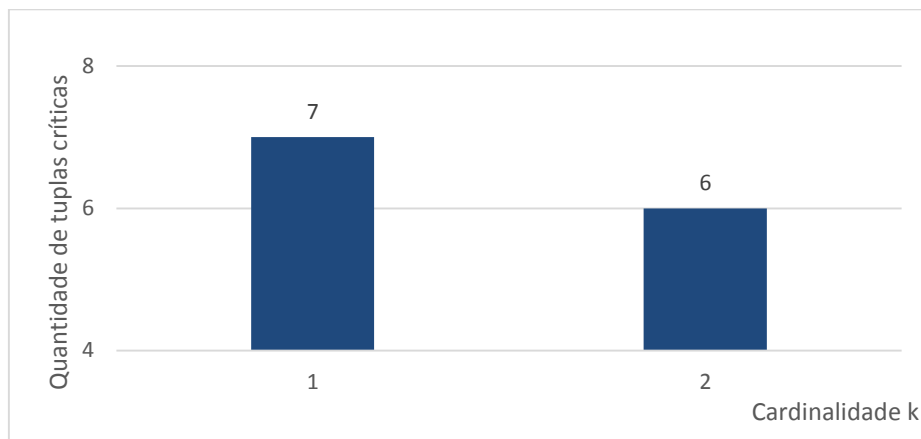


Figura 5.8–Distribuição das Ck-UMs do Caso 1.

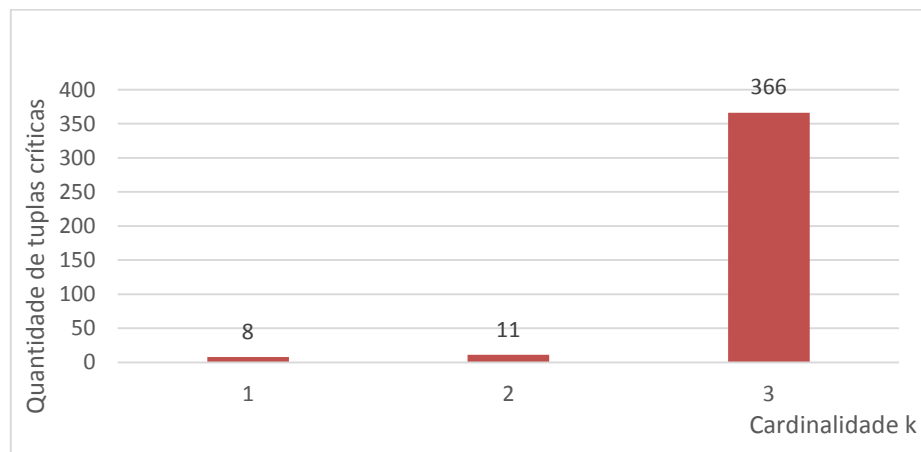


Figura 5.9–Distribuição das Ck-ramos do Caso 1.

5.3.3 Caso 2

No caso 2, será estudado o efeito da indisponibilidade da UM3, que coleta as medidas P_{3-1} e P_{3-9} . O resultado da análise quantitativa da capacidade de observação para este caso encontra-se na Tabela 5.28.

Tabela 5.28—Índices probabilísticos – Caso 2.

<i>Índice</i>	$\hat{\ell}$ (%)	β (%)	N
PLOC	26,17	1,12	10^4
PLIC	30,84	0,19	10^4
PLDC	10,81	0,24	10^4
Classificação	B		

Comentários: A remoção da UM3 faz com que a medida P_1 torne-se crítica. Como a medida P_1 constitui com P_{5-10} e P_{5-1} um trio crítico, a transformação de P_1 em Cmed incorre na criação do par crítico (F_{5-1} , F_{5-10}), conforme mostrado na Tabela 5.29. As Figuras 5.10, 5.11 e 5.12 mostram a distribuição das tuplas críticas determinadas. Verifica-se um aumento geral das criticalidades de baixa cardinalidade, em especial das C3- e C4-meds. Consequentemente, diminui a capacidade de identificação de EGs, pois em situações de redundância reduzida, o número de Cmeds e medidas em Cconjs aumenta consideravelmente. O número de UMs críticas aumenta para 8 possuindo as novas C1-UMs alta indisponibilidade, o que se reflete no valor elevado do PLOC. A Figura 5.12 mostra as Ck-ramos. Como o número de C1- e C2-meds muda sensivelmente, as C1- e C2-ramos não mudam significativamente, diferentemente das C3-ramos. Como a indisponibilidade/ saída não reportada de 3 ramos é um evento altamente improvável, tais C3-ramos não impactam os indicadores apresentados.

Tabela 5.29 – Ck-meds do Sistema IEEE 24 Barras – Caso 2(até 2ª Ordem).

Cardinalidade k	Ck-meds	Total
1	$(P_{24-3}), (P_{17-22}), (P_1)$	3
2	$(P_{17-18}, P_{21-15}), (P_{16-14}, P_{16-19}), (P_{5-1}, P_{5-10}), (P_{20}, P_{20-19})$ $(P_{18}, P_{21-15}), (P_{18}, P_{17-18}), (P_{16}, P_{16-19}), (P_{16}, P_{16-14})$	8

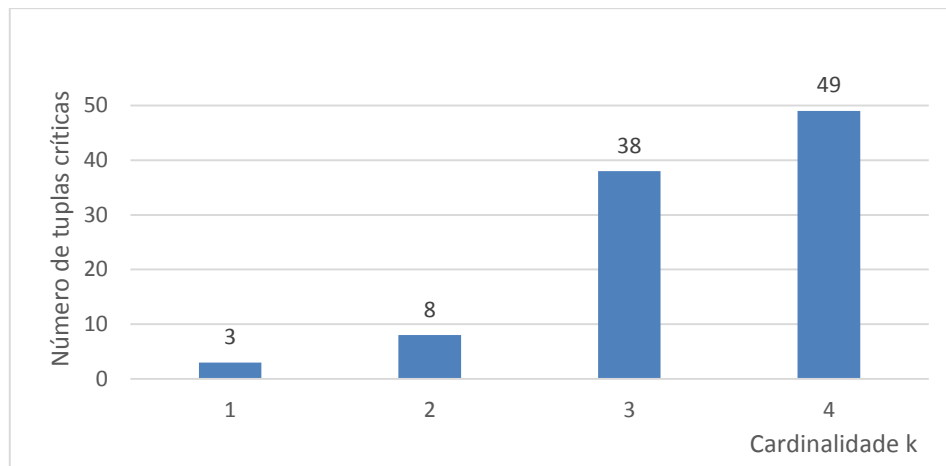


Figura 5.10– Distribuição das Ck-meds do Caso 2.

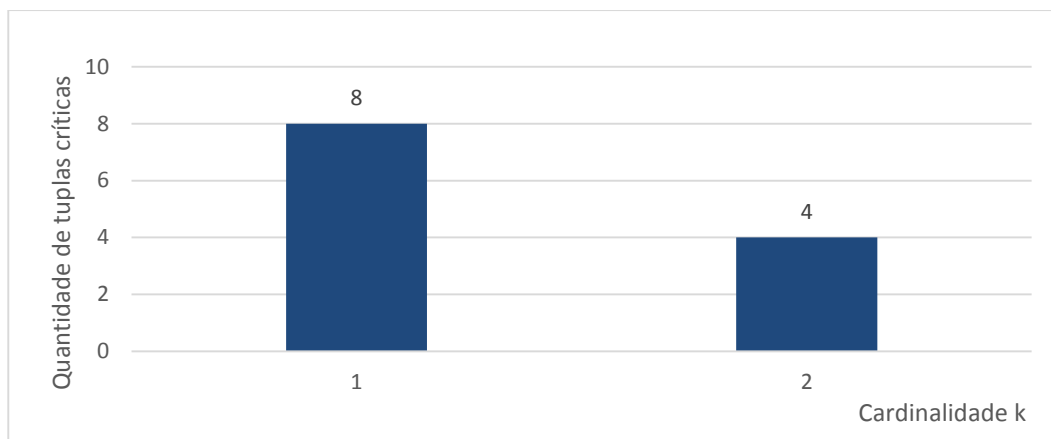


Figura 5.11– Distribuição das Ck-UMs do Caso 2.

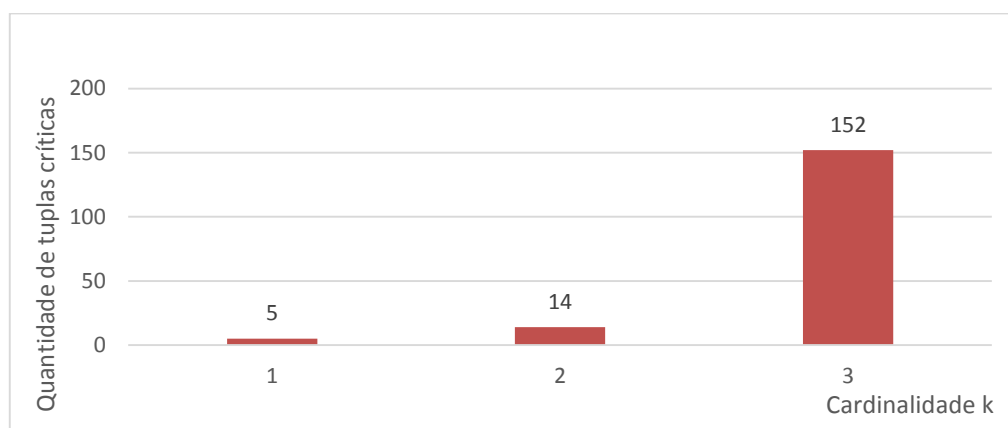


Figura 5.12– Distribuição das Ck-ramos do Caso 2.

5.3.4 Caso 3

Neste exemplo, além da retirada da UM3, remover-se-á também a UM2. Os resultados da simulação de Monte Carlo são mostrados na Tabela 5.30:

Tabela 5.30–Índices probabilísticos – Caso 3.

<i>Índice</i>	$\hat{\ell}$ (%)	β (%)	N
<i>PLOC</i>	44,51	0,87	10^4
<i>PLIC</i>	45,30	0,11	10^4
<i>PLDC</i>	25,30	0,097	10^4
<i>Classificação</i>	C		

Comentários: Com a UM2 também ausente, as Cmeds aumentam mais ainda, promovendo a elevação do número de UMs críticas para 10. A capacidade de detecção e identificação de EGs fica seriamente comprometida, como mostra as Figuras 5.13-5.15, sendo o sistema observável somente em situações muito favoráveis. A Tabela 5.31 mostra que as novas C1-meds pertencem às UMs com alta indisponibilidade, o que ajuda a explicar o aumento significativo dos três indicadores.

Tabela 5.31 – Ck-meds do Sistema IEEE 24 Barras – Caso 3(até 2ª Ordem).

Cardinalidade k	<i>Ck-meds</i>	Total
1	$(P_{24-3}), (P_{17-22}), (P_1), (P_{5-10}), (P_{5-1}), (P_6), (P_{6-2}), (P_{9-4})$	8
2	$(P_{17-18}, P_{21-15}), (P_{16-14}, P_{16-19}), (P_{20}, P_{20-19})$ $(P_{18}, P_{21-15}), (P_{18}, P_{17-18}), (P_{16}, P_{16-19}), (P_{16}, P_{16-14})$	7

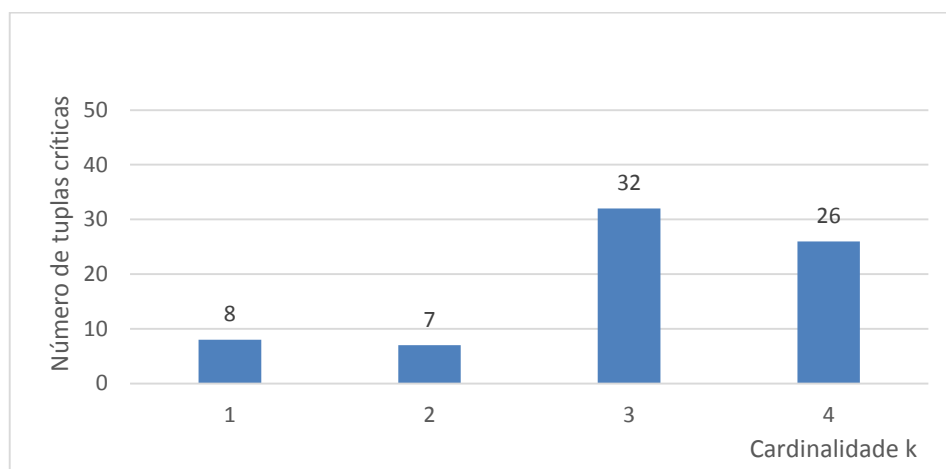


Figura 5.13– Distribuição das Ck-meds do Caso 3.

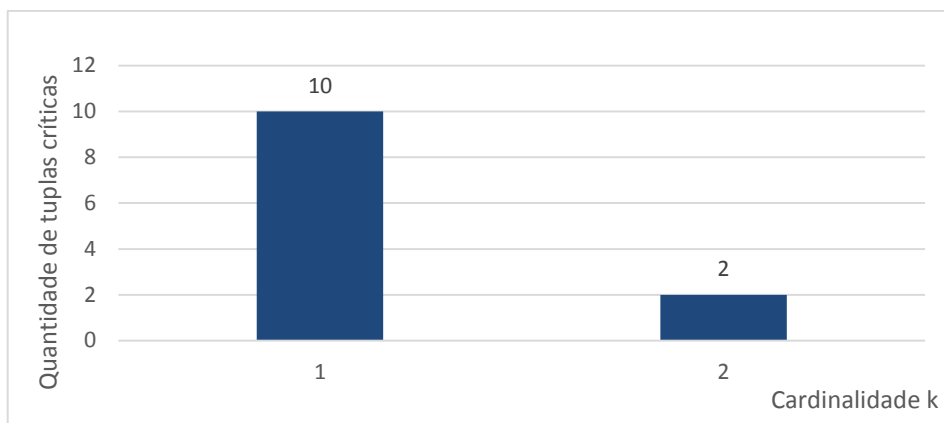


Figura 5.14–Distribuição das Ck-UMs do Caso 3.

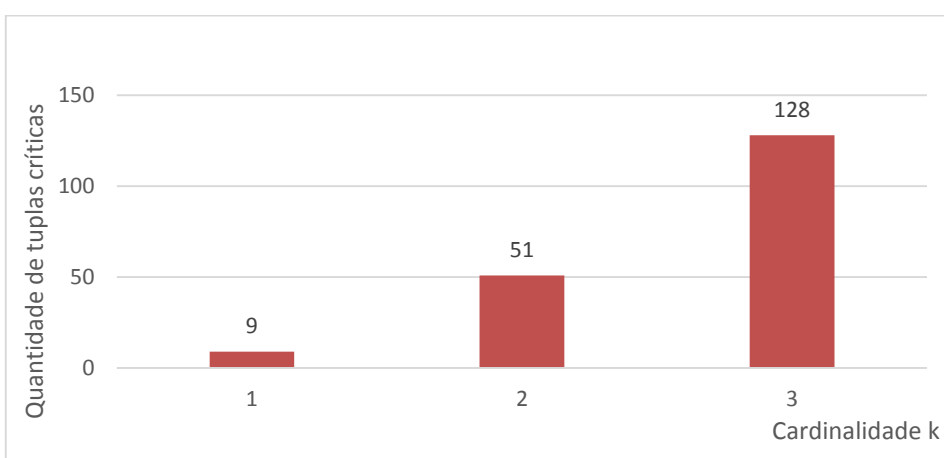


Figura 5.15–Distribuição das Ck-ramos do Caso 3.

Os casos analisados até agora correspondem a decréscimos na redundância. Os próximos três planos de medição a serem avaliados ilustram, através dos índices probabilísticos e da análise de criticalidades, o impacto causado pelos diferentes reforços de medidas no Caso Base.

5.3.5 Caso 4

A Tabela 5.32 mostra o comportamento da capacidade de observação da rede elétrica em função a inserção de uma UMF na barra 10. A UM mede o ângulo de tensão da barra e a corrente nos ramos incidentes nesta barra.

Tabela 5.32–Índices probabilísticos – Caso 4.

<i>Índice</i>	$\hat{\ell}$ (%)	β (%)	N
<i>PLOC</i>	10,67	1,94	10^4
<i>PLIC</i>	29,57	0,24	10^4
<i>PLDC</i>	9,84	0,26	10^4
<i>Classificação</i>	A		

Comentários: Com a inserção da UMF10, as Ck-meds envolvendo medidas da UM8 aumentam de cardinalidade, tornando esta unidade de medição não-crítica. Repare que a barra 10 está diretamente conectada barra 8, sendo as UF10 e a UM8 eletricamente vizinhas. Como observado na Tabela 5.33 e Figuras 5.16 – 5.18, ocorre pequena variação das criticalidades. A UMF10 melhora a observabilidade da rede, porém ao custo do aumento do PLIC e do PLDC, devido à nova Cmed A_{10} . Repare que a nova UM tem indisponibilidade elevada, o que acaba por reduzir ainda mais os potenciais benefícios proporcionados pela inserção da UMF. Este exemplo ilustra o risco de inserção inadequada de unidades de medição fasorial na rede elétrica. Para garantir adequada capacidade de depuração de EGs, ao menos duas UMFs devem ser inseridas na rede elétrica.

Tabela 5.33 – Ck-meds do Sistema IEEE 24 Barras – Caso 4(até 2ª Ordem).

Cardinalidade k	Ck-meds	Total
1	$(P_{24-3}), (P_{17-22}), (A_{10})$	3
2	$(P_{18}, P_{17-18}), (P_{16}, P_{16-14}), (P_{18}, P_{21-15}), (P_{16}, P_{16-19})$ $(P_{20}, P_{20-19}), (P_{16-19}, P_{16-14}), (P_{17-18}, P_{21-25})$	7

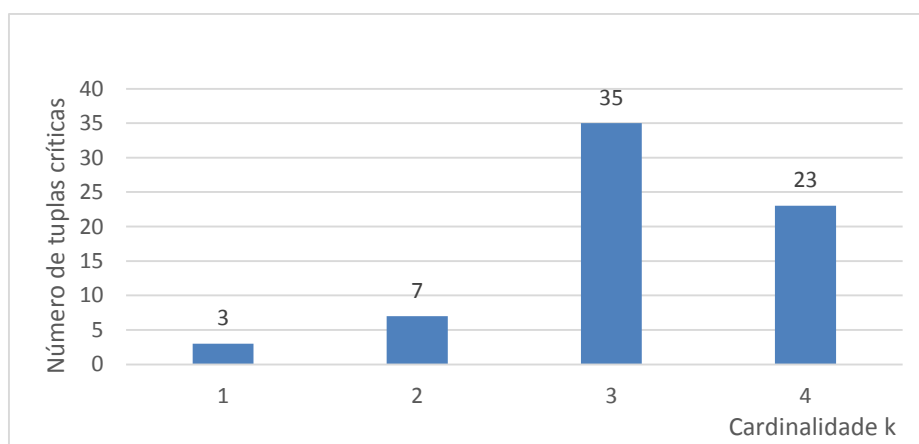


Figura 5.16– Distribuição das Ck-meds do Caso 4.

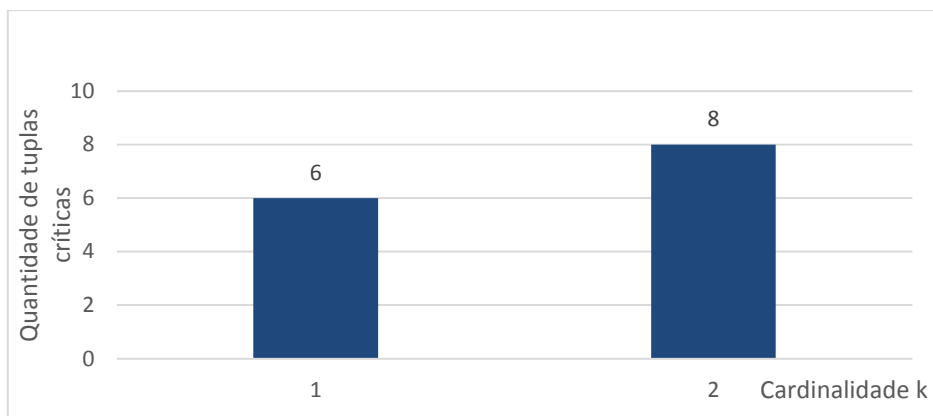


Figura 5.17– Distribuição das Ck-UMs do Caso 4.

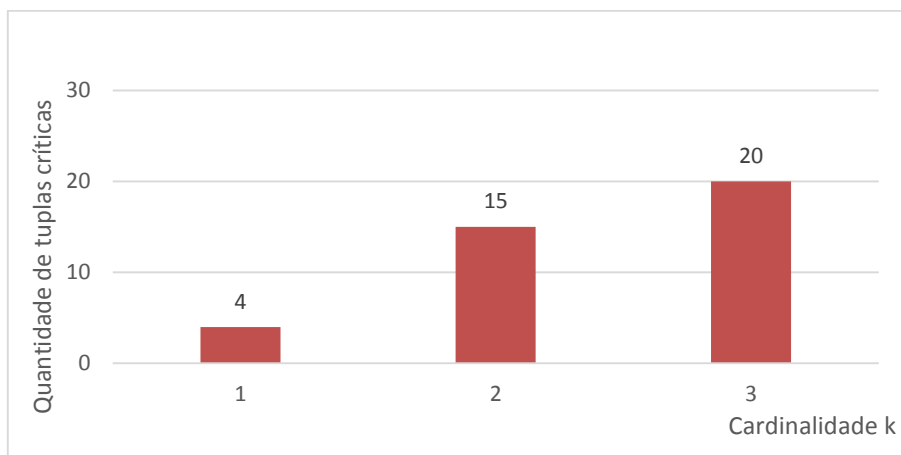


Figura 5.18–Distribuição das Ck-ramos do Caso 4.

5.3.6 Caso 5

A Tabela 5.34 apresenta os indicadores probabilísticos devido a inserção de UMFs completas nas barras 10, 15 e 24.

Tabela 5.34–Índices probabilísticos – Caso 5.

<i>Índice</i>	$\hat{\ell}$ (%)	<i>ER</i> (%)	<i>N</i>
<i>PLOC</i>	7,21	2,71	10^5
<i>PLIC</i>	14,01	0,35	10^5
<i>PLDC</i>	6,04	0,26	10^5
<i>Classificação</i>	AA-		

Comentários: Os reforços realizados aumentam a ordem das cardinalidades das Ck-meds, proporcionando a redução geral do número de tuplas críticas de medidas, ramos e UMs de baixa de cardinalidade, com mostra a Tabela 5.35 e as Figuras 5.19-5.21. Como resultado, o plano de medição atende melhor os requisitos de

observabilidade, e confiabilidade, embora condições muito adversas possam eventualmente comprometer seu desempenho. Apenas uma unidade de medição crítica apresenta elevada indisponibilidade (UMF10), sendo, entretanto, o requisito robustez satisfatoriamente atendido, visto que PLOC determinado é de 10%.

Tabela 5.35 – Ck-tuplas do Sistema IEEE 24 Barras – Caso 5(até 2ª Ordem).

Cardinalidade k	$Ck\text{-}meds$	Total
1	$(P_{17-22}), (A_{10})$	2
2	$(P_{18}, P_{17-18}), (P_{16}, P_{16-14})$	2

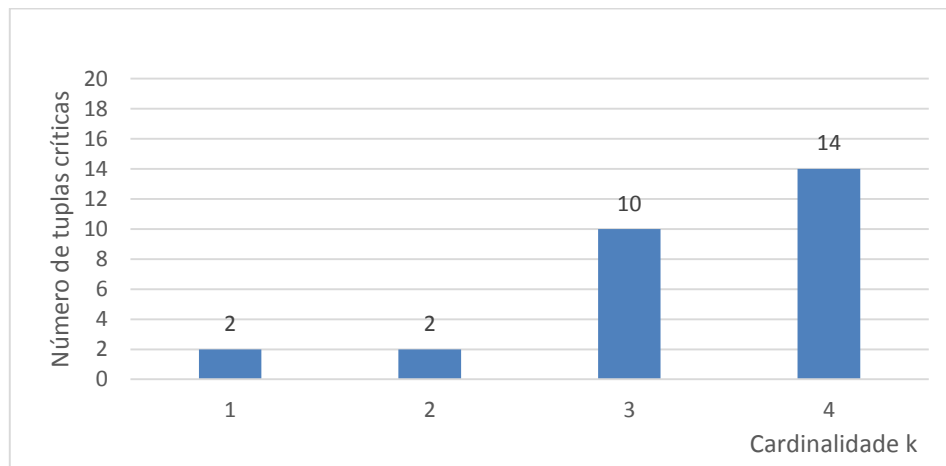


Figura 5.19– Distribuição das Ck-meds do Caso 5.

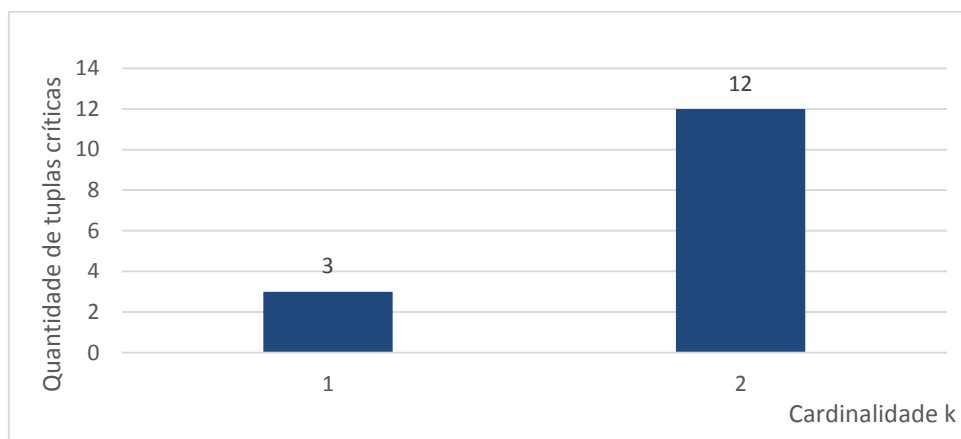


Figura 5.20–Distribuição das Ck-UMs do Caso 5.

