UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

MARCOS SANGES DO AMARAL

## ABORDAGEM SINTONIZADA DE GABOR PARA A MODELAGEM DE NEURÔNIOS DO CÓRTEX VISUAL PRIMÁRIO

NITERÓI 2017 UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

#### MARCOS SANGES DO AMARAL

## ABORDAGEM SINTONIZADA DE GABOR PARA A MODELAGEM DE NEURÔNIOS DO CÓRTEX VISUAL PRIMÁRIO

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doutor em Computação. Área de concentração: Computação Visual

Orientador: Dr. JOSÉ RICARDO DE ALMEIDA TORREÃO

> NITERÓI 2017

#### Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca da Escola de Engenharia e Instituto de Computação da UFF

A485 Amaral, Marcos Sanges do Abordagem sintonizada de Gabor para a modelagem de neurônios do córtex visual primário / Marcos Sanges do Amaral. – Niterói, RJ : [s.n.], 2017. 146 f.
Tese (Doutorado em Computação) - Universidade Federal Fluminense, 2017. Orientador: José Ricardo de Almeida Torreão.
1. Equação de Schrödinger. 2. Córtex visual. 3. Modelagem computacional. I. Título.

#### MARCOS SANGES DO AMARAL

#### ABORDAGEM SINTONIZADA DE GABOR PARA A MODELAGEM DE NEURÔNIOS DO CÓRTEX VISUAL PRIMÁRIO

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doutor em Computação. Área de concentração: Computação Visual

Aprovada em agosto de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Jen ( N-. 1h-Prof. José Ricardo de Almeida Torreão - Orientador, UFF 6114 Prof. Jorge Stolfi, UNICAMP Prof. Roberto Marcondes César, USP

Prof. Luis Alfredo Vidal de Carvalho, UFRJ

Vulue Danlais undino/

Prof. Anselmo Antunes Montenegro, UFF

Prof. Leandro Augusto Frata Fernandes, UFF

Niterói 2017

Dedico este trabalho aos meus país Herval Lemos do Amaral (in memoriam) e Telma Sanges do Amaral.

### Agradecimentos

Agradeço a Deus por mais uma oportunidade.

Ao meu orientador Prof. José Torreão por sua dedicação.

Aos Professores Loana Tito, Aura Conci, Fábio Protti, Vanessa Braganholo, Helena Leitão, Sílvia Victer e João Fernandes.

Aos membros da banca Luís Alfredo, Roberto Marcondes, Stolfi, Anselmo Montenegro e Leandro Fernandes.

À equipe da secretaria da Pós-Graduação Hélio, Teresa e Viviane.

Aos colegas de classe Sandra Coelho, Marcos Quinet, Toni Pacheco, Elise Cieza, Marcel Shenny, Carlos Muniz, Lidson Jacob e Gabriel Gazolla.

Aos meus filhos Renan e Luana, à minha esposa Bárbara, ao meu irmão Herval Jr., à minha cunhada Tatiana, à minha sobrinha Millena.

Aos meus tios, primos e sobrinhos, a todos meus familiares e amigos.

Aos colegas e ex-colegas de trabalho, principalmente ao Aurélio Roscoe, à Flávia Agostini, à Eni Conde e à Mônica Pardellas.

À Minnie Klinger.

A todos que acreditaram e contribuíram de alguma forma para este trabalho.

### Resumo

As funções sintonizadas de Gabor são senóides moduladas por Gaussianas, cujos parâmetros ficam determinados por um dado sinal - o sinal de sintonia -, para o qual as funções sintonizadas fornecem uma representação exata. Tais funções foram originalmente propostas como núcleos de uma variante da transformada de Gabor, que se mostrou capaz de identificar com precisão eventos espaciais e espectrais do sinal analisado, mesmo em situações em que a abordagem de Gabor tradicional falha. No presente trabalho, nós propomos e analisamos um modelo, baseado na representação sintonizada, para os campos receptivos e as respostas de células do córtex visual primário (V1). Mais especificamente, os campos receptivos das células de V1 são modelados por funções sintonizadas do domínio espacial (células complexas) ou espectral (células simples), enquanto as respectivas respostas são fornecidas pelas transformadas sintonizadas correspondentes. Este modelo permite replicar as respostas neurofisiológicas de ambos os tipos de células a estímulospadrão, além de reproduzir a variação dos seus campos receptivos de acordo com a classe do estímulo considerado. Em seguida, nós introduzimos uma versão generalizada dos campos receptivos sintonizados, com base em funções de codificação das derivadas, em qualquer ordem, do sinal de sintonia, obtidas pela incorporação de polinômios de Hermite às funções sintonizadas originais. A partir daí, nós definimos as respostas das classes de células que nós denotamos como da *classe simples* e da *classe complexa*, demonstramos que elas obedecem equações de Schrödinger e, com base nisto, propomos uma interpretação quantum-like para a abordagem sintonizada.

**Palavras-chave**: Funções de Gabor, Córtex Visual Primário, Equação de Schrödinger, Interpretação *Quantum-Like*.

### Abstract

The signal-tuned Gabor functions are Gaussian-modulated sinusoids whose parameters are defined by a given signal - the tuning signal -, of which the signal-tuned functions yield an exact representation. Such functions were originally introduced as kernels of a variant Gabor transform which has proven able to accurately detect the spatial and spectral signatures of the analyzed signal, even when the traditional Gabor approach fails. Here we propose and analyze a model, based on the signal-tuned framework, for the receptive fields and responses of cells in the primary visual cortex (V1). Specifically, the receptive fields of V1 cells are modeled as signal-tuned functions in the spatial (complex cells) or spectral (simple cells) domains, while the respective responses are given by the corresponding signal-tuned transforms. Such model replicates the neurophysiological responses of both cell types to standard stimuli, while also emulating receptive-field dependence on the stimulus set, as experimentally observed. Next, we introduce an extended version of the signal-tuned receptive fields, based on coding functions of the derivatives, in any order, of the tuning signal, obtained by incorporating Hermite polynomials to the original signaltuned functions. We then define the responses of the simple-class and complex-class signal-tuned cells, show that they obey Shrödinger equations, and, based on this, propose a quantum-like interpretation of the signal-tuned framework.

**Keywords**: Gabor Functions, Primary Visual Cortex, Schrödinger Equation, Quantum-Like Interpretation.

# Lista de Figuras

| 2.1 | O caminho visual se inicia com os fotorreceptores da retina, localizada na   |    |
|-----|--|----|
|     | parte posterior do globo ocular. Além dos fotorreceptores (cones e basto-  |    |
|     | netes), na retina se encontram outros tipos de células, como as bipolares, e   |    |
|     | as ganglionares, cujos axônios formam o eixo óptico. Este faz comunicação  |    |
|     | $\operatorname{com}$ o núcleo geniculado lateral (NGL) de onde as radiações ópticas levam  |    |
|     | a informação ao córtex visual primário (V1), onde se encontram as células  |    |
|     | simples e complexas. (Figura adaptada de [25])   | 7  |
| 2.2 | O campo receptivo pode ser definido como a região do campo visual onde   |    |
|     | estímulos luminosos evocam respostas da célula. a) Um campo receptivo  |    |
|     | centro-periferia, como observado nas células da retina e do NGL, pode  |    |
|     | ser dos tipos centro- $on$ ou centro- $off$ . Como mostrado em b), uma célula  |    |
|     | $\operatorname{centro} \textit{on} \operatorname{responde} \operatorname{com} \operatorname{excita}_{\tilde{a}\tilde{a}\tilde{a}\tilde{a}\tilde{a}\tilde{a}\tilde{a}\tilde{a}\tilde{a}a$ |    |
|     | central, e com inibição se a sua periferia é iluminada. O oposto ocorre com  |    |
|     | a célula do tipo centro- $off$ . (Figura em b) adaptada de [25]) $\ldots \ldots \ldots$  | 8  |
| 2.3 | Em cima e no meio, campos receptivos experimentais de células simples,   |    |
|     | e sua aproximação por funções de Gabor (adaptado de [13]). Embaixo,  |    |
|     | imagem de uma função de Gabor com dois lobos inibitórios flanqueando a   |    |
|     | região excitatória central   | 9  |
| 2.4 | Modelo da energia para células complexas. A primeira etapa é a filtragem   |    |
|     | linear por uma série de campos receptivos de células simples (neste caso,  |    |
|     | dois campos com diferentes fases). Os quadrados dos resultados são então   |    |
|     | somados, fornecendo a resposta da célula complexa. (Figura adaptada de [2])  | 10 |

- a) Entradas teste: Estímulo de Hartley (esquerda) e imagem de ruído es-2.5parso (direita). As entradas originais (tamanho  $96 \times 96$ , intensidades de 0 a 255) aparecem no topo, e suas versões branqueadas, embaixo. b) Campos receptivos simples (topo) e campos receptivos complexos (embaixo) gerados sobre uma janela  $30 \times 30$ , a partir das entradas branqueadas em (a). Os campos correspondentes à imagem Hartley são mostrados à esquerda, os gerados pela imagem de ruído esparso aparecem à direita. Os campos receptivos simples e complexos foram calculados através das Eqs. (2.36) e (2.37), respectivamente, com parâmetros (x,y) = (25,66) e  $k_s$  = 0.0055, com  $k_c$ determinado pela Eq. (2.41). As frequências usadas foram  $(\omega_x, \omega_y) = (1, 2)$ para a célula simples, e (2,2) para a célula complexa. c) Outros exemplos de campos gerados a partir das mesmas entradas: em cima, campos simples obtidos com (x, y) = (24, 64) e  $(\omega_x, \omega_y) = (3, 2)$ ; embaixo, campos complexos obtidos com (x, y) = (24, 64) e  $(\omega_x, \omega_y) = (1, 2)$ . Assim como anteriormente, usou-se  $k_s = 0.0055$ , com  $k_c$  obtido através da Eq. (2.41). 21
- 2.7 a) Em cima: Imagem natural da base de dados de van Hateren (esquerda) e sua versão branqueada (direita). As imagens são 128 × 192 pixels, e suas intensidades variam de 0 a 255. Embaixo: Mapas das respostas máximas obtidas com as células simples (esquerda) e as complexas (direita). As respostas foram geradas sobre janelas 5 × 5 aplicadas sobre as imagens branqueadas. As saídas são apresentadas com 124 × 188 pixels, em razão de efeitos de borda. b) O mesmo que em (a), para uma segunda imagem. 24

| 3.1 | Modelo para o Shape From Shading biologicamente inspirado. A seta mais     |
|-----|--|
|     | à esquerda corresponderia à saída dos fotorreceptores, e a seta mais à di- |
|     | reita, a uma estimativa do mapa de profundidades da cena                   |

- 3.2 Sistema linear/não-linear para o SFS, como introduzido em [57]: (a) Uma janela de tamanho e orientação fixos é centrada em cada pixel da imagem, e uma medida linear,  $L_{\omega}^{\theta}$ , é obtida filtrando-se as intensidades da janela por uma função de Gabor complexa, representada na figura por  $D_{\omega}(x)$ . No estágio não-linear, o módulo de  $L_{\omega}^{\theta}$  é submetido a uma série de transformações modeladas nas funções de sintonia dos neurônios binoculares do córtex visual, representadas em (b). A combinação dos valores obtidos para as diversas orientações e frequências fornece a estimativa local de profundidade. 31

29

| 3.7  | Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de en-<br>trada: Mozart3; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado.<br>c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado,<br>iluminação (0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as<br>profundidades codificadas pelos níveis de cinza  | 42         |
|------|--|------------|
| 3.8  | Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada:<br>Vaso Sintético1; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado.<br>c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado,<br>iluminação (0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as<br>profundidades codificadas pelos níveis de cinza  | 43         |
| 3.9  | Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada:<br>Vaso Sintético2; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado.<br>c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado,<br>iluminação (0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as<br>profundidades codificadas pelos níveis de cinza  | 44         |
| 3.10 | Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada:<br>Vaso Sintético3; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado.<br>c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado,<br>iluminação (0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as<br>profundidades codificadas pelos níveis de cinza  | 45         |
| 3.11 | Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada:<br>Face; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem<br>obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação<br>(0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades<br>codificadas pelos níveis de cinza   | 46         |
| 3.12 | Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada:<br>Melina Perfil; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado.<br>c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado,<br>iluminação (0; 0,5; 0,5). (d) representação da superfície estimada, com as<br>profundidades codificadas pelos níveis de cinza  | $\Delta 7$ |
|      | r Porte Porte and Comparison and Comparison of the Comparison of t | ÷ •        |

| 3.13 | <ul> <li>B Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada:</li> <li>Melina Frontal; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado.</li> <li>c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado,</li> <li>iluminação (1; 0,5; 1). (d) representação da superfície estimada, com as</li> <li>profundidades codificadas pelos níveis de cinza</li></ul> | 48 |
|------|---|----|
| 3.14 | 4 Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada:<br>Lena; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem<br>obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação<br>(0, 1, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades<br>codificadas pelos níveis de cinza  | 49 |
| 3.1  | <ul> <li>5 Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: Neiva; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado.</li> <li>c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (1, 1, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.</li> </ul>                                     | 50 |
| 3.10 | <ul> <li>6 Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada:</li> <li>base Yale 11; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado.</li> <li>c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado,</li> <li>iluminação (0,5; 0,5; 1). (d) representação da superfície estimada, com as</li> <li>profundidades codificadas pelos níveis de cinza</li></ul> | 51 |
| 3.1' | <ul> <li>7 Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada:</li> <li>base Yale 19; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado.</li> <li>c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado,</li> <li>iluminação (0,5; 0,5; 1). (d) representação da superfície estimada, com as</li> <li>profundidades codificadas pelos níveis de cinza</li></ul> | 52 |
| 3.18 | <ul> <li>8 Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada:</li> <li>base Yale 20; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado.</li> <li>c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado,</li> <li>iluminação (1, 1, 1). (d) representação da superfície estimada, com as</li> </ul>   | 59 |
|      | prorundidades codificadas pelos filveis de chiza  | 93 |

| Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada:<br>Storm Trooper; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado.<br>c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado,<br>iluminação (0,5; 0,5; 1). (d) representação da superfície estimada, com as<br>profundidades codificadas pelos níveis de cinza                                | 54   |
|--|--|
| No modelo sintonizado, a dinâmica da resposta da célula complexa com pa-<br>râmetro de $delay \tau_0$ fica definida entre $t - \tau_0$ e $t$ pela equação de Schrödinger,<br>Eq. 4.33. A soma ponderada de respostas de onda plana com diferentes<br>energias define o campo receptivo da célula, e a chegada do novo estímulo<br>em $t$ determina a probabilidade de emissão de espículas | 66   |
| Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Simples</i> , Grade Senoidal em con-<br>trafase. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No meio, as<br>intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 0$ , $\omega = 26$ , $x = 208$ , além<br>de $n = 0$ . Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para<br>várias repetições do experimento                          | 76   |
| Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig.<br>4.2   | 76   |
| Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Simples</i> , Grade Senoidal em con-<br>trafase. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No meio, as<br>intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 10$ , $\omega = 26$ , $x = 208$ e<br>n = 1. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias<br>repetições do experimento                                    | 77   |
| Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Simples</i> , Grade Senoidal em con-<br>trafase. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No meio, as<br>intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 20$ , $\omega = 26$ , $x = 208$ e<br>n = 2. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias<br>repetições do experimento                                    | 77   |
| Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Complexo</i> , Grade Senoidal em Con-<br>trafase. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No meio, as<br>intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 0$ , $\omega = 26$ , $x = 208$ e<br>n = 0. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias   |  |
|  | Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada:<br>Storm Trooper; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado,<br>iluminação (0,5; 0,5; 1). (d) representação da superfície estimada, com as<br>profundidades codificadas pelos níveis de cinza |

| 4.7  | Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig.<br>4.6   | 78 |
|------|--|----|
| 4.8  | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Complexo</i> , Grade Senoidal em Con-<br>trafase. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No meio, as<br>intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 10$ , $\omega = 26$ , $x = 208$ e<br>n = 1. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias<br>repetições do experimento       | 79 |
| 4.9  | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Complexo</i> , Grade Senoidal em Con-<br>trafase. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No meio, as<br>intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 20$ , $\omega = 26$ , $x = 208$ e<br>n = 2. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias<br>repetições do experimento       | 79 |
| 4.10 | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Simples</i> , Grade Senoidal em Movi-<br>mento Simples. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No meio,<br>as intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 0$ , $\omega = 26$ , $x = 208$ e<br>n = 0. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias<br>repetições do experimento  | 80 |
| 4.11 | Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig.<br>4.10  | 80 |
| 4.12 | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Simples</i> , Grade Senoidal em Movi-<br>mento Simples. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No meio,<br>as intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 10$ , $\omega = 26$ , $x = 208$ e<br>n = 1. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias<br>repetições do experimento | 81 |
| 4.13 | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Simples</i> , Grade Senoidal em Movi-<br>mento Simples. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No meio,<br>as intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 20$ , $\omega = 26$ , $x = 208$ e<br>n = 2. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias                              |    |
|      | repetições do experimento  | 81 |

| 4.14 | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Complexo</i> , Grade Senoidal em Movi-<br>mento Simples. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 204$ . No meio,<br>as intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 0$ , $\omega = 26$ , $x = 208$ e<br>n = 0. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias<br>repetições do experimento  | 89 |
|------|---|----|
| 4.15 | Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig.<br>4.14.  | 82 |
| 4.16 | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Complexo</i> , Grade Senoidal em Movi-<br>mento Simples. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 204$ . No meio,<br>as intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 10$ , $\omega = 26$ , $x = 208$ e<br>n = 1. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias<br>repetições do experimento | 83 |
| 4.17 | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Complexo</i> , Grade Senoidal em Movi-<br>mento Simples. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 204$ . No meio,<br>as intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 20$ , $\omega = 26$ , $x = 208$ e<br>n = 2. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias<br>repetições do experimento | 83 |
| 4.18 | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Simples</i> , Grade Senoidal em Movi-<br>mento Composta. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No meio,<br>as intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 0$ , $\omega = 29$ , $x = 208$ e<br>n = 0. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias<br>repetições do experimento  | 84 |
| 4.19 | Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig.<br>4.18   | 84 |
| 4.20 | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Simples</i> , Grade Senoidal em Movi-<br>mento Composta. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No meio,<br>as intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 10$ , $\omega = 29$ , $x = 208$ e<br>n = 1. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias                              |    |
|      | repetições do experimento   | 85 |

| 4.21 | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Simples</i> , Grade Senoidal em Movi-<br>mento Composta. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No meio,<br>as intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 20$ , $\omega = 29$ , $x = 208$ e<br>n = 2. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias<br>repetições do experimento  | 85 |
|------|--|----|
| 4.22 | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Complexo</i> , Grade Senoidal em Mo-<br>vimento Composta. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No<br>meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 0$ , $\omega = 29$ , $x = 208$ e $n = 0$ . Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para<br>várias repetições do experimento  | 86 |
| 4.23 | Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig.<br>4.22  | 86 |
| 4.24 | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Complexo</i> , Grade Senoidal em Movimento Composta. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 10$ , $\omega = 29$ , $x = 208$ e $n = 1$ . Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento            | 87 |
| 4.25 | Geração de espículas. Célula do <i>Tipo Complexo</i> , Grade Senoidal em Mo-<br>vimento Composta. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 208$ . No<br>meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo, $\tau = 20$ , $\omega = 29$ , $x = 208$ e $n = 2$ . Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para<br>várias repetições do experimento | 87 |
| 4.26 | Estímulos de entrada. No topo, o instante inicial. Os demais representam os instantes subsequentes de um vídeo. Retirado de http://vasc.ri.cmu.edu/idb/html/motion/UMassMotion/index.html, em 2016   | 88 |
| 4.27 | Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal<br>na posição $x = 252$ . No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as<br>espículas geradas com $x = 252$ e $\tau = 3$ ; usando a linha (225) do filme como<br>estímulo   | 89 |
| 4.28 | Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal<br>na posição $x = 252$ . No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as<br>espículas geradas com $x = 252$ e $\tau = 3$ ; usando a linha (465) do filme como<br>estímulo.  | 89 |
|      |  | 00 |

| 4.29 | Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal<br>na posição $x = 252$ . No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as<br>espículas geradas com $x = 252$ e $\tau = 3$ ; usando a linha (400) do filme como<br>estímulo  | 90 |
|------|---|----|
| 4.30 | Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal<br>na posição $x = 252$ . No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as<br>espículas geradas com $x = 252$ e $\tau = 3$ ; usando a linha (200) do filme como<br>estímulo  | 90 |
| 4.31 | Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal<br>na posição $x = 252$ . No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as<br>espículas geradas com $x = 252$ e $\tau = 3$ ; usando a linha (170) do filme como<br>estímulo  | 91 |
| 4.32 | Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal<br>na posição $x = 252$ . No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as<br>espículas geradas com $x = 252$ e $\tau = 3$ ; usando a linha (205) do filme como<br>estímulo  | 91 |
| 4.33 | Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal na posição $x = 252$ . No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as espículas geradas com $x = 252$ e $\tau = 3$ ; usando a linha (430) como estímulo.   | 92 |
| 4.34 | Geração de espículas usando a célula complexa. Em cima, o sinal temporal,<br>correspondente à linha 225 de um vídeo, na posição $x = 252$ . No meio,<br>as intensidades de Poisson em relação ao tempo. Embaixo, as espículas<br>geradas em função do tempo, com $x = 252$ , $\omega = 3$ e $\tau = 4$  | 93 |
| 4.35 | Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig.<br>4.34   | 93 |
| 4.36 | Uma nova geração de espículas para a célula complexa, desta vez, usando<br>como estímulo uma outra linha (465) do mesmo vídeo. Parâmetros $\omega =$<br>3 e $\tau = 9$ . Em cima, o sinal temporal na posição $x = 252$ . No meio,<br>as intensidades de Poisson em relação ao tempo. Embaixo, as espículas<br>geradas em função do tempo, onde cada linha corresponde a uma de dezoito<br>iterações. | 94 |
|      | 3   | -  |

| 4.37 | Uma nova geração de espículas para a célula complexa, desta vez, usando como estímulo uma outra linha (400) do mesmo vídeo. Parâmetros $\omega =$ |    |
|------|---|----|
|      | 3 e $\tau$ = 3. Em cima, o sinal temporal na posição $x$ = 252. No meio,  |    |
|      | as intensidades de Poisson em relação ao tempo. Embaixo, as espículas   |    |
|      | geradas em função do tempo, onde cada linha corresponde a uma de dezoito $% \mathcal{A}$  |    |
|      | iterações   | 94 |
| 4.38 | Uma nova geração de espículas para a célula complexa, desta vez, usando   |    |
|      | como estímulo uma outra linha (200) do mesmo vídeo. Parâmetros $\omega=$  |    |
|      | 3 e $	au$ = 2. Em cima, o sinal temporal na posição $x$ = 252. No meio,   |    |
|      | as intensidades de Poisson em relação ao tempo. Embaixo, as espículas   |    |
|      | geradas em função do tempo.   | 95 |
| 4.39 | Uma nova geração de espículas para célula complexa, desta vez, usando   |    |
|      | como estímulo a linha (170) do mesmo vídeo. Parâmetros $\omega = 3$ e $\tau = 1$ .  |    |
|      | Em cima, o sinal temporal na posição $x = 170$ . No meio, as intensidades   |    |
|      | de Poisson em relação ao tempo. Embaixo, as espículas geradas em função   |    |
|      | do tempo  | 95 |
| 4.40 | Geração de espículas para a célula complexa, usando como estímulo a linha   |    |
|      | (205) do mesmo vídeo. Parâmetros $\omega$ = 3 e $	au$ = 4. Em cima, o sinal   |    |
|      | temporal na posição $x = 252$ . No meio, as intensidades de Poisson em  |    |
|      | relação ao tempo. Embaixo, as espículas geradas em função do tempo. $\ $  | 96 |
| 4.41 | Geração de espículas para a célula complexa, usando como estímulo a linha   |    |
|      | (205) do mesmo vídeo. Parâmetros $\omega = 1$ e $\tau = 4$ . Em cima, o sinal   |    |
|      | temporal na posição $x = 334$ . No meio, as intensidades de Poisson em  |    |
|      | relação ao tempo. Embaixo, as espículas geradas em função do tempo. $\ $  | 96 |
| 5.1  | Funções de resposta ao contraste para células sintonizadas complexas. Curva   |    |
|      | inferior, para frequência $\omega$ = 12. Curva superior, para frequência $\omega$ = 20  | 99 |

# Lista de Tabelas

| 3.1 | Imagens e parâmetros de reconstrução. Exceto quando informado na coluna    |    |
|-----|--|----|
|     | Observações,as imagens são de superfícies lambertianas e têm dimensão      |    |
|     | de 256 x 256 pixels. A tripla de números entre parênteses indica a direção |    |
|     | de iluminação, quando esta é conhecida. A imagem Mozart3 foi gerada        |    |
|     | com o modelo de Phong [39], combinando uma componente lambertiana          |    |
|     | e uma pequena (10%) componente quase-especular. As imagens Head1,          |    |
|     | Head2 [19], Face, Melina, Lena, Neiva, Yale11, Yale19, Yale20 e Storm      |    |
|     | Trooper foram capturadas sob iluminação desconhecida                       | 36 |
| 3.2 | Erro Médio de Profundidades %  | 36 |
| 3.3 | Erro Médio de Intensidades $\%$  | 37 |

## Sumário

| Intr | odução   | 1   |
|------|--|---|
| 1.1  | Modelagem de Campos Receptivos   | 2   |
|      | 1.1.1 Uma Aplicação: Shape From Shading Biologicamente Inspirado                           | 3   |
| 1.2  | Extensão da Abordagem Sintonizada  | 4   |
| Fun  | ções Sintonizadas de Gabor para a Modelagem de Células Corticais                           | 6   |
| 2.1  | Campos Receptivos  | 6   |
|      | 2.1.1 Campos Receptivos Corticais  | 6   |
| 2.2  | Funções Sintonizadas de Gabor  | 10  |
|      | 2.2.1 Funções Sintonizadas de Gabor: Versão 2D   | 13  |
| 2.3  | Modelagem de Campos Receptivos por Funções Sintonizadas de Gabor                           | 15  |
| 2.4  | Discussão  | 18  |
| 2.5  | Outras Considerações   | 24  |
| Apli | cação ao Shape From Shading  | 28  |
| 3.1  | Introdução   | 28  |
| 3.2  | Abordagem Bio-inspirada para o SFS   | 29  |
|      | 3.2.1 LN-SFS Original  | 29  |
|      | 3.2.2 LN-SFS Modificado  | 31  |
|      | 3.2.3 Módulo Retino-Geniculado   | 34  |
| 3.3  | Resultados Experimentais   | 35  |
|      | Intr<br>1.1<br>1.2<br>Fund<br>2.1<br>2.2<br>2.3<br>2.4<br>2.5<br>Apli<br>3.1<br>3.2<br>3.3 | Introdução         1.1       Modelagem de Campos Receptivos         1.1.1       Uma Aplicação: Shape From Shading Biologicamente Inspirado         1.2       Extensão da Abordagem Sintonizada         Funções Sintonizadas de Gabor para a Modelagem de Células Corticais         2.1       Campos Receptivos         2.1.1       Campos Receptivos Corticais         2.2       Funções Sintonizadas de Gabor         2.2.1       Funções Sintonizadas de Gabor: Versão 2D         2.3       Modelagem de Campos Receptivos por Funções Sintonizadas de Gabor         2.4       Discussão         2.5       Outras Considerações         3.1       Introdução         3.2       Abordagem Bio-inspirada para o SFS         3.2.1       LN-SFS Original         3.2.2       LN-SFS Modificado         3.2.3       Módulo Retino-Geniculado         3.3       Resultados Experimentais |

| 4.1 | Introdução   |   |  |  |  |  |  |  |  |
|-----|--|---|--|--|--|--|--|--|--|
| 4.2 | Abord  | gem Sintonizada de Gabor Revisitada   |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 4.2.1  | Célula Complexa   |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 4.2.2  | Célula Simples  |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 4.2.3  | Resposta da Célula Simples em Função de $x$ e $\tau$  |  |  |  |  |  |  |  |
| 4.3 | Introduzindo os Polinômios de Hermite                        |   |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 4.3.1  | Funções Sintonizadas da Primeira Forma  |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 4.3.2  | Modelagem Sintonizada para Células da <i>Classe Complexa</i> 62   |  |  |  |  |  |  |  |
|     |  | 4.3.2.1 Resposta Forçada  |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 4.3.3  | Resposta Natural  |  |  |  |  |  |  |  |
|     |  | 4.3.3.1 Relação entre a Resposta de Onda Plana e a Resposta<br>Forçada  |  |  |  |  |  |  |  |
|     |  | 4.3.3.2 Relação entre a Resposta Forçada e a Taxa de Emissão de<br>Spikes   |  |  |  |  |  |  |  |
|     |  | 4.3.3.3 Interpretação da Resposta Forçada   |  |  |  |  |  |  |  |
| 4.4 | Funçõ  | s Sintonizadas da Segunda Forma   |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 4.4.1 Modelagem Sintonizada para Células da $Classe Simples$ |   |  |  |  |  |  |  |  |
|     |  | 4.4.1.1 Resposta Forçada  |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 4.4.2  | Resposta Natural  |  |  |  |  |  |  |  |
|     |  | 4.4.2.1 Relação entre a Resposta de Onda Plana e a Resposta<br>Forçada  |  |  |  |  |  |  |  |
|     |  | 4.4.2.2Relação entre a Resposta Forçada e a Taxa de Emissão deSpikes  |  |  |  |  |  |  |  |
|     |  | 4.4.2.3 Interpretação da Resposta Forçada   |  |  |  |  |  |  |  |
| 4.5 | Exper  | mentos $\ldots \ldots .75$ |  |  |  |  |  |  |  |
|     | 4.5.1  | Geração de Espículas com Sinais Sintéticos  |  |  |  |  |  |  |  |
|     |  | 4.5.1.1 Grade Senoidal em Contrafase - Célula da <i>Classe Simples</i> 75   |  |  |  |  |  |  |  |

|    |        |          | 4.5.1.2   | Grade Senoidal em Contrafase - Célula da Classe Complexa                          | 78  |  |  |  |  |  |  |  |
|----|--------|----------|---|---|-----|--|--|--|--|--|--|--|
|    |        |          | 4.5.1.3   | Grade Senoidal em Movimento - Célula da Classe Simples                            | 80  |  |  |  |  |  |  |  |
|    |        |          | 4.5.1.4   | Grade Senoidal em Movimento - Célula da Classe Complexa                           | 82  |  |  |  |  |  |  |  |
|    |        |          | 4.5.1.5   | Grade Senoidal em Movimento Composta - Célula da <i>Classe</i><br>Simples         | 84  |  |  |  |  |  |  |  |
|    |        |          | 4.5.1.6   | Grade Senoidal em Movimento Composta - Célula da <i>Classe</i><br><i>Complexa</i> | 86  |  |  |  |  |  |  |  |
|    |        | 4.5.2    | Geração   | de Espículas com Sinais Reais   | 88  |  |  |  |  |  |  |  |
|    |        |          | 4.5.2.1   | Células Simples   | 89  |  |  |  |  |  |  |  |
|    |        |          | 4.5.2.2   | Células Complexas   | 93  |  |  |  |  |  |  |  |
| 5  | Con    | clusões  | e Traball   | nos Futuros   | 97  |  |  |  |  |  |  |  |
|    | 5.1    | Extens   | sões do N   | osso Trabalho   | 98  |  |  |  |  |  |  |  |
|    |        | 5.1.1    | Formula   | ção Baseada no Logaritmo do Estímulo  | 98  |  |  |  |  |  |  |  |
|    |        | 5.1.2    | Modelagem Sintonizada para Campos Receptivos Espaço-Cromáti             |   |     |  |  |  |  |  |  |  |
|    |        | 5.1.3    | Equações de Movimento das Respostas Sintonizadas e a Equação<br>do Cabo |   |     |  |  |  |  |  |  |  |
| Aŗ | oêndio | ce A – I | Respostas   | a Grades em Contrafase  | 105 |  |  |  |  |  |  |  |
|    | A.1    | Célula   | s Simples   |   | 105 |  |  |  |  |  |  |  |
|    | A.2    | Célula   | s Comple  | xas   | 106 |  |  |  |  |  |  |  |
| AĮ | oêndio | ce B – I | Respostas   | a grades senoidais em movimento   | 108 |  |  |  |  |  |  |  |
|    | B.1    | Célula   | s Simples   |   | 108 |  |  |  |  |  |  |  |
|    | B.2    | Célula   | s Comple  | xas   | 109 |  |  |  |  |  |  |  |
| AĮ | oêndio | ce C – I | Respostas   | a Fendas  | 112 |  |  |  |  |  |  |  |
|    | C.1    | Célula   | s Simples   |   | 112 |  |  |  |  |  |  |  |
|    | C.2    | Célula   | s Comple  | Xas   | 114 |  |  |  |  |  |  |  |

| Apêndice I | ) - | Obtenção | da | Equação | de | Movimento | para | a | Resposta | da | Célula | da |     |
|------------|-----|----------|----|---------|----|-----------|------|---|----------|----|--------|----|-----|
| Classe (   | Com | plexa    |    |         |    |           |      |   |          |    |        | 1  | 117 |

120

### Capítulo 1

### Introdução

A Representação de Gabor Sintonizada foi originalmente introduzida em [20, 56], onde se demonstrou que um sinal espacial pode ser expresso como a superposição de funções de Gabor (senóides moduladas por Gaussianas) cujos parâmetros são obtidos a partir da transformada de Fourier do sinal. No caso unidimensional, esta representação toma a forma <sup>1</sup>

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, e^{i\omega x} * \psi_{\omega}(x) \tag{1.1}$$

onde I(x) é um sinal de quadrado integrável, em geral complexo, definido sobre um domínio ilimitado, tal que a sua transformada de Fourier exista. Na equação acima, o asterisco denota uma convolução espacial, e a função  $\psi_{\omega}(x)$  é dada por

$$\psi_{\omega}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i[\omega x + \varphi(\omega)]} e^{-\frac{x^2}{2|I(\omega)|^2}}$$
(1.2)

com  $|\tilde{I}(\omega)| \in \varphi(\omega)$  denotando a magnitude e a fase da transformada de Fourier espacial de I(x):  $\tilde{I}(\omega) = |\tilde{I}(\omega)|e^{i\varphi(\omega)}$ .

O modelo sintonizado foi também estendido para a representação de sinais no domínio da frequência. Neste caso, as funções de representação são funções de Gabor na frequência, com parâmetros determinados pela transformada inversa do sinal codificado.

$$I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega (f_{\omega} * \psi_{\omega})(x)$$

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Conforme observado pelo Prof. Jorge Stolfi, uma notação menos ambígua seria

onde  $f_{\omega}(x) = e^{i\omega x}$ . Mantendo em mente que na Eq. 1.1 a convolução deve ser efetuada antes que um valor de x seja assumido, nós conservaremos aqui a notação naquela equação.

Especificamente, nós temos

$$\tilde{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, e^{-i\omega x} *_{\omega} \psi_x(\omega) \tag{1.3}$$

onde  $*_{\omega}$  denota uma convolução na frequência, e a função  $\psi_x(\omega)$  é dada por

$$\psi_x(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-i[\omega x - \phi(x)]} e^{-\frac{\omega^2}{16\pi^3 |I(x)|^2}}$$
(1.4)

com  $|I(x)| \in \phi(x)$  representando a magnitude e a fase de I(x) – ou seja, da transformada de Fourier inversa de  $\tilde{I}(\omega)$ :  $I(x) = |I(x)|e^{i\phi(x)}$ .

Em [64], as funções sintonizadas  $\psi_{\omega}(x)$  e  $\psi_x(\omega)$  foram utilizadas como núcleos de transformadas de Gabor, definindo assim as transformadas de Gabor sintonizadas (TGS). Nestas, um sinal dado — espacial ou espectral — é analisado por funções de Gabor associadas à sua própria representação, o que resulta em certas propriedades analíticas semelhantes às da transformada de Wigner [11], considerada teoricamente ideal para a análise de sinais.

A transformada de Gabor sintonizada baseada nas funções  $\psi_{\omega}(x)$  fica definida como

$$T_{\omega}(x,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i[\omega\xi + \varphi(\omega)]} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{2|\bar{I}(\omega)|^2}} I(\xi) d\xi$$
(1.5)

enquanto a baseada nas funções  $\psi_x(\omega)$  toma a forma

$$T_x(x,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i[\Omega x - \phi(x)]} e^{-\frac{(\Omega - \omega)^2}{16\pi^3 |I(x)|^2}} \tilde{I}(\Omega) d\Omega$$
(1.6)

Conforme demonstrado em [61], estas duas versões da TGS são capazes de detectar com grande precisão os eventos espaciais e espectrais dos sinais analisados, mostrando-se, em certos casos, bastante superiores a abordagens alternativas, como a transformada de Gabor tradicional ou a transformada S [49].

### 1.1 Modelagem de Campos Receptivos

Em [64], foi sugerido que as funções de Gabor sintonizadas poderiam ser utilizadas para representar os campos receptivos de células do córtex visual. O campo receptivo de um neurônio visual informa em que região do espaço um dado estímulo irá influenciar a resposta do neurônio, e como se dará esta influência. Ao longo do chamado *caminho visual* – que segue desde os fotorreceptores da retina, passando pelo núcleo geniculado lateral (NGL), até o córtex (ver a Fig. 2.1 do Capítulo 2) – encontram-se campos receptivos com diferentes configurações, sendo que o córtex visual primário, também conhecido como V1, costuma ser descrito como "uma espécie de banco de filtros de Gabor" [36] -, devido ao fato de que os dois principais tipos de células ali encontrados, as células simples e as células complexas, têm os seus campos receptivos modelados por funções de Gabor.

Originalmente, acreditava-se que os campos receptivos atuassem como filtros espaçotemporais fixos, mas as evidências foram se acumulando de que eles se comportam, na verdade, como estruturas dinâmicas, altamente dependentes do estímulo [4, 6, 14]. Por outro lado, as funções de Gabor sintonizadas incorporam elas também um caráter de dependência do sinal, já que se configuram de acordo com a função de sintonia que elas representam. Isto levou à hipótese de que as funções  $\psi_{\omega}(x) \in \psi_x(\omega)$ , apresentadas acima, poderiam servir como modelos para os campos receptivos dependentes do estímulo, identificados em V1. Em [64], no entanto, não se procedeu a uma análise de tal hipótese, o que se tornou o principal objetivo do nosso trabalho.

Conforme reportado no Capítulo 2, nós conseguimos demonstrar que, modelando-se o campo receptivo das células corticais simples por funções de Gabor sintonizadas semelhantes à  $\psi_x(\omega)$ , e a resposta de tais células por uma expressão semelhante à respectiva transformada sintonizada  $T_x$ , é possível reproduzir as propriedades dessas células quando testadas com estímulos-padrão, como grades senoidais e fendas retangulares [16,34,35,42]. Do mesmo modo, os campos receptivos e as respostas das células complexas podem ser modelados pela função sintonizada  $\psi_{\omega}(x)$  e pela transformada sintonizada  $T_{\omega}$ , dessa forma também replicando as propriedades neurofisiológicas de tais células quando testadas com estímulos-padrão. Além disso, a modelagem sintonizada permite emular o comportamento dependente do estímulo dos campos receptivos de ambos os tipos de células, revelado por estudos recentes [66].

#### 1.1.1 Uma Aplicação: *Shape From Shading* Biologicamente Inspirado

Como uma aplicação do modelo sintonizado para as células do córtex visual, nós propomos e avaliamos uma abordagem biologicamente motivada para o processo de estimação de forma conhecido como *shape from shading* (SFS). O SFS é uma técnica com uma longa história na visão computacional. O seu objetivo é recuperar o mapa de profundidades de uma cena a partir do padrão de irradiância registrado numa única imagem da mesma [24]. Diversas abordagens já foram sugeridas para o SFS [17,67], mas poucas tentativas foram feitas para desenvolver soluções biologicamente plausíveis para o problema [30,38], e a base neurofisiológica do processo ainda é desconhecida. A proposta biologicamente inspirada que nós estudamos se baseia na abordagem linear/não-linear para o shape from shading (LN-SFS) introduzida em [57].

O chamado modelo linear/não-linear é frequentemente utilizado para descrever as respostas dos neurônios visuais: o sinal de entrada passa por um filtro linear seguido por uma transformação não-linear, e isto fornece a taxa média de resposta do neurônio [26]. Em [57], este modelo foi empregado para modelar o SFS: a imagem de entrada é filtrada localmente por funções de Gabor, e depois submetida a transformações baseadas nas chamadas funções de sintonia dos neurônios corticais binoculares [41], o resultado fornecendo uma estimativa da profundidade local. Dessa forma, obtém-se uma implementação do SFS até certo ponto consistente com os mecanismos biológicos da estereoscopia.

Na modificação do LN-SFS proposta aqui, o ponto de partida foi a substituição da etapa linear do algoritmo pelo equivalente à resposta de Gabor sintonizada de uma célula simples. Nós incorporamos também à nossa abordagem um modelo simplificado do processamento efetuado pelos estágios pré-corticais do caminho visual (retina [7] e NGL [12]), introduzindo a equalização e o branqueamento — i.e., a equalização em frequência — da imagem de entrada. Conforme demonstrado no Capítulo 3, isto nos proporciona ganhos relevantes de qualidade, relativamente aos resultados obtidos com a abordagem do LN-SFS original.