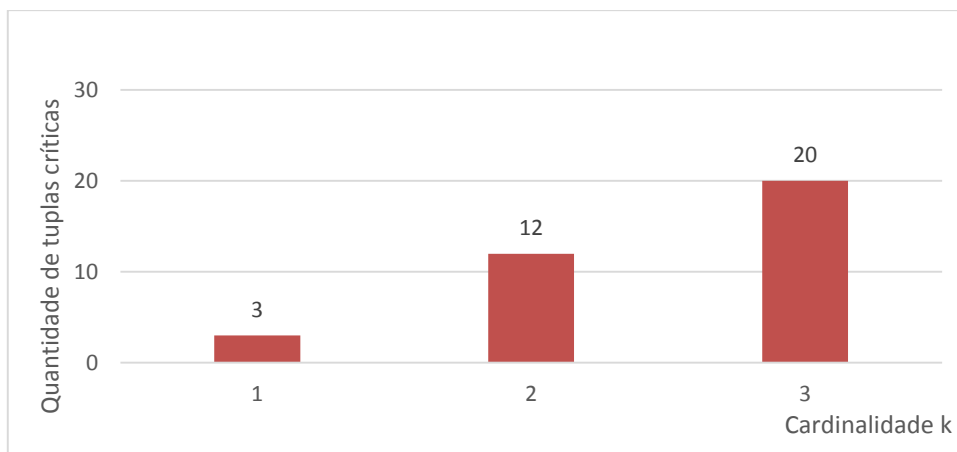


Figura 5.21–Distribuição das Ck-ramos do Caso 5.

5.3.7 Caso 6

Neste último Caso, são inseridas UMFs completas nas barras 10, 14, 22 e 24. A UM3 também agora coleta a medida P_{3-24} , tornando-se completa. Os reforços realizados no plano de medidas têm por consequência a melhoria dos indicadores como sugere a Tabela 5.36.

Tabela 5.36–Índices probabilísticos – Caso 6.

<i>Índice</i>	$\hat{\ell}$ (%)	β (%)	<i>N</i>
<i>PLOC</i>	4,57	2,76	10^4
<i>PLIC</i>	6,92	0,39	10^4
<i>PLDC</i>	1,45	0,95	10^4
<i>Classificação</i>	AAA		

Comentários: Com a adição destas UMFs, desaparecem todas as Cmeds encontradas no caso base, e apenas dois pares críticos permanecem. As Figuras 5.22 - 5.24 sugerem que, com a inclusão das novas medidas, a cardinalidade das criticalidades aumenta de maneira geral. As triplas e quádruplas críticas ainda existentes afetam a capacidade de identificação de EGs, ao passo que a presença de poucas C2-meds e nenhuma C1-med contribui para drástica redução dos valores do PLIC e do PLDC. Portanto, somente em situações extremas de medidas ou ramos da rede os requisitos de observabilidade, confiabilidade e robustez não serão os requisitos, justificando o selo de observação máximo.

Tabela 5.37 – Ck-meds do Sistema IEEE 24 Barras – Caso 6(até 2ª Ordem).

Cardinalidade k	$Ck\text{-meds}$	Total
1	---	0
2	$(P_{18}, P_{17-18}), (P_{3-24}, P_{24-3})$	2

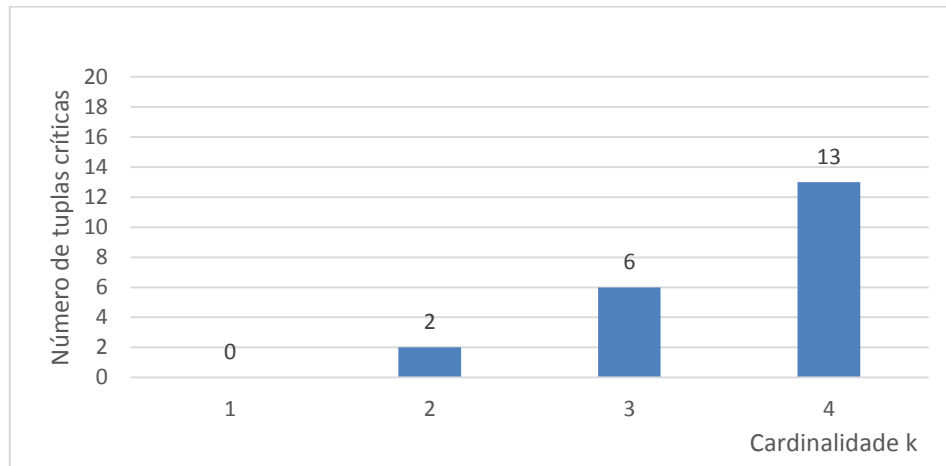


Figura 5.22– Distribuição das Ck-meds do Caso 6.

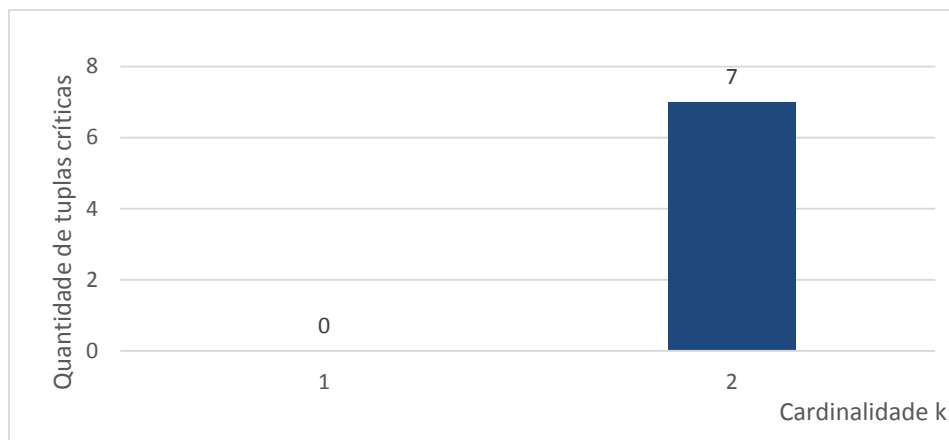


Figura 5.23– Distribuição das Ck-UMs do Caso 6.

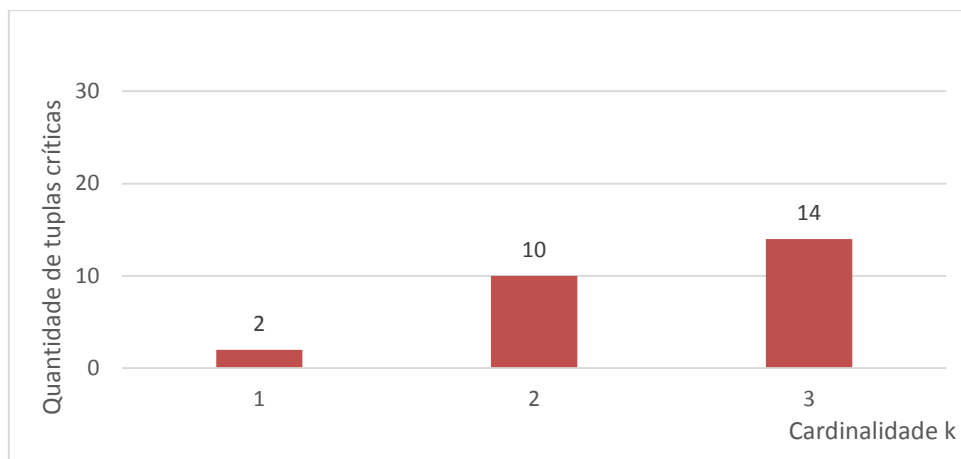


Figura 5.24– Distribuição das Ck-ramos do Caso 6.

A Tabela 5.38 apresenta um quadro comparativo com as classificações obtidas para cada plano de medição, segundo sua capacidade de observação. O sistema de graus proposto reflete as características de observabilidade e capacidade de depuração de EGs dos planos de medição, sendo útil na avaliação e distinção entre diferentes sistemas. Nota-se que os últimos três casos estudados correspondem a sistemas com selo de observabilidade, possuindo o Caso 6 o grau máximo. Por fim, os resultados mostram o impacto da criticalidade das medidas naquela de ramos e unidades de medição, nota-se que as diversas modificações realizadas tiveram significativos impactos nas Ck-UMs e Ck-ramos.

Tabela 5.38 – Classificação dos planos de medição - Sistema IEEE 24 Barras.

Plano de Medição	Nota	PLOC %	PLIC %	PLDC %
Caso-Base	BBB	17.6	25.5	7.2
Caso 1: remoção de P_{16} e MU_{18}	BBB ⁻	19.9	35.3	25.1
Caso 2: remoção MU_3	B	26.2	30.8	10.8
Caso 3: remoção de MU_2 e MU_3	C	44.5	45.3	25.3
Caso 4: adição de UMF_{10}	A	10.7	29.6	9.8
Caso 5: adição de UMF_{10} , UMF_{15} , UMF_{24}	AA ⁻	7.2	14.0	6.0
Caso 6: adição de P_{3-24} , UMF_{10} , UMF_{14} , UMF_{22} , UMF_{23}	AAA	4.6	6.9	1.5

5.4 Sistema IEEE 30 barras

A Figura 5.25 mostra o sistema teste IEEE 30 barras com o respectivo plano de medição utilizado. O plano indicado, denominado de Plano A, contém 37 medidas das quais 24 são de fluxo de potência, 12 de injeções de potência, e uma medida de ângulo da tensão, instalada na barra 3. O objetivo dos testes nesta seção é a aplicação da análise efetuada no sistema de 6 barras em um sistema de maior porte. Tal como no caso anterior, a avaliação da capacidade de observação do estado se iniciará pela enumeração das criticalidades, sendo os indicadores apresentados logo em seguida.

Identificou-se, por meio do método de determinação de trios críticos, 11 medidas críticas, 9 pares críticos e 91 trios críticos. A Tabela 5.39 apresenta as C1- e C2-meds encontradas. A aplicação do método *Branch-and-Bound* na enumeração das Ck-meds até cardinalidade $k_{\max} = k_{\lim} = 8$ apontou a presença de 3288 tuplas críticas. A Figura 5.25 mostra a distribuição das Ck-meds por cardinalidade. Observa-se que a maior parte destas são C5-, C6- e C7-meds. Embora numerosas, a sua probabilidade de ocorrência é extremamente baixa, não implicando em maiores riscos à observabilidade. Por outro lado, as poucas Ck-meds de baixa cardinalidade tem elevada probabilidade de ocorrência, o que impacta consideravelmente a EE, como será evidenciado pelos indicadores probabilísticos.

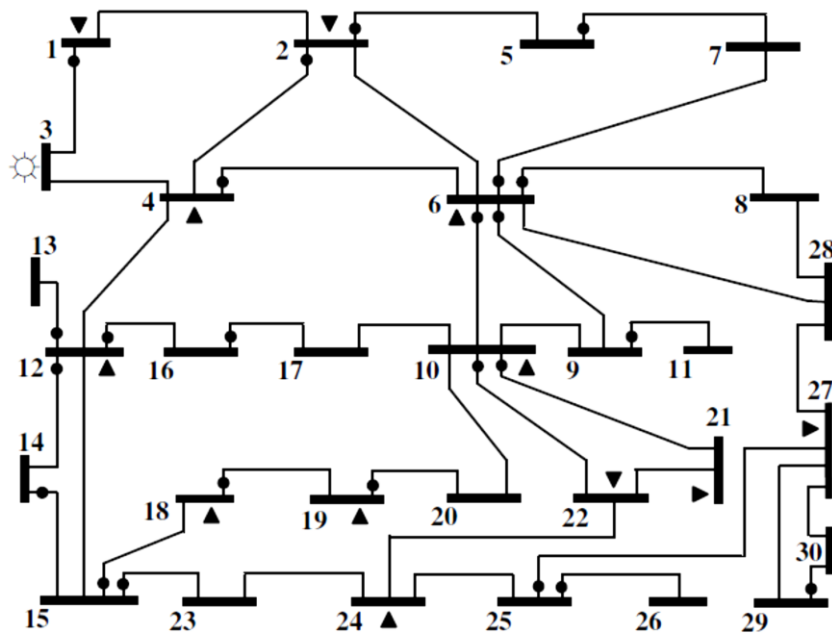


Figura 5.25–Sistema IEEE 30 Barras – Plano de Medição A.

Tabela 5.39 – C1 e C2-meds do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).

Cardinalidade k	Ck-tuplas	Total
1	(A ₃), (P ₆), (P ₂₂), (P ₂₄), (P ₂₇), (P ₆₋₈), (P ₉₋₁₁), (P ₁₅₋₂₃), (P ₂₅₋₂₆), (P ₂₅₋₂₇), (P ₂₉₋₃₀)	11
2	(P ₁₂₋₁₆ , P ₁₄₋₁₅), (P ₆₋₁₀ , P ₁₆₋₁₇), (P ₆₋₉ , P ₁₆₋₁₇), (P ₅₋₇ , P ₆₋₇), (P ₆₋₉ , P ₆₋₁₀), (P ₁₂ , P ₁₂₋₁₃), (P ₁₀ , P ₁₆₋₁₇), (P ₁₀ , P ₆₋₁₀), (P ₁₀ , P ₆₋₉)	9

Considerando a possibilidade de perda de até um medidor, pela análise da Tabela 5.39 verifica-se que o sistema é altamente propenso à perda da observabilidade – existem 11 medidas críticas no sistema, de um total de 37 – e não apresenta bom desempenho na identificação de EGs, dado o número de trios críticos existentes (91).

A Tabela 5.40 apresenta as criticalidades de unidades de medição obtidas. Analisando-se as UMs, percebe-se, como mostra a Tabela 5.40, que aquelas localizadas nas barras 3, 6, 9, 15, 22, 24, 25, 27 e 29 são críticas, por conterem as Cmeds mostradas na Tabela 5.39. Devido às C2-meds também listadas na Tabela 5.39, declara-se a UM12 como crítica.

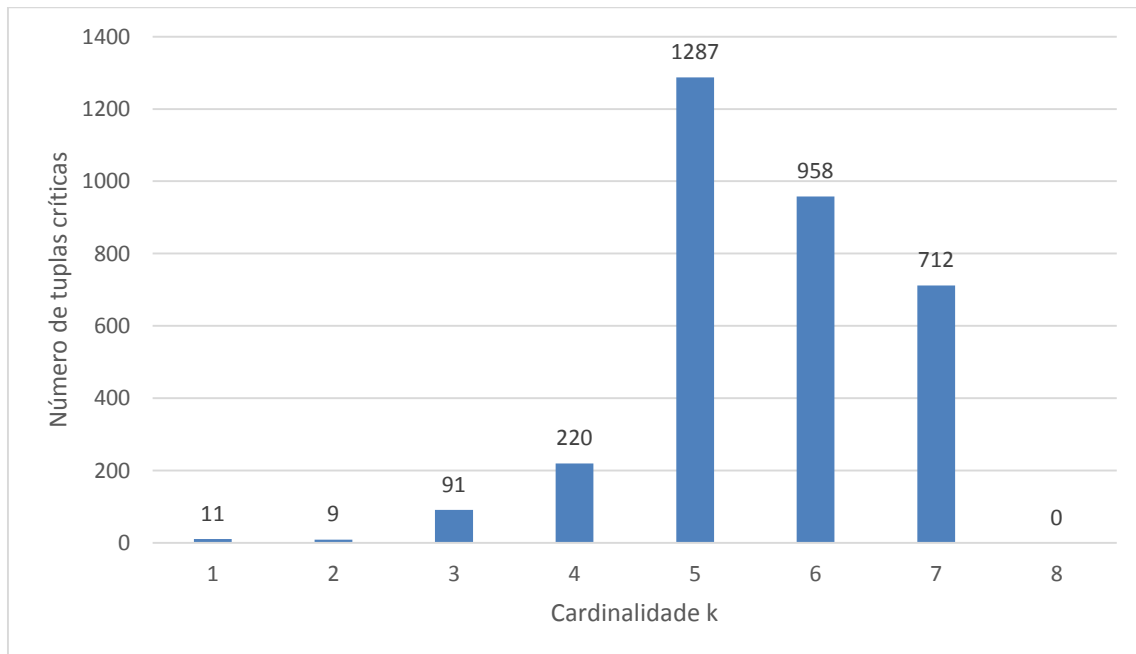


Figura 5.26–Ck-meds do sistema Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).

Empregando-se o método de identificação de Ck-UMs apresentado no Capítulo 4, a aplicação da Eliminação Gaussiana na matriz auxiliar C_{10} resulta na matriz C'_{10} .

Como nenhum surge um pivô nulo na última linha de C_{10} , classifica-se a UM10 como crítica. A criticalidade desta pode ser alternativamente constatada através trio crítico (P_{10} , P_{10-21} , P_{10-22}) formado exclusivamente por medidas da UM10.

Tabela 5.40–Ck-UMs do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).

Cardinalidade k	Ck-tuplas – Unidades de Medição	Total
1	$(UM_3), (UM_6), (UM_9), (UM_{10}), (UM_{12}), (UM_{15}),$ $(UM_{22}), (UM_{24}), (UM_{25}), (UM_{27}), (UM_{29}),$	11
2	$(UM_1, UM_2), (UM_1, UM_4), (UM_2, UM_4),$ $(UM_2, UM_5), (UM_{16}, UM_{19}), (UM_{18}, UM_{19}),$	6

		P_{10-21}	P_{10-22}	P_{10}
$C_{10} =$	P_{10-21}	0,6739	-0,3206	-0,0109
	P_{10-22}	-0,3206	0,1889	-0,0190
	P_{10}	-0,0109	-0,0190	0,0163

		P_{10-21}	P_{10-22}	P_{10}
$C'_{10} =$	P_{10-21}	0,6739	-0,3206	-0,0109
	P_{10-22}	0	0,0363	-0,0242
	P_{10}	0	0	0

Aplicou-se novamente o método BB, considerando-se $k_{max} = 3$ para a identificação Ck-ramos de até 3ª Ordem. O valor de k_{max} adotado teve como inspiração o critério de segurança $N - 3$, usualmente empregado em estudos de análise de segurança, e segundo o qual a rede elétrica deve permanecer operando com a perda de até 3 elementos. Portanto, investiga-se neste exemplo, a capacidade de observação do estado para eventos de perda, real ou incorretamente reportada, de até 3 elementos da rede elétrica. Identificou-se para o presente caso, 10 C1-ramos, 33 C2-ramos, e 89 C3-ramos, todos críticos, listadas na Tabelas 5.41 – 5.43. Os ramos críticos da Tabela 5.26 são ramos que ou tornam a rede desconexa, como o 9-11, ou cuja remoção crie ilhas observáveis na rede, como é o caso do ramo 6-28 e do ramo 12-13. Conforme indicado na Tabela 5.26, aproximadamente 25% dos ramos da rede elétrica são críticos sendo o sistema, do ponto de vista topológico vulnerável à perda de observabilidade.

Tabela 5.41 – Ramos críticos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).

#	Ramo Crítico	Total
1	Ramo6-28	10
2	Ramo29-30	
3	Ramo25-27	
4	Ramo25-26	
5	Ramo24-25	
6	Ramo22-24	
7	Ramo15-23	
8	Ramo12-13	
9	Ramo9-11	
10	Ramo6-8	

Tabela 5.42 – Pares de Ramos Críticos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).

#	Par Crítico		#	Par Crítico		Total
1	Ramo27-29	Ramo27-30	17	Ramo12-16	Ramo18-19	33
2	Ramo10-22	Ramo21-22	18	Ramo12-16	Ramo15-18	
3	Ramo10-21	Ramo21-22	19	Ramo12-16	Ramo16-17	
4	Ramo10-21	Ramo10-22	20	Ramo12-14	Ramo14-15	
5	Ramo19-20	Ramo10-20	21	Ramo4-12	Ramo15-18	
6	Ramo18-19	Ramo10-20	22	Ramo6-10	Ramo18-19	
7	Ramo18-19	Ramo19-20	23	Ramo6-10	Ramo12-16	
8	Ramo15-18	Ramo10-20	24	Ramo6-9	Ramo19-20	
9	Ramo15-18	Ramo19-20	25	Ramo6-9	Ramo18-19	
10	Ramo15-18	Ramo18-19	26	Ramo6-9	Ramo15-18	
11	Ramo16-17	Ramo10-17	27	Ramo6-9	Ramo16-17	
12	Ramo16-17	Ramo19-20	28	Ramo6-9	Ramo12-16	
13	Ramo16-17	Ramo18-19	29	Ramo6-9	Ramo9-10	
14	Ramo16-17	Ramo15-18	30	Ramo5-7	Ramo6-7	
15	Ramo12-16	Ramo10-17	31	Ramo2-5	Ramo6-7	
16	Ramo12-16	Ramo19-20	32	Ramo2-5	Ramo5-7	
			33	Ramo1-2	Ramo1-3	

Tabela 5.43 – Trios de Ramos Críticos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).

#	Trio Crítico			#	Trio Crítico		
1	Ramo12-15	Ramo14-15	Ramo10-20	23	Ramo6-10	Ramo19-20	Ramo10-22
2	Ramo12-15	Ramo14-15	Ramo19-20	24	Ramo6-10	Ramo19-20	Ramo10-21
3	Ramo12-15	Ramo14-15	Ramo18-19	25	Ramo6-10	Ramo19-20	Ramo10-17
4	Ramo12-15	Ramo14-15	Ramo15-18	26	Ramo6-10	Ramo15-18	Ramo21-22
5	Ramo12-15	Ramo14-15	Ramo16-17	27	Ramo6-10	Ramo15-18	Ramo10-22
6	Ramo12-15	Ramo12-16	Ramo14-15	28	Ramo6-10	Ramo16-17	Ramo27-30
7	Ramo12-14	Ramo12-15	Ramo10-20	29	Ramo6-10	Ramo16-17	Ramo27-29
8	Ramo12-14	Ramo12-15	Ramo19-20	30	Ramo6-10	Ramo16-17	Ramo28-27
9	Ramo12-14	Ramo12-15	Ramo18-19	31	Ramo6-10	Ramo16-17	Ramo23-24
10	Ramo12-14	Ramo12-15	Ramo15-18	32	Ramo6-10	Ramo16-17	Ramo21-22
11	Ramo12-14	Ramo12-15	Ramo16-17	33	Ramo6-10	Ramo16-17	Ramo10-22
12	Ramo12-14	Ramo12-15	Ramo12-16	34	Ramo6-10	Ramo16-17	Ramo10-20
13	Ramo4-12	Ramo14-15	Ramo19-20	35	Ramo6-10	Ramo14-15	Ramo19-20
14	Ramo4-12	Ramo14-15	Ramo18-19	36	Ramo6-10	Ramo14-15	Ramo15-18
15	Ramo4-12	Ramo12-16	Ramo14-15	37	Ramo6-10	Ramo12-15	Ramo19-20
16	Ramo4-12	Ramo12-15	Ramo18-19	38	Ramo6-10	Ramo12-14	Ramo19-20
17	Ramo4-12	Ramo12-15	Ramo14-15	39	Ramo6-10	Ramo12-14	Ramo15-18
18	Ramo4-12	Ramo12-15	Ramo12-16	40	Ramo6-10	Ramo12-14	Ramo16-17
19	Ramo4-12	Ramo12-14	Ramo19-20	41	Ramo6-10	Ramo4-12	Ramo19-20
20	Ramo4-12	Ramo12-14	Ramo18-19	42	Ramo6-10	Ramo4-12	Ramo16-17
21	Ramo4-12	Ramo12-14	Ramo16-17	43	Ramo6-10	Ramo9-10	Ramo15-18
22	Ramo4-12	Ramo12-14	Ramo12-15	44	Ramo6-10	Ramo9-10	Ramo16-17

Tabela 5.43 – Continuação.

#	Trio Crítico			#	Trio Crítico		
45	Ramo6-9	Ramo12-15	Ramo14-15	68	Ramo1-3	Ramo12-14	Ramo12-16
46	Ramo6-9	Ramo12-14	Ramo12-15	69	Ramo1-3	Ramo4-12	Ramo18-19
47	Ramo6-9	Ramo6-10	Ramo21-22	70	Ramo1-3	Ramo4-12	Ramo12-16
48	Ramo6-9	Ramo6-10	Ramo10-22	71	Ramo1-3	Ramo6-10	Ramo19-20
49	Ramo6-9	Ramo6-10	Ramo10-21	72	Ramo1-3	Ramo6-10	Ramo15-18
50	Ramo6-9	Ramo6-10	Ramo14-15	73	Ramo1-3	Ramo6-10	Ramo16-17
51	Ramo6-9	Ramo6-10	Ramo12-14	74	Ramo1-3	Ramo6-9	Ramo14-15
52	Ramo6-9	Ramo6-10	Ramo4-12	75	Ramo1-3	Ramo6-9	Ramo12-14
53	Ramo5-7	Ramo6-10	Ramo16-17	76	Ramo1-3	Ramo6-9	Ramo6-10
54	Ramo4-6	Ramo6-10	Ramo16-17	77	Ramo1-3	Ramo3-4	Ramo2-5
55	Ramo2-6	Ramo6-10	Ramo15-18	78	Ramo1-2	Ramo14-15	Ramo18-19
56	Ramo2-6	Ramo6-10	Ramo16-17	79	Ramo1-2	Ramo14-15	Ramo15-18
57	Ramo2-5	Ramo6-10	Ramo16-17	80	Ramo1-2	Ramo12-16	Ramo14-15
58	Ramo3-4	Ramo4-12	Ramo18-19	81	Ramo1-2	Ramo12-14	Ramo19-20
59	Ramo3-4	Ramo6-10	Ramo15-18	82	Ramo1-2	Ramo12-14	Ramo18-19
60	Ramo2-4	Ramo6-10	Ramo16-17	83	Ramo1-2	Ramo12-14	Ramo15-18
61	Ramo1-3	Ramo14-15	Ramo19-20	84	Ramo1-2	Ramo12-14	Ramo16-17
62	Ramo1-3	Ramo14-15	Ramo18-19	85	Ramo1-2	Ramo6-10	Ramo15-18
63	Ramo1-3	Ramo14-15	Ramo15-18	86	Ramo1-2	Ramo6-10	Ramo16-17
64	Ramo1-3	Ramo12-14	Ramo19-20	87	Ramo1-2	Ramo6-9	Ramo14-15
65	Ramo1-3	Ramo12-14	Ramo18-19	88	Ramo1-2	Ramo6-9	Ramo12-14
66	Ramo1-3	Ramo12-14	Ramo15-18	89	Ramo1-2	Ramo6-9	Ramo6-10
67	Ramo1-3	Ramo12-14	Ramo16-17	---	---	---	---
Total				89			

Obteve-se as k-tuplas de ramos críticos utilizando-se o método de *Branch-and-Bound* descrito na Figura 4.11. Para determinação das criticalidades que afetam somente a depuração de EGs, empregou-se o método apresentado na Figura 4.12. A Tabela 5.44 compara os Ck-ramos obtido pelos dois algoritmos de *Branch-and-Bound*. Nota-se que as criticalidades de ramos identificadas são diferentes, evidenciando, portanto, que a relação entre a capacidade de depuração de erros topológicos e as k-tuplas de ramos críticos não é direta, como ocorre para as Ck-meds.

Tabela 5.44 – Comparação entre os Algoritmos 4.11 e 4.12.