#### 1.2 Extensão da Abordagem Sintonizada

Enquanto o Capítulo 2 apresenta o modelo sintonizado do córtex V1 conforme originalmente introduzido na referência [60], o Capítulo 4 propõe uma extensão daquela abordagem que incorpora desenvolvimentos posteriores, sumariados a seguir:

i) Em [54], a equação de movimento obedecida pela resposta da célula complexa unidimensional foi derivada, e demonstrada equivalente à equação de Schrödinger para um sistema quântico de massa imaginária e potencial complexo, ambos uniformes mas dependentes do tempo. Conforme também demonstrado em [54], as respostas naturais do sistema — correspondentes às funções de onda da equação de Schrödinger — assumem duas formas: uma baseada na onda plana, e uma baseada na função de Airy [62], a primeira prestando-se para a modelagem das respostas neuronais graduais — que decaem rapidamente —, e a segunda prestando-se, sob certas condições, à modelagem das respostas propagadas — isto é, dos potenciais de ação (espículas ou spikes), capazes de propagação por longas distâncias.

ii) Posteriormente, em [55], sugeriu-se que a abordagem sintonizada proporciona uma interpretação quantum-like para a geração das respostas neuronais, uma vez que, quando a resposta de onda plana (função de onda) é considerada como uma amplitude de probabilidade, em consonância com os postulados da física quântica, o seu módulo quadrado pode ser interpretado como uma probabilidade de geração de espículas consistente com as observações experimentais.

No Capítulo 4, estendendo os resultados acima, nós propomos uma versão generalizada para os campos receptivos sintonizados, com base em funções de codificação das derivadas *em qualquer ordem* do sinal de sintonia, que se obtêm pela incorporação dos polinômios de Hermite às funções de Gabor sintonizadas originais. A partir daí, nós obtemos as respostas das classes de células que nós denotamos como da classe simples e da classe complexa que incluem as células simples e complexas como casos particulares –, derivando também as respectivas equações de movimento e propondo a interpretação quantum-like das suas soluções. O nosso estudo da abordagem sintonizada expandida demonstra que as células da *classe simples* fornecem respostas qualitativamente semelhantes às das células simples, o mesmo se passando com as respostas das células da *classe complexa* em relação às das células complexas – ou seja, as respostas neurofisiológicas das células corticais, quando submetidas a estímulos-padrão como grades contrafase ou em movimento, mostram-se compatíveis com as fornecidas pelo nosso modelo sintonizado expandido. Um resultado significativo da extensão da interpretação quantum-like às células simples -e, de forma mais geral, às da *classe simples* – é o fato de que desta resulta, naturalmente, a retificação da resposta. Esta propriedade se mostra de acordo com as observações experimentais, e surge, no contexto da abordagem sintonizada, sem a necessidade de incorporação de um estágio de retificação a uma filtragem linear, como assumido pelos modelos correntes das células simples. De modo geral, os desenvolvimentos reportados aqui ressaltam o fato de que, na abordagem sintonizada, tanto para as células da *classe simples* como para as da *classe complexa*, a dinâmica subjacente à geração das respostas – representada pelas respectivas equações de movimento e suas respostas naturais — assume o papel preponderante, demonstrando-se, por exemplo, que os campos receptivos das células podem ser entendidos como resultando de uma combinação linear das suas respostas de onda plana.

### Capítulo 2

## Funções Sintonizadas de Gabor para a Modelagem de Células Corticais

### 2.1 Campos Receptivos

Campo receptivo é um conceito fundamental para a descrição de um neurônio visual, já que informa como uma porção qualquer do campo visual poderá afetar a resposta deste neurônio. Sabe-se, por exemplo, a partir dos estudos eletrofisiológicos, que células dos estágios iniciais do caminho visual (ver Fig. 2.1) possuem campos receptivos rotacionalmente simétricos com organização centro-periferia, de tal forma que, iluminando-se alternadamente o centro ou a periferia desses campos, obtêm-se efeitos antagônicos — ou seja, sempre que houver, em um caso, um aumento na taxa de disparo do neurônio (resposta ON), haverá uma diminuição dessa taxa (resposta OFF) no outro (Fig. 2.2). Uma teoria recente sugere que tais células teriam o efeito de branquear as entradas retinais, antes de transmiti-las ao córtex visual [5,12].

#### 2.1.1 Campos Receptivos Corticais

Os campos receptivos das células do córtex visual primário (V1, ou córtex estriado) foram mapeadas inicialmente na década de 1960 por Hubel e Wiesel, que identificaram uma ampla variedade de estruturas [26]. As principais dentre estas são as chamadas células corticais *simples* e células corticais *complexas*. Os campos receptivos das células simples apresentam-se organizados em sub-regiões excitatórias (ON) e inibitórias (OFF) alternadas, alinhando-se paralelamente. As células simples têm um efeito de filtragem quase-linear sobre o sinal de entrada, e o seu campo receptivo é em geral modelado por funções de Gabor (senóides moduladas por Gaussianas — ver Fig. 2.3) [31], cuja saída é



Figura 2.1: O caminho visual se inicia com os fotorreceptores da retina, localizada na parte posterior do globo ocular. Além dos fotorreceptores (cones e bastonetes), na retina se encontram outros tipos de células, como as bipolares, e as ganglionares, cujos axônios formam o eixo óptico. Este faz comunicação com o núcleo geniculado lateral (NGL) de onde as radiações ópticas levam a informação ao córtex visual primário (V1), onde se encontram as células simples e complexas. (Figura adaptada de [25])

posteriormente submetida a uma retificação de meia-onda, já que tais células apresentam resposta de repouso (na ausência de estímulo) desprezível. Assim, refletindo a organização do seu campo receptivo, a célula simples responde, preferencialmente, a entradas com a orientação e o posicionamento adequados. Por outro lado, o campo receptivo de uma célula complexa não apresenta domínios excitatórios e inibitórios bem definidos, parecendo haver uma sobreposição das sub-regiões ON e OFF. Além disso, a célula complexa apresenta uma não-linearidade maior do que a encontrada na célula simples. Sua resposta é, em geral, aproximada por uma combinação não-linear das respostas de um pequeno conjunto de células simples. O conhecido modelo da energia para as células complexas, por exemplo, considera a soma dos quadrados das saídas de duas ou mais células simples em deslocamento de fase ou de posição (ver Fig. 2.4) [2].

Essa breve descrição dos campos receptivos e das respostas das células simples e complexas serve como um esboço do modelo padrão que emergiu a partir do nosso conhecimento atual sobre o córtex estriado. No entanto, a visão do V1 "como uma espécie de banco de filtros de Gabor" [36] vem sendo contestada, ultimamente, por diversos resultados que evidenciam o fato de que os campos receptivos corticais se comportam como estruturas dinâmicas altamente dependentes do estímulo, e não como filtros espaço-temporais fixos [4, 6, 14]. Recentemente, por exemplo, C.-I. Yeh e seus colaboradores reportaram um trabalho que demonstra, de maneira convincente, como os campos receptivos de célu-



# Campos Receptivos Centro-Periferia

Figura 2.2: O campo receptivo pode ser definido como a região do campo visual onde estímulos luminosos evocam respostas da célula. a) Um campo receptivo centro-periferia, como observado nas células da retina e do NGL, pode ser dos tipos centro-*on* ou centro-*off.* Como mostrado em b), uma célula centro-*on* responde com excitação a um estímulo luminoso na sua sub-região central, e com inibição se a sua periferia é iluminada. O oposto ocorre com a célula do tipo centro-*off.* (Figura em b) adaptada de [25])

las nas camadas superficiais de V1 se modificam de acordo com o conjunto de estímulos considerado [66].

As funções de Gabor sintonizadas ao sinal foram introduzidas em [61] como os núcleos de uma transformada de Gabor modificada, cuja característica distintiva é a de se ajustar ao sinal analisado, permitindo a detecção precisa de seus eventos temporais e espectrais. Tais funções foram inicialmente definidas como um conjunto de núcleos de Gabor cuja largura e fase ficam determinadas, em uma dada frequência, pela magnitude e pela fase



Figura 2.3: Em cima e no meio, campos receptivos experimentais de células simples, e sua aproximação por funções de Gabor (adaptado de [13]). Embaixo, imagem de uma função de Gabor com dois lobos inibitórios flanqueando a região excitatória central.

da transformada de Fourier do sinal analisado. Ficou demonstrado que as funções sintonizadas são capazes de produzir uma representação exata de qualquer sinal espacial de quadrado integrável, o que levou à sugestão de que elas poderiam servir como modelo para a codificação de sinais por campos receptivos corticais dependentes do estímulo [58]. Uma abordagem semelhante, baseada em funções sintonizadas circularmente simétricas, foi utilizada para descrever a codificação de imagens branqueadas por estruturas com campo receptivo centro-periferia, seguindo o modelo proposto em [5, 12] para células da retina e do NGL [59].

Conforme indicado em [61], funções de Gabor sintonizadas ao sinal também podem ser introduzidas para a representação de sinais de quadrado integrável definidos no domínio da frequência: a largura e a fase dessas funções ficam então determinadas pela transformada inversa de Fourier da entrada espectral. Aqui, nós trataremos do emprego



Figura 2.4: Modelo da energia para células complexas. A primeira etapa é a filtragem linear por uma série de campos receptivos de células simples (neste caso, dois campos com diferentes fases). Os quadrados dos resultados são então somados, fornecendo a resposta da célula complexa. (Figura adaptada de [2])

da família estendida de filtros de Gabor sintonizados (incluindo os filtros espaciais e os espectrais) para a representação dos campos receptivos corticais, concluindo que este conjunto de funções é capaz de replicar as propriedades das respostas das células simples e das complexas, quando testadas com estímulos padrões, como as grades senoidais (incluindo grades compostas), e as fendas retangulares (ou pares de fendas). Ao mesmo tempo, as funções sintonizadas apresentam um caráter dependente do estímulo que se mostra compatível com o que foi revelado pelo trabalho de Yeh e colaboradores [66].

#### 2.2 Funções Sintonizadas de Gabor

As funções sintonizadas de Gabor serão apresentadas considerando primeiro a representação de um sinal unidimensional independente no tempo, I(x). As integrais que aparecem a seguir, e ao longo de todo o trabalho, são assumidas como estendendo-se de  $-\infty$  a  $\infty$ , a não ser quando diferentemente explicitado.

Sendo  $\mathcal{F}_{x\to\omega}\{I(x)\}\equiv \tilde{I}(\omega)=|\tilde{I}(\omega)|e^{i\varphi(\omega)}$  a transformada de Fourier de I(x), pode-se

demonstrar que o conjunto das funções  $\psi_{\omega}(x)$ ,  $\forall \omega$ , definidas como

$$\psi_{\omega}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i[\omega x + \varphi(\omega)]} e^{-\frac{x^2}{2|\bar{I}(\omega)|^2}}$$
(2.1)

permite a representação do sinal I(x) sob a forma

$$I(x) = \int e^{i\omega x} *_x \psi_{\omega}(x) d\omega$$
(2.2)

onde  $*_x$  denota uma convolução espacial<sup>1</sup>. Na verdade, é possível provar que a função  $\psi_{\omega}(x)$  na Eq.(2.1) tem o mesmo conteúdo que sinal I(x) na frequência  $\omega$ , já que

$$\mathcal{F}_{x \to \omega'}\{\psi_{\omega}(x)\}|_{\omega'=\omega} = \tilde{I}(\omega)$$
(2.3)

Sendo assim, nós definimos  $\psi_{\omega}(x)$  como uma função sintonizada de Gabor (de frequência  $\omega$ ), tendo I(x) como seu sinal sintonizador; aqui, nós também nos referiremos a ela como uma função codificadora de I(x).

Efetuando-se a operação de convolução indicada na Eq. (2.2), esta pode ser reescrita sob a forma

$$I(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \int e^{i[\omega x + \varphi(\omega)]} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2|\tilde{I}(\omega)|^2}} d\xi d\omega$$

$$(2.4)$$

que se assemelha a uma expansão contínua de Gabor com coeficientes unitários, mas, ao contrário da tradicional expansão linear sobre um conjunto de base, aqui as funções de Gabor carregam elas próprias a informação sobre o sinal.

Em [61], uma transformada espaço-frequência baseada nas funções sintonizadas de Gabor — chamada transformada de Gabor sintonizada ao sinal (*signal-tuned Gabor transform* - *STGT*) — foi proposta como

$$T(x,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i[\omega\xi + \varphi(\omega)]} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{2|I(\omega)|^2}} I(\xi) d\xi$$
(2.5)

demonstrando-se que ela permite a detecção precisa das componentes do sinal, tanto no domínio espacial quanto no espectral, mesmo em situações nas quais abordagens alternativas, tais como a transformada tradicional de Gabor ou a tranformada S [9,49], não produzem bons resultados. Ademais, ao empregar as funções de codificação do sinal como núcleos analisadores, a transformada sintonizada de Gabor mostra-se capaz de replicar algumas das propriedades analíticas ideais da transformada de Wigner, na qual o próprio sinal de entrada é usado como núcleo analisador [11].

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>A demonstração disto se encontra em [61], mas tomando-se a transformada de Fourier de ambos os lados da Eq. (2.2), e usando-se conhecidas propriedades analíticas, é fácil encontrar uma identidade. A transformada de Fourier do sinal I(x) é definida aqui como  $\int e^{-i\omega x} I(x) dx$ .

Uma versão cruzada da STGT, em que o sinal de entrada passa a ser analisado pelas funções de codificação de um sinal diferente, também pode ser definida, como abaixo

$$T^{X}(x,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i[\omega\xi + \varphi_{1}(\omega)]} e^{-\frac{(\xi-x)^{2}}{2|I_{1}(\omega)|^{2}}} I_{2}(\xi) d\xi$$
(2.6)

onde  $|\tilde{I}_1(\omega)| \in \varphi_1(\omega)$  denotam a magnitude e a fase da transformada de Fourier do sinal  $I_1(x)$ , cujas funções de codificação são usadas para analisar o sinal  $I_2(x)$ . A partir daí, é possível obter-se

$$2\pi \int T^X(x,\omega)dx = \tilde{I}_1^*(\omega)\tilde{I}_2(\omega) \equiv \mathcal{F}_{x\to\omega}\{I_1(x)\star I_2(x)\}$$
(2.7)

o que demonstra que a transformada sintonizada cruzada de Gabor pode ser usada para obtenção da correlação dos sinais  $I_1$  and  $I_2$ , definida como

$$I_1(x) \star I_2(x) = \int I_1^*(\xi) I_2(\xi + x) d\xi$$
(2.8)

onde o asterisco em sobreescrito denota uma conjugação complexa.

Como já comentado em [61], a abordagem sintonizada de Gabor pode ser estendida para a representação e a análise de sinais definidos no domínio espectral. Dado um sinal  $\tilde{I}(\omega)$ , isto se obtém por meio das funções

$$\psi_x(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-i[\omega x - \phi(x)]} e^{-\frac{\omega^2}{16\pi^3 |I(x)|^2}}$$
(2.9)

onde  $I(x) = |I(x)|e^{i\phi(x)}$  denota o sinal complexo cuja transformada de Fourier é  $\tilde{I}(\omega)$ . Pode ser facilmente demonstrado que a função de codificação  $\psi_x(\omega)$  é localmente idêntica ao sinal I(x), já que se tem

$$\mathcal{F}_{\omega \to x'}^{-1} \{ \psi_x(\omega) \} |_{x'=x} = I(x)$$
(2.10)

onde  $\mathcal{F}^{-1}$  representa a transformada inversa de Fourier. O conjunto  $\{\psi_x(\omega), \forall x\}$  permite a representação exata de  $\tilde{I}(\omega)$ , como

$$\tilde{I}(\omega) = \int e^{-i\omega x} *_{\omega} \psi_x(\omega) dx \qquad (2.11)$$

onde $*_\omega$ denota convolução em frequência. Explicitando esta convolução, obtém-se

$$\tilde{I}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int e^{-i[\omega x - \phi(x)]} e^{-\frac{(\omega - \Omega)^2}{16\pi^3 |I(x)|^2}} dx d\Omega$$
(2.12)

que novamente se assemelha a uma expansão de Gabor com coeficientes unitários, desta vez no domínio espectral.
Uma transformada sintonizada de Gabor também pode ser baseada nas funções de codificação  $\psi_x(\omega)$ , e empregada para análise de entradas espectrais. Ela fica definida pela expressão

$$T_2(x,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i[\Omega x - \phi(x)]} e^{-\frac{(\Omega - \omega)^2}{16\pi^3 |I(x)|^2}} \tilde{I}(\Omega) d\Omega$$
(2.13)

que pode ser reescrita, utilizando-se o teorema de Parseval [11], em termos de uma filtragem espacial;

$$T_2(x,\omega) = (2\pi)^2 I^*(x) \int e^{-i\omega(\xi-x)} e^{-4\pi^3 |I(x)|^2 (\xi-x)^2} I(\xi) d\xi$$
(2.14)

Naturalmente, uma versão cruzada da transformada  $T_2$  também pode ser definida, utilizando-se as funções de codificação de um determinado sinal espectral para a análise de um sinal diferente, como abaixo

$$T_2^X(x,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{i[\Omega x - \phi_1(x)]} e^{-\frac{(\Omega - \omega)^2}{16\pi^3 |I_1(x)|^2}} \tilde{I}_2(\Omega) d\Omega$$
(2.15)

A partir daí, a correlação entre os dois sinais espectrais pode ser obtida como

$$\int T_2^X(x,\omega)d\omega = (2\pi)I_1^*(x)I_2(x) \equiv \mathcal{F}_{\omega\to x}^{-1}\{\tilde{I}_1(\omega)\star\tilde{I}_2(\omega)\}$$
(2.16)

onde se define

$$\tilde{I}_1(\omega) \star \tilde{I}_2(\omega) = \int \tilde{I}_1^*(\Omega) \tilde{I}_2(\Omega + \omega) d\Omega$$
(2.17)

No que se segue, será analisada a hipótese de que a abordagem sintonizada de Gabor pode proporcionar um modelo apropriado para a descrição dos campos receptivos corticais dependentes do estímulo. Essencialmente, esta hipótese sugere que as funções sintonizadas de Gabor  $\psi_{\omega}(x) \in \psi_x(\omega)$ , das Eqs. (2.1) e (2.9), podem ser associadas aos campos receptivos de neurônios corticais — dos tipos complexo e simples, respectivamente — cujas respostas a um estímulo dado são obtidas via integrais semelhantes às que definem as respectivas transformadas sintonizadas cruzadas,  $T^X(x,\omega) \in T_2^X(x,\omega)$ , das Eqs. (2.6) e (2.15). Antes de considerar tal hipótese, é preciso, inicialmente, apresentar as versões bidimensionais das funções e transformadas sintonizadas de Gabor, que se mostram mais adequadas para a descrição dos campos receptivos visuais.

#### 2.2.1 Funções Sintonizadas de Gabor: Versão 2D

A versão bidimensional da abordagem de Gabor sintonizada pode ser facilmente obtida. A forma da primeira função de codificação – correspondente ao  $\psi_{\omega}(x)$  da Eq. (2.1) – torna-se

$$\psi_c(x,y;\omega_x,\omega_y) = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i[\omega_x x + \omega_y y + \varphi(\omega_x,\omega_y)]} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2|\tilde{I}(\omega_x,\omega_y)|}}$$
(2.18)

onde  $\tilde{I}(\omega_x, \omega_y) = |\tilde{I}(\omega_x, \omega_y)| e^{i\varphi(\omega_x, \omega_y)}$  denota a transformada de Fourier do sinal de sintonia, I(x, y). É importante notar que, neste caso, a variância da envoltória Gaussiana da função de Gabor é dada pela magnitude da transformada de Fourier do sinal, não pelo seu quadrado. Já que as funções de codificação da Eq. (2.18) serão, posteriormente, associadas aos campos receptivos das células complexas, a notação  $\psi_c$  foi aqui introduzida.

O conjunto  $\{\psi_c(x, y; \omega_x, \omega_y), \forall (\omega_x, \omega_y)\}$  permite a representação exata do sinal I(x, y), como<sup>2</sup>

$$I(x,y) = \int \int e^{i(\omega_x x + \omega_y y)} *_{x,y} \psi_c(x,y;\omega_x,\omega_y) d\omega_x d\omega_y$$
(2.19)

onde  $*_{x,y}$  representa uma convolução espacial bidimensional, enquanto a transformada de Gabor sintonizada baseada neste conjunto torna-se

$$T_c(x,y;\omega_x,\omega_y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int e^{-i[\omega_x\xi + \omega_y\eta + \varphi(\omega_x,\omega_y)]} e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{2|\tilde{I}(\omega_x,\omega_y)|}} I(\xi,\eta) d\xi d\eta \qquad (2.20)$$

Do mesmo modo, a forma bidimensional da função de codificação espectral – correspondente ao  $\psi_x(\omega)$  da Eq. (2.9) – fica definida como

$$\psi_s(x,y;\omega_x,\omega_y) = \frac{1}{(2\pi)^4} e^{-i[\omega_x x + \omega_y y - \phi(x,y)]} e^{-\frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{16\pi^3 |I(x,y)|}}$$
(2.21)

onde  $I(x, y) = |I(x, y)|e^{i\phi(x,y)}$  é o sinal complexo cuja transformada de Fourier,  $\tilde{I}(\omega_x, \omega_y)$ , é a função de sintonia de  $\psi_s$ . Deve-se notar que, neste caso, a variância da envoltória Gaussiana é proporcional à magnitude de I(x, y). A notação  $\psi_s$  foi aqui introduzida, já que as funções da Eq. (2.21) serão mais tarde associadas aos campos receptivos corticais das células simples.

O conjunto  $\{\psi_s(x, y; \omega_x, \omega_y), \forall (x, y)\}$  permite a representação exata de  $\tilde{I}(\omega_x, \omega_y)$ , como

$$\tilde{I}(\omega_x, \omega_y) = \int \int e^{-i(\omega_x x + \omega_y y)} *_{\omega_x, \omega_y} \psi_s(x, y; \omega_x, \omega_y) dxdy$$
(2.22)

onde  $*_{\omega_x,\omega_y}$  denota uma convolução bidimensional em frequência, enquanto a transformada de Gabor com base neste conjunto toma a forma

$$T_s(x,y;\omega_x,\omega_y) = I^*(x,y) \times$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Novamente, aplicando-se a transformada de Fourier a ambos os lados da Eq. (2.19), pode-se verificar a sua validade.

$$\times \int \int e^{-i[\omega_x(\xi-x)+\omega_y(\eta-y)]} e^{-4\pi^3 |I(x,y)|[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]} I(\xi,\eta) d\xi d\eta$$
(2.23)

uma versão equivalente da qual pode ser obtida através do teorema de Parseval:

$$T_s(x,y;\omega_x,\omega_y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int e^{i[\Omega_x x + \Omega_y y - \phi(x,y)]} e^{-\frac{(\Omega_x - \omega_x)^2 + (\Omega_y - \omega_y)^2}{16\pi^3 |I(x,y)|}} \tilde{I}(\Omega_x,\Omega_y) d\Omega_x d\Omega_y \quad (2.24)$$

Deve ser observado que, embora se tenha, por simplicidade, considerado funções de codificação bidimensionais moduladas por Gaussianas circularmente simétricas, a abordagem sintonizada pode ser facilmente estendida para o uso de Gaussianas com diferentes larguras ao longo de direções x e y rotacionadas:  $x_{\theta} = x \cos \theta + y \sin \theta e y_{\theta} = -x \sin \theta + y \cos \theta$ . Por exemplo, uma função de codificação complexa mais geral tomaria a forma

$$\psi_c(x,y;\omega_x,\omega_y;k_x,k_y;\theta) = \frac{1}{(2\pi)^3} e^{i[\omega_x x + \omega_y y + \varphi(\omega_x,\omega_y)]} e^{-\frac{k_x^2 x_\theta^2 + k_y^2 y_\theta^2}{2|\bar{I}(\omega_x,\omega_y)|}}$$
(2.25)

em termos da qual uma expansão do sinal de sintonia I(x, y) seria obtida como

$$I(x,y) = k_x k_y \int \int e^{i(\omega_x x + \omega_y y)} *_{x,y} \psi_c(x,y;\omega_x,\omega_y;k_x,k_y;\theta) d\omega_x d\omega_y$$
(2.26)

onde  $k_x$  e  $k_y$  são constantes positivas. Uma extensão semelhante pode ser igualmente introduzida no caso da  $\psi_s$ .

## 2.3 Modelagem de Campos Receptivos por Funções Sintonizadas de Gabor

A proposta, aqui, é analisar as funções sintonizadas bidimensionais  $\psi_s$  e  $\psi_c$  como modelo para os campos receptivos dependentes do estímulo das células corticais simples e complexas, cujas respostas, por sua vez, serão modeladas pelas versões cruzadas das respectivas transformadas,  $T_s$  e  $T_c$ .<sup>3</sup>

Mais especificamente, nós assumimos que as respostas de um par de células simples em quadratura, sintonizadas à frequência  $(\omega_x, \omega_y)$  e com campos receptivos centrados em (x, y), serão modeladas<sup>4</sup> como as partes real e imaginária da função

$$r_s(t;\omega_x,\omega_y,x,y,\tau) = I(x,y;t-\tau) \times$$

 $<sup>^{3}</sup>$ Com o intuito de simplificar as equações, serão usadas as formas originais das funções de codificação, conforme as Eqs. (2.18) e (2.21). Note-se que a generalização da abordagem, ilustrada pela Eq. (2.25), pode ser obtida sem dificuldade.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>A menos da retificação em meia-onda.

$$\times \int \int e^{-i[\omega_x(\xi-x)+\omega_y(\eta-y)]} e^{-4\pi^3 |I(x,y;t-\tau)|[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]} I(\xi,\eta;t) d\xi d\eta$$
(2.27)

onde nós usamos  $I^*(x, y; t) = I(x, y; t)$ , uma vez que as entradas tratadas serão sempre reais. Na equação acima foi introduzido o parâmetro  $\tau \ge 0$ , associado à célula, que informa o atraso com que o seu campo receptivo se adapta à variação da entrada. Deve ficar aparente que a Eq. (2.27) corresponde a uma versão cruzada da transformada  $T_s$  da Eq. (2.23), com o sinal de entrada no tempo t sendo analisado pelas funções de codificação da sua forma no instante anterior  $t - \tau$ .

No que se segue, a fim de simplificar a exposição, sempre que nós fizermos referência a uma célula simples ou complexa isto deve ser entendido como se tratando de um par em quadratura de tais células.

Com base na Eq. (2.27), nós definimos o campo receptivo dependente do estímulo da célula simples como sendo

$$CR_{s}(\xi,\eta,t;\omega_{x},\omega_{y},x,y,\tau) =$$

$$= I(x,y;t-\tau)e^{i[\omega_{x}(\xi-x)+\omega_{y}(\eta-y)]}e^{-4\pi^{3}|I(x,y;t-\tau)|[(\xi-x)^{2}+(\eta-y)^{2}]}$$
(2.28)

onde  $(\omega_x, \omega_y)$ , (x, y), e  $\tau$  são os parâmetros das célula: frequência de sintonia, posição (i.e., centro do seu campo receptivo), e defasagem temporal. Dada esta definição, a resposta da célula da Eq. (2.27) pode ser reescrita sob a forma tradicional de um produto interno entre o campo receptivo e o estímulo,

$$r_s(t;\omega_x,\omega_y,x,y,\tau) = \int \int \operatorname{CR}^*_s(\xi,\eta,t;\omega_x,\omega_y,x,y,\tau) I(\xi,\eta;t) d\xi d\eta \qquad (2.29)$$

mas deve-se notar que, devido ao fato de o campo receptivo ser dependente do sinal de entrada, a Eq. (2.29) descreve uma operação não-linear.

Evidentemente, uma expressão alternativa, baseada na Eq. (2.24), também pode ser utilizada para o cálculo das respostas das células simples, ou seja

$$r_s(t;\omega_x,\omega_y;x,y,\tau) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int e^{i[\Omega_x x + \Omega_y y - \phi(x,y;t-\tau)]} e^{-\frac{(\Omega_x - \omega_x)^2 + (\Omega_y - \omega_y)^2}{16\pi^3 |I(x,y;t-\tau)|}} \tilde{I}(\Omega_x,\Omega_y;t) d\Omega_x d\Omega_y \qquad (2.30)$$

mas a filtragem, na expressão acima, não envolve um campo receptivo no sentido estrito da palavra, mas sim o que equivaleria a um "campo receptivo espectral" — mais precisamente, a transformada de Fourier do campo  $CR_s$ , que opera sobre uma entrada espectral.

Por outro lado, para uma célula complexa centrada em (x, y) e sintonizada na frequên-

cia  $(\omega_x, \omega_y)$ , nós propomos uma resposta sob a forma

$$r_{c}(t;\omega_{x},\omega_{y};x,y,\tau) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3}} \int \int e^{-i[\omega_{x}\xi+\omega_{y}\eta+\varphi(\omega_{x},\omega_{y};t-\tau)]} e^{-\frac{(\xi-x)^{2}+(\eta-y)^{2}}{2|\tilde{I}(\omega_{x},\omega_{y};t-\tau)|}} I(\xi,\eta;t)d\xi d\eta \qquad (2.31)$$

que corresponde a uma versão cruzada da transformada  $T_c$  na Eq. (2.20). Aqui,  $\tau$  é, novamente, o parâmetro de defasagem temporal associado à célula. Reescrevendo-se a equação acima como um produto interno, obtém-se

$$r_c(t;\omega_x,\omega_y,x,y,\tau) = \int \int \operatorname{CR}_c^*(\xi,\eta,t;\omega_x,\omega_y,x,y,\tau) I(\xi,\eta;t) d\xi d\eta \qquad (2.32)$$

onde o campo receptivo da célula complexa foi identificado como

$$\operatorname{CR}_{c}(\xi,\eta,t;\omega_{x},\omega_{y},x,y,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{3}} e^{i[\omega_{x}\xi+\omega_{y}\eta+\varphi(\omega_{x},\omega_{y};t-\tau)]} e^{-\frac{(\xi-x)^{2}+(\eta-y)^{2}}{2|\tilde{I}(\omega_{x},\omega_{y};t-\tau)|}}$$
(2.33)

Em vista das Eqs. (2.7) e (2.16), que podem ser facilmente estendidas para o caso bidimensional, observa-se que os nossos modelos de resposta para as células simples e complexas fornecem as correlações entre, respectivamente, os valores dos estímulos espacial e espectral nos instantes  $t e t - \tau$ .

É importante ressaltar aqui que  $\tau$  é um atributo fixo da célula, e não deve ser confundido com o parâmetro de integração temporal que aparece na definição usual da função de resposta linear dos neurônios, que, no caso unidimensional, assume a forma (ver, por exemplo, [15], Cap. 2)

$$L(t) = \int_0^\infty \int D(x,\theta) s(x,t-\theta) dx d\theta$$
(2.34)

onde L é a resposta linear, D é o campo receptivo espaço-temporal, s é o estímulo, e  $\theta$  é o parâmetro de integração. Assim, a resposta neuronal no instante t leva em conta toda a história pregressa do estímulo, com a dependência de D em relação a  $\theta$  informando o peso que cada valor passado do estímulo irá ter na determinação da resposta presente.

É possível obter uma resposta integrada semelhante, na abordagem sintonizada, introduzindo um parâmetro temporal de integração no campo receptivo de Gabor, e usando uma função de ponderação,  $W(\theta)$ , para definir, por exemplo, no caso da célula complexa,

$$r_c^{\text{int}}(t;\omega,x,\tau) = \int_0^\infty \int CR_c^*(\xi,t-\theta;\omega,x,\tau)W(\theta)I(\xi;t-\theta)d\xi d\theta$$
(2.35)

como a resposta integrada, no instante t, da célula com campo receptivo de parâmetros

 $x, \tau \in \omega$ . A função  $W(\theta)$  faria o papel da componente temporal de um campo receptivo espaço-temporal separável, assumindo, por exemplo, a forma proposta em [2].

## 2.4 Discussão

Ambos os modelos propostos para os campos receptivos consistem em funções de Gabor espaço-temporais com parâmetros dependentes do estímulo. No caso da célula simples, a largura do CR<sub>s</sub>, na Eq. (2.28), é inversamente proporcional à raiz quadrada da magnitude do estímulo, enquanto para a célula complexa o CR<sub>c</sub> da Eq. (2.33) tem a mesma fase que a transformada de Fourier do estímulo, e a largura determinada pela raiz quadrada da magnitude desta transformada. Foram as características de suas respostas a entradas padrões o que levou à identificação de cada um desses modelos como correspondendo a uma célula simples ou a uma célula complexa. Conforme demonstrado nos Apêndices de A a C, nós verificamos que, em resposta a grades senoidais em contrafase ou grades senoidais em movimento, o modelo proposto para a célula simples produz um sinal modulado na mesma frequência temporal que a grade, e dependente da sua fase espacial. Já quando o estímulo é uma fenda em movimento, a célula produz a resposta máxima quando a fenda tem a mesma orientação que o campo receptivo e apenas enquanto ela atravessa o centro do campo receptivo. Tais resultados estão de acordo com os relatados nos estudos experimentais sobre as células corticais simples [16,34].

Do mesmo modo, o modelo proposto para as respostas das células complexas mostrase de acordo com os estudos experimentais sobre tais células, quando o mesmo tipo de entradas é considerado. Para a grade em contrafase, por exemplo, o nosso modelo responde com uma modulação no dobro da frequência temporal do estímulo, independentemente da sua fase espacial, enquanto que, para a grade em movimento, ele produz uma resposta não modulada. Já quando o estímulo é uma grade composta, obtém-se também uma modulação na diferença de frequências [42]. Por outro lado, a célula não responde a uma fenda em movimento, a menos que esta esteja alinhada na mesma orientação do campo receptivo, neste caso a resposta não depende da posição da fenda com relação ao centro da célula [16,35]. A resposta do nosso modelo de célula complexa, quando o estímulo é um par de fendas estacionárias também se encontra em conformidade com os dados neurofisiológicos, sendo facilitada ou inibida, dependendo da separação entre os estímulos [35].

Algumas das propriedades distintivas das células-modelo propostas, que as tornam

compatíveis com as células corticais reais, podem ser inferidas a partir da forma analítica das respectivas funções de campo receptivo. Por exemplo, enquanto a largura e a amplitude das funções  $CR_s - Eq. (2.28)$  – dependem da evolução temporal do estímulo em um único ponto (centro da célula), a largura e a fase do  $CR_c$  na Eq. (2.33) são determinadas por uma medida dependente da distribuição espacial do estímulo, dada por sua transformada de Fourier. Assim, apesar de ambos os modelos de campos receptivos corresponderem a funções de Gabor dependentes da entrada – que necessariamente variam de acordo com o estímulo –, a estrutura geral do  $CR_s$  não se altera tanto quanto a do o  $CR_c$ , sendo mais compatível com a organização em sub-regiões excitatórias e inibitórias observada para as células simples. Isto porque a parte senoidal do  $CR_s$  não apresenta dependência da fase do estímulo; por conseguinte, variações no estímulo de entrada podem afetar a largura e a amplitude do campo receptivo, mas não a sua organização espacial em domínios excitatórios e inibitórios.

A situação é claramente diversa quando o modelo da célula complexa é considerado. Além de depender da distribuição espacial do conteúdo do estímulo, a função  $CR_c$  carrega um fator de fase dependente da entrada, que pode afetar significativamente a sua estrutura interna. Assim, uma vez que um estímulo diferente seja apresentado, uma subregião originalmente excitatória pode se transformar em inibitória e vice-versa — tal qual observado com as células complexas do córtex visual.

Apesar das peculiaridades de cada classe, ambos os nossos modelos para as células corticais exibem uma dependência do estímulo que parece consistente com o que é reportado para células das camadas superficiais do córtex visual. Como descrito em [66], foi verificado que as células das camadas 2 e 3 do córtex visual podem produzir mapas de campos receptivos bem distintos, dependendo do conjunto de estímulos utilizado: quando mapeadas com os chamados estímulos de Hartley (fragmentos de um tipo particular de grades senoidais [44]), muitas destas células, tanto simples quanto complexas, tendem a produzir campos receptivos compostos por múltiplas sub-regiões alongadas; por outro lado, quando estimuladas com ruído esparso (pontos isolados, claros ou escuros, sobre um fundo cinza), elas produzem estruturas tipo bolha. Um comportamento similar não é observado com os neurônios da camada 4 do córtex estriado, que tendem a produzir mapas de campos receptivos semelhantes, independentemente da entrada.

Consideremos então a Fig.2.5b, que apresenta alguns exemplos dos nossos campos receptivos,  $CR_s$  (em cima) e  $CR_c$  (embaixo), produzidos a partir das versões branqueadas de uma imagem da base Hartley e de outra de ruído esparso. As imagens originais aparecem no topo da Fig. 2.5a, enquanto as suas versões branqueadas, tomadas como entradas para nossas células-modelo, são mostradas embaixo. O branqueamento foi realizado por meio dos campos receptivos centro-periferia dependentes do estímulo descritos em [59]. Seguindo o modelo de Atick e colaboradores para células da retina e do NGL [5,12], essas funções implementam um filtro que tende a equalizar o espectro das imagens naturais — que é sabido decair com o inverso da magnitude da frequência, ou seja,  $\approx (\omega_x^2 + \omega_y^2)^{-1/2}$  [45] —, ao mesmo tempo em que atenua ruídos de alta frequência.

Nos exemplos da Fig. 2.5, enquanto o estímulo da base Hartley produz campos receptivos com domínios excitatórios e inibitórios alongados e bem definidos, o ruído esparso produz campos tipo bolha, de forma similar ao que é observado para células das camadas 2 e 3 do córtex visual. Alterando-se os parâmetros dos campos receptivos (ver abaixo), um comportamento menos sensível ao conjunto de estímulos, consoante com o que é reportado para células da camada 4C do córtex, pode também ser reproduzido pelo modelo sintonizado ao sinal. Isto é ilustrado na Fig. 2.5c, onde são apresentadas funções de campo receptivo, de células simples e complexas, que não diferem qualitativamente quando os dois tipos de entrada são usados. É interessante observar que, neste caso, os campos receptivos complexos tendem a ser do tipo bolha, em concordância com os mapeados em [66]. Por outro lado, no que diz respeito às entradas não branqueadas (Fig. 2.5a, em cima), mesmo que ainda possa ser encontrada alguma disparidade entre os campos complexos gerados pelos estímulos da base Hartley e o ruído esparso, o modelo proposto para as células simples tende sempre a produzir campos receptivos do tipo bolha.

As funções de campo receptivo usadas para gerar as Figs. 2.5b e 2.5c são versões discretizadas das formas (ver Eqs. (2.28) e (2.33))

$$CR_s(\xi,\eta;\omega_x,\omega_y,x,y,k_s) = I(x,y)e^{i[\omega_x(\xi-x)+\omega_y(\eta-y)]}e^{-4\pi^3k_s^2|I(x,y)|[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]}$$
(2.36)

е

$$\operatorname{CR}_{c}(\xi,\eta;\omega_{x},\omega_{y},x,y,k_{c}) = \frac{1}{(2\pi)^{3}} e^{i[\omega_{x}\xi+\omega_{y}\eta+\varphi(\omega_{x},\omega_{y})]} e^{-k_{c}^{2}\frac{(\xi-x)^{2}+(\eta-y)^{2}}{2|\tilde{I}(\omega_{x},\omega_{y})|}}$$
(2.37)

onde a dependência temporal foi omitida. Para o cômputo dos modelos dos campos receptivos acima, a intensidade média da imagem foi inicialmente subtraída da entrada, enquanto que os parâmetros  $k_s$  e  $k_c$  foram escolhidos de modo a produzir campos receptivos simples e complexos com larguras de banda em frequência aproximadamente iguais, com mediana em torno de uma oitava, tal como é observado para as células corticais.

As larguras de banda a meia-amplitude das funções nas Eqs. (2.36) e (2.37) são



Figura 2.5: a) Entradas teste: Estímulo de Hartley (esquerda) e imagem de ruído esparso (direita). As entradas originais (tamanho 96 × 96, intensidades de 0 a 255) aparecem no topo, e suas versões branqueadas, embaixo. b) Campos receptivos simples (topo) e campos receptivos complexos (embaixo) gerados sobre uma janela 30 × 30, a partir das entradas branqueadas em (a). Os campos correspondentes à imagem Hartley são mostrados à esquerda, os gerados pela imagem de ruído esparso aparecem à direita. Os campos receptivos simples e complexos foram calculados através das Eqs. (2.36) e (2.37), respectivamente, com parâmetros (x, y) = (25, 66) e  $k_s = 0.0055$ , com  $k_c$  determinado pela Eq. (2.41). As frequências usadas foram  $(\omega_x, \omega_y) = (1, 2)$  para a célula simples, e (2, 2) para a célula complexa. c) Outros exemplos de campos gerados a partir das mesmas entradas: em cima, campos simples obtidos com (x, y) = (24, 64) e  $(\omega_x, \omega_y) = (3, 2)$ ; embaixo, campos complexos obtidos com (x, y) = (24, 64) e  $(\omega_x, \omega_y) = (3, 2)$ ; embaixo, campos complexos obtidos com (x, y) = (24, 64) e (2.41).

facilmente calculadas como (ver [33], por exemplo)

$$\Delta F_s = \log_2 \left| \frac{\omega + 4\pi^{3/2} k_s \sqrt{\log 2} |I(x, y)|^{1/2}}{\omega - 4\pi^{3/2} k_s \sqrt{\log 2} |I(x, y)|^{1/2}} \right|$$
(2.38)

е

$$\Delta F_c = \log_2 \left| \frac{\omega |\tilde{I}(\omega_x, \omega_y)|^{1/2} + k_c \sqrt{2\log 2}}{\omega |\tilde{I}(\omega_x, \omega_y)|^{1/2} - k_c \sqrt{2\log 2}} \right|$$
(2.39)

onde  $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2}$ . Pode ser verificado que as expressões acima serão idênticas quando tivermos

$$\frac{k_c^2}{k_s^2} = (2\pi)^3 |I(x,y)| |\tilde{I}(\omega_x, \omega_y)|$$
(2.40)

A fim de obter larguras de banda aproximadamente iguais para os modelos de células propostos, nós decidimos fixar o valor de  $k_s$ , e escolher  $k_c$ , considerando a Eq. (2.40), como

$$k_c = k_s [(2\pi)^3 |I_{\rm av}|]^{1/2}$$
(2.41)

onde  $|I_{av}|$  e  $|\tilde{I}_{av}|$  denotam a intensidade média absoluta e a magnitude média da transformada de Fourier do sinal de entrada. Aqui, nós usamos  $k_s = 0.0055$ , uma escolha que levou a larguras de banda para as células simples e complexas que se mostraram compatíveis com as indicadas pelos estudos neurofisiológicos, embora levando a valores medianos menores do que o reportado em [16], por exemplo. A Fig. 2.6 mostra as distribuições das larguras de banda totais a meia-amplitude obtidas a partir de um conjunto de imagens branqueadas de grades senoidais, com as funções de campo receptivo calculadas sobre janelas 30 × 30 posicionadas aleatoriamente, de forma semelhante ao considerado na Fig. 2.5 <sup>5</sup>.