Algoritmo da Figura 4.11			Algoritmo da Figura 4.12			
#	Ramo Crítico	Total	#	Ramo Crítico	Tipo	Total
1	Ramo6-28	10	1	Ramo6-28	Essencial	10
2	Ramo29-30		2	Ramo29-30	Essencial	
3	Ramo25-27		3	Ramo25-27	Essencial	
4	Ramo25-26		4	Ramo25-26	Essencial	
5	Ramo24-25		5	Ramo24-25	Essencial	
6	Ramo22-24		6	Ramo22-24	Essencial	
7	Ramo15-23		7	Ramo15-23	Essencial	
8	Ramo12-13		8	Ramo12-13	Essencial	
9	Ramo9-11		9	Ramo9-11	Essencial	
10	Ramo6-8		10	Ramo6-8	Essencial	
---	---	---	11	Ramo8-28	Irrelevante	1
---	---	---	12	Ramo27-30	Não-essencial	4
---	---	---	13	Ramo27-29	Não-essencial	
---	---	---	14	Ramo28-27	Não-essencial	
---	---	---	15	Ramo23-24	Não-essencial	

Todos os C1-ramos determinados através do algoritmo da Figura 4.12, com exceção do ramo 8-28, estão associados somente a Cmeds – a injeção P27 no caso dos ramos 27-29, 27-30 e 28-27; e a injeção P24, no caso do ramo 23-24. Comparando-se as Tabelas 5.42-5.43 com a Tabela 5.44, é constatado que os ramos listados na última participam de k-tuplas críticas de ramos (com k superior a um) listadas nas primeiras. Este resultado mostra que a criticalidade das medidas tem forte influência na capacidade de detecção e identificação do erro de configuração da rede. Outro exemplo deste comportamento é o par crítico de ramos (27-90, 27-30). Conclui-se por inspeção visual da Figura 5.24 que somente medida P_{27} está associada aos dois ramos. Assim sendo, as colunas da matriz **M** referentes aos dois ramos serão idênticas. Como P_{27} é uma Cmed, a linha e a coluna da matriz **E** correspondente a esta medida são nulas. Logo, as colunas da matriz $\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{M}$ associadas ao este par crítico são igualmente nulas, sendo EGs devido a erros topológicos nestes sequer detectáveis via análise residual.

As Tabelas 5.45 e 5.46 apresentam as C2- e C3-ramos encontrados pelo algoritmo da Figura 4.12. As tuplas de ramos listadas satisfazem a condição de não detectabilidade e identificabilidade mencionada no Capítulo 2. Os resultados da Tabela 5.45 correspondem a situações em que erros topológicos simples não são detectáveis e identificáveis em qualquer circunstância, representando risco à EE.

Tabela 5.45 – C2-ramos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).

#	Par Crítico		#	Par Crítico		Total
1	Ramo10-20	Ramo10-17	17	Ramo9-10	Ramo15-18	33
2	Ramo19-20	Ramo10-17	18	Ramo9-10	Ramo16-17	
3	Ramo18-19	Ramo10-17	19	Ramo9-10	Ramo12-16	
4	Ramo15-18	Ramo10-17	20	Ramo9-10	Ramo4-12	
5	Ramo16-17	Ramo10-20	21	Ramo6-10	Ramo10-17	
6	Ramo12-16	Ramo10-20	22	Ramo6-10	Ramo10-20	
7	Ramo4-12	Ramo10-17	23	Ramo6-10	Ramo19-20	
8	Ramo4-12	Ramo10-20	24	Ramo6-10	Ramo15-18	
9	Ramo4-12	Ramo19-20	25	Ramo6-10	Ramo16-17	
10	Ramo4-12	Ramo18-19	26	Ramo6-10	Ramo4-12	
11	Ramo4-12	Ramo16-17	27	Ramo6-10	Ramo9-10	
12	Ramo4-12	Ramo12-16	28	Ramo6-9	Ramo10-17	
13	Ramo9-10	Ramo10-17	29	Ramo6-9	Ramo10-20	
14	Ramo9-10	Ramo10-20	30	Ramo6-9	Ramo4-12	
15	Ramo9-10	Ramo19-20	31	Ramo6-9	Ramo6-10	
16	Ramo9-10	Ramo18-19	32	Ramo1-3	Ramo3-4	
---	---	---	33	Ramo1-2	Ramo3-4	

A análise da Tabela 5.30 indica que os ramos 4-12 (9 ocorrências); 6-10 (8 ocorrências); e 9-10 (9 ocorrências) estão envolvidos em parte considerável dos C2-ramos identificados. Atenção redobrada deve ser dispendida a estes, pois erros topológicos que os envolvem podem resultar na suspeição indevida, por parte da EE, de vários ramos corretos. Considere a tripla crítica de ramos (1-3, 3-4, 2-5). Por ser uma tupla crítica, esperar-se-ia que o erro em apenas um dos ramos da tupla fosse identificável. Entretanto, conforme a Tabela 5.45 aponta, o erro topológico simples nos ramos 1-3 ou 3-4, não é identificável. Tal fato é consequência das Ck-meds (A_3) e (P_1 , P_4 , P_{1-3}) estarem associadas ao C2-ramo (1-3, 3-4).

Na Tabela 5.46 são apresentados os casos em que a saída não reportada de 3 ramos da rede pode não ser detectável. Diferentemente dos casos das Tabelas 5.29 e 5.30, a capacidade de detecção do erro dependerá do estado da rede e do valor dos parâmetros dos ramos.

Tabela 5.46 – C3-ramos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).

#	Trio Crítico			#	Trio Crítico		
1	Ramo12-15	Ramo14-15	Ramo10-17	41	Ramo3-4	Ramo6-9	Ramo12-14
2	Ramo12-14	Ramo12-15	Ramo10-17	42	Ramo1-3	Ramo14-15	Ramo10-17
3	Ramo9-10	Ramo12-15	Ramo14-15	43	Ramo1-3	Ramo14-15	Ramo10-20
4	Ramo9-10	Ramo12-14	Ramo12-15	44	Ramo1-3	Ramo14-15	Ramo16-17
5	Ramo6-10	Ramo12-15	Ramo14-15	45	Ramo1-3	Ramo12-16	Ramo14-15
6	Ramo6-10	Ramo12-14	Ramo12-15	46	Ramo1-3	Ramo12-15	Ramo10-17
7	Ramo3-4	Ramo14-15	Ramo10-17	47	Ramo1-3	Ramo12-15	Ramo10-20
8	Ramo3-4	Ramo14-15	Ramo10-20	48	Ramo1-3	Ramo12-15	Ramo19-20
9	Ramo3-4	Ramo14-15	Ramo19-20	49	Ramo1-3	Ramo12-15	Ramo18-19
10	Ramo3-4	Ramo14-15	Ramo18-19	50	Ramo1-3	Ramo12-15	Ramo15-18
11	Ramo3-4	Ramo14-15	Ramo15-18	51	Ramo1-3	Ramo12-15	Ramo16-17
12	Ramo3-4	Ramo14-15	Ramo16-17	52	Ramo1-3	Ramo12-15	Ramo14-15
13	Ramo3-4	Ramo12-16	Ramo14-15	53	Ramo1-3	Ramo12-15	Ramo12-16
14	Ramo3-4	Ramo12-15	Ramo10-17	54	Ramo1-3	Ramo12-14	Ramo10-17
15	Ramo3-4	Ramo12-15	Ramo10-20	55	Ramo1-3	Ramo12-14	Ramo10-20
16	Ramo3-4	Ramo12-15	Ramo19-20	56	Ramo1-3	Ramo12-14	Ramo12-15
17	Ramo3-4	Ramo12-15	Ramo18-19	57	Ramo1-3	Ramo4-12	Ramo14-15
18	Ramo3-4	Ramo12-15	Ramo15-18	58	Ramo1-3	Ramo4-12	Ramo12-15
19	Ramo3-4	Ramo12-15	Ramo16-17	59	Ramo1-3	Ramo4-12	Ramo12-14
20	Ramo3-4	Ramo12-15	Ramo14-15	60	Ramo1-3	Ramo9-10	Ramo14-15
21	Ramo3-4	Ramo12-15	Ramo12-16	61	Ramo1-3	Ramo9-10	Ramo12-15
22	Ramo3-4	Ramo12-14	Ramo10-17	62	Ramo1-3	Ramo9-10	Ramo12-14
23	Ramo3-4	Ramo12-14	Ramo10-20	63	Ramo1-3	Ramo6-10	Ramo14-15
24	Ramo3-4	Ramo12-14	Ramo19-20	64	Ramo1-3	Ramo6-10	Ramo12-15
25	Ramo3-4	Ramo12-14	Ramo18-19	65	Ramo1-3	Ramo6-10	Ramo12-14
26	Ramo3-4	Ramo12-14	Ramo15-18	66	Ramo1-3	Ramo6-9	Ramo12-15
27	Ramo3-4	Ramo12-14	Ramo16-17	67	Ramo1-2	Ramo14-15	Ramo10-17
28	Ramo3-4	Ramo12-14	Ramo12-16	68	Ramo1-2	Ramo14-15	Ramo10-20
29	Ramo3-4	Ramo12-14	Ramo12-15	69	Ramo1-2	Ramo14-15	Ramo19-20
30	Ramo3-4	Ramo4-12	Ramo14-15	70	Ramo1-2	Ramo14-15	Ramo16-17
31	Ramo3-4	Ramo4-12	Ramo12-15	71	Ramo1-2	Ramo12-15	Ramo10-17
32	Ramo3-4	Ramo4-12	Ramo12-14	72	Ramo1-2	Ramo12-15	Ramo10-20
33	Ramo3-4	Ramo9-10	Ramo14-15	73	Ramo1-2	Ramo12-15	Ramo19-20
34	Ramo3-4	Ramo9-10	Ramo12-15	74	Ramo1-2	Ramo12-15	Ramo18-19
35	Ramo3-4	Ramo9-10	Ramo12-14	75	Ramo1-2	Ramo12-15	Ramo15-18
36	Ramo3-4	Ramo6-10	Ramo14-15	76	Ramo1-2	Ramo12-15	Ramo16-17
37	Ramo3-4	Ramo6-10	Ramo12-15	77	Ramo1-2	Ramo12-15	Ramo14-15
38	Ramo3-4	Ramo6-10	Ramo12-14	78	Ramo1-2	Ramo12-15	Ramo12-16
39	Ramo3-4	Ramo6-9	Ramo14-15	79	Ramo1-2	Ramo12-14	Ramo10-17
40	Ramo3-4	Ramo6-9	Ramo12-15	80	Ramo1-2	Ramo12-14	Ramo10-20

Tabela 5.46 – Continuação.

#	Trio Crítico			#	Trio Crítico		
81	Ramo1-2	Ramo12-14	Ramo12-16	87	Ramo1-2	Ramo9-10	Ramo12-15
82	Ramo1-2	Ramo12-14	Ramo12-15	88	Ramo1-2	Ramo9-10	Ramo12-14
83	Ramo1-2	Ramo4-12	Ramo14-15	89	Ramo1-2	Ramo6-10	Ramo14-15
84	Ramo1-2	Ramo4-12	Ramo12-15	90	Ramo1-2	Ramo6-10	Ramo12-15
85	Ramo1-2	Ramo4-12	Ramo12-14	91	Ramo1-2	Ramo6-10	Ramo12-14
86	Ramo1-2	Ramo9-10	Ramo14-15	92	Ramo1-2	Ramo6-9	Ramo12-15
Total				92			

Observa-se nesta última tabela que os ramos 1-3, 1-2, 12-14 e 12-15 tem grande participação nos C3-ramos identificados. Os resultados mostraram de forma clara a dependência da capacidade das criticalidade dos ramos e daquela das medidas neles incidentes. Neste contexto, o conhecimento das tuplas críticas de medidas ajuda a explicar o comportamento das criticalidades de ramos.

Para o cálculo dos índices PLIC, PLOC e PLDC, considerou-se somente a indisponibilidade de UMs. A Tabela 5.47 apresenta as taxas de indisponibilidades adotadas para as UMs. Os valores utilizados foram arbitrariamente escolhidos em função do nível de tensão da barra em que a UM foi inserida.

Tabela 5.47 – Indisponibilidade das UMs – Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).

UM	Taxas de Indisponibilidade	UM	Taxas de Indisponibilidade
1	0,1	16	0,02
2	0,1	17	0,02
3	0,01	18	0,02
4	0,1	19	0,02
5	0,1	20	0,02
6	0,1	21	0,02
7	0,1	22	0,02
8	0,1	23	0,02
9	0,0008	24	0,02
10	0,02	25	0,02
11	0,0008	26	0,02
12	0,02	27	0,02
13	0,0008	28	0,02
14	0,02	29	0,02
15	0,02	30	0,02

A Tabela 5.48 apresenta as taxas de indisponibilidades ajustadas para cada índice calculado.

Tabela 5.48 – Taxas de indisponibilidades das UMs (Plano A).

UM	Taxas de Indisponibilidade Original	Taxas de Indisponibilidade Ajustada		
		PLOC	PLIC	PLDC
1	0,1	0,13	0,10	0,10
2	0,1	0,16	0,10	0,11
3	0,01	0,01	0,01	0,01
4	0,1	0,12	0,10	0,10
5	0,1	0,11	0,10	0,11
6	0,1	0,38	0,10	0,10
7	0,1	0,10	0,10	0,10
8	0,1	0,10	0,10	0,0008
9	0,0008	0,003	0,0008	0,02
10	0,02	0,075	0,02	0,0081
11	0,0008	0,009	0,0085	0,020
12	0,02	0,069	0,02	0,009
13	0,0008	0,008	0,0081	0,03
14	0,02	0,020	0,02	0,02
15	0,02	0,082	0,02	0,026
16	0,02	0,023	0,022	0,02
17	0,02	0,020	0,022	0,021
18	0,02	0,022	0,023	0,028
19	0,02	0,020	0,026	0,020
20	0,02	0,020	0,021	0,020
21	0,02	0,022	0,020	0,020
22	0,02	0,085	0,020	0,020
23	0,02	0,020	0,020	0,020
24	0,02	0,069	0,020	0,020
25	0,02	0,077	0,020	0,021
26	0,02	0,020	0,020	0,020
27	0,02	0,083	0,020	0,020
28	0,02	0,022	0,020	0,020
29	0,02	0,085	0,020	0,020
30	0,02	0,020	0,021	0,020

A Figura 5.27 mostra a diferença entre taxas de indisponibilidades originais e as ajustadas para o cálculo do PLOC. Nota-se que as taxas das UMs 2, 6, 10, 12, 15, 22, 24, 25, 27, e 29 aumenta consideravelmente. Exceto a UM2, todas as restantes são críticas, conforme mostrado na Tabela 5.40. A UM2, embora não seja crítica, participa de metade dos pares críticos encontrados. Observa-se novamente que a variação das taxas de indisponibilidade reflete o impacto do elemento simulado na observabilidade e criticalidade.

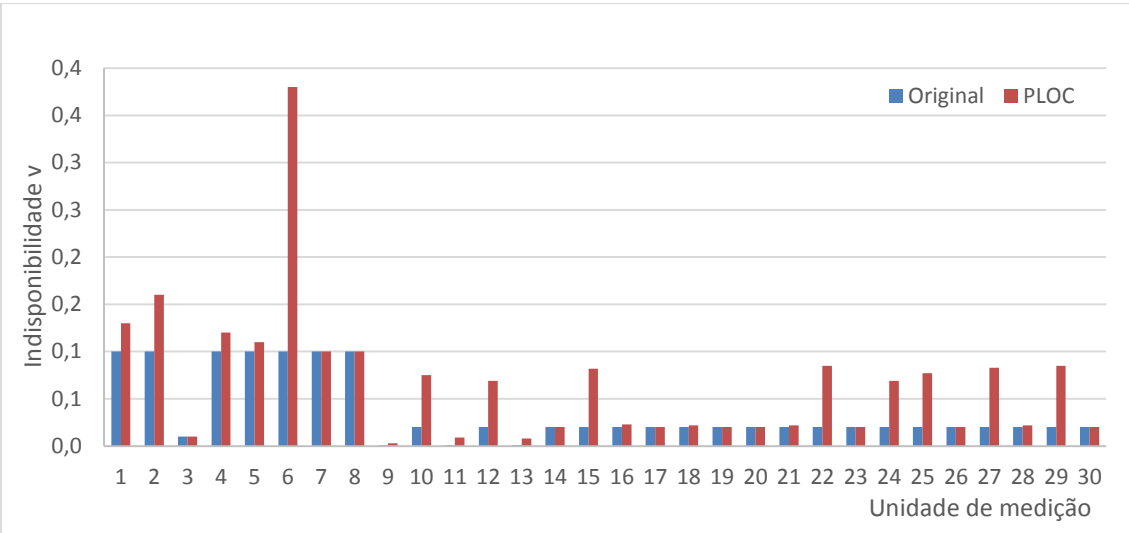


Figura 5.27–Comparação entre as taxas de indisponibilidades das UMs – PLOC.

No caso do PLIC, de acordo com a Figura 5.28, não há mudança significativa das indisponibilidades, o que sugere que a perda da capacidade de identificação não é um evento raro. Ocorre uma pequena variação das indisponibilidades das UMs 11 e 13, mas que não afetam o cálculo, pois estas unidades não coletam nenhuma medida.

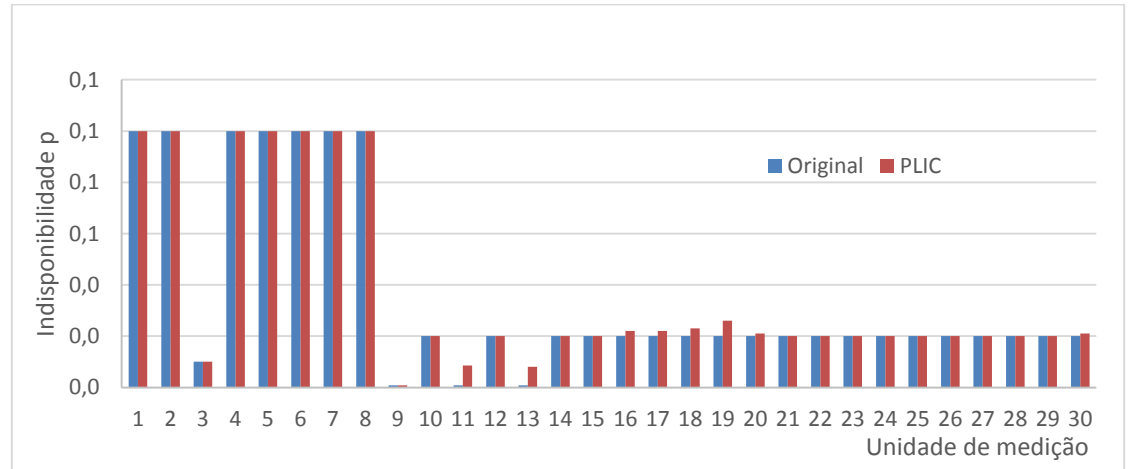


Figura 5.28–Comparação entre as taxas de indisponibilidades das UMs – PLIC.

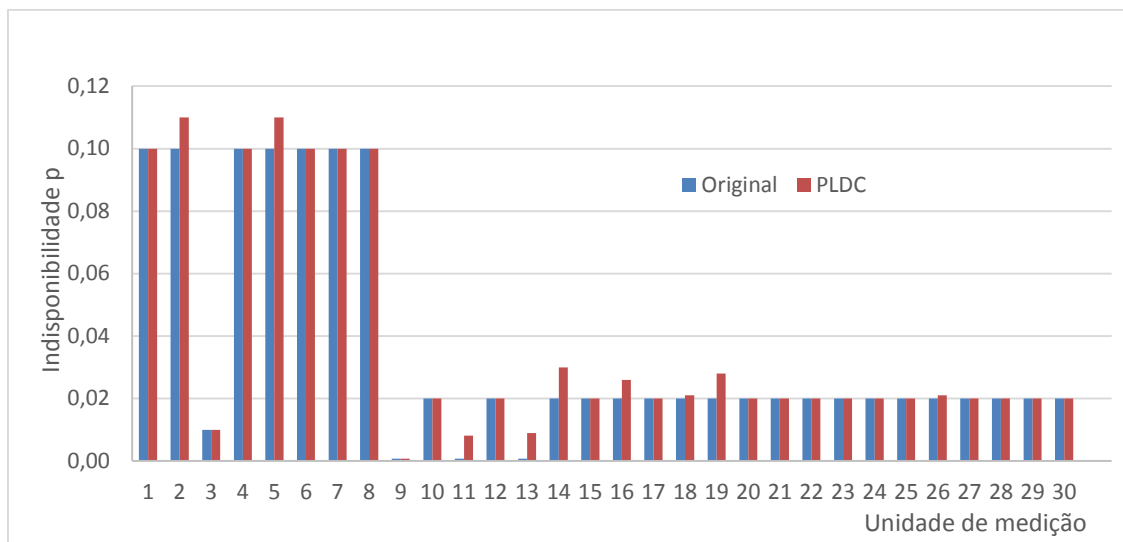


Figura 5.29–Comparação entre as taxas de indisponibilidades das UMs – PLDC.

O valor dos índices probabilísticos para o Plano A encontram-se na Tabela 5.49. O resultado mostra que o sistema de medição tem um risco de perda de observabilidade de 26%, considerando as perdas de UMs. A perda de capacidade de identificação atinge 60%, sendo difícil e igualmente arriscada a identificação de EGs utilizando esta configuração de medição.

Tabela 5.49 –Índices probabilísticos de Observação (Plano A).

<i>Índice</i>	$\hat{\ell}$ (%)	β (%)	N
<i>PLOC</i>	26,0	0,4	10^5
<i>PLIC</i>	60,0	0,04	10^5
<i>PLDC</i>	33,0	0,05	10^5
<i>Classificação</i>	B-		

O índice PLDC aponta uma probabilidade de perda de capacidade de detecção de 33%, que, embora consideravelmente menor do que a do PLIC, também inspira cautela em relação à confiabilidade resultados fornecidos pela EE. Constata-se de maneira geral que a capacidade de observação do sistema é razoável. O coeficiente de informação relativa calculado para este caso é listado na Tabela 5.50.

Tabela 5.50 –Coeficiente de informação relativa – Sistema IEEE 30 Barras (Plano A).

<i>Coef_{IR}</i>	<i>ln(det(G))</i>	<i>ln(det(G_{Max}))</i>
-25,42	6,96	32,37

O baixo valor do $Coef_{IR}$ indica que o plano de medição carece de informação sobre o estado operativo da rede. Do ponto de vista da Teoria da Informação, isto se reflete em entropias relativas próximas de zero entre diferentes estados operativos. Como resultado, a EE tem sua capacidade de detecção e identificação de EGs comprometidas, conforme também apontam o PLIC e o PLDC.

De forma a ilustrar detalhadamente como a capacidade de observação do estado muda em função do plano de medidas, analisar-se-á o plano de medidas B, indicado na Figura 5.29, composto de 42 medidores, sendo 24 medidas de fluxo de potência, 13 de injeção de potência, 2 de ângulo e 3 de corrente nos ramos. Este plano possui tanto medições convencionais, provenientes do SCADA, quanto fasoriais, coletadas pelas UMFs instaladas nas barras 3 e 28.

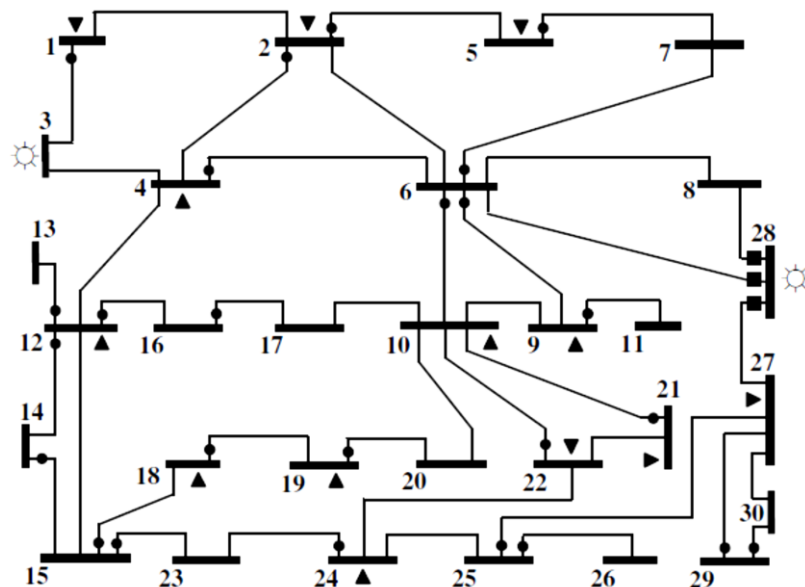


Figura 5.30–Sistema IEEE 30 Barras – Plano de Medição B.

A Tabela 5.51 apresenta as medidas e pares críticos identificados. A Tabela 5.52 compara o número de criticalidades encontradas (cardinalidade até 8) para os planos A e B. O espalhamento mais uniforme das medidas pela rede e a inclusão da UMF completa na barra 28, ocasionaram o desaparecimento de diversas C1- e C2-meds, conforme a comparação das Tabelas 5.51 e 5.39 atesta. As medidas que integravam as tuplas dissolvidas agora formam Ck-meds de maior cardinalidade, o que explica o aumento do número de k-tuplas críticas de medidas com cardinalidade 6, 7 e 8, listadas na Tabela 5.52.

Tabela 5.51–C1 e C2-meds do Sistema IEEE 30 Barras (Plano B).

Cardinalidade k	Ck-meds	Total
1	(P ₂₅₋₂₆), (I ₂₈₋₈),	2
2	(P ₂₉₋₂₇ , P ₂₉₋₃₀), (P ₂₇ , P ₂₉₋₃₀), (P ₂₇ , P ₂₉₋₂₇), (P ₂₄ , P ₁₅₋₂₃), (P ₂₂ , P ₁₅₋₂₃), (P ₂₂ , P ₂₄), (P ₁₂ , P ₁₂₋₁₃), (P ₁₀ , P ₁₆₋₁₇), (P ₉ , P ₉₋₁₁), (A ₃ , A ₂₈)	10

Tabela 5.52– Comparação entre criticalidades de medidas – Sistema IEEE 30 Barras.

Cardinalidade k	Total de Ck-meds	
	Plano A	Plano B
1	11	2
2	9	10
3	91	49
4	220	225
5	1287	1236
6	958	2908
7	712	10108
8	0	41414
Total	3288	55952

A melhoria das criticalidades das medidas promove alterações nas Ck-UMs, conforme mostra a Tabela 5.53 e a Figura 5.41. As UMs 3, 6, 10, 15, 22 e 24, que antes eram críticas, passam a integrar pares críticos de unidades de medição. Como exemplo, a UMF3 agora constitui par crítico com a UMF28. Os resultados indicam elevação da cardinalidade das Ck-UMs com o reforço do sistema de medição, proporcionando melhor atendimento ao requisito de robustez.

Tabela 5.53– C1 e C2-UMs – Sistema IEEE 30 Barras (Plano B).

Cardinalidade k	Ck-UMs	Total
1	(UM ₉), (UM ₁₂), (UM ₂₅), (UM ₂₉),	4
2	(UM ₁ , UM ₂), (UM ₃ , UM ₂₈), (UM ₅ , UM ₆), (UM ₂ , UM ₅), (UM ₁₀ , UM ₁₆), (UM ₁₀ , UM ₁₉), (UM ₁₅ , UM ₂₂), (UM ₁₅ , UM ₂₄), (UM ₁₆ , UM ₁₉), (UM ₂₁ , UM ₂₂), (UM ₂₂ , UM ₂₄), (UM ₁₈ , UM ₁₉),	12

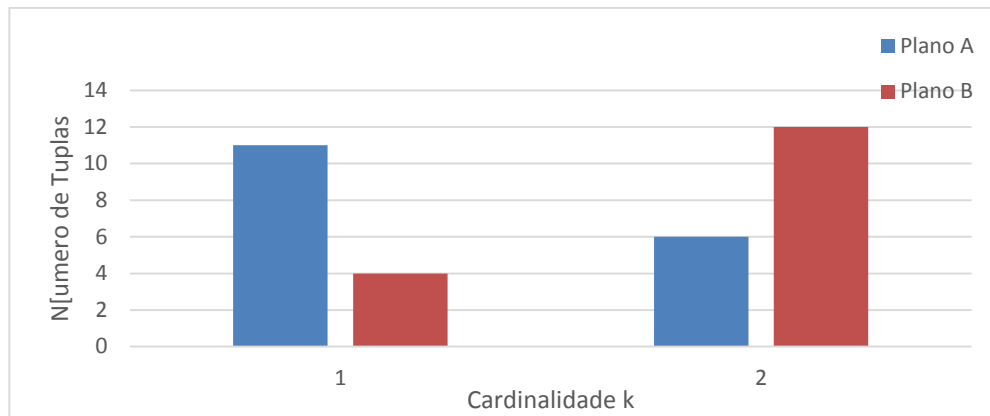


Figura 5.31–Comparação entre criticalidades de UMs – Sistema IEEE 30 Barras.

Tal como ocorrido com as UMs, a alteração das Ck-meds modificou a criticalidade dos ramos da rede elétrica. As Tabelas 5.54-5.56 mostram que houve redução significativa dos C1- e C2-ramos.

Tabela 5.54 – C1-ramos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano B).

#	Ramo	Tipo
1	Ramo8-28	Crítico
2	Ramo25-26	Crítico
3	Ramo12-13	Crítico
4	Ramo9-11	Crítico
5	Ramo6-8	Irrelevante

Tabela 5.55 – C2-ramos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano B).

#	Par Crítico		#	Par Crítico	
1	Ramo27-30	Ramo29-30	14	Ramo15-18	Ramo19-20
2	Ramo27-29	Ramo29-30	15	Ramo15-18	Ramo18-19
3	Ramo27-29	Ramo27-30	16	Ramo16-17	Ramo10-17
4	Ramo24-25	Ramo25-27	17	Ramo16-17	Ramo19-20
5	Ramo22-24	Ramo25-27	18	Ramo12-16	Ramo10-17
6	Ramo15-23	Ramo27-29	19	Ramo12-16	Ramo16-17
7	Ramo15-23	Ramo23-24	20	Ramo12-14	Ramo14-15
8	Ramo15-23	Ramo22-24	21	Ramo6-9	Ramo9-10
9	Ramo10-21	Ramo21-22	22	Ramo5-7	Ramo6-7
10	Ramo19-20	Ramo10-20	23	Ramo2-5	Ramo6-7
11	Ramo18-19	Ramo10-20	24	Ramo2-5	Ramo5-7
12	Ramo18-19	Ramo19-20	25	Ramo1-2	Ramo1-3
13	Ramo15-18	Ramo10-20	---	---	---

Tabela 5.56 – C2-ramos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano B).

#	Par com Erro não Detectável		#	Par com Erro não Detectável	
1	Ramo23-24	Ramo25-27	10	Ramo15-18	Ramo10-17
2	Ramo23-24	Ramo24-25	11	Ramo16-17	Ramo10-20
3	Ramo22-24	Ramo24-25	12	Ramo16-17	Ramo18-19
4	Ramo22-24	Ramo23-24	13	Ramo16-17	Ramo15-18
5	Ramo15-23	Ramo25-27	14	Ramo12-16	Ramo10-20
6	Ramo15-23	Ramo24-25	15	Ramo12-16	Ramo19-20
7	Ramo10-20	Ramo10-17	16	Ramo12-16	Ramo18-19
8	Ramo19-20	Ramo10-17	17	Ramo12-16	Ramo15-18
9	Ramo18-19	Ramo10-17	18	Ramo3-4	Ramo6-28

A Figura 5.42 apresenta o comparativo entre a quantidade de Ck-ramos até ordem 3 identificados para os planos A e B. Constatou-se que as tuplas críticas de ramos de cardinalidade mais baixa são reduzidas. Portanto, houve também melhoria da capacidade de observação do estado no que se refere a alterações na rede elétrica.

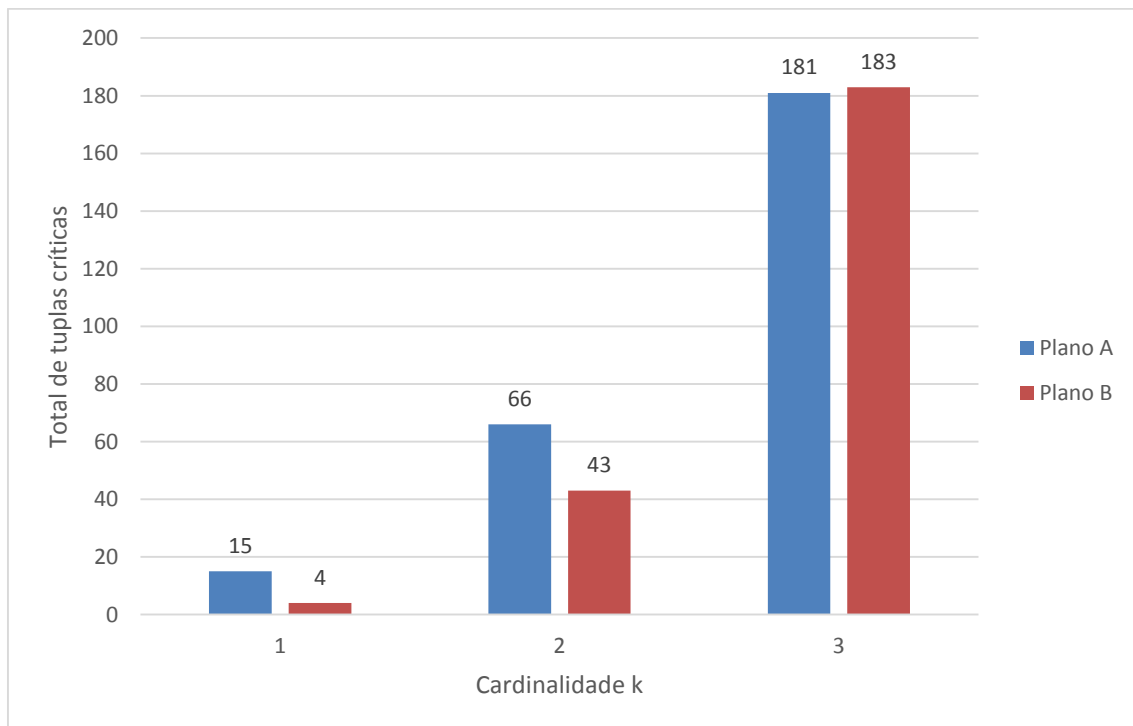


Figura 5.32–Comparação entre as criticalidades de ramos – Sistema IEEE 30 Barras.

A enumeração das criticalidades sugere melhora significativa na capacidade de observação do estado. Nota-se que tal melhoria ocorre não apenas na vizinhança da UMF 28, mas em toda a rede elétrica. Pode-se concluir a partir disto que o maior espalhamento das medidas pela rede fortalece a capacidade de observação do estado

operativo. Os resultados mostram que a análise qualitativa produz quantidades significativas de dados, que não são fáceis de processar e avaliar. Além disso o esforço computacional demandado pelos métodos propostos para esta forma de avaliação da capacidade de observação do estado aumenta consideravelmente com o tamanho do sistema. Como exemplo, método *Branch-and-Bound* encontrou 56 mil Ck-meds de cardinalidade até 8 em aproximadamente 25 horas.

Empregando-se os indicadores probabilísticos ou o coeficiente de informação relativa, a avaliação da capacidade de observação do estado torna-se mais simples e menos custosa computacionalmente. A Tabela 5.57 apresenta a comparação entre os coeficientes de informação relativa para o Plano A e para o Plano B.

Tabela 5.57 – Comparação entre coeficientes de informação relativa.

Plano	$Coef_{IR}$	$\ln(\det(G))$	$\ln(\det(G_{M\acute{a}x}))$
A	-25,42	6,96	32,37
B	-21,20	11,18	32,37

Conforme a tabela anterior indica, as alterações no sistema de medição proporcionaram o aumento da quantidade de informação a respeito do estado operativo da rede – o determinante de G para o sistema de medição B é cerca de 70 vezes maior do que para o sistema de medição A. Entretanto, o valor do $Coef_{IR}$ continua baixo, indicando que a melhoria na capacidade de observação é pequena. Tal conclusão é mais perceptível através dos índices probabilísticos como será mostrado adiante. Note que a incorporação de medidas apenas modifica o determinante da matriz G , diferentemente da alteração topológica, que, conforme visto na Seção 5.2, também altera o determinante da matriz $G_{M\acute{a}x}$. Tal fato comprova o importante papel da topologia na extração de conhecimento do estado da rede elétrica a partir das medidas.

Os indicadores probabilísticos obtidos para o Plano B encontram-se na Tabela 5.58. Os resultados sugerem que o risco de perda de observabilidade e detectabilidade de EGs é baixo. Estes valores resultam do número reduzido de Cmeds e Cconjs. Verifica-se comprometimento da capacidade de identificação de EGs: há um risco de 43% de EGs não serem identificados pela EE.

Tabela 5.58 – Índices probabilísticos do Sistema IEEE 30 Barras (Plano B).

Índice	$\hat{\ell}$ (%)	β (%)	N
PLOC	11,0	0,5	10^5
PLIC	43,0	0,05	10^5
PLDC	7,0	0,1	10^5
Classificação	A		

A Figura 5.33 apresenta uma comparação dos 3 indicadores probabilísticos para os sistemas de medição A e B. Observa-se com base nos valores dos indicadores PLIC, PLOC e PLDC que ocorre melhoria geral dos índices, embora a EE persista na dificuldade de identificar a presença de EGs. Note que o pequeno valor do $Coef_{IR}$ reflete esta condição. Este exemplo demonstra claramente a vantagem do emprego dos indicadores na avaliação da capacidade de observação do estado. As mesmas conclusões observadas a partir das criticalidades enumeradas puderam ser obtidas via avaliação quantitativa da capacidade de observação com maior facilidade, intuição e menor custo computacional. A simulação de Monte Carlo, empregando a técnica da amostragem por importância e rastreamento, durou em torno de 18 minutos, para o número de amostras utilizados. Nota-se que, devido ao baixo erro relativo das simulações, números de amostras menores poderiam ter sido empregados, permitindo-se desta forma tempos de simulação ainda menores.

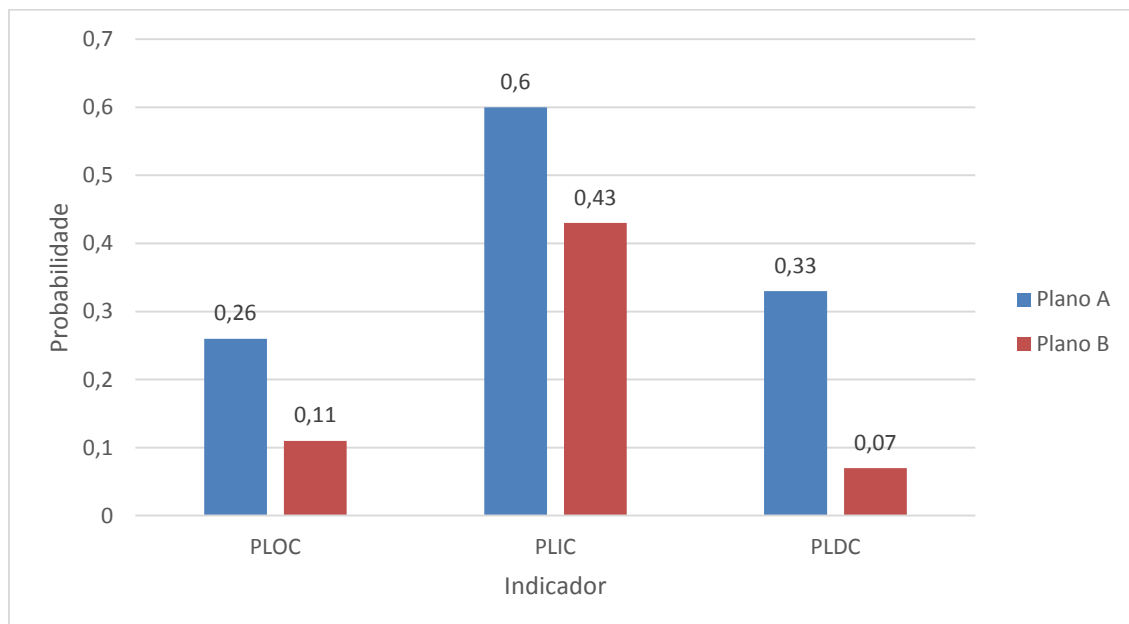


Figura 5.33–Comparação entre Índices probabilísticos – Sistema IEEE 30 Barras.

5.5 Sistema IEEE 118 barras

Constatou-se, ao longo dos últimos sistemas testes, que a avaliação da capacidade de observação do estado pode ser realizada quantitativamente, sem qualquer prejuízo à caracterização desta. Este último teste almeja demonstrar a avaliação quantitativa da capacidade de observação do estado em sistemas de maior porte.

O sistema-teste IEEE 118 barras é composto de 179 ramos e totalmente observado por 176 medidas convencionais recebidas a partir de 98 UTRs, dispostas como pode ser visto na Figura 5.34. Adicionalmente, medições fasoriais são fornecidas pelas UMFs localizadas nas barras 2, 5, 9, 11, 12, 17, 21, 25, 28 e 114. Cada UMF mede o fasor de tensão (magnitude e ângulo de fase) da barra onde está instalada e os fasores de corrente (parte real e imaginária), em todos os ramos originários daquela. As Tabelas 5.59 e 5.60 mostram os resultados obtidos com a simulação de Monte Carlo simples, relativo ao cálculo dos índices probabilísticos propostos. Dois casos foram simulados:

- Caso 1 - Indisponibilidade de 1% para cada unidade de medição;
- Caso 2 - Indisponibilidade de 1% para cada unidade de medição e ramo da rede.

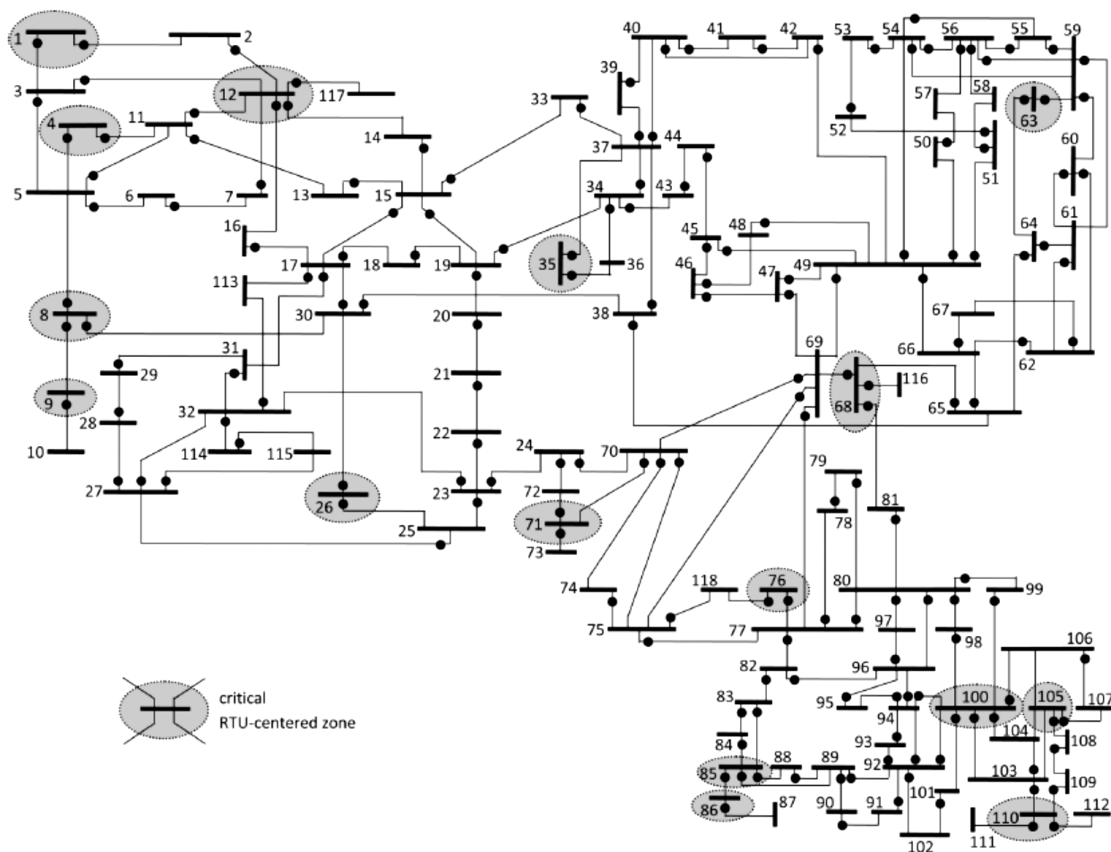


Figura 5.34–Sistema IEEE 118 Barras.

Tabela 5.59 – Índices probabilísticos – IEEE 118 Barras (Caso 1).

<i>Índice</i>	$\hat{p}$ (%)	β (%)	<i>Intervalo de Confiança de 95%</i>	<i>N</i>	<i>Tempo</i>
PLOC	11,5	4,68	[10,5;12,6]	3500	2,27
PLIC	33,6	0,25	[33,5; 33,8]	500	1,53
PLDC	3,28	1,30	[3,20; 3,37]	500	1,14

Tabela 5.60 – Índices probabilísticos – IEEE 118 Barras (Caso 2).

<i>Índice</i>	$\hat{p}$ (%)	β (%)	<i>Intervalo de Confiança de 95%</i>	<i>N</i>	<i>Tempo</i>
PLOC	21,1	3,27	[19,8; 22,5]	3500	4,13
PLIC	34,6	0,34	[34,3; 34,8]	500	2,21
PLDC	3,98	1,40	[3,87; 4,09]	500	1,66

De acordo com as regras propostas Capítulo 4 para atribuir graus de observação aos sistemas de medição, para os valores dos índices probabilísticos listados nas Tabelas 5.59 e 5.60, classifica-se o sistema de medição nos dois casos como se segue:

- Caso 1 - PLOC = 11,5 $\Rightarrow$ A $\equiv$ Capacidade de Observação do Estado média alta; PLDC = 3,38 < 11,5 $\Rightarrow$ PLIC = 33,6 > 11,5 $\Rightarrow$ nenhum sinal é adicionado ao grau atribuído.

- Caso 2 - PLOC = 21,1 $\Rightarrow$ BB $\equiv$ fraca Capacidade de Observação do Estado; PLDC = 3,98 < 21,1 $\Rightarrow$ PLIC = 34,6 > 21,1 $\Rightarrow$ nenhum sinal é adicionado ao grau atribuído.

A Tabela 5.61 compara os indicadores e ratings obtidos para cada caso. É interessante ver o efeito da indisponibilidade dos ramos da rede na quantificação do risco do sistema. Nota-se que o sistema de medição, no Caso 2, não tem o selo de aprovação (grau de observação).

Tabela 5.61 – Comparação entre as capacidades de observação – IEEE 118 Barras.

<i>Caso</i>	<i>PLOC</i>	<i>PLIC</i>	<i>PLDC</i>	<i>Grau de Observação</i>
1	11,5	33,6	3,28	A
2	21,5	34,6	3,98	BB

A quantidade de tempo gasto no cálculo de cada índice foi inferior a 5 segundos, o que pode ser considerado como aceitável para o estudo realizado.

5.6 Comentários Finais

Os métodos propostos mostram concordância de resultados entre si. O método de Branch-and-Bound mostrou-se versátil, permitindo a enumeração de criticalidades de ramos e de grupos de medidas de qualquer cardinalidade, conforme mostrado em vários exemplos. O método permitiu a contagem das Ck-tuplas de medidas até cardinalidade 8 em torno de 1 hora, enquanto a enumeração bruta das tuplas de medidas não conseguir realizar igual tarefa em menos de um dia. Observou-se, no entanto, que o método não é escalável, visto que a enumeração das k-tuplas críticas de medidas do Plano de medição B do sistema IEEE 30 barras durou aproximadamente 25 horas. Constatou-se também por meio dos exemplos que quanto maior a capacidade de observação do estado operativo do sistema, maior o esforço computacional dispendido na determinação das criticalidades estudadas.

Os métodos de identificação de Ck-tuplas até ordem 3 e de determinação de C1- e C2-UMs são mais limitados do que a técnica do Branch-and-Bound, porém possuem custos computacionais mais modestos. Os resultados mostram de maneira geral a viabilidade da elaboração de métodos inteligentes de determinação das criticalidades da rede que empreguem propriedades das mesmas, não havendo na literatura, conforme indica a revisão bibliográfica realizada no Capítulo 2, trabalhos similares com a mesma extensão.

Os indicadores propostos refletem adequadamente o atendimento de um plano de medição aos requisitos de observabilidade, criticalidade e robustez. O uso da amostragem por importância e rastreamento permitiu a redução dos custos computacionais associados à obtenção dos Índices probabilísticos com maior precisão. Adicionalmente, durante a etapa da estimação da função de importância, através da modificação das taxas de indisponibilidade dos equipamentos simulados, a simulação de Monte Carlo forneceu também o grau de dos elementos simulados no desempenho da EE.

Nos testes realizados os tempos de simulação para obtenção dos índices probabilísticos mostraram-se significativamente menores do que aqueles necessários à determinação das criticalidades. A simulação de Monte Carlo mais longa ocorreu para o sistema IEEE 30 barras empregando-se 10^5 amostras, tendo durado 18 minutos. O método empregado foi o método de Monte Carlo com amostragem por importância e rastreamento. Parcela considerável do tempo computacional dispendido neste caso deveu-se ao processo de determinação das taxas de indisponibilidades ajustadas. Conforme apresentado no Capítulo 4, o custo de simulação depende do tamanho da amostra utilizado, que por sua vez depende da raridade dos eventos a serem simulados.

Os resultados obtidos mostraram que a técnica de redução de variância funciona adequadamente para a raridade dos eventos simulados. Resultados similares foram obtidos empregando-se as outras técnicas de redução de variância apresentadas no Capítulo 3. Entretanto, por limitações de espaço, estes resultados não foram aqui apresentados. Ressalta-se que a opção nesta Tese pelo uso da técnica de amostragem por importância deve-se à sua facilidade de implementação desta para o cálculo dos três indicadores probabilísticos, pela sua habilidade de reconhecer, via, aprendizado estatístico, os elementos simulados com maior impacto na observabilidade e criticalidade e as significativas reduções de variância que o método pode permitir.

O índice baseado em Teoria de Informação mostrou concordância com os índices probabilísticos e com as criticalidades determinadas para cada caso. Em relação ao PLIC, PLOC e PLDC, tem como grande vantagem o fato de ser uma medida determinística, que depende apenas do cálculo de dois determinantes de matrizes. Entretanto, sua dificuldade de interpretação constitui-se um obstáculo à sua utilização. Além disso, o coeficiente de informação relativa representa grande contribuição, no estabelecimento de promissoras pontes entre a EE e a Teoria da Informação, em especial na caracterização da observabilidade por meio desta, em consonância com os trabalhos [Qiao13], [Mira12] e [Krst14].

Por fim, os resultados finais mostram que os graus de observação propostos, fornecem uma noção intuitiva e útil do atendimento do plano de medição aos requisitos de observabilidade, confiabilidade e robustez.

5.7 Conclusões

Avaliou-se neste capítulo a Capacidade de Observação do Estado Operativo dos sistemas testes de 6 barras e IEEE 24, 30 e 118 barras, por meio dos métodos propostos no Capítulo 4. Estes mostraram-se adequados para avaliação da capacidade de observação do estado, seja de forma conjunta, como realizada para os sistemas de 6 barras e IEEE 24 e 30 barras, ou separadamente, como mostrado nos testes com a rede IEEE 118 barras. Constatou-se, por meio dos exemplos, que a melhor estratégia para avaliação da capacidade de observação é a avaliação quantitativa, devendo a enumeração de criticalidades ser utilizada quando for estritamente necessário.

Os estudos aqui apresentados mostram que a capacidade de observação do estado caracteriza melhor a aptidão da EE em observar estado da rede e processar EGs, sendo, neste sentido, mais completa do que a análise de observabilidade. Por fim,

os exemplos analisados mostram as limitações da EE e confirmam que esta deve ser utilizado com cautela, sob risco de não satisfação das expectativas nela depositadas.

Capítulo 6

Conclusões e Propostas de Continuidade

A análise de observabilidade, em sua forma clássica, não estabelece garantias para que o processo de estimação de estado se realize de modo a produzir resultados confiáveis, o que concorre para a frustração de expectativas em relação aos resultados que a função Estimação de Estado deveria produzir.

Esta Tese propõe uma ampliação da análise de observabilidade, de tal forma que seja possível avaliar a capacidade de observação do estado operativo da rede elétrica, introduzindo-se aspectos probabilísticos nesta tarefa. Caracterizou-se a capacidade de observação do estado operativo através das criticalidades dos dados que alimentam o processo de Estimação de Estado. Estas estão associadas a medidas individualmente consideradas ou em grupos e configurações da rede.

As criticalidades podem ser simplesmente enumeradas, sendo neste caso a avaliação da capacidade de observação do estado operativo meramente qualitativa. A determinação destas constitui um problema de contagem de difícil solução por sua natureza combinatória. Com base nas propriedades exibidas pelas criticalidades de interesse, formulou-se nesta Tese um problema de otimização inteira não-linear cujas soluções equivalem às criticalidades a serem determinadas. Para a solução deste, propôs-se diferentes algoritmos do tipo *Branch-and-Bound*, que possibilitaram a enumeração das k -tuplas críticas de medidas, unidades medição e de ramos em um espaço de busca reduzido. O procedimento de enumeração de criticalidades é uma das contribuições relevantes desta Tese, visto que há poucos trabalhos na literatura devotados a este assunto.