Ao escolher um valor fixo para  $k_s$ , e em seguida  $k_c$  de acordo com a Eq. (2.41), nós obtemos também campos receptivos simples e complexos cujas larguras de banda são inversamente correlacionadas com o contraste do estímulo, assim como observado para as células corticais reais [47]: caso se admita um fator multiplicativo de contraste,  $\epsilon$ , no sinal I(x, y), e consequentemente também na sua transformada  $\tilde{I}(\omega_x, \omega_y)$ , as Eqs. (2.36) e (2.37) fornecem funções cujas larguras são proporcionais a  $\epsilon^{-1/2}$ .

As larguras de banda em orientação dos campos receptivos nas Eqs. (2.36) e (2.37) também podem ser calculadas, sendo que em ambos casos encontra-se uma relação funcional com as respectivas larguras de banda em frequência, sob a forma

$$\Delta F = \log_2 \left| \frac{1 + \tan\left(\Delta\theta/2\right)}{1 - \tan\left(\Delta\theta/2\right)} \right|$$
(2.42)

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Observou-se que valores maiores de  $k_s$  podem aumentar as larguras de banda das células-modelo, mas isto geraria um número excessivo de células complexas com larguras de banda elevadas (> 2.6). É claro que, usando uma relação de proporcionalidade na Eq. (2.41), em vez de uma igualdade, nós teríamos mais liberdade para variar  $k_s$  independentemente de  $k_c$ , mas ao custo de introduzir um parâmetro livre a mais no nosso modelo.



Figura 2.6: Distribuições de lagura de banda em frequência obtidas com janelas  $30 \times 30$  posicionadas aleatoriamente, para um conjunto de estímulos senoidais. a) Células simples (cf. Eq. (2.38)); valor da mediana: 0.705. b) Célula complexa (cf. Eq. (2.39)); valor de mediana: 0.922.

onde  $\Delta \theta$  expressa a largura de banda em orientação a meia-amplitude. A Eq. (2.42) reproduz a conhecida correlação positiva entre a sintonia em frequência e a sintonia da orientação, característica das células corticais [16].

Usando as funções de campo receptivo das Eqs. (2.36) e (2.37), novamente com  $k_s = 0.0055$  e  $k_c$  fornecido pela Eq. (2.41), as respostas do nosso modelo foram calculadas (Eqs. (2.29) e (2.32)) para um par de imagens naturais do banco de imagens de van Hateren [63]. As respostas foram computadas para todas as frequências possíveis, em janelas  $5 \times 5$  aplicadas sobre as imagens. Assim como antes, nós trabalhamos com entradas branqueadas, e subtraindo a média das intensidades. Os painéis inferiores das Figs. 3a e 3b apresentam os mapas de intensidade das respostas máximas obtidas em cada posição da imagem. Nota-se que, enquanto o modelo proposto para células complexas produz mapas de borda bem definidos, as células simples parecem funcionar como detectores grosseiros não apenas de bordas, mas também de texturas.



Figura 2.7: a) Em cima: Imagem natural da base de dados de van Hateren (esquerda) e sua versão branqueada (direita). As imagens são  $128 \times 192$  pixels, e suas intensidades variam de 0 a 255. Embaixo: Mapas das respostas máximas obtidas com as células simples (esquerda) e as complexas (direita). As respostas foram geradas sobre janelas  $5 \times 5$  aplicadas sobre as imagens branqueadas. As saídas são apresentadas com  $124 \times 188$  pixels, em razão de efeitos de borda. b) O mesmo que em (a), para uma segunda imagem.

## 2.5 Outras Considerações

Neste capítulo, foi examinada a aplicabilidade das funções sintonizadas de Gabor como modelo para os campos receptivos dependentes do estímulo das células corticais simples e complexas. Dado um sinal de entrada, o campo receptivo da célula simples foi modelado como uma função de Gabor cujas largura e amplitude ficam definidas pelo valor do sinal no centro da célula, enquanto o campo receptivo da célula complexa foi modelado como uma função de Gabor cujas largura e fase ficam determinadas pelo valor da transformada de Fourier do sinal na frequência preferida da célula. Os modelos de campos receptivos assim definidos mostraram-se capazes de reproduzir o tipo de dependência ao estímulo verificada entre os neurônios das camadas 2 e 3 do córtex visual [66]. Além disso, o nosso estudo analítico demonstrou que as respostas das nossas células modelo, obtidas pelo produto interno entre os seus campos receptivos e o estímulo, replicam as respostas das células corticais para grades senoidais e fendas retangulares.

Em termos gerais, o modelo proposto mostra-se em acordo com a visão padrão das células simples como unidades quase-lineares (até o passo de retificação) com campos receptivos estruturados em sub-regiões excitatórias e inibitórias bem definidas, enquanto as células complexas apresentam maior não-linearidade e um campo receptivo com estrutura mais maleável. Por outro lado, em contraste com o modelo da energia, que considera a célula complexa como consistindo em uma combinação não linear de células simples [2], o campo receptivo complexo sintonizado ao sinal é, da mesma forma que o da célula simples, uma função de Gabor. Portanto, a nossa célula complexa poderia, em princípio, ser gerada de maneira hierárquica a partir de uma combinação de neurônios talâmicos (i.e., do NGL) com organização centro-periferia, de modo semelhante ao proposto por Hubel e Wiesel para os neurônios simples [26]. Isto poderia sugerir uma possível organização em paralelo do córtex estriado, com tanto as células simples como as complexas recebendo entrada direta do NGL, e constituindo, assim, dois caminhos visuais separados. No entanto, uma organização estritamente paralela parece pouco compatível com o modelo sintonizado ao sinal, visto que este assume que os campos receptivos complexos ficam definidos pela transformada de Fourier do sinal de entrada, que, por sua vez, seria codificada pelas células simples, na forma da Eq. (2.22).

Portanto, o modelo sintonizado ao sinal para o córtex visual parece ser melhor descrito como uma organização paralelo-hierárquica, como ilustrado na Fig. 2.8. O estímulo originado no tâlamo dá origem aos "campos receptivos espectrais" das células simples, encarregados de codificar a transformada de Fourier da entrada — ver equações (2.21) e (2.22); a partir daí, as respostas das células simples são geradas (Eq. (2.30)), assim como os campos receptivos complexos (Eq. (2.33)), que por sua vez produzem as respostas das células complexas, conforme a Eq. (2.31). Lembrando que as células complexas podem, por elas próprias, gerar uma representação do estímulo (ver Eq. (2.19)), nós postulamos uma conexão de *feedback* das células complexas para as células simples, esta sendo responsável pela introdução da defasagem temporal entre o estímulo e a configuração do campo receptivo, como assumido pelo modelo proposto (ver Eqs. (2.27) e (2.31)). Isso adiciona um elemento recorrente ao nosso circuito cortical paralelo-hierárquico, o que parece estar em conformidade com uma observação feita por Martinez e Alonso, para quem, a



Figura 2.8: Representação esquemática do modelo sintonizado ao sinal para V1. O sinal de entrada induz a formação dos "campos receptivos espectrais" da célula simples, aqui denotados por  $\tilde{CR}_s(\omega)$ , que produzem a representação da transformada de Fourier. A partir desta, as respostas da célula simples e os campos receptivos das células complexas são gerados. Estes últimos, por sua vez, dão origem tanto à resposta da célula complexa quanto à representação do sinal retardado,  $I(x, t - \tau)$ .

cada novo avanço nas pesquisas, as diferentes classes de modelos sugeridos para o córtex estriado — hierárquicos, paralelos e recorrentes — tenderiam a se tornar cada vez mais semelhantes [32].

Outros tipos de neurônios foram identificados em V1, além das células simples e complexas, que já se sugeriu representarem apenas dois extremos num contínuo de classes [6]. Talvez a abordagem sintonizada se mostre capaz de acomodar esta variedade de células, uma vez que ela pode ser facilmente estendida por meio da transformada fracionária de Fourier, mantendo os nossos modelos para as células simples e complexas como casos particulares.

A transformada fracionária de Fourier pode ser definida como [37]

$$I_{\alpha}(u) \equiv \operatorname{FrFT}_{\alpha}\{I(v)\} = e^{i\frac{\cot\alpha}{2}u^2}\sqrt{1-i\cot\alpha} \int e^{i\left[\frac{v^2}{2}\cot\alpha - uv\csc\alpha\right]}I(v)dv \qquad (2.43)$$

(aqui,  $u \in v$  são assumidos como grandezas adimensionais), uma expressão que fornece a transformada de Fourier tradicional,  $\tilde{I}(u)$ , quando  $\alpha = \pi/2$ , e a sua inversa, como  $\sqrt{2\pi}I(v)$ , quando  $\alpha = 0$ . Para um  $\alpha$  genérico,  $I_{\alpha}(u)$  equivale a uma representação do sinal ao longo da direção correspondente no plano espaço-frequência.

Uma generalização da transformada de Gabor sintonizada pode ser definida, com base

na FrFT, como

$$T_{\alpha,\beta}(u,v) = \frac{|\csc\alpha|}{(2\pi)^2} \int e^{i\left(\frac{\nu^2+u^2}{2}\right)\cot\alpha - i[u\nu\csc\alpha + \varphi_{\alpha+\beta}(u)]} e^{-\frac{(\nu-\nu-u\cos\alpha)^2}{2(|I_{\alpha+\beta}(u)|\sin\alpha)^2}} I_{\beta}(\nu)d\nu \qquad (2.44)$$

onde nós identificamos, sob a integral, uma função generalizada de Gabor cujas fase e largura são determinadas por uma transformada fracionária de Fourier do sinal de entrada  $I_{\beta}$ , isto é,

$$I_{\alpha+\beta}(u) = \operatorname{FrFT}_{\alpha}\{I_{\beta}(v)\} \equiv |I_{\alpha+\beta}(u)|e^{i\varphi_{\alpha+\beta}(u)}$$
(2.45)

Não é dificíl concluir que, para  $\alpha = \pi/2$  e  $\beta = 0$ , a Eq. (2.44) fornece a primeira forma da transformada de Gabor sintonizada, dada pela Eq. (2.5), enquanto que  $\alpha = -\pi/2$  e  $\beta = \pi/2$  levam à segunda forma, dada pela Eq. (2.13).

De acordo com o exposto acima, seria possível definir um contínuo de campos receptivos e funções de resposta sintonizadas ao sinal, apenas variando  $\alpha \in \beta$ . Algumas destas funções podem vir a fornecer modelos adequados para certos tipos de células corticais. Em todo caso, a prova definitiva da adequação da abordagem sintonizada ao sinal como de qualquer outro modelo do córtex estriado [10,36] — dependerá da sua capacidade de prever as respostas neuronais a estímulos arbitrários, sob condições naturais de visão. Comprovando-se isto, a abordagem sintonizada pode se mostrar útil como uma ferramenta para a simulação dos processos da visão biológica, se não para descrever o efetivo funcionamento do córtex visual.

# Capítulo 3

## Aplicação ao Shape From Shading

## 3.1 Introdução

O shape from shading (SFS) é uma técnica de estimação de forma que vem sendo longamente estudada na visão computacional, os trabalhos pioneiros nesta área datando da década de 1970. Dada uma imagem de uma cena, o objetivo do SFS é recuperar um mapa de profundidades relativas a partir do padrão de irradiância associado à variação de orientação das superfícies na cena, geralmente assumidas suaves, uniformes, e iluminadas por uma fonte distante. Diferentes abordagens têm sido propostas para o shape from shading [17,67], todas elas baseadas na solução de alguma versão da equação de irradiância da imagem, que relaciona as intensidades registradas na imagem às propriedades fotométricas e geométricas da cena, incorporadas na função mapa de reflectância [24]. Os fundamentos neurofisiológicos da estimação visual de forma permanecem em grande medida ignorados, e poucas abordagens biologicamente inspiradas foram até o momento sugeridas para o SFS [30, 38], uma destas sendo o shape from shading linear/não-linear [57].

Em neurociências, a resposta de certos neurônios é frequentemente aproximada pelo chamado modelo linear/não-linear: o estímulo à célula é submetido, em sequência, a uma filtragem linear e a uma transformação não-linear, cuja saída irá fornecer a intensidade de um processo estocástico — geralmente de Poisson — de geração de espículas [34]. A intensidade de resposta fornecida pelo modelo pode portanto ser expressa como r = F(L), onde L é a saída do filtro linear e F é a transformação não-linear, geralmente escolhida sob a forma de uma função limiar, retificadora, ou sigmoide. No shape from shading linear/não-linear (LN-SFS), estimativas de profundidade são computadas submetendo-se a imagem de entrada à filtragem linear por funções de Gabor, seguida por uma série de transformações não-lineares baseadas nas curvas de sintonia dos neurônios corticais binoculares [41], as transformações sendo assim escolhidas com o propósito de formular o SFS de modo consistente com a estereoscopia biológica. Conforme demonstrado em [57], esta abordagem consegue produzir estimativas de profundidade plausíveis a partir de imagens sintéticas ou reais, sem precisar recorrer à equação de irradiância da imagem — ou seja, na ausência da informação requerida pelas abordagens tradicionais do shape from shading, como a reflectância das superfícies e a direção de iluminação.

O nosso objetivo, nesta parte do trabalho, foi estender a abordagem do LN-SFS, conservando em grande medida a sua estrutura geral, mas nos aproximando mais das condições reais da visão biológica. Para isto, nós incorporamos, num mesmo algoritmo de estimação monocular de forma, como descrito na próxima seção: i) elementos do processamento de baixo nível efetuado pela retina; ii) o descorrelacionamento de sinais que se acredita ser efetuado tanto pelas células ganglionares da retina como pelas células do núcleo geniculado lateral (NGL) [12], e iii) aprimorando a abordagem original do LN-SFS, o modelo sintonizado de Gabor para as respostas das células corticais [60].



Figura 3.1: Modelo para o Shape From Shading biologicamente inspirado. A seta mais à esquerda corresponderia à saída dos fotorreceptores, e a seta mais à direita, a uma estimativa do mapa de profundidades da cena.

### 3.2 Abordagem Bio-inspirada para o SFS

O coração da nova abordagem é o módulo cortical da Fig. 3.1, que se baseia numa modificação do algoritmo linear/não-linear apresentado em [57], cujas principais características sumariamos abaixo. Em seguida, nós discutimos as modificações aí introduzidas.

#### 3.2.1 LN-SFS Original

No *LN*-SFS original, um primeiro estágio submete a imagem de entrada a um banco de filtros complexos de Gabor, de diferentes frequências. Um modelo unidimensional é assumido, de forma que as intensidades da imagem que se encontram sob uma janela linear, de orientação e tamanho fixos e centrada na posição x (ver Fig.3.2) fornecem, na frequência  $\omega$ , a saída

$$L^{\theta}_{\omega} = \int_{\theta} d\xi e^{i\omega\xi} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{2\sigma^2}} I(\xi)$$
(3.1)

onde  $\sigma$  é um parâmetro livre, mantido fixo para toda a imagem, e  $\theta$  denota a orientação da janela sob a qual a integração é efetuada.

Num segundo estágio, o valor absoluto da resposta  $L_{\omega}^{\theta}$  é submetido a uma série de transformações modeladas nas curvas de sintonia dos neurônios seletivos a disparidade do córtex visual [41]. A estimativa de profundidade na posição x é então obtida somando-se as contribuições não-lineares sobre o conjunto de frequências e orientações consideradas, ou seja,

$$Z \equiv \sum_{\omega,\theta} Z_{\omega}^{\theta} = \sum_{\omega,\theta,\Omega} F_{\Omega}(|L_{\omega}^{\theta}|)$$
(3.2)

com o mapeamento  $F_{\Omega}$  definido como

$$F_{\Omega}(|L_{\omega}^{\theta}|) = [R_{T_0}\delta(L_{\Omega}^{\theta}) + R_{T_I} + R_{T_N}^{\Omega} + R_{T_F}^{\Omega}](|L_{\omega}^{\theta}|)$$
(3.3)

onde  $\delta$  denota a função impulso unitário, e onde as funções  $R_{T_0}$ ,  $R_{T_I}$ ,  $R_{T_N}$ , e  $R_{T_F}$  modelam as curvas de sintonia dos neurônios corticais binoculares classificados, respectivamente, como tuned-zero, tuned-inhibitory, tuned-near e tuned-far [40].

Mais especificamente, nós consideramos (ver a Fig. 3.2)

$$R^{\Omega}_{T_N,T_F}(L) = \exp\left[-\frac{(L \pm |L^{\theta}_{\Omega}|)^2}{\Sigma^2}\right]$$
(3.4)

onde  $\Sigma$  é um parâmetro livre e  $L_{\Omega}^{\theta}$  representa a saída do filtro linear na frequência  $\Omega$  (ver Eq. 3.1). Em termos do paralelo, estabelecido em [57], com um sistema estereoscópico, o valor de  $|L_{\Omega}^{\theta}|$  na Eq. 3.4 corresponderia à disparidade preferida dos neurônios sintonizados, os sinais  $\pm$  associando-se, respectivamente, aos neurônios tuned-near e tuned-far, enquanto uma resposta tuned-zero ( $T_0$ ) resulta quando  $L_{\Omega}^{\theta} = 0$ , neste caso,

$$R_{T_N}^{\Omega}(L) = R_{T_F}^{\Omega}(L) \equiv R_{T_0}(L) = \exp\left[-\frac{L^2}{\Sigma^2}\right]$$
(3.5)

Por outro lado, a resposta *tuned-inhibitory*  $(T_I)$  é modelada, independentemente de  $L_{\Omega}^{\theta}$ , como

$$R_{T_I}(L) = 1 - \exp\left(-\frac{L^2}{\Sigma^2}\right) \tag{3.6}$$

verificando-se ainda que as combinações  $R_{T_I} + R_{T_N}^{\Omega}$  e  $R_{T_I} + R_{T_F}^{\Omega}$  geram os tipos de perfis de sintonia conhecidos como *tuned far* e *tuned near*, respectivamente [57].



Figura 3.2: Sistema linear/não-linear para o SFS, como introduzido em [57]: (a) Uma janela de tamanho e orientação fixos é centrada em cada pixel da imagem, e uma medida linear,  $L^{\theta}_{\omega}$ , é obtida filtrando-se as intensidades da janela por uma função de Gabor complexa, representada na figura por  $D_{\omega}(x)$ . No estágio não-linear, o módulo de  $L^{\theta}_{\omega}$  é submetido a uma série de transformações modeladas nas funções de sintonia dos neurônios binoculares do córtex visual, representadas em (b). A combinação dos valores obtidos para as diversas orientações e frequências fornece a estimativa local de profundidade.

#### 3.2.2 LN-SFS Modificado

Na nossa abordagem bio-inspirada, nós mantivemos o estágio não-linear do LN-SFS original como um dos módulos corticais (ver Fig. 3.1), mas o estágio linear foi substituído pelo equivalente à resposta de Gabor sintonizada de uma célula simples, segundo o modelo descrito no Capítulo 2. Conforme visto ali, no caso unidimensional tal resposta, para uma célula sintonizada à frequência  $\omega$  e com campo receptivo centrado na posição x, toma a forma

$$(2\pi)^2 I(x,t-\tau) \int e^{-i\omega(\xi-x)} e^{-4\pi^3 |I(x,t-\tau)|^2 (\xi-x)^2} I(\xi,t) d\xi$$
(3.7)

onde I(x,t) denota o sinal de entrada no instante t, enquanto  $\tau$  denota o parâmetro de atraso da célula — i.e., o intervalo de tempo que o seu campo receptivo leva para se adaptar à variação da entrada. Como observado no Capítulo 2, a Eq. (3.7) corresponde a uma variante cruzada da transformada de Gabor sintonizada, em que a entrada no instante t é analisada por uma função de Gabor cujos parâmetros ficam definidos pelo valor desta mesma entrada no instante anterior  $t - \tau$ . Também ali nós salientamos que diferentes versões do sinal de entrada podem fazer os papéis da função de sintonia e do sinal analisado. Por exemplo, é possível considerar uma variante da Eq. (3.7) em que um campo receptivo sintonizado pelo estímulo original analisa uma versão branqueada deste estímulo. Dado que, em qualquer caso, a função analisadora depende do sinal analisado, a TGS não é linear, embora ela possa ser descrita como uma transformação 'quase-linear' (ver Capítulo 2).

Na nossa abordagem bio-inspirada, nós propusemos substituir o estágio linear do LN-SFS original por um módulo cortical quase-linear, cuja saída na posição x, para frequência  $\omega$  e orientação  $\theta$  (nós trabalhamos com  $\theta = 0$  e  $\theta = \pm \pi/4$ ), é obtida como

$$Lq_{\omega}^{\theta} = (2\pi)^{2} I'(x) \int_{\theta} e^{-i\omega(\xi-x)} e^{-4\pi^{3}|I'(x)|^{2}(\xi-x)^{2}} I(\xi) d\xi$$
(3.8)

onde I e I' representam estímulos que são assumidos seguirem diferentes caminhos de processamento — desde os fotorreceptores, através da retina e do NGL, até o córtex visual —, conforme discutido a seguir. Deve-se observar que, como o shape from shading lida com sinais estáticos, qualquer referência temporal perde sentido, e é portanto omitida na Eq. (3.8).

Nós encontramos, portanto, assim como no LN-SFS original, uma transformada de Gabor como primeiro estágio cortical da nova abordagem — mas neste caso tratandose de uma transformada de Gabor sintonizada. Como demonstrado no Capítulo 2, tal transformada pode ser relacionada à correlação cruzada entre os espectros do sinal de sintonia e do sinal analisado. Mais especificamente, se nós integrarmos, por exemplo, a resposta  $Lq_{\omega}^0$  sobre todas as frequências, iremos obter  $2\pi I(x)I'(x)$ , que é a transformada de Fourier inversa da correlação espectral entre os sinais I(x) e I'(x),

$$\tilde{I}(\omega) \star \tilde{I}'(\omega) = \int \tilde{I}^*(\Omega) \tilde{I}'(\Omega + \omega) d\Omega$$
(3.9)

Isto significa que, em certo sentido, o primeiro estágio cortical do nosso algoritmo bioinspirado computa uma medida de similaridade entre as entradas corticais provenientes dos dois caminhos considerados.

É interessante observar que o cômputo da medida quase-linear  $Lq_{\omega}^{\theta}$ , envolvendo o que seriam duas entradas distintas ao córtex a partir do NGL, pode ser considerado consistente com o nosso propósito de traçar um paralelo entre as formulações do shape from shading e da estereoscopia. Isto porque é sabido que o NGL se organiza em uma série de camadas, cada uma das quais recebendo entrada de apenas um olho [25]. Nós podemos então sugerir que os sinais  $I \in I'$  na Eq. (3.8) fariam um papel equivalente ao de saídas do NGL originadas em camadas associadas a olhos distintos — o que igualmente serviria para reforçar a nossa interpretação de  $|Lq_{\omega}^{\theta}|$  como uma espécie de 'medida de disparidade', a ser analisada pelo estágio não-linear do módulo cortical. A saída deste último módulo, assim como no LN-SFS, é dada por (ver Eq. (3.2))

$$\sum_{\omega,\theta,\Omega} F_{\Omega}(|Lq_{\omega}^{\theta}|) \equiv \Delta$$
(3.10)

medida que, no nosso algoritmo, fornece uma estimativa do mapa de profundidades das superfícies na cena como

$$Z = \frac{\Delta}{\Delta^2 + \alpha} \tag{3.11}$$

onde  $\alpha$  é uma constante, escolhida aqui como  $\alpha = 0,001$ . A forma empiricamente escolhida para a estimativa Z foi motivada, novamente, pelo propósito de estabelecer um paralelo entre o SFS e a estereoscopia. Pela Eq. (3.11), valores altos de  $\Delta$  – i.e., quando  $\Delta^2 >> \alpha$ – resultam em mapas de profundidade inversamente proporcionais a  $\Delta$ , enquanto valores baixos de  $\Delta$  resultam em profundidades diretamente proporcionais a  $\Delta$ . O primeiro regime mostra-se portanto consistente com a situação na estereoscopia, sob projeção perspectiva, em que profundidade e disparidade estereoscópica são inversamente proporcionais; já o segundo, conforme demonstrado em [53], mostra-se consistente com a proporcionalidade direta entre disparidade fotométrica e profundidade, como se observa, sob projeção ortográfica, no Estéreo Fotométrico Baseado em Disparidades [51] e no Green's function shape from shading [52]. Uma disparidade monocular, como considerada nesses dois processos – e, de certo modo, também aqui – se assemelharia a uma disparidade estereoscópica no limite em que a projeção perspectiva se aproxima da projeção ortográfica – ou seja, quando câmera e cena estão distantes, e os valores das disparidades estereoscópicas são pequenos.

Em alguns experimentos, mostrou-se vantajoso adotar a prescrição, sugerida originalmente em [52], de dividir a medida  $\Delta$ , na Eq. (3.11), por um fator  $k_{\theta}(y - \gamma x)$ , onde  $\gamma = \arctan(\theta)$ , sendo  $\theta$  a direção da janela sobre a qual a medida quase-linear  $Lq_{\omega}^{\theta}$  é calculada. O fator modulador é obtido a partir de (ver [52])

$$k_{\theta}^{4}(y - \gamma x) = \frac{\int [Z(p + \gamma q)]^2 ds}{\int (x + \gamma y)^2 ds}$$
(3.12)

onde

$$p = \frac{\partial Z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial Z}{\partial y}$$
 (3.13)

são as componentes do gradiente do mapa Z na Eq. (3.11), e onde s denota a direção perpendicular às linhas  $y - \gamma x = \text{constante.}$  Assim, quando  $\theta = 0$ , por exemplo, a integração se faz ao longo da horizontal, e quando  $\theta = \pm \pi/4$ , ela se faz ao longo das direções  $\mp \pi/4$ . Para cada  $\theta$  utilizado, obtém-se a nova estimativa

$$Z_{\theta} = \frac{\Delta/k_{\theta}}{(\Delta/k_{\theta})^2 + \alpha} \tag{3.14}$$

e toma-se a sua média aritmética,  $\overline{Z}_{\theta}$ , como a estimativa final de profundidades, caso vários valores de  $\theta$  sejam considerados, ou seja, a nossa estimativa do mapa de profundidades passa a ser  $Z_{\text{est}} = \overline{Z}_{\theta}$ .

Voltando agora à questão da escolha da forma específica dos sinais  $I \in I'$ , o nosso objetivo, como já mencionado, foi o de incorporar à nova abordagem do SFS, além da modelagem sintonizada das células do córtex visual, elementos do processamento efetuado pela retina e pelo núcleo geniculado lateral, conforme discutiremos a seguir.

#### 3.2.3 Módulo Retino-Geniculado

Na referência [7], um modelo bastante detalhado do funcionamento da retina foi introduzido, e sugerido como base para o desenvolvimento de algoritmos biologicamente inspirados para o processamento de imagens. O modelo inclui, além dos fotorreceptores, as células horizontais, bipolares, amácrinas e ganglionares, e implementa simulações das camadas plexiformes interna e externa da retina, com o uso de filtros específicos. Entre os efeitos de processamento de baixo nível obtidos incluem-se a equalização e o branqueamento das entradas retinais — esta última transformação sendo igualmente atribuída às células do NGL [12]. Um protótipo para a implementação do modelo retinal encontra-se disponível na internet (https://sites.google.com/site/benoitalexandrevision/demonstrations), e o nosso objetivo inicial era o de utilizá-lo, com diferentes valores dos parâmetros de ajuste, para gerar as entradas  $I \in I'$  do módulo cortical do SFS bio-inspirado (ver Eq. (3.8)). No entanto, os resultados obtidos provaram-se pouco confiáveis, mostrando-se extremamente sensíveis aos ajustes empregados, e isto nos levou a rejeitar tal estratégia.

Nós decidimos então testar o nosso algoritmo com uma versão radicalmente simplificada da proposta inicial, escolhendo para I' (o sinal de sintonia do campo receptivo, conforme a Eq. (3.8)) a imagem retinal equalizada e branqueada, desta forma simulando parte do processamento de baixo nível modelado em [7]. Para a obtenção da I', nós implementamos então uma simples equalização de histograma (como se sabe, este tipo de processamento já foi identificado na retina da mosca [29]), seguida pelo branqueamento da imagem resultante, obtido por sua codificação pelos campos sintonizados centro-periferia introduzidos em [59].

Já para a imagem I (o sinal analisado na Eq. (3.8)), nós escolhemos uma versão suavizada por integração, sobre janelas horizontais locais com sete pixels de largura, da imagem retinal original. Este tipo de transformação pode ter a sua contrapartida, na visão biológica, no processamento efetuado pelas células horizontais da retina, que, como se sabe, são simultaneamente alimentadas por grupos locais de fotorreceptores. Talvez se argumente ser pouco plausível que um estímulo se propague desde a retina até o córtex visual sem sofrer qualquer transformação ao longo do trajeto. Mas o nosso objetivo aqui foi o de buscar inspiração biológica para o nosso algoritmo, e não o de garantir a sua plausibilidade neurofisiológica. Ademais, como o nosso trabalho experimental comprova, a incorporação de elementos de um pré-processamento bio-inspirado, ainda que bastante simplificado, ao nosso algoritmo de SFS proporcionou ganhos substanciais sobre o LN-SFS que lhe serviu de modelo, produzindo consistentemente estimativas de melhor qualidade, como apresentado abaixo.

#### 3.3 Resultados Experimentais

A seguir, apresentamos alguns resultados experimentais fornecidos pela nossa abordagem. Dado que os parâmetros do módulo retino-geniculado (equalização e branqueamento, para a imagem I', e integração, para a imagem I) foram mantidos fixos, o algoritmo requer a escolha de apenas dois parâmetros do módulo cortical: o tamanho da janela sobre a qual a transformada sintonizada de Gabor é calculada, e a largura das funções Gaussianas de sintonia do estágio não-linear ( $\Sigma$ ), conforme a Tabela 3.1. As reconstruções ilustradas nas figuras de 3.3 a 3.7 foram obtidas a partir de imagens cujos mapas reais de profundidades encontram-se disponíveis [19,67], possibilitando a estimativa de erros, conforme apresentado nas Tabelas 3.1 e 3.2. Nós consideramos o erro do melhor ajuste do mapa de profundidades estimado ao mapa real (*best-fit error* [46]), e o erro médio das intensidades, obtido a partir da re-iluminação das superfícies reconstruídas, assumindo reflectância Lambertiana e a mesma iluminação da imagem original. Em todos os casos, observam-se taxas de erro inferiores às obtidas com o LN-SFS [57]. Por outro lado, nos experimentos com imagens de cenas cujos mapas reais de profundidades são desconhecidos, as estimativas fornecidas pelo SFS bio-inspirado mostram-se visualmente consistentes.

Tabela 3.1: Imagens e parâmetros de reconstrução. Exceto quando informado na coluna *Observações*, as imagens são de superfícies lambertianas e têm dimensão de 256 x 256 pixels. A tripla de números entre parênteses indica a direção de iluminação, quando esta é conhecida. A imagem Mozart3 foi gerada com o modelo de Phong [39], combinando uma componente lambertiana e uma pequena (10%) componente quase-especular. As imagens Head1, Head2 [19], Face, Melina, Lena, Neiva, Yale11, Yale19, Yale20 e Storm Trooper foram capturadas sob iluminação desconhecida.

| Imagem          | Observações   | Janela | $\Sigma$ | Silhueta | $\theta$    | $\gamma$ |
|-----------------|---------------|--------|----------|----------|-------------|----------|
| Head1           | 266 x 200     | 7      | 3,0      | Sim      | $\pm \pi/4$ | 1 e -1   |
| Head2           | $266 \ge 200$ | 7      | 2,9      | Sim      | $\pm \pi/4$ | 1 e -1   |
| Mozart1         | (1;0;1)       | 7      | 1,8      | Sim      | $\pm \pi/4$ | 1 e -1   |
| Mozart2         | (5;5;7)       | 7      | 2,3      | Sim      | $\pm \pi/4$ | 1 e -1   |
| Mozart3         | Glossy(0;0;1) | 7      | 2,3      | Sim      | $\pm \pi/4$ | 1 e -1   |
| Vaso Sintético1 | -             | 3      | 1,8      | Sim      | 0           | 0        |
| Vaso Sintético2 | (0;0,25;1)    | 3      | 1,2      | Sim      | 0           | 0        |
| Vaso Sintético3 | $I^2$         | 3      | 1,0      | Sim      | 0           | 0        |
| Vaso Real       | -             | 3      | 1,6      | Sim      | 0           | 0        |
| Face            | $256 \ge 314$ | 7      | 2.5      | Sim      | 0           | -        |
| Melina Perfil   | $192 \ge 256$ | 3      | 1,3      | Não      | 0           | -        |
| Melina Frontal  | $192 \ge 256$ | 3      | 1,5      | Não      | 0           | -        |
| Lena            | -             | 3      | 0,9      | Não      | 0           | -        |
| Neiva           | -             | 3      | 0,9      | Sim      | 0           | -        |
| Yale 11         | -             | 3      | 0,95     | Sim      | 0           | -        |
| Yale 19         | -             | 3      | 0,8      | Sim      | 0           | -        |
| Yale 20         | -             | 3      | 0,8      | Sim      | 0           | -        |
| Storm Trooper   | -             | 3      | 1,1      | Sim      | $\pm \pi/4$ | 1 e -1   |

Tabela 3.2: Erro Médio de Profundidades %

| Imagem          | Nossa Proposta | Ref. [57] |
|-----------------|----------------|-----------|
| Head1           | 5,26           | $6,\!11$  |
| Head2           | 7,24           | $7,\!95$  |
| Mozart1         | 5,72           | $10,\!05$ |
| Mozart2         | $5,\!68$       | $10,\!08$ |
| Mozart3         | $5,\!32$       | $9,\!67$  |
| Vaso Sintético1 | $3,\!10$       | $7,\!83$  |
| Vaso Sintético2 | 2,81           | $7,\!89$  |
| Vaso Sintético3 | 2,23           | $6,\!99$  |
| Vaso Real       | 3,28           | $4,\!42$  |

| Imagem          | Nossa Proposta | Ref. [57] |
|-----------------|----------------|-----------|
| Head1           | 16,88          | 18,08     |
| Head2           | $21,\!64$      | 15,77     |
| Mozart1         | $11,\!81$      | $15,\!56$ |
| Mozart2         | 12,40          | $16,\!38$ |
| Mozart3         | 0,46           | $^{3,72}$ |
| Vaso Sintético1 | $7,\!42$       | $^{8,25}$ |
| Vaso Sintético2 | 6,76           | $^{8,29}$ |
| Vaso Sintético3 | 7,20           | $7,\!40$  |
| Vaso Real       | 5,00           | $6,\!11$  |

Tabela 3.3: Erro Médio de Intensidades %



Figura 3.3: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. (a) Imagem de entrada: Head1. (b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.4: Reconstrução usando o modelo proposto de SFS. a) Imagem de entrada: Head2; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.5: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: Mozart1; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.6: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: Mozart2; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.7: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: Mozart3; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.8: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: Vaso Sintético1; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.9: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: Vaso Sintético2; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.10: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: Vaso Sintético3; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.11: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: Face; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0, 0, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.12: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: Melina Perfil; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0; 0,5; 0,5). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.13: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: Melina Frontal; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (1; 0,5; 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.


Figura 3.14: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: Lena; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0, 1, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.15: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: Neiva; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (1, 1, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.16: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: base Yale 11; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0,5; 0,5; 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.17: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: base Yale 19; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0,5; 0,5; 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.18: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: base Yale 20; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (1, 1, 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.



Figura 3.19: Reconstrução usando o modelo proposto para o SFS. a) Imagem de entrada: Storm Trooper; b) Duas perspectivas do mapa de profundidades estimado. c) Imagem obtida pela reiluminação do mapa de profundidades estimado, iluminação (0,5; 0,5; 1). (d) representação da superfície estimada, com as profundidades codificadas pelos níveis de cinza.

# Capítulo 4

# Estendendo a Abordagem Sintonizada

# 4.1 Introdução

O Capítulo 2 apresentou a abordagem sintonizada para a modelagem neural conforme introduzida em [60]. Desde o aparecimento daquele artigo, registraram-se os seguintes desenvolvimentos relativos à abordagem:

i) Em [54], a equação de movimento obedecida pela resposta da célula complexa unidimensional foi derivada, e demonstrada equivalente à equação de Schrödinger para um sistema quântico de massa imaginária e potencial complexo, ambos uniformes mas dependentes do tempo. Equações desse tipo estão em geral associadas a sistemas dissipativos [8, 18], em que há troca de massa e/ou energia com o ambiente — este sendo o caso, evidentemente, do cérebro. Conforme também demonstrado em [54], as respostas naturais do sistema — correspondentes às funções de onda da equação de Schrödinger — assumem duas formas: uma resposta baseada na onda-plana, e uma resposta baseada na função de Airy [62], a primeira prestando-se para a modelagem das respostas neuronais graduais que decaem rapidamente —, e a segunda prestando-se, sob certas condições, à modelagem das respostas propagadas — isto é, dos potenciais de ação (espículas ou spikes), capazes de propagação por longas distâncias.

ii) Posteriormente, em [55], sugeriu-se que a abordagem sintonizada proporciona uma interpretação *quantum-like* para a geração das respostas neuronais<sup>1</sup>: sem assumir que processos quânticos estejam envolvidos no funcionamento da célula, demonstrou-se que quando a resposta de onda plana é considerada como uma amplitude de probabilidade,

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Abordagens quantum-like, que tentam associar alguns aspectos de uma descrição quântica – como amplitudes de probabilidade complexas – a ferramentas clássicas de modelagem neural, têm sido bem sucedidas na modelagem de processos cognitivos e comportamentais [1, 27, 28].

em concordância com os postulados da física quântica, o seu módulo quadrado pode ser associado a uma probabilidade de geração de espículas consistente com as observações experimentais.

No presente capítulo, nós iremos apresentar novos desenvolvimentos relacionados ao modelo sintonizado unidimensional para as células corticais, propondo uma versão generalizada para os campos receptivos sintonizados, com base em funções de codificação das derivadas em qualquer ordem do sinal de sintonia, que se obtêm pela incorporação dos polinômios de Hermite às funções de Gabor sintonizadas originais. A partir daí, nós obteremos as respostas das classes de células que nós denotamos como da *classe simples* e da classe complexa – que incluem as células simples e complexas como casos particulares -, derivando também as respectivas equações de movimento e propondo a interpretação quantum-like das suas soluções. O nosso estudo da abordagem sintonizada expandida demonstra que as células da *classe simples* fornecem respostas qualitativamente semelhantes às das células simples, o mesmo se passando com as respostas das células da *classe com*plexa em relação às das células complexas. Ou seja, as respostas neurofisiológicas das células corticais, quando submetidas a estímulos-padrão como grades contrafase ou em movimento, mostram-se compatíveis com as fornecidas pelo nosso modelo sintonizado expandido. É importante ressaltar um resultado significativo da extensão da interpretação quantum-like às células simples - e, de forma mais geral, às da classe simples: o fato de que desta resulta, naturalmente, a retificação da resposta. Esta propriedade se mostra de acordo com as observações experimentais, e surge, no contexto da abordagem sintonizada, sem a necessidade de incorporação de um estágio adicional de retificação, após a filtragem linear, como assumido pelos modelos correntes das células simples.

No que se segue, nós inicialmente apresentamos a notação que será adotada a partir de agora, que difere ligeiramente daquela empregada no Capítulo 2, e esclarecemos certos pontos relativos à interpretação da abordagem sintonizada. Nós também reportamos os resultados mais importantes das referências [54] e [55], antes de introduzir as classes generalizadas dos neurônios sintonizados da *classe simples* e da *classe complexa*.

# 4.2 Abordagem Sintonizada de Gabor Revisitada

# 4.2.1 Célula Complexa

A resposta, na posição x e no instante t, da célula complexa com frequência de sintonia  $\omega_0$  e campo receptivo centrado em  $x_0$  fica dada por

$$r_c(x,\tau) \equiv r_c(x,\tau;x_0,\omega_0,t) = \int e^{-i[\omega_0\xi + \varphi(\omega_0,t-\tau)]} e^{-k_c^2 \frac{[\xi-(x+x_0)]^2}{2|\tilde{I}(\omega_0,t-\tau)|^2}} I(\xi,t) d\xi$$
(4.1)

onde  $k_c$  é um parâmetro de dimensão L<sup>-1</sup>, e onde  $\tau$  passa a ser assumido como uma variável.<sup>2</sup>

A equação de movimento satisfeita por  $r_c(x, \tau)$  (uma equação semelhante valeria para  $r_c(x_0, \tau)$ ) corresponde, conforme demonstrado em [54], à equação de Schrödinger para um sistema quântico com massa e potencial dados por

$$M_c(\tau) = ik_c^2 \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} |\tilde{I}(\omega_0, t_-)|^2 \right]^{-1}$$
(4.2)

е

$$U_c(\tau) = i \frac{\partial}{\partial \tau} \log \tilde{I}^*(\omega_0, t_-)$$
(4.3)

Nós vamos assumir que a resposta  $r_c(x, \tau)$  de uma célula complexa com parâmetro de delay  $\tau_0$  terá a sua dinâmica definida por esta equação, entre os instantes  $t - \tau_0$  e t.