Também se apresentou nesta Tese a avaliação qualitativa da capacidade de observação do estado operativo da rede. Tal avaliação incorporou aspectos probabilísticos desta, em que foram caracterizados riscos de não atendimento aos requisitos de observabilidade, confiabilidade e robustez. O enfoque aqui mostrado estende pesquisas correlatas, propondo indicadores que traduzem de forma mais realista as condições em que pode haver prejuízo à Estimação de Estado. O emprego

da simulação de Monte Carlo permitiu o cálculo indicadores probabilísticos propostos (PLIC, PLOC e PLDC) de maneira simples, escalável, podendo ser utilizada em sistemas de maior porte sem dificuldades adicionais.

A técnica de amostragem por importância e rastreo mostrou-se particularmente útil na determinação dos índices PLIC, PLOC e PLDC para sistemas com elevada redundância. Constatou-se, por meio dos resultados, que os parâmetros-gargalo identificados pela técnica estão associados aos elementos com maior impacto nos índices calculados, refletindo, portanto, a participação destes nas criticalidades.

Empregou-se os indicadores probabilísticos na construção de um sistema de classificação do plano de medição em função do risco de funcionamento inadequado do processo de estimação. O estabelecimento de graus de observabilidade constitui tentativa de sensibilizar o usuário da Estimação de Estado dos riscos que incorre o processo de estimação de ser malsucedido devido ao sistema de medição empregado. O sistema de graus proposto mostrou-se bem representativo e de fácil compreensão, podendo ser utilizado nas tomadas de decisão que envolvem o sistema de medição para fins da Estimação de Estado.

Alternativamente, buscou-se caracterizar a capacidade de observação do estado operativo quantificando-se a informação presente nas medidas a respeito deste. Tal informação foi determinada como a Entropia Relativa entre duas fdps das medidas: a original, parametrizada estado operativo da rede associado às medidas, e aquela parametrizada por um outro estado operativo, distinto deste. A partir da relação encontrada entre a quantidade de informação as medidas e a matriz de Ganho da EE, propôs-se o indicador CIR, que se mostrou adequado à avaliação da capacidade de observação do estado operativo, conforme verificado nas propriedades deste e nos resultados obtidos.

Este indicador tem como vantagem sua fácil obtenção. Entretanto, dificuldade de interpretação ainda deste se constitui um obstáculo a sua aplicação. O estabelecimento de pontes entre a Teoria da Informação e a Estimação de Estado, essencial à obtenção do indicador CIR, constitui outra contribuição significativa desta Tese, sendo um exemplo de uso da Teoria da Informação na resolução de problemas associados à Estimação de Estado.

As metodologias de avaliação da capacidade da observação podem ser aplicadas em variados problemas de Estimação de Estado, como: planejamento de sistemas de medição e seus reforços; classificação de sistemas de medição quanto aos

riscos de observabilidade; determinação de regiões de fraca observabilidade. Os assuntos abordados nesta Tese não foram aqui esgotados, tendo desdobramentos que merecem ser investigados. A seguir algumas propostas de continuidade desta Tese são resumidamente apresentadas:

- I. As criticalidades estudadas nesta Tese são aquelas diretamente relacionadas à observabilidade da rede. Entretanto, existem dados críticos à EE que afetam apenas a depuração de erros grosseiros, sem impactar na observabilidade. Constituem-se exemplos destas criticalidades os ramos críticos não-essenciais – estudados nesta Tese – e os pontos de alavancamento. A caracterização e proposição de metodologias de identificação das outras criticalidades dos dados da EE permitirá melhor avaliação da capacidade de observação de um sistema, sendo um relevante trabalho futuro.
- II. O tempo computacional dispendido na enumeração das criticalidades utilizando-se o método *Branch-and-Bound* é um aspecto crítico deste, que dificulta sua aplicação em sistemas de grande porte ou altamente redundantes. Observou-se nos testes que o tempo gasto na determinação das k -tuplas críticas é afetado pelo tamanho da rede elétrica e, principalmente, pelo tamanho do plano de medição e seu nível de redundância.

Procedimentos eficientes de poda podem resultar em diminuição do esforço computacional, em função do maior número de soluções descartadas. Tendo-se em mente que método BB elenca as soluções de um problema através de uma árvore enumerativa, sua implementação, de forma paralela e distribuída, também poderá promover redução do tempo computacional.

Portanto, a investigação de propriedades das criticalidades que possam vir a ser implementadas como heurísticas de poda podem resultar em melhoria dos métodos propostos. Além disso, a paralelização e a implementação distribuída dos algoritmos de *Branch-and-Bound* propostos também merece ser examinada.

- III. O problema de enumeração de criticalidades tem natureza combinatória. As metaheurísticas são estratégias inteligentes de busca usualmente aplicada em problemas combinatórios. A aplicação de tais técnicas na avaliação qualitativa da capacidade de observação do estado operativo pode também ser considerado como um relevante desdobramento desta Tese.

- IV. Adotou-se nesta Tese o método de amostragem por importância e rastreio nas simulações de Monte Carlo realizadas. Entretanto, conforme apresentado no Capítulo 3, outras técnicas de redução de variância existem na literatura. Um estudo comparativo entre a aplicação destas técnicas no cálculo dos indicadores PLIC, PLOC e PLDC por meio da simulação de Monte Carlo deve ser investigada, podendo levar a obtenção de resultados mais precisos e com menor esforço computacional.

Adicionalmente, observou-se grande dificuldade na obtenção dos indicadores probabilísticos para sistemas de medição com grau de observação, devido à raridade dos eventos de interesse. O estudo de técnicas de simulação de Monte Carlo para eventos raros constitui importante pesquisa, para implementação dos métodos em sistemas reais.

Observou-se nesta Tese que os elementos simulados, cuja a diferença entre as indisponibilidades de referência e nominal eram significativas, têm grande participação nas criticalidades. O exame aprofundado desta relação é um resultado importante, que pode ser empregado na avaliação da capacidade de observação, em especial na determinação das criticalidades.

- V. Devido à escassez de informações, modelou-se a indisponibilidade dos elementos simulados como experimentos de Bernoulli cuja probabilidade de falha foi arbitrariamente escolhida na maioria dos casos. A obtenção de dados reais a respeito das indisponibilidades dos medidores, unidades de medição, e ramos da rede, bem como a modelização destas é significativa para avaliação mais realista da capacidade de observação do estado operativo das redes elétricas.
- VI. A caracterização realizada no Capítulo 4, da capacidade de observação do estado operativo através da Entropia Relativa, possui propriedades estatísticas que devem ser melhor estudadas e compreendidas, como por exemplo, a relação entre a Entropia Relativa, as criticalidades e a capacidade de depuração de erros grosseiros. Espera-se a partir desta investigação maior facilidade na interpretação do indicador CIR.

- VII. Tal como mostrado no Capítulo 2 para as C1-, C2-, e C3-tuplas, as Ck-tuplas de cardinalidade superior também apresentem propriedades estatísticas relacionadas aos seus resíduos normalizados. O conhecimento destas poderá vir a facilitar sua identificação de criticalidades de maior ordem e seu impacto na no processo de estimação de estado. Com base nos processos de enumeração desenvolvidos nesta Tese, a identificação destas propriedades torna-se viável, sendo uma linha promissora de pesquisa;

Apêndice – A

Noções sobre Teoria de Probabilidade

Neste apêndice serão brevemente apresentadas noções sobre a teoria de probabilidades necessárias aos desenvolvimentos deste trabalho de Tese.

A.1 – Espaço Amostral, Eventos e Probabilidade

Um experimento aleatório é aquele cujo resultado não pode ser predito. Se realizado repetidas vezes, sob as mesmas condições, os resultados não serão idênticos em todas as repetições. O lançamento de uma moeda é um exemplo de experimento aleatório: independentemente das condições iniciais, o resultado do lançamento (cara (H) ou coroa (T)), somente é conhecido após a conclusão do experimento.

Define-se como espaço amostral Ω o conjunto contendo todos os possíveis resultados de um experimento. Caso o experimento aleatório seja o lançamento de duas moedas, o espaço amostral é dado por: $\Omega = \{HH, HT, TH, TT\}$. Qualquer subconjunto do espaço amostral é denominado evento. Um evento $A \subset \Omega$ ocorre se o resultado do experimento é um dos elementos do conjunto A .

Sendo o espaço amostral e os eventos conjuntos, as operações de conjuntos são válidas para os eventos. Portanto:

- $A \cup B$: Evento união dos eventos A e B . É o evento associado à ocorrência de A ou B ;

- $A \cap B$: Evento interseção entre eventos A e B . É o evento que representa a ocorrência simultânea de A e B . Se $A \cap B = \emptyset$, então diz-se que A e B são conjuntos disjuntos;

- A^C : Evento complementar ao evento A . É o evento associado à não ocorrência de A ;

Se Ω é o espaço amostral associado a um determinado experimento aleatório, define-se como função de probabilidade ou simplesmente probabilidade, a função $Pr()$ que associa um número real a cada evento do espaço amostral. A função de probabilidade satisfaz os seguintes axiomas:

- a) $Pr(A) > 0, A \subset \Omega$
- b) $Pr(\Omega) = 1$
- c) Para qualquer sequência de eventos disjuntos $A_1, A_2, \dots, A_m$, a probabilidade da união dos eventos é dada por:

$$Pr(\cup_i A_i) = \sum_i Pr(A_i) \quad (A.1)$$

Como consequência das propriedades anteriores:

- a) $Pr(\emptyset) = 0$
- b) $0 \leq Pr(\Omega) \leq 1$

A.2 – Probabilidade Condicionada e Teorema de Bayes

A probabilidade condicional mede a probabilidade de um evento $A \subset \Omega$ ocorrer, dado que um evento B já tenha ocorrido. A probabilidade condicional é definida como:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}, \quad A, B \subset \Omega \quad (A.2)$$

Supondo que a sequência de eventos $B_1, B_2, \dots, B_n$ seja uma partição do espaço amostral, sendo válidas as propriedades (A.3) e (A.4), tem-se, portanto, pelo axioma c), que a probabilidade do evento A pode ser escrita como (A.3):

$$\cup_i^n B_i = \Omega \quad (A.3)$$

$$\cap_i^n B_i = \{\emptyset\} \quad (A.4)$$

$$Pr(A) = \sum_i Pr(A \cap B_i) \quad (A.5)$$

Portanto, pela definição de probabilidade condicional, a probabilidade do evento A pode ser calculada através da lei de probabilidade total:

$$Pr(A) = \sum_i Pr(A|B_i)Pr(B_i) \quad (A.6)$$

Combinando-se a lei de probabilidade total e a probabilidade condicional, obtém-se o teorema de Bayes:

$$Pr(B_i|A) = \frac{Pr(A|B_i)Pr(B_i)}{\sum_k Pr(A|B_k)Pr(B_k)} \quad (A.7)$$

Dois eventos A e B de um espaço amostral são independentes se a ocorrência de um evento não afeta a probabilidade de ocorrência do outro. Portanto:

- a) $Pr(A|B) = Pr(A)$
- b) $Pr(B|A) = Pr(B)$
- c) $Pr(A \cap B) = Pr(A)Pr(B)$

Para qualquer sequência de eventos independentes $A_1, A_2, \dots, A_m$, a probabilidade da interseção dos eventos é dada por:

$$Pr(\cap_i A_i) = \prod_i Pr(A_i) \quad (A.8)$$

A.3 – Variável Aleatória e Distribuição de Probabilidades

Na maioria das situações é conveniente representar numericamente os eventos de um espaço amostral. Denomina-se variável aleatória a função que associa um evento do espaço amostral a um número. Note que a variável aleatória não é uma função de probabilidade pois não satisfaz os axiomas da mesma. O lançamento de uma moeda, por exemplo, pode ser representado pela variável aleatória X , que assume os valores 0 ou 1, tal que $X(H) = 0$ e $X(T) = 1$.

Se $X(A_i) = x_i$ é o valor da variável aleatória X associado ao evento A_i , então a probabilidade de ocorrência do evento x_i é $Pr(x_i) = Pr(A_i)$. A probabilidade de uma variável aleatória é completamente definida pela sua função de probabilidade, dada pela expressão:

$$F(X = x_i) = Pr(X \leq x_i) \quad (A.9)$$

Esta função é também denominada função cumulativa de probabilidade (fcp). A variável aleatória pode ser discreta ou contínua. Variáveis aleatórias discretas assumem somente valores finitos e contáveis, como por exemplo o lançamento de um dado não viciado. Neste caso a variável aleatória associada ao experimento assume os valores 1,2,3,4, 5 ou 6. Denomina-se função de massa de probabilidade a função dada por:

$$f(X = x_i) = Pr(X = x_i) \quad (A.10)$$

A função massa de probabilidade (fmp) e a fcp são relacionadas por meio da expressão:

$$F(X = x_i) = \sum_j f(X = x_j), x_j \leq x_i \quad (A.11)$$

Variáveis aleatórias contínuas assumem valores finitos e não contáveis. A função de probabilidade para uma variável aleatória contínua X é dada por:

$$F(X = x_i) = Pr(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(u) du \quad (A.12)$$

A função $f(u)$ é denominada função de densidade de probabilidade ou fdp. A probabilidade de variáveis aleatórias contínuas é sempre intervalar, portanto, a probabilidade de um evento qualquer em X é dada por:

$$Pr(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(u) du = F(b) - F(a) \quad (A.13)$$

Algumas distribuições de probabilidade, por aparecem frequente durante a modelagem de experimentos aleatórios. As distribuições empregadas nesta Tese são: a distribuição de Bernoulli, a distribuição Binomial, a distribuição Uniforme e a distribuição Normal.

Distribuição de Bernoulli: é a distribuição característica de variáveis aleatórias que seguem o modelo de Bernoulli. No modelo de Bernoulli, o experimento possui somente dois resultados – um denominado sucesso e outro denominado insucesso – que ocorrem com probabilidades p e q , respectivamente, tal que $p + q = 1$. Uma variável aleatória X do tipo Bernoulli assume o valor 1 caso se obtenha um sucesso no experimento e o valor 0 caso contrário. Consequentemente, X tem a seguinte função massa de probabilidade:

$$f(x) = p^x q^{1-x} \quad (A.14)$$

onde $q = 1 - p$.

Distribuição de Binomial: Se um experimento de Bernoulli com probabilidade de sucesso p for replicado, de forma independente, n vezes, e a variável aleatória X corresponde ao total de sucessos obtidos ao longo das n tentativas, X terá a distribuição Binomial de parâmetros n e p , $X \sim Bin(n, p)$ dada por:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad (A.15)$$

onde $q = 1 - p$.

As funções apresentadas são distribuições de probabilidades para variáveis aleatórias discretas, as seguintes funções correspondem às funções densidade de probabilidades para variáveis aleatórias contínuas.

Distribuição Normal: Uma variável aleatória contínua X tem distribuição Normal $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ de parâmetros μ e σ^2 se possui a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < +\infty \quad (\text{A.16})$$

Distribuição Uniforme: Se uma variável aleatória contínua X , definida no intervalo $[a, b]$, assume valores no intervalo especificado com igual probabilidade, então a variável aleatória segue uma distribuição uniforme $X \sim U(a, b)$, de parâmetros a e b , cuja função densidade de probabilidade $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x > b, x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

A.4 Variáveis aleatórias multidimensionais

Ao invés de uma única variável aleatória, alguns experimentos aleatórios podem ser melhor descritos por mais de uma variável aleatória. Por exemplo, a representação do lançamento de dois dados por duas variáveis aleatórias – cada uma descrevendo o resultado de um dos dados, independentemente – é muito mais natural do que qualquer uma que empregue somente uma variável aleatória.

As variáveis aleatórias podem ser agrupadas em um objeto único – o vetor de variáveis aleatórias ou vetor aleatório, que possui propriedades similares às das variáveis aleatórias. Ao vetor aleatório $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^t$, onde cada componente X_i é uma variável aleatória, é dado o nome de variável aleatória multidimensional, e aparece frequentemente em diferentes estudos da teoria de probabilidades, principalmente no estudo de processos estocásticos.

Define-se como extensão do conceito de função de Probabilidade a função de probabilidade conjunta, dada pela expressão:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \quad (\text{A.18})$$

No caso discreto, define-se a função massa de probabilidade conjunta como:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Pr(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \quad (\text{A.19})$$

Consequentemente, a função de probabilidade conjunta pode ser escrita em função da função massa de probabilidade conjunta como (A.20). Repare que (A.20)

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ refere-se à função massa de probabilidade. No caso contínuo, a função de probabilidade conjunta pode ser escrita como (A.21).

$$F(X = x_i) = \sum_{\mathcal{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_n), x_j \leq x_i \quad (\text{A.20})$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{\mathcal{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (\text{A.21})$$

onde $\mathcal{R} = \{X_1, X_2, \dots, X_n | -\infty < X_1 \leq x_1, \dots, -\infty < X_n \leq x_n\}$.

As funções densidade de probabilidade marginal de um vetor aleatório, são as fdps de cada uma das variáveis que compõem o vetor aleatório. Para uma variável aleatória bidimensional $\mathbf{Z} = (X, Y)$, as distribuições marginais das componentes X e Y de $\mathbf{Z}$ são dadas, respectivamente, por:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \quad (\text{A.22})$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad (\text{A.23})$$

Para o caso multivariável, o procedimento é o mesmo, sendo a integração feita sobre todas as variáveis aleatórias exceto a variável aleatória referente à distribuição marginal de interesse. Para o caso discreto, a integral é substituída por um somatório.

A fdp condicional de Y dado X é dada por:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \forall y \quad (\text{A.24})$$

A fdp conjunta pode ser escrita em função da fdp marginal e condição como:

$$f(x, y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) \quad (\text{A.25})$$

Se $f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$, então $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$ e as componentes do vetor aleatório $\mathbf{Z} = (X, Y)$ são ditas independentes. Neste, portanto, a fdp conjunta pode ser escrita como:

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad (\text{A.26})$$

As expressões desenvolvidas para o caso bidimensional são aplicáveis para o caso multidimensional. Em especial, para um vetor aleatório $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^t$, se as componentes de $\mathbf{X}$ são independentes, então:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n) \quad (\text{A.27})$$

A.5 Família Exponencial de Distribuições

A Família Exponencial de Distribuição de probabilidades desempenha papel fundamental nos métodos de Monte Carlo com Amostragem por Importância, descritos nos capítulos 3 e 4 desta Tese. Se uma variável aleatória X possui função densidade (ou função de massa) de probabilidade paramétrica $f(x; \theta)$, com vetor de parâmetros $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^t$, X pertence à família exponencial de distribuições se existe a função vetorial real $\mathbf{t}(x) = [t_1(x), t_2(x), \dots, t_n(x)]$, $t_i(x) > 0 \forall i$, a função real $h(x) > 0$, e a função normalizadora $c(\theta) > 0$ tal que:

$$f(x; \theta) = c(\theta) \exp(\sum_{i=1}^n \theta_i t_i(x)) h(x) \quad (\text{A.28})$$

As distribuições de Bernoulli, Binomial e Uniforme são todas pertencentes à família exponencial, sendo as funções $c(\theta)$, $\mathbf{t}(x)$ e $h(x)$, e vetor de parâmetros θ apresentados na Tabela A.1.

Tabela A.1 – Famílias de distribuição exponencial.

Distribuição	Parâmetros	θ	$c(\theta)$	$\mathbf{t}(x)$	$h(x)$
Bernoulli	p	$\theta_1 = \ln \frac{p}{1-p}$	$(1 + e^{\theta_1})$	x	1
Binomial	n, p	$\theta_1 = \ln \frac{p}{1-p}$	$(1 + e^{\theta_1})^{-n}$	x	$\binom{n}{x}$
Normal	μ, σ^2	$\theta_1 = \frac{\mu}{\sigma^2}$ $\theta_2 = \frac{1}{2\sigma^2}$	$\frac{\exp\left(\frac{\theta_1^2}{4\theta_2}\right)}{\sqrt{\frac{-\pi}{\theta_2}}}$	$t_1(x) = x$ $t_2(x) = x^2$	1

A.6 Valor Esperado e Variância

O valor esperado de uma variável aleatória contínua X , com função de densidade de probabilidade $f(X)$ é dada pela expressão:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (\text{A.29})$$

No caso discreto, substitui-se a integral por um somatório e a função densidade de probabilidade por uma função massa de probabilidade, resultando na expressão:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i f(X = x_i) \quad (\text{A.30})$$

O valor esperado de uma variável aleatória tem as seguintes propriedades:

Se a e b são constantes, então (A.31) – (A.37):

- a) $E(X + b) = E(X) + b$
- b) $E(aX) = aE(X)$
- c) $E(aX + b) = aE(X) + b$
- d) Se Y é uma outra variável aleatória, segue-se que:

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

- e) Se Y for independente de X então é válida a seguinte propriedade:

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

- f) Se $Z = H(X)$ é uma variável aleatória, e $H(\cdot)$ é uma função da variável aleatória X , então o valor esperado da variável aleatória Z é dado por:

$$E(Z) = E(H(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)f(x)dx$$

No caso discreto:

$$E(H(X)) = \sum_{i=1}^{+\infty} H(x_i)f(X = x_i)$$

A variância de uma variável aleatória é dada por:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx = E([X - E(X)]^2) \quad (\text{A.38})$$

onde $\mu = E(X)$.

A variância possui as propriedades (A.39) – (A.45):

- a) $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Se a e b são constantes, então:

- b) $\text{Var}(X + b) = \text{Var}(X)$
- c) $\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X)$
- d) $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$

Se Y é uma outra variável aleatória independente de X , segue-se que:

- e) $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

Caso contrário, a variância de $X + Y$ ser dada por:

$$f) \quad \text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y)$$

onde $\text{Cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)])$ é a covariância entre as variáveis X e Y .

A covariância está relacionada à dependência linear entre as variáveis aleatórias. Se X e Y são independentes, $\text{Cov}(X, Y) = 0$, mas não o contrário. Uma medida do grau de linearidade da relação entre duas variáveis aleatórias X e Y é o coeficiente de correlação, dado pela expressão:

$$\rho_{XY} = \frac{E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \cdot \text{Var}(Y)}} \quad (\text{A.46})$$

Se X e Y são independentes, $\rho_{XY} = 0$. Se (X, Y) for o valor esperado condicional de uma variável aleatória contínua bidimensional, o valor esperado condicionado de X , para um dado $Y = y$ é definida como:

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx \quad (\text{A.47})$$

Para o caso discreto:

$$E(X|y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f_{X|Y}(x_i|y_j) \quad (\text{A.48})$$

Note que $E(X|y)$ é uma função de variável aleatória de y . O valor esperado de $E(X|y)$ é dado por:

$$E(E(X|y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X|y) f(y) dy = E(X) \quad (\text{A.49})$$

A mesma relação vale para o caso discreto. Define-se variância condicionada como:

$$\text{Var}(X|y) = E\left((X - E(X|y))^2 | y\right) \quad (\text{A.50})$$

A lei de variância total expressa a relação entre a variância condicionada e a variância das variáveis aleatórias. De acordo com a lei, se X e Y são variáveis aleatórias dependentes, e $E(X|y)$ o valor esperado condicionado de X dado $Y = y$, a lei de variância total estabelece que:

$$\text{Var}(X) = E_Y(\text{Var}(X|y)) + \text{Var}_Y(E(X|y)) \quad (\text{A.51})$$

Na expressão anterior, E_Y e Var_Y são, respectivamente, o valor esperado e a variância tomados em relação à variável aleatória Y . No caso de vetores aleatórios, o conceito de média e variância podem ser estendidos da seguinte forma:

O valor esperado de um vetor aleatório $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^t$ é definido como:

$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} = [E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n)]^t \quad (\text{A.52})$$

A matriz de covariância de um vetor aleatório $\mathbf{X}$ é dada por:

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{X}) = E([\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}] \cdot [\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}]^t) \quad (\text{A.53})$$

As propriedades da média e variância também são válidas para o vetor valor esperado e para matriz de covariância, respectivamente.

A.7 Medidas de Informação

Seja X variável aleatória que representa os resultados de um determinado experimento aleatório. A função densidade de probabilidade $f(x)$ ou a função de probabilidade $F(X)$ contém toda a informação a respeito do experimento. Existem diferentes formas de medir a informação a respeito de um experimento aleatório. Exemplos de medidas já estudadas são o valor esperado e a variância, que fornecem informação sobre o valor médio da variável aleatória para uma repetição infinitas do experimento e a variabilidade da variável aleatória em função de deste valor, respectivamente. Outra forma, não descritas nesta Tese, são os momentos das variáveis aleatórias [Mey84].

Emprestando-se conceitos da teoria da informação, a informação de uma variável aleatória pode ser medida pelo número médio de bits necessários para codificá-la. A esta medida dá-se o nome de Entropia de Shannon. Outra possibilidade de mensuração da informação, proveniente da teoria de estimadores, é quantificar a informação contida na variável aleatória X com fdp $f(x; \theta)$ como a capacidade de se estimar θ a partir de uma amostra de X . As medidas de informação deste tipo estão relacionadas aos estimadores de máxima verossimilhança, à função score e à matriz de informação de Fisher. Alternativamente, a informação contida em uma variável aleatória pode ser quantificada através do conceito de divergência entre duas fdps, como é o caso da Divergência de Kullback-Leibler. Por tratarem da quantificação de informação, as diferentes medidas se relacionam, de forma que todas medem a mesma informação, porém sob pontos de vistas diferentes.

Na teoria da informação, a entropia de Shannon mede a imprevisibilidade e, portanto, a quantidade de informação. A relação da previsibilidade de uma mensagem e a quantidade de informação pode ser explicada da seguinte forma: considere um experimento no qual uma mensagem é transmitida repetidamente. Se a mensagem transmitida for altamente previsível, é possível, com certa precisão, predizê-la, com base nas mensagens anteriores. Ou seja: o ganho de informação entre uma mensagem e outra é pequeno. Já no caso oposto, se a mensagem é altamente imprevisível, não é possível determinar, com base nos resultados anteriores, a mensagem atual. Portanto, o ganho de informação entre o recebimento de uma mensagem e outra, é elevado.