As soluções da equação de movimento são as respostas *naturais* da célula, que correspondem às *funções de onda* do sistema quântico, a resposta na Eq. (4.1) equivalendo a uma *resposta forçada*. As respostas naturais assumem duas formas distintas: uma baseada na *onda plana* e outra baseada na *função de Airy*, que, a menos de fatores multiplicativos independentes de x ou  $\tau$ , assumem a forma abaixo:

Resposta de Onda Plana:

$$r_c^P(x,\tau) = \tilde{I}^*(\omega_0, t_-) e^{iA(x+x_0)} e^{-\frac{1}{2}\frac{A^2}{k_c^2} |\tilde{I}(\omega_0, t_-)|^2}$$
(4.4)

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>As integrais vão de  $-\infty$  a  $\infty$ . A partir daqui, por simplicidade, nós assumimos definições simétricas para as transformadas de Fourier direta e inversa:  $\tilde{I}(\omega) = \int e^{-i\omega x} I(x) dx$  e  $I(x) = \int e^{i\omega x} \tilde{I}(\omega) d\omega$ , e daí, portanto,  $\delta(x) = \int e^{i\omega x} d\omega$ . Pelas expressões das transformadas, assumindo-se I(x) adimensional,  $\tilde{I}(\omega)$ adquire dimensão de espaço, e, reciprocamente, assumindo-se  $\tilde{I}(\omega)$  adimensional, I(x) adquire dimensão de frequência. Para tratar igualmente os domínios espacial e espectral, nós vamos assumir que o estímulo e a sua transformada encontram-se multiplicados por constantes de dimensão adequada e com valor unitário, de modo a poder considerá-los ambos grandezas adimensionais.

Resposta da Função de Airy:

$$r_{c}^{A}(x,\tau) = \tilde{I}^{*}(\omega_{0},t_{-})\operatorname{Ai}\left(x+x_{0}+\frac{1}{4}\frac{B^{3}}{k_{c}^{4}}|\tilde{I}(\omega_{0},t_{-})|^{4}\right) \times \\ \times e^{-\frac{1}{2}\frac{B^{2}}{k_{c}^{2}}|\tilde{I}(\omega_{0},t_{-})|^{2}\left(x+x_{0}+\frac{1}{6}\frac{B^{3}}{k_{c}^{4}}|\tilde{I}(\omega_{0},t_{-})|^{4}\right)}$$
(4.5)

onde Ai denota a função de Airy [62], e onde A e B, que são parâmetros livres correspondentes ao momentum da resposta ( $A^2 \in B^2$  equivalendo portanto a energias), podem ser funções de  $x_0, \omega_0 \in t$ .

A expressão para a resposta da função de Airy é apresentada aqui apenas por completeza. Em [54], sugeriu-se que esta resposta poderia modelar a propagação de espículas, mas esta possibilidade não será explorada aqui, onde o nosso foco recai sobre a resposta de onda plana. Conforme observado em [55], a resposta de onda plana pode ser interpretada como uma amplitude de probabilidade na variável  $\frac{A^2}{k_c^2}$ , já que o seu módulo quadrado toma a forma de uma densidade de probabilidade exponencial negativa naquela variável,

$$|r_c^P(x,\tau)|^2 = |\tilde{I}(\omega_0, t_-)|^2 e^{\frac{-A^2}{k_c^2}|\tilde{I}(\omega_0, t_-)|^2}$$
(4.6)

A partir da conhecida relação entre a densidade exponencial negativa e a densidade de Poisson, comumente utilizada como modelo para a geração de *spikes*, sugeriu-se em [55] uma interpretação *quantum-like* para a abordagem sintonizada, segundo a qual a resposta de onda plana se associa à probabilidade de geração de espículas, cuja propagação, por sua vez, seria descrita pela resposta da função de Airy.

## 4.2.2 Célula Simples

A resposta, na frequência  $\omega$  e no instante t, da célula simples com frequência de sintonia  $\omega_0$  e campo receptivo centrado em  $x_0$  fica dada por

$$r_s(\omega,\tau) \equiv r_s(\omega,\tau;x_0,\omega_0,t) = \int e^{i[\Omega x_0 - \phi(x_0,t-\tau)]} e^{-\frac{[\Omega - (\omega+\omega_0)]^2}{2k_s^2 |I(x_0,t-\tau)|^2}} \tilde{I}(\Omega,t) d\Omega$$
(4.7)

onde  $k_s$  tem dimensão L<sup>-1</sup>.

A equação de movimento satisfeita por  $r_s(\omega, \tau)$  (uma equação semelhante seria obedecida por  $r_s(\omega_0, \tau)$ ) corresponde à equação de Schrödinger, nas variáveis  $\omega \in \tau$ , de um sistema quântico com massa e potencial dados por

$$M_s(\tau) = ik_s^{-2} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} |I(x_0, t_-)|^2\right]^{-1}$$
(4.8)

е

$$U_s(\tau) = i \frac{\partial}{\partial \tau} \log I^*(x_0, t_-)$$
(4.9)

De forma semelhante ao caso da célula complexa, nós assumiremos que a resposta  $r_s(\omega, \tau)$ da célula simples com parâmetro de *delay*  $\tau_0$  terá sua dinâmica definida, entre  $t - \tau_0$  e t, por esta equação de Schrödinger.

As soluções da equação de movimento são as respostas *naturais*, equivalentes às funções de onda do sistema quântico, que podem assumir a forma de uma resposta de *onda plana* ou de uma resposta da *função de Airy*, conforme abaixo:

Resposta de Onda Plana:

$$r_s^P(\omega,\tau) = k_s I^*(x_0,t_-) e^{-iA(\omega+\omega_0)} e^{-\frac{A^2}{2}k_s^2|I(x_0,t_-)|^2}$$
(4.10)

Resposta da Função de Airy:

$$r_{s}^{A}(\omega,\tau) = I^{*}(x_{0},t_{-}) \operatorname{Ai}\left(\omega + \omega_{0} + \frac{B^{3}}{4}k_{s}^{4}|I(x_{0},t_{-})|^{4}\right) \times \\ \times e^{-\frac{B^{2}}{2}k_{s}^{2}|I(x_{0},t_{-})|^{2}\left(\omega + \omega_{0} + \frac{B^{3}}{6}k_{s}^{4}|I(x_{0},t_{-})|^{4}\right)}$$
(4.11)

onde, novamente,  $A \in B$  — os parâmetros de *momentum* da resposta — podem ser funções de  $x_0, \omega_0 \in t$ . Assim como no caso da célula complexa, a resposta na Eq. (4.7) corresponde a uma *resposta forçada* do sistema.

# 4.2.3 Resposta da Célula Simples em Função de x e au

Para obter a resposta de *onda plana* da célula simples como função de  $x \in \tau$ , nós tomamos a transformada de Fourier inversa de  $r_s^P(\omega, \tau)$ ,

$$r_s^P(x,\tau) \equiv r_s^P(x,\tau;x_0,\omega_0,t) = \int e^{i\omega(x-x_0)} r_s^P(\omega,\tau) d\omega$$
(4.12)

e, usando a Eq. (4.10),

$$r_s^P(x,\tau) = k_s I(x_0, t_-) e^{iA\omega_0} e^{-\frac{A^2}{2}k_s^2 |I(x_0, t_-)|^2} \int e^{i\omega(x-x_0-A)} d\omega$$
(4.13)

Portanto,

$$r_s^P(x,\tau) = k_s I(x_0, t_-) e^{iA\omega_0} e^{-\frac{A^2}{2}k_s^2 |I(x_0, t_-)|^2} \delta(x - x_0 - A)$$
(4.14)

De forma semelhante ao proposto para a célula complexa em [55] (ver acima), nós assumimos aqui que  $r_s^P(x,\tau)$  corresponde a uma *amplitude de probabilidade* na variável  $A^2$ , mas, neste caso, a Eq. (4.14) impõe uma condição extra: que o momentum seja dado por

$$A \equiv |I(\omega_0, t)| = x - x_0 \tag{4.15}$$

Assim, a probabilidade de resposta na posição x será nula, exceto quando

$$x = x_0 + A \equiv x_0 + |I(\omega_0, t)|$$
(4.16)

Assumindo que tal condição é satisfeita, nós obtemos, a partir da Eq. (4.14),

$$|r_s^P(x,\tau)|^2 = k_s^2 |I(x_0,t_-)|^2 e^{-A^2 k_s^2 |I(x_0,t_-)|^2}$$
(4.17)

que é uma densidade de probabilidade exponencial negativa na variável  $A^2$ , com intensidade  $k_s^2 |I(x_0, t_-)|^2$ , à qual estará associada, assim como no caso da célula complexa, uma probabilidade de emissão de *spikes* da forma de Poisson. Este modelo será detalhado a seguir, no âmbito da generalização da abordagem sintonizada de Gabor introduzida na próxima seção.

# 4.3 Introduzindo os Polinômios de Hermite

# 4.3.1 Funções Sintonizadas da Primeira Forma

As funções sintonizadas de Gabor da primeira forma,

$$\psi_{\omega}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i[\omega x + \varphi(\omega)]} e^{-\frac{x^2}{2|I(\omega)|^2}}$$
(4.18)

podem ser obtidas como caso particular, para n = 0, das funções

$$\psi_{\omega}^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\left(-1\right)^{n}}{|\tilde{I}(\omega)|^{n}} e^{i[\omega x + \varphi(\omega)]} \overline{H}_{n} \left[ \frac{x - i\omega |\tilde{I}(\omega)|^{2}}{|\tilde{I}(\omega)|} \right] e^{-\frac{x^{2}}{2|\tilde{I}(\omega)|^{2}}}$$
(4.19)

que também podem ser escritas como

$$\psi_{\omega}^{(n)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{|\tilde{I}(\omega)|^n} e^{i\varphi(\omega)} e^{-\frac{\omega^2}{2}|\tilde{I}(\omega)|^2} \overline{H}_n \left[\frac{x - i\omega|\tilde{I}(\omega)|^2}{|\tilde{I}(\omega)|}\right] e^{-\frac{[x - i\omega]\tilde{I}(\omega)|^2]^2}{2|\tilde{I}(\omega)|^2}} \tag{4.20}$$

onde os  $\overline{H}_n(x)$ são os polinômios de Hermite na forma "dos probabilistas", ou seja,

$$\overline{H}_n(x) = 2^{-n/2} H_n(x/\sqrt{2})$$
(4.21)

com  $H_n(x)$  denotando os polinômios de Hermite "dos físicos", mais comumente encontrados. Os polinômios  $\overline{H}_n(x)$ são dados por

$$\overline{H}_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$
(4.22)

e satisfazem a propriedade

$$\overline{H}_{n}^{\prime\prime}(x) - x\overline{H}_{n}^{\prime}(x) = -n\overline{H}_{n}(x) \tag{4.23}$$

onde as plicas denotam derivação. Os primeiros desses polinômios são listados abaixo:

$$\begin{cases} \overline{H}_0(x) = 1\\ \overline{H}_1(x) = x\\ \overline{H}_2(x) = x^2 - 1\\ \overline{H}_3(x) = x^3 - 3x \end{cases}$$

$$(4.24)$$

O seguinte resultado vale para a transformada de Fourier dos  $\overline{H}_n$ ,

$$\mathcal{F}\{e^{-x^2/2}\overline{H}_n(x)\}(\omega') = \sqrt{2\pi}(-i\omega')^n e^{-\omega'^2/2}$$
(4.25)

ou, relembrando as propriedades de escala e translação da transformada,

$$\mathcal{F}\left\{e^{-\frac{(x-i\beta)^2}{2\alpha^2}}\overline{H}_n\left(\frac{x-i\beta}{\alpha}\right)\right\}(\omega') = \sqrt{2\pi}\alpha^{n+1}(-i\omega')^n e^{-\frac{\omega'^2\alpha^2}{2}}e^{\omega'\beta}$$
(4.26)

Usando isto, é possível demonstrar que as funções  $\psi_{\omega}^{(n)}$  fornecem uma representação exata das derivadas do sinal de sintonia, sob a forma

$$I^{(n)}(x) = \int e^{i\omega x} * \psi^{(n)}_{\omega}(x) d\omega$$
(4.27)

Especificamente, tomando a transformada de Fourier dos dois lados da equação acima, nós obtemos

$$\mathcal{F}\{I^{(n)}(x)\}(\omega') = (-1)^n \times$$
$$\times \int \frac{e^{i\varphi(\omega)}}{|\tilde{I}(\omega)|^n} e^{-\frac{\omega^2}{2}|\tilde{I}(\omega)|^2} \delta(\omega - \omega') |\tilde{I}(\omega)|^{n+1} (-i\omega')^n e^{-\frac{\omega'^2|\tilde{I}(\omega)|^2}{2}} e^{\omega'^2|\tilde{I}(\omega)|^2} d\omega$$
(4.28)

e portanto,

$$\mathcal{F}\{I^{(n)}(x)\}(\omega') = (i\omega')^n |\tilde{I}(\omega')| e^{i\varphi(\omega')} = \mathcal{F}\left\{\frac{d^n}{dx^n}I(x)\right\}(\omega')$$
(4.29)

o que demonstra a propriedade.

# 4.3.2 Modelagem Sintonizada para Células da Classe Complexa

Nós propomos uma generalização do modelo sintonizado para as células complexas, com base nas funções sintonizadas  $\psi_{\omega}^{(n)}$ , da Eq. (4.19).

### 4.3.2.1 Resposta Forçada

A resposta forçada das células que nós identificaremos como da classe complexa fica dada por<sup>3</sup>

$$r_n(x,\tau) = \int \overline{H}_n^* \left[ \frac{x-\xi-i\omega |\tilde{I}(\omega,t_-)|^2}{|\tilde{I}(\omega,t_-)|} \right] G(\xi,x,t_-) I(\xi,t) d\xi$$
(4.30)

- com o asterisco denotando conjugação complexa-,o que equivale a

$$r_n(x,\tau) = \int \overline{H}_n \left[ \frac{x - \xi + i\omega |\tilde{I}(\omega, t_-)|^2}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] G(\xi, x, t_-) I(\xi, t) d\xi$$
(4.31)

onde

$$G(\xi, x, t_{-}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{|\tilde{I}(\omega, t_{-})|^n} e^{-i[\omega\xi + \varphi(\omega, t_{-})]} e^{-\frac{(\xi - x)^2}{2|\tilde{I}(\omega, t_{-})|^2}}$$
(4.32)

é a função de Gabor cujo produto com o polinômio de Hermite, na Eq. (4.31), define o campo receptivo da célula da *classe complexa*. A resposta forçada corresponde portanto à filtragem do estímulo no instante t pela função de representação da sua enésima derivada no instante  $t - \tau$ .

Conforme demonstrado no Apêndice D, a resposta  $r_n$ , para um n qualquer, satisfaz a mesma equação de movimento obtida quando n = 0, ou seja,

$$\partial_{\tau}r_n(x,\tau) = \frac{1}{2}\partial_{\tau}|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2\partial_x^2r_n(x,\tau) + \partial_{\tau}\log[\tilde{I}^*(\omega,t_-)]r_n(x,\tau)$$
(4.33)

que corresponde à equação de Schrödinger para um sistema com massa

$$M(\tau) = i\partial_{\tau}^{-1} |\tilde{I}(\omega, t_{-})|^2 \tag{4.34}$$

e potencial

$$U(\tau) = i\partial_{\tau}\log\tilde{I}^*(\omega, t_{-}) \tag{4.35}$$

É interessante observar que as *funções de Hermite*, que são produtos de gaussianas por polinômios de Hermite "dos físicos", já foram propostas como um modelo mais adequado

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Por simplicidade, nós estamos denotando a frequência de sintonia da célula por  $\omega$ , em vez de  $\omega_0$ . Nós estamos também assumindo parâmetro  $k_c = 1$ , e o centro do campo receptivo em  $x_0 = 0$ . Os resultados que se seguem se generalizam para o caso  $x_0 \neq 0$ , desde que se interprete x como a posição relativa ao centro do campo receptivo.

para os campos receptivos corticais do que as funções de Gabor [50]. As funções de Hermite correspondem às autofunções da energia do oscilador harmônico quântico, e nós verificamos que, com base nelas, é possível construir funções sintonizadas de Gabor que se prestam à codificação do sinal de sintonia — mas não das suas derivadas —, quando a ordem do polinômio de Hermite envolvido é par. No entanto, neste caso, a equação de movimento, Eq. 4.33, não é, em geral, satisfeita. Por tais razões, nós decidimos trabalhar aqui com as funções de Hermite "dos probabilistas".

# 4.3.3 Resposta Natural

As respostas naturais (funções de onda) das células da *classe complexa* são obtidas resolvendo-se a Eq. (D.14), conforme apresentado em [54]. Por exemplo, a resposta de onda plana é dada por

$$r^{P}(x,\tau) = \tilde{I}^{*}(\omega,t_{-})e^{iAx}e^{-\frac{1}{2}A^{2}|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2}}$$
(4.36)

onde  $A \in [-\infty, \infty]$  é um parâmetro livre, que nós denotamos como o momentum da célula, e que pode ser função de t e/ou de  $\omega$ . Para o módulo quadrado da resposta, nós obtemos

$$|r^{P}(x,\tau)|^{2} = |\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2} e^{-A^{2}|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2}}$$
(4.37)

que tem a forma de uma densidade de probabilidade exponencial negativa na variável  $A^2$ , que, por ter dimensão do quadrado do *momentum*, nós identificamos como uma energia. Por outro lado, pela conhecida relação entre as variáveis aleatórias exponencial e de Poisson, a densidade acima está associada a uma densidade de Poisson da forma

$$p(k; A^2) = \frac{1}{k!} (A|\tilde{I}(\omega, t_-)|)^{2k} e^{-A^2|\tilde{I}(\omega, t_-)|^2}$$
(4.38)

que nós propomos interpretar como fornecendo a probabilidade de geração de k spikes quando a célula se encontra no intervalo de energias  $[0, A^2]$ .<sup>4</sup> A densidade na Eq. (4.37) portanto descreve o intervalo de energia entre duas emissões sucessivas de spikes.

Dado o estímulo no instante t, nós vamos assumir que a emissão de spikes pela célula da classe complexa com índice n dar-se-á segundo a densidade de Poisson na Eq. (4.38), com a energia  $A^2$  determinada pela transformada de Fourier da enésima derivada do estímulo naquele instante, ou seja,

$$p_n(k|\tilde{I}(\omega,t)) \equiv p(k;A_n^2) = \frac{1}{k!} (\omega^n |\tilde{I}(\omega,t)| |\tilde{I}(\omega,t_-)|)^{2k} e^{-\omega^{2n} |\tilde{I}(\omega,t)|^2 |\tilde{I}(\omega,t_-)|^2}$$
(4.39)

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Obs.: Os instantes de emissão das spikes não ficam determinados pela expressão acima, portanto, podemos considerar diversos tipos de emissão, como bursts, por exemplo.

onde nós identificamos  $A^2 \equiv A_n^2 = (\omega^n |\tilde{I}(\omega, t)|)^{2.5}$  Deve-se observar que a Eq. (4.39) corresponde a uma densidade de Poisson com taxa

$$\omega^{2n}[|\tilde{I}(\omega,t)||\tilde{I}(\omega,t_{-})|]^{2} \equiv |(i\omega)^{n}\mathcal{F}_{x\to\omega}\{I(x,t)\star I(x,t_{-})\}|^{2}$$

$$(4.40)$$

onde  $\star$  denota correlação espacial. Portanto, a taxa de emissão de spikes pela célula da classe complexa com índice n e parâmetro de delay  $\tau$  fornece uma medida associada à enésima derivada da correlação espacial entre os estímulos nos instantes  $t \in t - \tau$ ,

$$I(x,t) \star I(x,t_{-}) = \int I^{*}(\xi,t_{-})I(\xi+x,t)d\xi$$
(4.41)

#### 4.3.3.1 Relação entre a Resposta de Onda Plana e a Resposta Forçada

Retornando à expressão para a resposta de onda plana na Eq. (4.36), é importante ressaltar que uma combinação linear de tais respostas, para diferentes valores de A, também fornece uma solução para a equação de movimento na Eq. (4.33). Consideremos em particular a solução

$$r_n^H(x,\tau) = \frac{i^n}{2\pi} \int r^P(x,\tau;A+\omega) A^n dA$$
(4.42)

onde nós explicitamos a dependência de A na resposta de onda plana. Isto corresponde à soma ponderada das soluções de onda plana com momentum  $A + \omega$ , onde  $\omega$  é a frequência de sintonia da célula, cada uma delas recebendo um peso proporcional a  $A^n$ .