Se uma mensagem é representada por uma variável aleatória discreta X com função massa de probabilidade $f(X = x)$, a Entropia de Shannon, ou simplesmente Entropia, é definida como:

$$\mathcal{H}(X) = -\sum_{i=1}^{+\infty} f(x_i) \ln f(x_i) \quad (\text{A.54})$$

Se a mensagem for ignorada e apenas a variável aleatória for considerada, observa-se que a Entropia mede o grau de incerteza contido na variável aleatória. Define-se a Entropia diferencial como a extensão do conceito de Entropia para variáveis aleatórias contínuas. A entropia diferencial de uma variável aleatória é dada por:

$$\mathcal{H}(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \ln f(x) dx \quad (\text{A.55})$$

A entropia conjunta para o vetor aleatório $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^t$ é, no caso contínuo e no caso discreto, respectivamente:

$$\mathcal{H}(X_1, X_2, \dots, X_n) = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (\text{A.56})$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{X}) = -\sum_{i=1}^{+\infty} f(\mathbf{X}^{(i)}) \ln f(\mathbf{X}^{(i)}) \quad (\text{A.57})$$

onde $\mathbf{X}^{(i)}$ é o i -ésimo valor assumido pelo vetor aleatório $\mathbf{X}$.

A entropia e a entropia diferencial guardam muitas propriedades em comum. Entretanto, é importante ressaltar duas grandes diferenças:

- a) A entropia diferencial pode ser negativa, enquanto a entropia é sempre não-negativa;
- b) A entropia é invariante quanto a transformações invertíveis de variáveis. A entropia diferencial não goza desta facilidade.

Maiores detalhes sobre a Entropia e a Entropia diferencial podem ser encontrados em [Rubi08]. Se (X, Y) é uma variável aleatória bidimensional, define-se a entropia condicionada de X dado Y como:

$$\mathcal{H}(Y|X) = -\sum_{i=1}^{+\infty} f(x_i) \mathcal{H}(Y|X = x_i) \quad (\text{A.58})$$

A entropia condicionada e a entropia conjunta se relacionam pela expressão:

$$\mathcal{H}(X, Y) = \mathcal{H}(Y|X) + \mathcal{H}(X) = \mathcal{H}(X|Y) + \mathcal{H}(Y) \quad (\text{A.59})$$

A informação mútua entre X e Y é definida como:

$$I(X, Y) = \mathcal{H}(X) + \mathcal{H}(Y) - \mathcal{H}(X, Y) \quad (\text{A.60})$$

A informação mútua mensura a informação compartilhada entre duas variáveis aleatórias, sendo uma das principais medidas de informação. Reescrevendo em função da entropia condicionada, tem-se que:

$$I(X, Y) = \mathcal{H}(X) - \mathcal{H}(X|Y) \quad (\text{A.61})$$

De acordo com esta expressão, a informação mútua pode ser vista como a redução da incerteza da variável aleatória X quando a variável aleatória Y é observada. A Informação mútua permite a melhor caracterização da dependência entre variáveis aleatórias. $I(X, Y) = 0$ se e somente se X e Y são independentes.

Considere agora o caso de uma variável aleatória X possuir uma função densidade (ou de massa, se X for uma variável aleatória discreta) de probabilidade $f(x; \theta)$, sendo o vetor de parâmetros $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)^t$ desconhecido. Se uma amostra de X é fornecida, objetiva-se determinar a fdp de X estimando-se os parâmetros da distribuição a partir da amostra de medidas. Se $\mathcal{L}(\theta, x) = f(x; \theta)$ é função de verossimilhança, a estimativa de máxima verossimilhança de θ , $\hat{\theta}(x)$, é a solução do problema de otimização:

$$\max_{\theta \in \Theta} \ln \mathcal{L}(\theta, x) \quad (\text{A.62})$$

Note que tanto a estimativa quanto a função de verossimilhança são funções de variável aleatória.

Se $\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, x)$ é ao menos duas vezes diferenciável em relação ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ e convexa, então a solução do problema de otimização corresponde à solução do sistema de equações:

$$\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, x) = \mathbf{0} \quad (\text{A.63})$$

A função vetorial $\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, x)$ é denominada função score. A função score é um vetor aleatório ($n \times 1$) com as seguintes propriedades:

$$E(\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, x)) = \mathbf{0} \quad (\text{A.64})$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\nabla_{\boldsymbol{\theta}} \ln \mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}, x)) = \mathbf{I}(\boldsymbol{\theta}) \quad (\text{A.65})$$

onde $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação de Fisher.

A desigualdade de Cramer-Rao[Meye84] estabelece que a menor matriz de covariância possível para qualquer estimador não enviesado $\hat{\boldsymbol{\theta}}(x)$ de $\boldsymbol{\theta}$ corresponde ao inverso matriz de informação de Fisher $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$. Como a matriz de covariância mede a dispersão em torno da média, a matriz de informação de Fisher fornece uma medida da incerteza do vetor de parâmetros estimados com base nas observações da variável aleatória.

A quantidade de informação de uma variável aleatória pode também ser expressa de forma relativa. Se $g(x)$ e $h(x)$ são duas funções densidade de probabilidade, a divergência de Kullback-Leibler ou entropia relativa, é definida como:

$$D_{KL}(g, h) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \ln \frac{g(x)}{h(x)} dx \quad (\text{A.66})$$

Reescrevendo a expressão anterior, obtém-se:

$$D_{KL}(g, h) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \ln g(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \ln \frac{1}{h(x)} dx \quad (\text{A.67})$$

O que resulta em:

$$D_{KL}(g, h) = D_{KL}(X \| Y) = \mathcal{H}(X; Y) - \mathcal{H}(X) \quad (\text{A.68})$$

onde X é uma variável aleatória com fdp $g(x)$, Y é uma variável aleatória com fdp $h(x)$ e $\mathcal{H}(X; Y)$ é definido como a cross-entropia entre X e Y .

A divergência de Kullback-Leibler é uma grandeza não-negativa, cujo valor mínimo ocorre somente no caso em que as duas densidades de probabilidade são iguais

isto é $h(x) = g(x)$. A informação mútua entre duas variáveis aleatórias X e Y pode ser definida em função da entropia relativa entre elas, como mostra a expressão:

$$I(X, Y) = D_{KL}(f(x, y), f_X(x) \cdot f_Y(y)) \quad (\text{A.69})$$

A entropia relativa $D_{KL}(X||Y)$ mede o aumento da incerteza, ou imprevisibilidade de X quando a fdp de X , dada por $g(x)$, é aproximada pela distribuição de Y , dada por $h(x)$. Neste sentido, se as distribuições são idênticas, o aumento da incerteza é nulo, entretanto se as fdps são diferentes, ocorre um aumento da incerteza, dado por $D_{KL}(g, h)$. A entropia relativa é uma medida de informação da variável aleatória, porém relativa a outra variável aleatória. Se h é a distribuição uniforme em uma região $\mathcal{R}$ e $|\mathcal{R}|$ é o volume da região, a entropia relativa $D_{KL}(g, h)$ é dada por:

$$D_{KL}(g, h) = \ln|\mathcal{R}| - \mathcal{H}(X) \quad (\text{A.70})$$

Como pode ser visto na expressão anterior, se a distribuição aproximada é a distribuição uniforme, a entropia relativa é função da entropia da variável aleatória. Este é um resultado esperado pois a distribuição uniforme é aquela que possui a maior entropia, portanto, aproximar a distribuição real de uma variável aleatória pela entropia é aumentar a entropia da variável aleatória de $\mathcal{H}(X)$ para a máxima entropia, dada por $\ln|\mathcal{R}|$, ocorrendo, portanto, um aumento da incerteza de $D_{KL}(g, h) = \ln|\mathcal{R}| - \mathcal{H}(X)$.

Da mesma forma que a entropia relativa está relacionada à entropia de Shannon e à informação mútua, a divergência de Kullback-Leibler também guarda uma importante relação com a Matriz de Informação de Fisher. Tal conexão é de grande importância, pois estabelece uma das pontes entre a Teoria da Informação e a teoria de estimadores. Se g e h pertencem à mesma família de distribuições $f(\cdot; \theta)$, g e h podem ser escritas como:

$$h(x) = f(x; \theta_0) \quad (\text{A.71})$$

$$g(x) = f(x; \theta) \quad (\text{A.72})$$

A entropia relativa entre g e h é, portanto:

$$D_{KL}(g, h) = D_{KL}(\theta, \theta_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x; \theta) \ln \frac{f(x; \theta)}{f(x; \theta_0)} dx \quad (\text{A.73})$$

De acordo com a expressão anterior, a divergência de Kullback-Leibler é agora função dos parâmetros das distribuições g e h . Derivando a entropia relativa em relação à variável θ resulta em:

$$\frac{\partial D_{KL}(\theta, \theta_0)}{\partial \theta} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} \log \frac{f(x; \theta)}{f(x; \theta_0)} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} dx \quad (\text{A.74})$$

$$\frac{\partial^2 D_{KL}(\theta, \theta_0)}{\partial \theta^2} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 f(x; \theta)}{\partial \theta^2} \left(\log \frac{f(x; \theta)}{f(x; \theta_0)} + 1 \right) dx \right] + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f(x; \theta)} \left(\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 dx \quad (\text{A.75})$$

Avaliando da segura derivada no ponto $\theta = \theta_0$ resulta em:

$$\frac{\partial^2 D_{KL}(\theta_0, \theta_0)}{\partial \theta^2} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} 2 \frac{\partial^2 f(x; \theta)}{\partial \theta^2} dx \right] + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f(x; \theta_0)} \left(\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2 dx \quad (\text{A.76})$$

A primeira parcela da soma é zero. Portanto:

$$\frac{\partial^2 D_{KL}(\theta_0, \theta_0)}{\partial \theta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{f(x; \theta_0)} \left(\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \right)^2 dx \quad (\text{A.77})$$

Como $\frac{1}{f(x; \theta_0)} \left(\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \right)^2 = f(x; \theta_0) \left(\frac{\partial \ln f(x; \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_0} \right)^2$, segue-se que

$$\frac{\partial^2 D_{KL}(\theta_0, \theta_0)}{\partial \theta^2} = \text{Var}(\ln f(x; \theta_0)) = I(\theta_0) \quad (\text{A.78})$$

Para o caso de um vetor de parâmetros θ e θ_0 , ao invés de $\left(\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^2$ tem-se $\left(\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{\partial f(x; \theta)}{\partial \theta} \right)^t$, a derivada de segunda ordem da expressão anterior torna-se a matriz Hessiana e a informação de Fisher torna-se a Matriz de Informação de Fisher, ou seja:

$$\mathbf{H}(D_{KL})(\theta_0) = \mathbf{I}(\theta_0) \quad (\text{A.79})$$

onde $\mathbf{H}(D_{KL})(\theta_0)$ é a matriz Hessiana da função D_{KL} calculada no ponto θ_0 .

A aproximação quadrática de D_{KL} em torno do ponto θ_0 é dada por:

$$D_{KL}(\theta, \theta_0) \approx (\theta - \theta_0) [\mathbf{H}(D_{KL})(\theta_0)] (\theta - \theta_0)^t \quad (\text{A.80})$$

Substituindo $\mathbf{H}(D_{KL})(\theta_0) = \mathbf{I}(\theta_0)$ por $\mathbf{H}(D_{KL})(\theta_0) = \mathbf{I}(\theta_0)$ resulta na expressão:

$$D_{KL}(\theta, \theta_0) \approx (\theta - \theta_0) \mathbf{I}(\theta_0) (\theta - \theta_0)^t \quad (\text{A.81})$$

Portanto, se o parâmetro verdadeiro da distribuição de probabilidade é θ e o parâmetro aproximado utilizado para representar a variável aleatória é $\hat{\theta}$, o aumento de incerteza, ou perda de informação, é dado por:

$$D_{KL}(\theta, \hat{\theta}) \approx (\theta - \hat{\theta})\mathbf{I}(\hat{\theta})(\theta - \hat{\theta})^t \quad (\text{A.82})$$

A expressão anterior afirma que, localmente, a entropia relativa é a distância entre os parâmetros verdadeiro e aproximado, ponderada pela matriz de informação de Fisher. Se a matriz de informação de Fisher é grande, pequenas diferenças entre o parâmetro aproximado e o parâmetro verdadeiro incorrem em grande perda de informação. Ou seja: a amostra aleatória permite caracterizar minuciosamente, por meio dos parâmetros da distribuição, a fdp, de forma que o uso de parâmetros aproximados aumenta consideravelmente a incerteza da variável aleatória estudada. Entretanto, se a matriz de informação de Fisher é pequena, então o uso de parâmetros aproximados não resulta em perdas significativas de informação.

Deve-se tomar muito cuidado com a interpretação da expressão e afirmações anteriores. Uma análise descuidada leva à conclusão de que é mais interessante que a informação de Fisher seja pequena, para que parâmetros aproximados possam ser utilizados em lugar dos parâmetros verdadeiros sem que ocorra perda significativa de informação. Entretanto, esta avaliação está incorreta. Um dos principais objetivos da estimação é obter estimativas, $\hat{\theta}(x)$ de θ tão próximas quanto possível. Portanto, a correta interpretação da expressão anterior é de que, conforme a informação de Fisher diminui, aumenta o risco de a estimativa $\hat{\theta}(x)$ estar distante do valor real do parâmetro. A entropia relativa, quando escrita da forma indicada em (A.82), alerta que a significância da distância entre dois valores de parâmetros depende do conteúdo de informação da variável aleatória. Complementarmente, reforçando a desigualdade de Cramer-Rao, alerta para o risco de o processo de estimação prover estimativas de baixa qualidade quando a quantidade de informação da amostra da variável aleatória é pequena.

Por fim, a expressão anterior mostra a superioridade da Divergência de Kullback-Leibler na quantificação da informação: ela é uma medida de informação global enquanto a informação de Fisher mede localmente o conteúdo de informação de uma variável aleatória. Sendo assim, a entropia relativa é uma medida geral de informação, válida tanto para distribuições paramétricas quanto para distribuições não paramétricas.

Apêndice – B

Propriedades Estatísticas da Estimação de Estado

Neste apêndice serão apresentadas e demonstradas as propriedades estatísticas da estimação de estado em sistemas de potência empregadas nesta Tese.

B.1 Propriedades estatísticas do Estimador de Máxima Verossimilhança

As medidas disponibilizadas pelo sistema de aquisição podem ser descritas pelo modelo estocástico:

$$z_i = h_i(\mathbf{x}) + e_i \quad (\text{B.1})$$

onde z_i é a medida adquirida; h_i é a função que relaciona o estado da rede elétrica $\mathbf{x}(n \times 1)$ à medida z_i ; e e_i a variável aleatória que representa do erro da medida.

É suposto que a variável aleatória tenha média zero μ_i e variância finita σ_i^2 . Assume-se também que tais valores sejam conhecidos à priori. Na ausência de outras informações sobre a variável aleatória e_i , que a mesma seja uma variável aleatória normalmente distribuída, $z_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. A expressão (B.1) portanto é uma função aleatória e se for considerado o como experimento aleatório o valor de z_i , para um estado fixo $\mathbf{x}$, z_i é também normalmente distribuída com parâmetros $\mathcal{N}(h_i(\mathbf{x}), \sigma_i^2)$. Portanto, z_i tem fdp dada por:

$$f(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(z_i - h_i(\mathbf{x}))^2}{2\sigma_i^2}\right), \quad -\infty < z_i < +\infty \quad (\text{B.2})$$

Agora considere o vetor aleatório formado por todas as medidas disponíveis do plano de medição $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_m]$. Se cada medida é adquirida de forma independente, então as componentes de $\mathbf{z}$ são independentes entre si e a distribuição de probabilidade conjunta é dada por:

$$f(\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^m f(z_i) \quad (\text{B.3})$$

O que resulta na expressão:

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\mathbf{R})}} \exp\left(-\sum_{i=1}^m \frac{(z_i - h_i(\mathbf{x}))^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (\text{B.4})$$

onde $\mathbf{R} = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2)$ é a matriz diagonal, cuja diagonal principal é formada pelas variâncias das medidas. $\mathbf{R}$ é a matriz de covariância das medidas.

Note, que, se a matriz de covariância $\mathbf{R}$ e o vetor de funções $\mathbf{h} = [h_1(\cdot), \dots, h_m(\cdot)]$ é constante, a função (B.4) é unicamente parametrizada pelo estado da rede $\mathbf{x}$. Definindo-se para (B.4) a função de verossimilhança $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{z}; \mathbf{x})$, a estimativa $\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{z})$ do estado da rede $\mathbf{x}$ é a solução do problema de otimização:

$$\max_{\mathbf{x}} \ln \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \quad (\text{B.5})$$

Que resulta no problema de otimização (B.6):

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^m \frac{(z_i - h_i(\mathbf{x}))^2}{2\sigma_i^2} \quad (\text{B.6})$$

Ou na versão matricial (B.7):

$$\min_{\mathbf{x}} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})]^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (\text{B.7})$$

Note que a estimativa de máxima verossimilhança do estado é resultado da minimização dos quadrados ponderados do resíduo das medidas, sendo justificado o nome método dos mínimos quadrados. Como estimativa de máxima verossimilhança, o estimador MQP satisfaz vários critérios de otimização de estimadores – maiores detalhes podem ser encontrados em [Meye84].

Da expressão (B.5), conclui-se que a função *score* é dada por:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \ln \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = [\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] \quad (\text{B.8})$$

onde $\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$.

Consequentemente, a matriz de Fisher para este caso é dada por:

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = E_{\mathbf{z}}([\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}) \quad (\text{B.9})$$

onde $E_{\mathbf{z}}$ é o valor esperado de $[\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}$ em relação à variável aleatória $\mathbf{z}$.

A expressão (B.9) afirma que o valor esperado da matriz de Ganho estado corresponde à matriz de informação de Fisher. Como a matriz de Ganho não depende do valor das medidas, mas somente do estado $\mathbf{x}$, então segue-se que:

$$\mathbf{I}(\mathbf{x}) = [\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \quad (\text{B.10})$$

B.2 Propriedades estatísticas dos resíduos

A solução de (B.7) resulta na solução do sistema de equações não lineares (B.11):

$$[\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x})] = \mathbf{0} \quad (\text{B.11})$$

Cuja solução iterativa é dada por:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + ([\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} [\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{z} - \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)] \quad (\text{B.12})$$

A partir da equação (B.12), verifica-se, para o estado estimado é um vetor aleatório cujo valor esperado e matriz de covariância são dados por:

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{x}} \quad (\text{B.13})$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{E}([\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}})]^t [\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{E}(\hat{\mathbf{x}})]) = ([\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \quad (\text{B.14})$$

O resíduo das medidas é dado por:

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{z} - \mathbf{h}(\hat{\mathbf{x}}) \quad (\text{B.15})$$

$$\hat{\mathbf{r}} = (\mathfrak{I} - \mathbf{H}[\mathbf{G}]^{-1} [\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{z} \quad (\text{B.16})$$

onde $\mathfrak{I}$ é a matriz identidade e $\mathbf{G} = [\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H}$.

Como $\mathbf{z} \approx \mathbf{H}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{e}$ e $(\mathfrak{I} - \mathbf{H}[\mathbf{G}]^{-1} [\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{H} = \mathbf{0}$, segue-se que o resíduo de estimação possui as seguintes propriedades:

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \quad (\text{B.17})$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\hat{\mathbf{r}}) = (\mathbf{R} - \mathbf{H}[\mathbf{G}]^{-1} [\mathbf{H}]^t) \quad (\text{B.18})$$

A matriz de sensibilidade dos resíduos $\mathbf{S} = (\mathfrak{I} - \mathbf{H}[\mathbf{G}]^{-1} [\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1})$ e a matriz de covariância dos resíduos $\mathbf{E} = (\mathbf{R} - \mathbf{H}[\mathbf{G}]^{-1} [\mathbf{H}]^t)$ se relacionam pela expressão $\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{R}$. A matriz de covariância dos resíduos de estimação desempenha papel muito importante na observabilidade e criticalidade da estimação de estado, tendo as seguintes propriedades:

- a) $\mathbf{E}$ é real, simétrica e positiva semidefinida;
- b) O posto de $\mathbf{E}$ é $m - n$, sendo m o número de medidas e n o número de variáveis de estado a se determinar;
- c) $\mathbf{E}(i, j)\mathbf{E}(i, j) \leq \mathbf{E}(i, i) \cdot \mathbf{E}(j, j)$

d) Para $\mathbf{E}(i, j)$, $\mathbf{E}(i, i)$ e $\mathbf{E}(j, j)$ é também válida a relação:

$$\mathbf{E}(i, j) \leq \frac{\mathbf{E}(i, i) + \mathbf{E}(j, j)}{2}$$

e) Se uma tupla de medidas, quando removida da rede, torna a rede não observável, então as colunas da matriz de covariância associadas as medidas da tupla tornam a rede não observável.

A demonstração da propriedade c) é consequência do lema de determinante de matrizes. De acordo com o lema, se $\mathbf{A}$ ($n \times n$) é uma matriz não-singular, cuja inversa é $\mathbf{A}^{-1}$, e $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são matrizes ($n \times m$) e $\mathbf{W}$ uma matriz ($m \times m$), então pode-se escrever o determinante da matriz $\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^t$ como:

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^t) = \det(\mathbf{W}^{-1} + \mathbf{V}^t\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U})\det(\mathbf{W})\det(\mathbf{A}) \quad (\text{B.19})$$

A remoção de uma tupla de medidas do plano de medição resulta na matriz de ganho dada pela expressão (B.20):

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} - \tilde{\mathbf{H}}^t\tilde{\mathbf{R}}^{-1}\tilde{\mathbf{H}} \quad (\text{B.20})$$

Onde $\mathbf{G}$ é a matriz de ganho original; $\tilde{\mathbf{G}}$ é a matriz de ganho após a remoção da tupla de medidas; $\tilde{\mathbf{H}}$ é a matriz Jacobiano formada somente pelas medidas removidas e $\tilde{\mathbf{R}}$ é a matriz de covariância das medidas removidas;

Fazendo $\mathbf{A} = \mathbf{G}$, $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{H}}^t$ e $\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{R}}^{-1}$, pelo lema do determinante de matrizes, o determinante de $\tilde{\mathbf{G}}$ pode ser calculado como:

$$\det(\tilde{\mathbf{G}}) = \det(\tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G}^{-1}\tilde{\mathbf{H}}^t)\det(\tilde{\mathbf{R}}^{-1})\det(\mathbf{G}) \quad (\text{B.21})$$

Se o sistema é não observável após a remoção da tupla de medidas, então $\tilde{\mathbf{G}}$ é singular e, portanto, $\det(\tilde{\mathbf{G}}) = 0$. Como $\det(\tilde{\mathbf{R}}^{-1}) > 0$ e $\det(\mathbf{G}) > 0$, pois o sistema é observável, então segue-se que:

$$\det(\tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G}^{-1}\tilde{\mathbf{H}}^t) = 0 \quad (\text{B.22})$$

Porém, $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{R}} + \tilde{\mathbf{H}}\mathbf{G}^{-1}\tilde{\mathbf{H}}^t$ é justamente a partição da matriz de covariância dos resíduos original associada tupla de medidas removidas. Pela expressão (B.22) a $\tilde{\mathbf{E}}$ é singular, portanto, suas colunas constituem um conjunto linearmente dependente.

B.3 Propriedades estatísticas das Cmeds e dos Cconjs

A partir dos resíduos normalizados de estimação e da matriz de covariância de medidas, pode-se desvendar as propriedades numéricas dos resíduos de estimação relacionadas às criticalidades de medidas de ordem 1 (Cmeds), 2(pares de medidas em Cconjs) e 3 (Ctrios). Essas deduções constam nas Bibliografias [Cout07] e [Cout14a].

Considere o sistema composto somente por medidas essenciais, isto é, a remoção de qualquer medida do sistema torna a rede não observável. Consequentemente, as matrizes **H** e **R** são quadradas. O resíduo normalizado é dado por:

$$\hat{\mathbf{r}} = (\mathfrak{Z} - \mathbf{H}[\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{z} \quad (\text{B.23})$$

Sendo todas as matrizes de (B.23) quadradas, tem-se que $\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} [\mathbf{H}^{-1}]^t$. Consequentemente, o resíduo das medidas é dado por:

$$\hat{\mathbf{r}} = (\mathfrak{Z} - \mathbf{H} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} [\mathbf{H}^{-1}]^t [\mathbf{H}]^t \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{z} \quad (\text{B.24})$$

O que resulta em:

$$\hat{\mathbf{r}} = (\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}) \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (\text{B.25})$$

Portanto, o resíduo normalizado das medidas críticas é nulo. Pela expressão (B.25), observa-se que a matriz de sensibilidade dos resíduos para um sistema de medição apenas com Cmeds é nulo. Como a matriz de covariância dos resíduos é **E** = **SR**. Então, para o sistema de medição contendo apenas medidas essenciais:

$$\mathbf{E} = \mathbf{SR} = (\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}) \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (\text{B.26})$$

Portanto, a matriz de covariância dos resíduos para Cmeds é zero. Para o caso de medidas redundantes e não redundantes em um mesmo plano de medição, de (B.22) conclui-se que **E**(i, i) = 0 e como consequência das propriedades a) e c) as linhas e as colunas de **E** referente às Cmeds são nulas.

Escrevendo-se a matriz de sensibilidade dos resíduos em função da matriz de covariância dos resíduos tem-se a expressão (B.27):

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \mathbf{R}^{-1} \quad (\text{B.27})$$

Portanto, o resíduo de estimação pode ser escrito como:

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{E}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{z} \quad (\text{B.28})$$

Para qualquer par de medidas $(\mathbf{z}(i), \mathbf{z}(j))$ tem-se:

$$\hat{\mathbf{r}}(i) = \sum_{s=1}^m \mathbf{E}(i, s) [\mathbf{R}(s, s)]^{-1} \mathbf{z}(s) \quad (\text{B.29})$$

$$\hat{\mathbf{r}}(j) = \sum_{s=1}^m \mathbf{E}(j, s) [\mathbf{R}(s, s)]^{-1} \mathbf{z}(s) \quad (\text{B.30})$$

Se o par de medidas $(\mathbf{z}(i), \mathbf{z}(j))$ pertence ao mesmo Cconj, a remoção de uma das medidas torna a remanescente Cmed. Consequentemente, a linha e a coluna de $\mathbf{E}'$ referente a $\mathbf{z}(j)$ é completamente nula. A matriz $\mathbf{E}'$ pode ser obtida a partir de $\mathbf{E}$ aplicando-se redução de Kron na coluna referente a medida removida $\mathbf{z}(i)$. Os elementos da matriz $\mathbf{E}'$ obtidos através da redução de Kron aplicada à matriz $\mathbf{E}$ são dados pela expressão (B.31):

$$\mathbf{E}'(a, b) = \mathbf{E}(a, b) - \mathbf{E}(a, i) \mathbf{E}(i, i)^{-1} \mathbf{E}(i, b) \quad (\text{B.31})$$

Se a coluna j de $\mathbf{E}'$ corresponde a medida remanescente do par $(\mathbf{z}(i), \mathbf{z}(j))$, então $\mathbf{E}'(a, j) = 0$. Portanto:

$$\mathbf{E}(a, j) = \mathbf{E}(a, i) \mathbf{E}(i, i)^{-1} \mathbf{E}(i, j) \quad (\text{B.32})$$

Consequentemente, valem as expressões (B.33) e (B.34):

$$\mathbf{E}(j, i)^2 = \mathbf{E}(j, j) \mathbf{E}(i, i) \quad (\text{B.33})$$

$$\mathbf{E}(j, a) = \sqrt{\mathbf{E}(j, j)} \sqrt{\mathbf{E}(i, i)} \mathbf{E}(i, i)^{-1} \mathbf{E}(i, a) \quad (\text{B.34})$$

Substituindo-se (B.34) em (B.30) resulta em

$$\hat{\mathbf{r}}(i) = \sum_{s=1}^m \mathbf{E}(i, s) [\mathbf{R}(s, s)]^{-1} \mathbf{z}(s) \quad (\text{B.29})$$

$$\hat{\mathbf{r}}(j) = \frac{\sqrt{\mathbf{E}(j, j)} \sqrt{\mathbf{E}(i, i)}}{\mathbf{E}(i, i)} \sum_{s=1}^m \mathbf{E}(i, s) [\mathbf{R}(s, s)]^{-1} \mathbf{z}(s) \quad (\text{B.30})$$

Sendo os resíduos normalizados de $\mathbf{z}(i)$ e $\mathbf{z}(j)$ dados por:

$$\hat{\mathbf{r}}_N(i) = \frac{\hat{\mathbf{r}}(i)}{\sqrt{\mathbf{E}(i, i)}} \quad (\text{B.31})$$

$$\hat{\mathbf{r}}_N(j) = \frac{\hat{\mathbf{r}}(j)}{\sqrt{\mathbf{E}(j, j)}} \quad (\text{B.32})$$

A razão entre os resíduos normalizados é dada por:

$$\rho_{ij} = \frac{\hat{r}_N(i)}{\hat{r}_N(j)} = \frac{1}{\sqrt{E(i,i)}} \cdot \frac{E(i,i)\sqrt{E(j,j)}}{\sqrt{E(j,j)}\sqrt{E(i,i)}} = 1 \quad (\text{B.33})$$

Com base na relação (B.33), o coeficiente de correlação entre o par de medidas $(z(i), z(j))$ é então:

$$\gamma_{ij} = \frac{E(i,j)}{\sqrt{E(j,j)}\sqrt{E(i,i)}} = 1 \quad (\text{B.34})$$

Conclui-se por fim que resíduos normalizados de medidas pertencentes à Cconjs são sempre iguais e apresentam máximo coeficiente de correlação.

Apêndice – C

Criticalidade do Sistema IEEE 24 Barras

Neste apêndice serão apresentadas as tuplas críticas de medidas, ramos e unidades de medição obtidas para os casos com o sistema IEEE 24 Barras analisados no capítulo 5. Nos casos em que o número de Ck-tuplas excede 150 não são apresentados, por questão de espaço.

C.1 Sistema IEEE 24 Barras – Caso Base

Tabela C.1 – Ck-tuplas de medidas o Caso Base

C1-Tupla	C2-Tupla		C3-Tupla			C4-Tupla			
P24-3	P17-18	P21-15	P16-19	P17-16	P21-15	P13-11	P13-23	P20-19	P20-23
P17-22	P16-14	P16-19	P16-19	P17-16	P17-18	P12-9	P12-10	P13-11	P13-23
	P20	P20-19	P16-15	P17-16	P21-15	P11-9	P11-10	P13-11	P13-23
	P18	P21-15	P16-15	P17-16	P17-18	P11-9	P11-10	P12-9	P12-10
	P18	P17-18	P16-15	P16-19	P21-15	P3-1	P3-9	P5-1	P5-10
	P16	P16-19	P16-15	P16-19	P17-18	P23	P12-9	P12-10	P13-23
	P16	P16-14	P16-15	P16-19	P17-16	P23	P12-9	P12-10	P13-11
			P16-14	P17-16	P21-15	P23	P11-9	P11-10	P13-23
			P16-14	P17-16	P17-18	P23	P11-9	P11-10	P13-11
			P16-14	P16-15	P21-15	P20	P13-11	P13-23	P20-23
			P16-14	P16-15	P17-18	P13	P13-23	P20-19	P20-23
			P16-14	P16-15	P17-16	P13	P13-11	P20-19	P20-23
			P23	P20-19	P20-23	P13	P12-9	P12-10	P13-23
			P23	P13-11	P13-23	P13	P12-9	P12-10	P13-11
			P20	P23	P20-23	P13	P11-9	P11-10	P13-23
			P18	P16-19	P17-16	P13	P11-9	P11-10	P13-11
			P18	P16-15	P17-16	P13	P23	P12-9	P12-10
			P18	P16-15	P16-19	P13	P23	P11-9	P11-10
			P18	P16-14	P17-16	P13	P20	P13-23	P20-23
			P18	P16-14	P16-15	P13	P20	P13-11	P20-23
			P16	P17-16	P21-15	P7	P8-7	P8-9	P8-10
			P16	P17-16	P17-18	P6	P3-9	P5-10	P9-4
			P16	P16-15	P21-15	P6	P2-4	P6-2	P9-4
			P16	P16-15	P17-18				
			P16	P16-15	P17-16				
			P16	P18	P17-16				
			P16	P18	P16-15				
			P13	P13-11	P13-23				
			P13	P23	P13-23				
			P13	P23	P13-11				
			P8	P8-9	P8-10				
			P7	P8	P8-7				
			P2	P2-4	P9-4				
			P2	P6	P6-2				
			P1	P5-1	P5-10				
			P1	P3-1	P3-9				

Tabela C.2 – Ck-tuplas de unidades de medição - Caso Base

C1-Tupla	C2-Tupla	
8	1	3
13	1	5
16	2	6
17	2	9
20	3	5
24	11	12
	18	21

Tabela C.3 – Ck-tuplas de ramos - Caso Base

C1-Tupla	C2-Tupla		C3-Tupla		
Ramo17-22	Ramo19-20	Ramo20-23	Ramo16-17	Ramo18-21	Ramo20-23
Ramo14-16	Ramo17-18	Ramo18-21	Ramo16-17	Ramo18-21	Ramo19-20
Ramo7-8	Ramo16-19	Ramo20-23	Ramo16-17	Ramo16-19	Ramo18-21
Ramo3-24	Ramo16-19	Ramo19-20	Ramo15-21	Ramo16-17	Ramo20-23
	Ramo16-17	Ramo17-18	Ramo15-21	Ramo16-17	Ramo19-20
	Ramo15-21	Ramo18-21	Ramo15-21	Ramo16-17	Ramo16-19
	Ramo15-21	Ramo17-18	Ramo15-16	Ramo16-17	Ramo20-23
	Ramo15-16	Ramo18-21	Ramo15-16	Ramo16-17	Ramo19-20
	Ramo15-16	Ramo17-18	Ramo15-16	Ramo16-17	Ramo16-19
	Ramo15-16	Ramo15-21	Ramo12-23	Ramo13-23	Ramo20-23
	Ramo8-9	Ramo8-10	Ramo12-23	Ramo13-23	Ramo19-20
	Ramo2-6	Ramo6-10	Ramo12-23	Ramo13-23	Ramo16-19
	Ramo2-4	Ramo4-9	Ramo11-13	Ramo12-13	Ramo13-23
	Ramo1-5	Ramo5-10	Ramo9-11	Ramo10-11	Ramo11-13
	Ramo1-3	Ramo3-9	Ramo1-2	Ramo2-6	Ramo4-9
			Ramo1-2	Ramo2-4	Ramo6-10
			Ramo1-2	Ramo2-4	Ramo2-6

C.2 Sistema IEEE 24 Barras – Caso 01

Tabela C.4 – Ck-tuplas de medidas – Caso 01

C1-Tupla	C2-Tupla		C3-Tupla			C4-Tupla			
P24-3	P20	P20-19	P23	P20-19	P20-23	P13-11	P13-23	P20-19	P20-23
P21-15			P23	P13-11	P13-23	P12-9	P12-10	P13-11	P13-23
P17-22			P20	P23	P20-23	P11-9	P11-10	P13-11	P13-23
P17-18			P13	P13-11	P13-23	P11-9	P11-10	P12-9	P12-10
P17-16			P13	P23	P13-23	P3-1	P3-9	P5-1	P5-10
P16-19			P13	P23	P13-11	P23	P12-9	P12-10	P13-23
P16-15			P8	P8-9	P8-10	P23	P12-9	P12-10	P13-11
P16-14			P7	P8	P8-7	P23	P11-9	P11-10	P13-23
			P2	P2-4	P9-4	P23	P11-9	P11-10	P13-11
			P2	P6	P6-2	P20	P13-11	P13-23	P20-23
			P1	P5-1	P5-10	P13	P13-23	P20-19	P20-23
			P1	P3-1	P3-9	P13	P13-11	P20-19	P20-23
						P13	P12-9	P12-10	P13-23
						P13	P12-9	P12-10	P13-11
						P13	P11-9	P11-10	P13-23
						P13	P11-9	P11-10	P13-11
						P13	P23	P12-9	P12-10
						P13	P23	P11-9	P11-10
						P13	P20	P13-23	P20-23
						P13	P20	P13-11	P20-23
						P7	P8-7	P8-9	P8-10
						P6	P3-9	P5-10	P9-4
						P6	P2-4	P6-2	P9-4

Tabela C.5 – Ck-tuplas de unidades de medição - Caso 01

C1-Tupla	C2-Tupla	
8	1	3
13	1	5
16	2	6
17	2	9
20	3	5
21	11	12
24		

Tabela C.6 – Ck-tuplas de ramos - Caso 01

C1-Tupla	C2-Tupla	
Ramo17-22	Ramo19-20	Ramo20-23
Ramo17-18	Ramo16-19	Ramo20-23
Ramo16-17	Ramo16-19	Ramo19-20
Ramo15-21	Ramo13-23	Ramo20-23
Ramo15-16	Ramo13-23	Ramo19-20
Ramo14-16	Ramo8-9	Ramo8-10
Ramo7-8	Ramo2-6	Ramo20-23
Ramo3-24	Ramo2-6	Ramo6-10
	Ramo2-4	Ramo4-9
	Ramo1-5	Ramo5-10
	Ramo1-3	Ramo3-9

C.3 Sistema IEEE 24 Barras – Caso 02

Tabela C.7 – Ck-tuplas de medidas – Caso 02

C1-Tupla	C2-Tupla		C3-Tupla			C4-Tupla			
P24-3	P17-18	P21-15	P16-19	P17-16	P21-15	P13-11	P13-23	P20-19	P20-23
P17-22	P16-14	P16-19	P16-19	P17-16	P17-18	P12-9	P12-10	P13-11	P13-23
P1	P5-1	P5-10	P16-15	P17-16	P21-15	P11-9	P11-10	P13-11	P13-23
	P20	P20-19	P16-15	P17-16	P17-18	P11-9	P11-10	P12-9	P12-10
	P18	P21-15	P16-15	P16-19	P21-15	P2-4	P5-10	P6-2	P9-4
	P18	P17-18	P16-15	P16-19	P17-18	P2-4	P5-1	P6-2	P9-4
	P16	P16-19	P16-15	P16-19	P17-16	P2-1	P5-10	P6-2	P9-4
	P16	P16-14	P16-14	P17-16	P21-15	P2-1	P5-1	P6-2	P9-4
			P16-14	P17-16	P17-18	P2-1	P2-4	P6-2	P9-4
			P16-14	P16-15	P21-15	P2-1	P2-4	P5-10	P9-4
			P16-14	P16-15	P17-18	P2-1	P2-4	P5-10	P6-2
			P16-14	P16-15	P17-16	P2-1	P2-4	P5-1	P9-4
			P23	P20-19	P20-23	P2-1	P2-4	P5-1	P6-2
			P23	P13-11	P13-23	P23	P12-9	P12-10	P13-23
			P20	P23	P20-23	P23	P12-9	P12-10	P13-11
			P18	P16-19	P17-16	P23	P11-9	P11-10	P13-23
			P18	P16-15	P17-16	P23	P11-9	P11-10	P13-11
			P18	P16-15	P16-19	P20	P13-11	P13-23	P20-23
			P18	P16-14	P17-16	P13	P13-23	P20-19	P20-23
			P18	P16-14	P16-15	P13	P13-11	P20-19	P20-23
			P16	P17-16	P21-15	P13	P12-9	P12-10	P13-23
			P16	P17-16	P17-18	P13	P12-9	P12-10	P13-11
			P16	P16-15	P21-15	P13	P11-9	P11-10	P13-23
			P16	P16-15	P17-18	P13	P11-9	P11-10	P13-11
			P16	P16-15	P17-16	P13	P23	P12-9	P12-10
			P16	P18	P17-16	P13	P23	P11-9	P11-10
			P16	P18	P16-15	P13	P20	P13-23	P20-23
			P13	P13-11	P13-23	P13	P20	P13-11	P20-23
			P13	P23	P13-23	P7	P8-7	P8-9	P8-10
			P13	P23	P13-11	P6	P2-4	P6-2	P9-4
			P8	P8-9	P8-10	P6	P2-4	P5-10	P6-2
			P7	P8	P8-7	P6	P2-4	P5-1	P6-2
			P6	P5-10	P9-4	P6	P2-1	P6-2	P9-4
			P6	P5-1	P9-4	P6	P2-1	P5-10	P6-2
			P2	P2-4	P9-4	P6	P2-1	P5-1	P6-2
			P2	P2-1	P5-10	P6	P2-1	P2-4	P9-4
			P2	P2-1	P5-1	P6	P2-1	P2-4	P6-2
			P2	P6	P6-2	P6	P2-1	P2-4	P5-10
						P6	P2-1	P2-4	P5-1
						P2	P5-10	P6-2	P9-4
						P2	P5-1	P6-2	P9-4
						P2	P2-4	P5-10	P6-2
						P2	P2-4	P5-1	P6-2
						P2	P2-1	P6-2	P9-4
						P2	P2-1	P2-4	P6-2
						P2	P6	P2-4	P5-10
						P2	P6	P2-4	P5-1
						P2	P6	P2-1	P9-4
						P2	P6	P2-1	P2-4

Tabela C.8 – Ck-tuplas de unidades de medição - Caso 02

C1-Tupla	C2-Tupla	
1	2	6
5	2	9
8	11	12
13	18	21
16		
17		
20		
24		

Tabela C.9 – Ck-tuplas de ramos - Caso 02

C1-Tupla	C2-Tupla	
Ramo17-22	Ramo19-20	Ramo20-23
Ramo14-16	Ramo17-18	Ramo18-21
Ramo7-8	Ramo16-19	Ramo20-23
Ramo3-24	Ramo16-19	Ramo19-20
Ramo1-3	Ramo16-17	Ramo17-18
	Ramo15-21	Ramo18-21
	Ramo15-21	Ramo17-18
	Ramo15-16	Ramo18-21
	Ramo15-16	Ramo17-18
	Ramo15-16	Ramo15-21
	Ramo8-9	Ramo8-10
	Ramo2-6	Ramo6-10
	Ramo2-4	Ramo4-9
	Ramo1-5	Ramo5-10

C.4 Sistema IEEE 24 Barras – Caso 03

Tabela C.10 – Ck-tuplas de medidas – Caso 03

C1-Tupla	C2-Tupla		C3-Tupla			C4-Tupla			
P24-3	P17-18	P21-15	P16-19	P17-16	P21-15	P13-11	P13-23	P20-19	P20-23
P17-22	P16-14	P16-19	P16-19	P17-16	P17-18	P12-9	P12-10	P13-11	P13-23
P9-4	P20	P20-19	P16-15	P17-16	P21-15	P11-9	P11-10	P13-11	P13-23
P6-2	P18	P21-15	P16-15	P17-16	P17-18	P11-9	P11-10	P12-9	P12-10
P5-10	P18	P17-18	P16-15	P16-19	P21-15	P8-9	P8-10	P11-10	P12-10
P5-1	P16	P16-19	P16-15	P16-19	P17-18	P8-9	P8-10	P11-9	P12-9
P6	P16	P16-14	P16-15	P16-19	P17-16	P23	P12-9	P12-10	P13-23
P1			P16-14	P17-16	P21-15	P23	P12-9	P12-10	P13-11
			P16-14	P17-16	P17-18	P23	P11-9	P11-10	P13-23
			P16-14	P16-15	P21-15	P23	P11-9	P11-10	P13-11
			P16-14	P16-15	P17-18	P20	P13-11	P13-23	P20-23
			P16-14	P16-15	P17-16	P13	P13-23	P20-19	P20-23
			P23	P20-19	P20-23	P13	P13-11	P20-19	P20-23
			P23	P13-11	P13-23	P13	P12-9	P12-10	P13-23
			P20	P23	P20-23	P13	P12-9	P12-10	P13-11
			P18	P16-19	P17-16	P13	P11-9	P11-10	P13-23
			P18	P16-15	P17-16	P13	P11-9	P11-10	P13-11
			P18	P16-15	P16-19	P13	P23	P12-9	P12-10
			P18	P16-14	P17-16	P13	P23	P11-9	P11-10
			P18	P16-14	P16-15	P13	P20	P13-23	P20-23
			P16	P17-16	P21-15	P13	P20	P13-11	P20-23
			P16	P17-16	P17-18	P8	P8-10	P11-10	P12-10
			P16	P16-15	P21-15	P8	P8-10	P11-9	P12-9
			P16	P16-15	P17-18	P8	P8-9	P11-10	P12-10
			P16	P16-15	P17-16	P8	P8-9	P11-9	P12-9
			P16	P18	P17-16	P7	P8-7	P8-9	P8-10
			P16	P18	P16-15				
			P13	P13-11	P13-23				
			P13	P23	P13-23				
			P13	P23	P13-11				
			P8	P8-9	P8-10				
			P7	P8	P8-7				

Tabela C.11 – Ck-tuplas de unidades de medição – Caso 03

C1-Tupla	C1-Tupla	C2-Tupla	
1	13	11	12
5	16	18	21
6	17		
8	20		
9	24		

Tabela C.12 – Ck-tuplas de ramos – Caso 03

C1-Tupla	C2-Tupla		C2-Tupla	
Ramo20-23	Ramo17-18	Ramo18-21	Ramo1-5	Ramo6-10
Ramo19-20	Ramo16-19	Ramo18-21	Ramo1-5	Ramo5-10
Ramo17-22	Ramo16-19	Ramo17-18	Ramo1-2	Ramo6-10
Ramo14-16	Ramo16-17	Ramo18-21	Ramo1-5	Ramo10-11
Ramo7-8	Ramo16-17	Ramo17-18		
Ramo4-9	Ramo16-17	Ramo16-19		
Ramo3-24	Ramo15-21	Ramo18-21		
Ramo2-6	Ramo15-21	Ramo17-18		
Ramo1-3	Ramo15-21	Ramo16-19		
	Ramo15-21	Ramo16-17		
	Ramo15-16	Ramo18-21		
	Ramo15-16	Ramo17-18		
	Ramo15-16	Ramo16-19		
	Ramo15-16	Ramo16-17		
	Ramo15-16	Ramo15-21		
	Ramo13-23	Ramo16-19		
	Ramo12-23	Ramo16-19		
	Ramo12-23	Ramo13-23		
	Ramo11-13	Ramo16-19		
	Ramo8-10	Ramo16-19		
	Ramo8-9	Ramo16-19		
	Ramo8-9	Ramo8-10		
	Ramo6-10	Ramo18-21		
	Ramo6-10	Ramo17-18		
	Ramo6-10	Ramo16-19		
	Ramo6-10	Ramo16-17		
	Ramo6-10	Ramo15-21		
	Ramo6-10	Ramo15-16		
	Ramo6-10	Ramo13-23		
	Ramo6-10	Ramo12-23		
	Ramo6-10	Ramo12-13		
	Ramo6-10	Ramo11-13		
	Ramo6-10	Ramo10-12		
	Ramo6-10	Ramo10-11		
	Ramo6-10	Ramo9-12		
	Ramo6-10	Ramo9-11		
	Ramo6-10	Ramo8-10		
	Ramo6-10	Ramo8-9		
	Ramo5-10	Ramo17-18		
	Ramo5-10	Ramo16-19		
	Ramo5-10	Ramo16-17		
	Ramo5-10	Ramo8-10		
	Ramo5-10	Ramo6-10		
	Ramo1-5	Ramo17-18		
	Ramo1-5	Ramo16-19		
	Ramo1-5	Ramo13-23		
	Ramo1-5	Ramo12-13		

C.5 – Sistema IEEE 24 Barras – Caso 04

Tabela C.13 – Ck-tuplas de medidas – Caso 04

C1-Tupla	C2-Tupla		C3-Tupla			C4-Tupla			
P17-22	P18	P17-18	P16-14	P17-16	P17-18	P15-21	P16-14	P17-16	P21-15
A10	P16	P16-14	P15-21	P17-18	P21-15	P24	P16-14	P16-19	P24-3
			P18	P16-14	P17-16	P24	P15-24	P24-3	P24-15
			P18	P15-21	P21-15	P20	P16-14	P16-19	P20-19
			P16	P17-16	P17-18	P20	P24	P20-19	P24-3
			P16	P18	P17-16	P20	P23	P20-19	P20-23
			P7	P8	P8-7	P16	P15-21	P17-16	P21-15
			P2	P2-4	P9-4	P16	P24	P16-19	P24-3
			P2	P6	P6-2	P16	P20	P16-19	P20-19
			P1	P5-1	P5-10	P13	P11-9	P11-10	P13-11
						P13	P23	P13-11	P13-23
						P13	P23	P12-9	P12-10
						P8	P8-9	P8-10	P10-8
						P6	P2-4	P6-2	P9-4

Tabela C.14 – Ck-tuplas de unidades de medição – Caso 04

C1-Tupla	C2-Tupla	
10	1	5
16	2	6
17	2	9
	7	8
	11	13
	12	13
	13	20
	13	23
	13	24
	15	24
	20	23
	20	24

Tabela C.15 – Ck-tuplas de ramos – Caso 04

C1-Tupla	C2-Tupla		C3-Tupla		
Ramo17-22	Ramo19-20	Ramo20-23	Ramo15-16	Ramo18-21	Ramo20-23
Ramo14-16	Ramo17-18	Ramo18-21	Ramo15-16	Ramo16-19	Ramo17-18
Ramo7-8	Ramo16-19	Ramo20-23	Ramo15-16	Ramo16-17	Ramo20-23
	Ramo16-19	Ramo19-20	Ramo15-16	Ramo16-17	Ramo19-20
	Ramo16-17	Ramo17-18	Ramo15-16	Ramo16-17	Ramo16-19
	Ramo15-21	Ramo18-21	Ramo15-16	Ramo15-24	Ramo18-21
	Ramo15-21	Ramo17-18	Ramo15-16	Ramo15-24	Ramo17-18
	Ramo8-9	Ramo8-10	Ramo15-16	Ramo15-24	Ramo15-21
	Ramo3-24	Ramo15-24	Ramo12-23	Ramo13-23	Ramo20-23
	Ramo2-6	Ramo6-10	Ramo12-23	Ramo13-23	Ramo19-20
	Ramo2-4	Ramo4-9	Ramo11-13	Ramo12-13	Ramo13-23
	Ramo1-5	Ramo5-10	Ramo9-11	Ramo10-11	Ramo11-13
			Ramo3-24	Ramo15-16	Ramo15-21
			Ramo1-3	Ramo3-9	Ramo15-24
			Ramo1-3	Ramo3-9	Ramo3-24
			Ramo1-2	Ramo2-6	Ramo4-9
			Ramo1-2	Ramo2-4	Ramo6-10
			Ramo1-2	Ramo2-4	Ramo2-6
			Ramo1-2	Ramo1-3	Ramo5-10
			Ramo1-2	Ramo1-3	Ramo1-5

C.6 – Sistema IEEE 24 Barras – Caso 05

Tabela C.16 – Ck-tuplas de medidas – Caso 05

C1-Tupla	C2-Tupla		C3-Tupla			C4-Tupla			
P24-3	P17-18	P21-15	P16-19	P17-16	P21-15	P13-11	P13-23	P20-19	P20-23
P17-22	P16-14	P16-19	P16-19	P17-16	P17-18	P12-9	P12-10	P13-11	P13-23
A10	P20	P20-19	P16-15	P17-16	P21-15	P11-9	P11-10	P13-11	P13-23
	P18	P21-15	P16-15	P17-16	P17-18	P11-9	P11-10	P12-9	P12-10
	P18	P17-18	P16-15	P16-19	P21-15	P3-1	P3-9	P5-1	P5-10
	P16	P16-19	P16-15	P16-19	P17-18	P23	P12-9	P12-10	P13-23
	P16	P16-14	P16-15	P16-19	P17-16	P23	P12-9	P12-10	P13-11
			P16-14	P17-16	P21-15	P23	P11-9	P11-10	P13-23
			P16-14	P17-16	P17-18	P23	P11-9	P11-10	P13-11
			P16-14	P16-15	P21-15	P20	P13-11	P13-23	P20-23
			P16-14	P16-15	P17-18	P13	P13-23	P20-19	P20-23
			P16-14	P16-15	P17-16	P13	P13-11	P20-19	P20-23
			P23	P20-19	P20-23	P13	P12-9	P12-10	P13-23
			P23	P13-11	P13-23	P13	P12-9	P12-10	P13-11
			P20	P23	P20-23	P13	P11-9	P11-10	P13-23
			P18	P16-19	P17-16	P13	P11-9	P11-10	P13-11
			P18	P16-15	P17-16	P13	P23	P12-9	P12-10
			P18	P16-15	P16-19	P13	P23	P11-9	P11-10
			P18	P16-14	P17-16	P13	P20	P13-23	P20-23
			P18	P16-14	P16-15	P13	P20	P13-11	P20-23
			P16	P17-16	P21-15	P8	P8-9	P8-10	P10-8
			P16	P17-16	P17-18	P6	P3-9	P5-10	P9-4
			P16	P16-15	P21-15	P6	P2-4	P6-2	P9-4
			P16	P16-15	P17-18				
			P16	P16-15	P17-16				
			P16	P18	P17-16				
			P16	P18	P16-15				
			P13	P13-11	P13-23				
			P13	P23	P13-23				
			P13	P23	P13-11				
			P7	P8	P8-7				
			P2	P2-4	P9-4				
			P2	P6	P6-2				
			P1	P5-1	P5-10				
			P1	P3-1	P3-9				

Tabela C.17 – Ck-tuplas de unidades de medição – Caso 05

C1-Tupla	C2-Tupla	
10	1	3
13	1	5
16	2	6
17	2	9
20	3	5
24	7	8
	11	12
	18	21

Tabela C.18 – Ck-tuplas de ramos – Caso 05

C1-Tupla	C2-Tupla		C3-Tupla		
Ramo17-22	Ramo19-20	Ramo20-23	Ramo16-17	Ramo18-21	Ramo20-23
Ramo14-16	Ramo17-18	Ramo18-21	Ramo16-17	Ramo18-21	Ramo19-20
Ramo7-8	Ramo16-19	Ramo20-23	Ramo16-17	Ramo16-19	Ramo18-21
Ramo3-24	Ramo16-19	Ramo19-20	Ramo15-21	Ramo16-17	Ramo20-23
	Ramo16-17	Ramo17-18	Ramo15-21	Ramo16-17	Ramo19-20
	Ramo15-21	Ramo18-21	Ramo15-21	Ramo16-17	Ramo16-19
	Ramo15-21	Ramo17-18	Ramo15-16	Ramo16-17	Ramo20-23
	Ramo15-16	Ramo18-21	Ramo15-16	Ramo16-17	Ramo19-20
	Ramo15-16	Ramo17-18	Ramo15-16	Ramo16-17	Ramo16-19
	Ramo15-16	Ramo15-21	Ramo12-23	Ramo13-23	Ramo20-23
	Ramo8-9	Ramo8-10	Ramo12-23	Ramo13-23	Ramo19-20
	Ramo2-6	Ramo6-10	Ramo12-23	Ramo13-23	Ramo16-19
	Ramo2-4	Ramo4-9	Ramo11-13	Ramo12-13	Ramo13-23
	Ramo1-5	Ramo5-10	Ramo9-11	Ramo10-11	Ramo11-13
	Ramo1-3	Ramo3-9	Ramo1-2	Ramo2-6	Ramo4-9
			Ramo1-2	Ramo2-4	Ramo6-10
			Ramo1-2	Ramo2-4	Ramo2-6
			Ramo1-2	Ramo1-5	Ramo3-9
			Ramo1-2	Ramo1-3	Ramo5-10
			Ramo1-2	Ramo1-3	Ramo1-5

C.7 – Sistema IEEE 24 Barras – Caso 06

Tabela C.19 – Ck-tuplas de medidas – Caso 06

C1-Tupla	C2-Tupla		C3-Tupla			C4-Tupla			
----	P3-24	P24-3	P17-18	P21-15	I22-21	P20	P20-19	P20-23	I23-20
	P18	P17-18	P18	P21-15	I22-21	P16	P16-15	P17-18	I22-21
			P16	P16-15	P21-15	P16	P20	P16-19	P20-19
			P7	P8	P8-7	P16	P18	P16-15	I22-21
			P2	P2-4	P9-4	P13	P13-11	P13-23	I23-13
			P1	P3-1	P3-9	P8	P8-9	P8-10	I10-8
						P2	P6	P6-2	I10-6
						P1	P5-1	P5-10	I10-5
						A22	P17-22	I22-17	I22-21
						A22	P16-15	P17-16	P21-15
						A22	P16	P17-16	P21-15
						A22	P16	P16-15	P17-16
						A10	A14	A22	A23

Tabela C.20 – Ck-tuplas de unidades de medição – Caso 06

C1-Tupla	C2-Tupla	
----	1	3
	2	9
	3	24
	7	8
	16	20
	16	21
	17	18

Tabela C.21 – Ck-tuplas de ramos – Caso 06

C1-Tupla	C2-Tupla		C3-Tupla		
Ramo7-8	Ramo19-20	Ramo20-23	Ramo16-17	Ramo17-22	Ramo18-21
Ramo3-24	Ramo17-18	Ramo18-21	Ramo16-17	Ramo17-18	Ramo17-22
	Ramo16-19	Ramo20-23	Ramo15-21	Ramo18-21	Ramo21-22
	Ramo16-19	Ramo19-20	Ramo15-21	Ramo17-18	Ramo21-22
	Ramo15-16	Ramo15-21	Ramo15-16	Ramo18-21	Ramo21-22
	Ramo8-9	Ramo8-10	Ramo15-16	Ramo17-18	Ramo21-22
	Ramo2-6	Ramo6-10	Ramo11-13	Ramo12-13	Ramo13-23
	Ramo2-4	Ramo4-9	Ramo9-11	Ramo10-11	Ramo13-23
	Ramo1-5	Ramo5-10	Ramo1-2	Ramo2-6	Ramo4-9
	Ramo1-3	Ramo3-9	Ramo1-2	Ramo2-4	Ramo6-10
			Ramo1-2	Ramo2-4	Ramo2-6
			Ramo1-2	Ramo1-5	Ramo3-9
			Ramo1-2	Ramo1-3	Ramo5-10
			Ramo1-2	Ramo1-3	Ramo1-5

Referências Bibliográficas

[Abba09] N. H. Abbasy, H. M. Ismail, "A Unified Approach for the Optimal PMU Location for Power System State Estimation," IEEE Transactions on Power Systems, vol.24, no.2, pp.806-813, Maio 2009.

[Abur95] A. Abur, A. G. Expósito, "Algorithm for determining phase-angle observability in the presence of line-current-magnitude measurements," Proceedings of IET, Generation, Transmission and Distribution, vol. 142, no. 5, pp. 453–458, Setembro 1995.

[Abur97] A. Abur, A. G. Expósito, "Detecting multiple solutions in state estimation in the presence of current magnitude measurements," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 12, no. 1, pp. 370–375, Fevereiro 1997.

[Abur04] A. Abur, A. G. Expósito, "Power system state estimation—theory and implementation", New York, Marcel Dekker, 2004.

[Alle80] J. J. Allemong, G. D. Irisarri, A. M. Sasson, "An examination of solvability for state estimation algorithms", Paper A80008-3, IEEE PES Winter Meeting, New York, Fevereiro 1980.

[Alme08a] M. C. de Almeida, E. N. Asada, A. V. Garcia, "On the use of Gram matrix in observability analysis", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 23, no. 1, pp. 249–251, Fevereiro 2008.

[Alme08b] M. C. de Almeida, E. N. Asada, A. V. Garcia; "Power system observability analysis based on Gram matrix and minimum norm solution", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 23, no. 4, pp. 1611-1618, Novembro 2008.

[Amin11a] F. Aminifar, M. Fotuhi-Firuzabad, M. Shahidehpour, and A. Khodaei, "Observability enhancement by optimal PMU placement considering random power system outages," Energy Systems, vol. 2, no. 1, pp. 45–65, Março 2011.

[Amin11b] F. Aminifar, M. Fotuhi-Firuzabad, and M. Shahidehpour, "Probabilistic multistage PMU placement in electric power systems," IEEE Transactions on Power Delivery, vol. 26, no. 2, pp. 841–849, Abril 2011.

[Amin12] F. Aminifar, M. Fotuhi-Firuzabad, M. Shahidehpour, and A. Safdarian, "Impact of WAMS malfunction on power system reliability assessment," IEEE Transactions on Smart Grid, vol. 3, no. 3, pp. 1302–1309, Setembro 2012.

[Amin13] F. Aminifar, M. Fotuhi-Firuzabad, and A. Safdarian; "Optimal PMU placement based on probabilistic cost/benefit analysis," IEEE Transactions on Power Systems, Fevereiro 2013.

[Augu13] A. A. Augusto, J. C. S. Souza, M. B. Do Coutto Filho, "Low-Cardinality Critical k-Tuples in Measurement Sets for State Estimation", Proceedings IEEE Grenoble PowerTech(POWERTECH), v.1, no. 1, pp.1-6, Grenoble, 2013.

[Augu14a] Andre A. Augusto, M. B. Do Coutto Filho, J. C. Stacchini de Souza, "Áreas de Fraca Observabilidade para Estimaco de Estado", Anais do V Simpósio Brasileiro de Sistemas Elétricos (SBSE 2014), v.1, no. 1, pp.1-6, Foz do Iguaçu, 2014.

[Augu14b] Andre A. Augusto, J. Pereira, V. Miranda, M. B. Do Coutto Filho, J. C. Stacchini de Souza, "Most Relevant Measurements for State Estimation According Information Theoretic Criteria", Proceedings 13th Conference on Probabilistic Methods Applied to Power Systems (13th PMAAPS), v.1, no. 1, pp.1-6, Durham, 2014.

[Augu15] Andre A. Augusto, M. B. Do Coutto Filho, J. C. Stacchini de Souza, "Algoritmo Branch-and-Bound para Enumerao de Criticalidades de Medidas destinadas à Estimaco de Estado", Anais do XLVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (SBPO 2015), v.1, no. 1, pp.1-6, Porto de Galinhas, 2015.

[Ayre86] M. Ayres, P. H. Haley, "Bad data groups in power system state estimation", IEEE Transactions on Power Systems, vol.1, no.3, pp. 1-7, Agosto 1986.

[Bala68] E. Balas, "A note on the branch-and-bound principle", Operations Research, vol. 16, no. 2, pp.442-445, Abril 1968.

[Bill84] R. Billinton, R. N. Allan, "Reliability Evaluation of Power Systems", Plenum Publishing, New York, 1984.

[Cast05] E. Castillo, A. J. Conejo, R. E. Pruneda, C. Solares, "State estimation observability based on the null space of the measurement Jacobian matrix", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 20, no. 3, pp. 1656–1658, Agosto 2005.

[Cast06] E. Castillo, A. J. Conejo, R. E. Pruneda, C. Solares, "Observability analysis in state estimation: A unified numerical approach", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 21, no. 2, pp. 877–886, Maio 2006.

[Cast08] E. Castillo, A. J. Conejo, R. E. Pruneda, C. Solares, J. M. Menéndez, " $m - k$ Robust observability in state estimation", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 23, no. 2, Maio 2008.

[Chak08] S. Chakrabarti, E. Kyriakides, "Optimal Placement of Phasor Measurement Units for Power System Observability", IEEE Transactions on Power Systems, vol.23, no.3, pp.1433-1440, Agosto 2008

[Chen90] R. L. Chen, "A fast integer algorithm for observability analysis using network topology", IEEE Transactions on Power Systems, vol.5, no. 3, pp. 1001-1009, Agosto 1990.

[Chen08] J. Chen; A. Abur, "Enhanced Topology Error Processing via Optimal Measurement Design", IEEE Transactions on Power Systems, vol.23, no.3, pp.845-852, Agosto 2008.

[Clem75] K. A. Clements, B. F. Wollenberg, "An algorithm for observability determination in power system state estimation", Proceedings of IEEE PES Summer Meeting, paper A75 447-3, San Francisco, CA, Julho 1975.

[Clem81] K.A. Clements, G.R. Krumpholz, P.W. Davis, "Power system state estimation residual analysis: an algorithm using network topology", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 100, no. 4, pp. 1779-1787, Abril 1981.

[Clem82] K.A. Clements, G.R. Krumpholz, P.W. Davis, "Power system state estimation with measurement deficiency: an algorithm that determines the maximal observable network", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 101, no. 9, pp. 3044-3052, Setembro 1982.

[Clem83] K. A. Clements, G. R. Krumpholz, P. W. Davis, "Power system state estimation with measurement deficiency: An observability/measurement placement algorithm", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-102, no. 7, pp. 2012–2020, Julho 1983.

[Clem86] K. A. Clements, P. W. Davis "Multiple bad data detectability and identifiability: a geometric approach", IEEE Transactions on Power Delivery, vol 1, no. 3, pp. 355–360, Julho 1986.

[Cont88] G. C. Contaxis, G. N. Korres, "A reduced model for power system observability analysis and restoration", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 3, no. 4, pp. 1411–1417, Abril 1988.

[Cout99] M. B. Do Coutto Filho, J. C. S. Souza, R. S. G. Matos, M. Th. Schilling, "Strategies for preserving data redundancy in power system state estimation", Proceedings 13th Power Systems Computation Conference, pp. 441-447, Trondheim, Norway, Julho 1999.

[Cout01] M. B. Do Coutto Filho, J. C. S. Souza, F. M. F. Oliveira, M. Th. Schilling, "Identifying critical measurements & sets for power system state estimation", Proceedings IEEE Porto Power Tech Conference, paper 149, Porto, Portugal, Setembro 2001.

[Cout07] M. B. Do Coutto Filho, J. C. Stacchini De Souza, M. Th. Schilling, "Handling critical data and observability", Electric Power Components and Systems, vol. 35, Issue 5, pp. 553 - 573, Maio 2007.

[Cout09] M. B. Do Coutto Filho, J. C. Stacchini de Souza, J. E. V. Tafur., "Indicators of critical conditions for state estimation", Proceedings of the 2009 IEEE PES General Meeting, v.1. pp.1-6, Calgary, 2009.

[Cout13] M. B. Do Coutto Filho, J. C. Stacchini de Souza, J. E. V. Tafur, "Quantifying Observability in State Estimation", IEEE Transactions on Power Systems, v.28, no. 3, Agosto. 2013.

[Cout14a] M. B. Do Coutto Filho, J. C. Stacchini de Souza, A. A. Augusto, "Critical Measuring Units for State Estimation", Proceedings 18th Power Systems Computation Conference (18th PSCC), v.1, no. 1, pp.1-7, Wroclaw, 2014.

[Cout14b] M. B. Do Coutto Filho, J. C. Stacchini de Souza, M. A. R. Guimaraens, "Enhanced Bad Data Processing by Phasor-Aided State Estimation", IEEE Transactions on Power Systems, v.29, no. 5, pp. 2200-2209, Setembro 2014.

[Crai90] E. D. Crainic, H. P. Horisberger, X. D. Do, D. Mukhedkar, "Power network observability: The assesement of the measurement system strength", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 5, no. 4, pp. 1267-1285, Novembro 1990.

[Ding07] Q. Ding, V.A. Emesih, "A simple factorization-based observability analysis and meter placement method", Electrical Power and Energy Systems, vol. 29, no. 10, pp.731-737, Dezembro 2007.

[Dön11] B. Dönmez, A. Abur, "A Computationally Efficient Method to Place Critical Measurements", IEEE Transactions on Power Systems, vol.26, no.2, pp.924-931, Maio 2011.

[Expo98] A. G. Expósito, A. Abur, "Generalized observability analysis and measurement classification", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 13, no. 3, pp. 1090–1095, Agosto 1998.

[Emam10] R. Emami, A. Abur, "Robust Measurement Design by Placing Synchronized Phasor Measurements on Network Branches", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 25, no.1, pp. 38-43, Fevereiro 2010.

[Falc94] D. M. Falcão, M. A. Arias, "State estimation and observability analysis based on echelon forms of the linearized measurement models", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 9, no. 2, pp. 979–987, Maio 1994.

[Gou00] B. Gou, A. Abur, "A direct numerical method for observability analysis", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 15, no. 2, pp. 625–630, Maio 2000.

[Göl12] M. Göl, A. Abur, F. Galvan, "Metrics for Success", IEEE Power & Energy Magazine, vol. 10, no. 5, pp. 50-57, Outubro 2012.

[Göl13] M. Göl, A. Abur, "Observability and Criticality Analyses for Power Systems Measured by Phasor Measurements", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 28, no. 3, pp.3319-3326, Agosto. 2013.

[Gou01] B. Gou, A. Abur, "An improved measurement placement algorithm for network observability", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 16, no. 4, pp. 819–824, Novembro 2001.

[Gou06] B. Gou, "Jacobian matrix based observability analysis for state estimation", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 21, no. 1, pp. 348–356, Fevereiro 2006.

[Gou08a] B. Gou, "Generalized Integer Linear Programming Formulation for Optimal PMU Placement", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 23, no. 3, pp.1099-1104, Agosto. 2008.

[Gou08b] B. Gou, "Optimal Placement of PMUs by Integer Linear Programming", IEEE Transactions on Power Systems, vol.23, no.3, pp.1525-1526, Agosto. 2008.

[Gou14] B. Gou, R. G. Kavasseri, "Unified PMU Placement for Observability and Bad Data Detection in State Estimation", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 29, no. 6, pp.2573-2580, Novembro. 2014.

[Gubn06] J. A. Gubner, "Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers", Cambridge University Press, New York, 2006

[Hand75] E. Handschin, C. Bongers, "Theoretical and practical considerations in the design of state estimators for electric power systems", Proceedings of International Symposium on Computerized Operation of Power System, São Carlos, Brasil, pp. 104-136, Agosto 1975.

[Huan14] L. Huang; Y. Sun; J. Xu; W. Gao; J. Zhang; Z. Wu, "Optimal PMU Placement Considering Controlled Islanding of Power System,", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 29, no. 2, pp.742-755, Março 2014.

[Hort77] J. S. Horton, R. D. Masiello, "On-line decoupled observability processing", PICA Proc., Toronto, Ontario, pp. 420-426, 1977.

[IEEE79] IEEE APM Subcommittee, "IEEE reliability test system", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-99, pp. 2047-2054, Dezembro 1979.

[Kats03] P. J. Katsikas, G. N. Korres, "Unified observability analysis and measurement placement in generalized state estimation", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 18, no. 1, pp. 324–333, Fevereiro 2003.

[Korr91] G. N. Korres, G. C. Contaxis, "Identification and updating of minimally dependent sets of measurements in state estimation", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 6, pp. 999–1005, Agosto 1991.

[Korr03a] G. N. Korres, P. J. Katsikas, K. A. Clements, P. W. Davis, "Numerical observability analysis based on network graph theory", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 18, no. 3, pp. 1035–1045, Agosto 2003.

[Korr03b] G. N. Korres, P. J. Katsikas, "A hybrid method for observability analysis using a reduced network graph theory", IEEE Transactions on Power Systems vol. 18, no. 1, pp. 295–304. Janeiro 2003.

[Korr05] G. N. Korres, P. J. Katsikas, "Reduced model for numerical observability analysis in generalized state estimation", Proceedings of IET Generation, Transmission and Distribution, vol. 152, no. 1, pp. 99–108, Janeiro 2005.

[Korr11a] G. N. Korres, "A Gram Matrix-Based Method for Observability Restoration", IEEE Transactions on Power Systems, vol.26, no.4, pp.2569-2571, Novembro 2011.

[Korr11b] G. N. Korres, "Observability Analysis Based on Echelon Form of a Reduced Dimensional Jacobian Matrix", IEEE Transactions on Power Systems, vol.26, no.4, pp.2572-2573, Novembro 2011.

[Kosu10] O. Kosut, Jia Liyan, R. J. Thomas, Tong Lang, "Malicious Data Attacks on Smart Grid State Estimation: Attack Strategies and Countermeasures", 2010 First IEEE International Conference on Smart Grid Communications (SmartGridComm), vol.1, no.1, pp.220-225, Gaithersburg, MD, Outubro 2010.

[Krst14a] J. Krstulovic, "Information Theoretic State Estimation in Power Systems," Tese de Doutorado, FEUP, 2014.

[Krst14b] J. Krstulovic, V. Miranda, "Selection of measurements in topology estimation with mutual information," Proceedings of 2014 IEEE International Energy Conference (ENERGYCON), vol. 1, no. 1, pp.589-596, Cavtat, Maio 2014.

[Krum80] G. R. Krumholz, K. A. Clements, P. W. Davis, "Power system observability: a practical algorithm using network topology", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-99, no. 4, pp. 1534-1542, Agosto 1980.

[Liu09] Y. Liu, M. Reiter, and P. Ning, "False data injection attacks against state estimation in electric power grids," in Proceedings of 16th ACM Conference on Computer and Communication Security, vol. 1, no. 1, pp. 21–32, New York, Novembro 2009.

[Lond01] J. B. A. London Jr, L. F. C. Alberto, N. G. Bretas, "Identificação do nível de redundância das medidas para efeito de estimação de estado em sistema de potência", Revista Controle & Automação, vol.12 no. 2, Julho 2001.

[Lond07] J. B. A. London, L. F. C. Alberto, N. G. Bretas, "Analysis of measurement-set qualitative characteristics for state-estimation purposes", IET Generation, Transmission and Distribution, vol. 1, pp. 39–45, Janeiro 2007.

[Lond09] J. B. A. London, S. A. R. Piereti, R. A. S. Benedito, N. G. Bretas, "Redundancy and Observability Analysis of Conventional and PMU Measurements", IEEE Transactions on Power Systems, vol.24, no.3, pp.1629-1630, Agosto 2009.

[Mang00] F. H. Mangano, A. Abur, "Unified approach to robust meter placement against bad data and branch outages", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 15, no. 3, pp. 945–949, Agosto 2000.

[Meye84] P. L. Meyer, "Probabilidade: Aplicações à Estatística", 2ª Ed., Editora LTC, Rio de Janeiro, 1984.

[Mira10] V. Miranda, "Fiabilidade em Sistemas de Potência: Uma Introdução", 3a. ed., Universidade do Porto/INESC Porto, Março. 2010.

[Mira12] V. Miranda, J. Krstulovic, H. Keko, C. Moreira, and J. Pereira, "Reconstructing Missing Data in State Estimation with Autoencoders", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 27, no. 2, pp. 604-611, Abril 2012.

[Mitt70] L. G. Mitten, "Branch-and-Bound methods: General Formulation and properties", Operations Research, vol. 18, no. 1, pp.24-34, Fevereiro 1970.

[Mont85a] A. Monticelli, F. F. Wu, "Network observability: Theory", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-104, no. 5, pp. 1042–1048, Maio 1985.

[Mont85b] A. Monticelli, F. F. Wu, "Network observability: Identification of observable island and measurement placement", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-104, no. 5, pp. 1035–1041, Maio 1985.

[Mont86] A. Monticelli, F. F. Wu, "Observability analysis for orthogonal transformation based state estimation", IEEE Transactions on Power Systems, vol. PWRS-1, no. 1, pp. 201–208, Fevereiro 1986.

[Mont99] A. Monticelli, "State Estimation in Electric Power Systems: A Generalized Approach", Springer, New York, 1999.

[Mont00] A. Monticelli, "Electric power system state estimation", Proceedings of IEEE, vol. 88, no. 2, pp. 262–282, Fevereiro 2000.

[Mori91] H. Mori, S. Tsuzuki, "A fast method for topological observability analysis using a minimum spanning tree technique", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 6, no. 2, pp. 491–500, Maio 1991.

[Nuce91] R. R. Nucera, M. L. Gilles, "Observability analysis: A new topological algorithm", IEEE Transactions on Power Systems, vol.16, No. 2, pp. 466-475, Maio 1991.

[Nye14] R. P. Nye, "Understanding and managing the credit rating agencies", Euromoney Institutional Investor PLC, London, UK, 2014.

[Phad08] A. G. Phadke, J. S. Thorp, "Synchronized phasor measurements and their applications", Springer-Verlag, New York, 2008.

[Prin10] J. C. Príncipe, "Information Theoretic Learning – Reyni Entropy and Kernel Perspectives", Springer Publishing Company, New York, 2010.

[Prun10] R. E. Pruneda, C. Solares and A. J. Conejo, E. Castillo, "An efficient algebraic approach to observability analysis in state estimation", Electric Power Systems Research. vol. 80, no. 3, pp. 277–286. Março 2010.

[Qiao13] Qiao Li; Tao Cui; Yang Weng; R. Negi; F. Franchetti; M. D. Ilic, "An Information-Theoretic Approach to PMU Placement in Electric Power Systems," in IEEE Transactions on Smart Grid, vol.4, no.1, pp.446-456, March 2013.

[Quin82] V. H. Quintana, A. Simões Costa, A. Mandel, "Power system observability using a direct graph-theoretic approach," IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 101, no. 3, pp. 617-626, Março 1982.

[Rice08] M. J. Rice and G. T. Heydt, "The measurement outage table and state estimation," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 23, no. 2, pp. 353–360, Maio 2008.

[Roch10] H. R. O. Rocha, "Construção de Planos de Medição para a Estimação de Estado em Sistemas de Potência via Metaheurísticas", Tese de Doutorado, Universidade Federal Fluminense, PGC/UFF, Novembro 2010.

[Ross12] S. M. Ross, "Simulation", 5.ed., Elsevier Academic Press, San Diego CA, 2012.

[RTS96] Reliability Test System Task Force, "The reliability test system - 1996," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 14, no. 3, pp. 1010-1020, Agosto 1999.

[Rubi08] K. Y. Rubinstein, D. P. Kroese, "Simulation and the Monte Carlo Method", 2.ed. Nova Jersey, John Wiley & Sons, 2008.

[Schw70] F. C. Schweppe, J. Wildes, "Power system static state estimation, part I: Exact model", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, no. 1, pp. 120–125, Janeiro 1970.

[Shan48] C. E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communication", Bell System Technical Journal, vol. 27, no. 3, pp. 379–423, Outubro 1948.

[Simo90] A. Simões Costa, T. S. Piazza, A. Mandel, "Qualitative methods to solve qualitative problems in power system state estimation", IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 5, pp. 941-949, Agosto 1990.

[Simo02] A. Simões Costa, E. M. Lourenco, K. A. Clements, "Power system topological observability analysis including switching branches", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 17, no. 2, pp. 250–256, Maio 2002.

[Sing09] R. Singh, B. C. Pal, R. B. Vinter, "Measurement Placement in Distribution System State Estimation", IEEE Transactions on Power Systems, vol.24, no.2, pp.668-675, Maio 2009.

[Sing12] R. Singh, B. C. Pal, R. A. Jabr, R. B. Vinter, "Meter placement for distribution system state estimation: An ordinal optimization approach", IEEE Power and Energy Society General Meeting, 2012, vol. 1, no.1, pp. 22-26, July 2012.

[Slut87] I. W. Slutsker, J. M. Scudder, "Network Observability Analysis through Measurement Jacobian Matrix Reduction", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 2, no.2, pp. 331-336, Maio 1987.

[Sola09] C. Solares, A. J. Conejo, E. Castillo, R. E. Pruneda. "A binary-arithmetic approach to observability checking in state estimation", IET Generation, Transmission and Distribution, vol. 3, no. 4, pp. 336–345. Abril 2009.

[Sou12] Kin Cheong Sou; H. Sandberg,; K. H. Johansson,; , "Computing Critical k-Tuples in Power Networks", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 27, no.3, pp.1511-1520, Agosto. 2012.

[Souz05] J. C. S. Souza, M. B. Do Coutto Filho, M. Th. Schilling, Ch. Capdeville, "Optimal metering systems for monitoring power networks under multiple topological scenarios", IEEE Transactions on Power Systems, vol. 20, no.4, pp.1700-1708, Novembro 2005.

[Van85] T. Van Cutsem, M. Ribbens-Pavella, and L. Mili, "Bad data identification methods in power system state estimation-a comparative study," IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-104, no. 11, pp. 3037-3049, Novembro 1985.

[Wash99] R. D. Christie, "Power systems test case archive", University of Washington, College of Engineering, Agosto. 1999. Disponível em <<http://www.ee.washington.edu/research/pstca>>. Acesso em 16 de Janeiro de 2016.

[Wu90] F. F. Wu, "Power system state estimation: a survey", Electrical Power & Energy System, vol. 12, no. 2, pp. 80-87, Janeiro 1990.

[Xiao14] Xiao Li, A. Scaglione, Tsung-Hui Chang, "A Framework for Phasor Measurement Placement in Hybrid State Estimation Via Gauss–Newton", IEEE Transactions on Power Systems, vol.29, no.2, pp.824-832, Março 2014.