Substituindo a expressão para  $r^P$  dada pela Eq. (4.36), a equação acima fornece<sup>6</sup>

$$r_n^H(x,\tau) = \frac{i^n}{2\pi} \tilde{I}^*(\omega, t_-) e^{i\omega x} \int e^{iAx} A^n e^{-\frac{1}{2}(A+\omega)^2 |\tilde{I}(\omega, t_-)|^2} dA$$
(4.43)

onde a integral é calculada como

$$(-i)^{n} \frac{d^{n}}{dx^{n}} \int e^{iAx} e^{-\frac{1}{2}(A+\omega)^{2}|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2}} dA$$
(4.44)

ou seja

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{|\tilde{I}(\omega,t_{-})|}(-i)^{n}\frac{d^{n}}{dx^{n}}\left[e^{-i\omega x}e^{-\frac{x^{2}}{2|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2}}}\right]$$
(4.45)

$$r_n^H(x,\tau) = \frac{i^n}{2\pi} \tilde{I}^*(\omega,t_-) \int e^{iAx} (A-\omega)^n e^{-\frac{1}{2}A^2 |\tilde{I}(\omega,t_-)|^2} dA \equiv \frac{i^n}{2\pi} \int r^P(x,\tau;A) (A-\omega)^n dA$$

que corresponde a uma combinação linear das respostas de onda plana com energia A, cada uma delas recebendo um peso proporcional a  $(A - \omega)^n$ .

 $<sup>^5{\</sup>rm Para}$  consistência dimensional, deve-se assumir que esta expressão embute uma constante unitária de dimensão apropriada.

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Por uma troca na variável de integração, isto pode ser reescrito como

e, portanto,

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{|\tilde{I}(\omega,t_{-})|}(-i)^{n}e^{-\frac{\omega^{2}}{2}|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2}}\frac{d^{n}}{dx^{n}}e^{-\frac{(x+i\omega|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2})^{2}}{2|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2}}}$$
(4.46)

Introduzindo isto na Eq. (4.43), e fazendo referência à definição dos polinômios de Hermite dada pela Eq. (4.22), ou seja,

$$\overline{H}_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$
(4.47)

nós obtemos

$$r_{n}^{H}(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^{n}}{|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{n}} e^{i[\omega x - \varphi(\omega,t_{-})]} e^{-\frac{\omega^{2}}{2}|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2}} \times \\ \times \overline{H}_{n} \left[ \frac{x + i\omega |\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2}}{|\tilde{I}(\omega,t_{-})|} \right] e^{-\frac{[x + i\omega |\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2}]^{2}}{2|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2}}}$$
(4.48)

e, finalmente,

$$r_n^H(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{|\tilde{I}(\omega,t_-)|^n} e^{-i\varphi(\omega,t_-)} \overline{H}_n \left[ \frac{x+i\omega|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2}{|\tilde{I}(\omega,t_-)|} \right] e^{-\frac{x^2}{2|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2}}$$
(4.49)

expressão que corresponde ao núcleo da Eq. (4.31), que pode ser reescrita como uma convolução da forma

$$r_n(x,\tau) = \int r_n^H(x-\xi,\tau)e^{-i\omega\xi}I(\xi,t)d\xi$$
(4.50)

Isto estabelece a relação entre as respostas forçada e de onda plana no nosso modelo, o núcleo da resposta forçada sendo obtido pela soma ponderada, com pesos  $A^n$ , das respostas de onda plana para todos os possíveis momenta  $(A + \omega)$ , onde  $\omega$  é a frequência de sintonia da célula, com a potência n do fator de ponderação definindo a ordem do polinômio de Hermite que vai compor a resposta forçada. A nossa interpretação é portanto a de que campo receptivo da célula da classe complexa,  $r_n^H(\omega, \tau)$ , fica definido pela soma ponderada das respostas de onda plana recebidas das suas células aferentes (ver Fig. 4.1).

#### 4.3.3.2 Relação entre a Resposta Forçada e a Taxa de Emissão de Spikes

Os modelos tradicionais das células corticais assumem que a taxa de emissão de spikes por uma dada célula é obtida filtrando-se o estímulo pelo campo receptivo da célula, o que corresponde à nossa resposta forçada. Na abordagem sintonizada também se encontra uma relação entre a resposta forçada e a taxa de resposta da célula da *classe complexa*. Especificamente, conforme demonstrado a seguir, verifica-se que a taxa de resposta da célula, dada pela intensidade de Poisson na Eq. (4.40), corresponde ao módulo quadrado



Figura 4.1: No modelo sintonizado, a dinâmica da resposta da célula complexa com parâmetro de  $delay \tau_0$  fica definida entre  $t - \tau_0$  e t pela equação de Schrödinger, Eq. 4.33. A soma ponderada de respostas de onda plana com diferentes energias define o campo receptivo da célula, e a chegada do novo estímulo em t determina a probabilidade de emissão de espículas.

da componente DC da transformada de Fourier da sua resposta forçada. Para demonstrálo, consideremos a transformada de Fourier da resposta forçada, segundo a Eq. (4.31),

$$\mathcal{F}\{r_n(x,\tau)\}(\omega') = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\varphi(\omega,t_-)}}{|\tilde{I}(\omega,t_-)|^n} \times \int \mathcal{F}_{x\to\omega'} \left\{ \overline{H}_n \left[ \frac{(x-\xi)+i\omega|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2}{|\tilde{I}(\omega,t_-)|} \right] e^{-\frac{(\xi-x)^2}{2|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2}} \right\} e^{-i\omega\xi} I(\xi,t) d\xi$$
(4.51)

onde a transformada no integrando pode ser reescrita como

$$e^{-2i\omega\xi}e^{-\frac{\omega^2}{2}|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2} \times \mathcal{F}_{x\to\omega'}\left\{e^{i\omega x}\overline{H}_n\left[\frac{(x-\xi)+i\omega|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2}{|\tilde{I}(\omega,t_-)|}\right]e^{-\frac{[(x-\xi)+i\omega|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2]^2}{2|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2}}\right\}$$
(4.52)

e usando a Eq. (4.26),

$$\sqrt{2\pi} [-i(\omega'-\omega)]^n |\tilde{I}(\omega,t_-)|^{n+1} e^{-i(\omega'+\omega)\xi} e^{-\frac{\omega'^2}{2}|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2}$$
(4.53)

Substituído na Eq. (4.51), o resultado acima fornece

$$\mathcal{F}\{r_n(x,\tau)\}(\omega') = = [-i(\omega'-\omega)]^n |\tilde{I}(\omega,t_-)| e^{-i\varphi(\omega,t_-)} e^{-\frac{\omega'^2}{2}|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2} \int e^{-i(\omega'+\omega)\xi} I(\xi,t) d\xi$$
(4.54)

e, portanto,

$$\mathcal{F}\{r_n(x,\tau)\}(\omega') = [-i(\omega'-\omega)]^n \tilde{I}^*(\omega,t_-)\tilde{I}(\omega,t)e^{-\frac{\omega'^2}{2}|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2}$$
(4.55)

Para  $\omega'=0,$ nós obtemos então

$$\mathcal{F}\{r_n(x,\tau)\}(\omega'=0) = (i\omega)^n \tilde{I}^*(\omega,t_-)\tilde{I}(\omega,t)$$
(4.56)

cujo módulo quadrado corresponde à intensidade de Poisson para a emissão de spikes pela célula da *classe complexa*, conforme a Eq. (4.40),<sup>7</sup>

$$|\mathcal{F}\{r_n(x,\tau)\}(\omega'=0)|^2 = \omega^{2n} |\tilde{I}(\omega,t_-)|^2 |\tilde{I}(\omega,t)|^2$$
(4.57)

#### 4.3.3.3 Interpretação da Resposta Forçada

As considerações que se seguem visam esclarecer o tipo de informação fornecido pela resposta forçada. Pela forma da Eq. (4.43), fica claro que os diferentes momenta contribuem diferentemente para a resposta forçada, dependendo do estímulo. Por exemplo, quando  $|\tilde{I}(\omega, t_{-})|$  é grande, apenas contribuições para  $A \approx -\omega$  serão relevantes. Neste caso, nós podemos aproximar aquela equação pelo seu limite superior

$$r_n^H(x,\tau) \approx \frac{(-i\omega)^n}{2\pi} \tilde{I}^*(\omega,t_-) e^{i\omega x} \int e^{iAx} e^{-\frac{1}{2}(A+\omega)^2 |\tilde{I}(\omega,t_-)|^2} dA$$
(4.58)

onde a integral fornece

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{|\tilde{I}(\omega,t_{-})|}e^{-i\omega x}e^{-\frac{x^2}{2|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^2}}$$
(4.59)

e, portanto,

$$r_n^H(x,\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i\omega)^n e^{-i\varphi(\omega,t_-)} e^{-\frac{x^2}{2|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2}}$$
 (4.60)

A resposta forçada da Eq. (4.50) fica então dada, aproximadamente, por

$$r_n(x,\tau) \approx (-i\omega)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i[\omega\xi + \varphi(\omega,t_-)]} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2|I(\omega,t_-)|^2}} I(\xi,t) d\xi$$
(4.61)

onde a integral corresponde à resposta forçada para n = 0,

$$r_n(x,\tau) \approx (-i\omega)^n r_0(x,\tau) \tag{4.62}$$

É instrutivo considerar uma outra forma para a aproximação da resposta forçada.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Se houvéssemos considerado o centro do campo receptivo da célula em  $x_0 \neq 0$ , a Eq. (4.55) incorporaria o fator de fase  $e^{i\omega'x_0}$ , sem afetar o resultado na Eq. (4.57).

Quando  $|\tilde{I}(\omega, t_{-})|$  é grande, o fator gaussiano no integrando da Eq. (4.61) se aproxima da unidade, qualquer que seja o valor de  $\xi$ , e a equação então fornece

$$r_n(x,\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i[n\pi - \varphi(\omega, t_-)]} (i\omega)^n \tilde{I}(\omega, t), \quad \forall x$$
(4.63)

o que corresponde à transformada de Fourier da enésima derivada do estímulo, sob um deslocamento de fase de  $n\pi - \varphi(\omega, t_{-})$ . Alternativamente, isto também pode ser escrito como

$$r_n(x,\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i\omega)^n |\tilde{I}(\omega,t)| e^{i[\varphi(\omega,t)-\varphi(\omega,t_-)]}, \quad \forall x$$
(4.64)

o que equivale a

$$r_n(x,\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i\omega)^n \frac{|\tilde{I}(\omega,t)| |\tilde{I}(\omega,t_-)|}{|\tilde{I}(\omega,t_-)|} e^{i[\varphi(\omega,t)-\varphi(\omega,t_-)]}, \quad \forall x$$
(4.65)

e, portanto,

$$r_n(x,\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{|\tilde{I}(\omega,t_-)|} (i\omega)^n \mathcal{F}_{x \to \omega} \{I(x,t) \star I(x,t_-)\}, \quad \forall x$$
(4.66)

onde a operação  $\star$  é uma correlação espacial, conforme a Eq. (4.41). Este resultado indica que a resposta forçada  $r_n$  será alta quando a enésima derivada da correlação espacial do estímulo entre os instantes  $t - \tau$  e t apresentar um conteúdo elevado, na frequência  $\omega$ , em comparação com o conteúdo do próprio estímulo em  $t - \tau$ . Observe-se que, conforme as Eqs. (4.39) e (4.40), o módulo quadrado do produto  $r_n(x,\tau)|\tilde{I}(\omega,t_-)|$  fornece a taxa de emissão de spikes pela célula da *classe complexa*.

Métodos baseados em correlação espacial são comumente utilizados para a estimação do deslocamento relativo entre imagens, e a sua equivalência ao modelo da energia para a resposta das células complexas já foi estabelecida, sob certas condições, na aplicação à estereoscopia.<sup>8</sup> Como fica demonstrado pela Eq. (4.66), na abordagem sintonizada a resposta forçada das células da classe complexa permite estimar não apenas a correlação espacial entre duas amostras temporais do estímulo (quando n = 0), mas também as derivadas espaciais (para n = 1 e n = 2) a partir das quais o máximo desta correlação pode ser obtido.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Os métodos baseados em correlação em geral determinam a disparidade pelo ponto de máximo desta medida, enquanto o modelo da energia utiliza a fase da sua transformada de Fourier: a resposta da célula complexa é modelada como o módulo quadrado da soma das respostas de um par de células simples sob diferentes fases. A máxima resposta, que vai indicar o valor da disparidade, resulta quando a diferença de fase entre as células é igual à fase de Fourier da correlação local entre o par estereoscópico (ver [43]). Na visão biológica, já ficou demonstrado que a mosca utiliza detetores de movimento baseados em correlação – os detetores de Reichardt [22].

Finalmente, uma última observação quanto à resposta forçada. Retornando à Eq. (4.64), nós aí identificamos uma transformada de Fourier cujo módulo é o mesmo da transformada do estímulo no instante t, mas cuja fase é a mudança de fase que esta sofre entre os instantes  $t - \tau$  e t. Uma variação na fase da transformada de Fourier de um sinal está em geral associada a um deslocamento do sinal. Se considerarmos, por exemplo, um estímulo em movimento com velocidade constante v – ou seja,  $I(x,t) = I_0(x - vt)$  –, para o qual se obtém  $\tilde{I}(\omega,t) = e^{-i\omega vt}\tilde{I}_0(\omega)$ , onde  $\tilde{I}_0(\omega) = |\tilde{I}_0(\omega)|e^{i\varphi_0(\omega)}$  é a transformada de Fourier do estímulo em t = 0, a Eq. (4.64) se torna

$$r_n(x,\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (i\omega)^n |\tilde{I}_0(\omega)| e^{-i\omega v\tau}, \quad \forall x$$
 (4.67)

ou seja,

$$r_n(x,\tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\varphi_0(\omega)} \mathcal{F}_{x\to\omega} \left\{ \frac{d^n}{dx^n} I_0(x-v\tau) \right\}, \quad \forall x$$
(4.68)

Dado o estímulo no instante t, a resposta forçada  $r_n$  informa, neste caso, a transformada de Fourier da enésima derivada da sua versão espacialmente propagada pelo intervalo de tempo  $\tau$ . Isto está consistente com a relação obtida, na referência [54], entre a resposta forçada no caso n = 0 e o propagador de Feynman da equação de movimento por ela obedecida, especificamente a equação de Schrödinger na Eq. (4.33).

# 4.4 Funções Sintonizadas da Segunda Forma

Os resultados acima podem ser facilmente estendidos para as funções sintonizadas de Gabor da segunda forma, levando ao modelo sintonizado para células da *classe simples*.

As funções sintonizadas da segunda forma

$$\psi_x(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i[\omega x - \phi(x)]} e^{-\frac{\omega^2}{2|I(x)|^2}}$$
(4.69)

podem ser obtidas como caso particular, para n = 0, das funções

$$\psi_x^{(n)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{|I(x)|^n} e^{-i[\omega x - \phi(x)]} \overline{H}_n \left[ \frac{\omega + ix|I(x)|^2}{|I(x)|} \right] e^{-\frac{\omega^2}{2|I(x)|^2}}$$
(4.70)

que também podem ser escritas como

$$\psi_x^{(n)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{|I(x)|^n} e^{i\phi(x)} e^{-\frac{x^2}{2}|I(x)|^2} \overline{H}_n \left[\frac{\omega + ix|I(x)|^2}{|I(x)|}\right] e^{-\frac{[\omega + ix|I(x)|^2]^2}{2|I(x)|^2}} \tag{4.71}$$

Estas funções fornecem uma representação exata das derivadas da transformada de Fourier

do sinal de sintonia, sob a forma

$$\tilde{I}^{(n)}(\omega) = \int e^{-i\omega x} *_{\omega} \psi_x^{(n)}(\omega) dx$$
(4.72)

o que se verifica tomando a transformada inversa de Fourier dos dois lados da equação acima, para obter

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{I}^{(n)}(\omega)\}(x') = (-1)^n \times$$

$$\times \int \frac{e^{i\phi(x)}}{|I(x)|^n} e^{-\frac{x^2}{2}|I(x)|^2} \delta(x-x') |I(x)|^{n+1} (ix')^n e^{-\frac{x'^2|I(x)|^2}{2}} e^{x'^2|I(x)|^2} dx \qquad (4.73)$$

o que fornece

$$\mathcal{F}^{-1}\{\tilde{I}^{(n)}(\omega)\}(x') = (-ix')^n |I(x')| e^{i\phi(x')} = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{d^n}{d\omega^n}\tilde{I}(\omega)\right\}(x')$$
(4.74)

e portanto,

$$\tilde{I}^{(n)}(\omega) = \frac{d^n}{d\omega^n} \tilde{I}(\omega)$$
(4.75)

onde usamos

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-\frac{(\omega+i\beta)^2}{2\alpha^2}}\overline{H}_n\left(\frac{\omega+i\beta}{\alpha}\right)\right\}(x') = \sqrt{2\pi}\alpha^{n+1}(ix')^n e^{-\frac{x'^2\alpha^2}{2}}e^{x'\beta}$$
(4.76)

# 4.4.1 Modelagem Sintonizada para Células da Classe Simples

A modelagem sintonizada para as células da *classe simples*, com base nas funções sintonizadas  $\psi_x^{(n)}$ , procede de forma semelhante à das células da *classe complexa*, apresentada acima. Nós começamos por considerar a resposta forçada daquela classe de células.

#### 4.4.1.1 Resposta Forçada

A resposta forçada das células de<br/>da classe simples com campo receptivo centrado em  $x_0$  fica dada por<br/>9

$$r_n^s(\omega,\tau) = \int \overline{H}_n^* \left[ \frac{\omega - \Omega + ix_0 |I(x_0,t_-)|^2}{|I(x_0,t_-)|} \right] G(\Omega,\omega,t_-) \tilde{I}(\Omega,t) d\Omega$$
(4.77)

que equivale a

$$r_n^s(\omega,\tau) = \int \overline{H}_n \left[ \frac{\omega - \Omega - ix_0 |I(x_0, t_-)|^2}{|I(x_0, t_-)|} \right] G(\Omega, \omega, t_-) \tilde{I}(\Omega, t) d\Omega$$
(4.78)

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Por simplicidade, nós estamos assumindo parâmetro  $k_s = 1$ , e a frequência de sintonia da célula como  $\omega_0 = 0$ . Os resultados que se seguem se generalizam para o caso de  $\omega_0 \neq 0$  quando se interpreta  $\omega$  como o valor da frequência relativo à frequência de sintonia da célula.

para

$$G(\Omega,\omega,t_{-}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{|I(x_0,t_{-})|^n} e^{i[\Omega x_0 - \phi(x_0,t_{-})]} e^{-\frac{(\Omega-\omega)^2}{2|I(x_0,t_{-})|^2}}$$
(4.79)

De forma semelhante ao caso das células da *classe complexa*, demonstra-se que a resposta  $r_n^s$  satisfaz uma equação de movimento da forma

$$\partial_{\tau} r_n^s(\omega,\tau) = \frac{1}{2} \partial_{\tau} |I(x_0,t_-)|^2 \partial_{\omega}^2 r_n^s(\omega,\tau) + \partial_{\tau} \log[I^*(x_0,t_-)] r_n^s(\omega,\tau)$$
(4.80)

que corresponde à equação de Schrödinger para um sistema com massa

$$M_s(\tau) = i\partial_{\tau}^{-1} |I(x_0, t_-)|^2$$
(4.81)

e potencial

$$U_s(\tau) = i\partial_\tau \log[I^*(x_0, t_-)] \tag{4.82}$$

## 4.4.2 Resposta Natural

As respostas naturais (funções de onda) das células da *classe simples*, como função de  $\omega$  e  $\tau$ , podem ser obtidas resolvendo-se a Eq. (4.80). Por exemplo, a resposta de onda plana é dada por

$$r^{sP}(\omega,\tau) = I^*(x_0,t_-)e^{iA\omega}e^{-\frac{1}{2}A^2|I(x_0,t_-)|^2}$$
(4.83)

onde  $A \in [-\infty, \infty]$  é um parâmetro livre que nós denotamos como o momentum da célula, e que pode ser função de t e/ou de  $x_0$ .

Tomando a transformada de Fourier inversa da Eq. (4.83), nós obtemos a resposta das células da *classe simples* como função de  $x \in \tau$ ,

$$r^{sP}(x,\tau) = \int e^{i\omega x} r_s^P(\omega,\tau) d\omega =$$
  
=  $I^*(x_0, t_-) e^{-\frac{1}{2}A^2 |I(x_0, t_-)|^2} \int e^{i\omega(x-A)} d\omega$  (4.84)

e portanto,

$$r^{sP}(x,\tau) = I^*(x_0, t_-)e^{-\frac{1}{2}A^2|I(x_0, t_-)|^2}\delta(x-A)$$
(4.85)

Em contraste com a resposta natural  $r^P(x, \tau)$ , da célula da *classe complexa*, neste caso a resposta não se estende espacialmente, mas se concentra em x = A. Nós propomos então considerar

$$r^{sP}(x = A, \tau) = I^*(x_0, t_-)e^{-\frac{1}{2}A^2|I(x_0, t_-)|^2}$$
(4.86)

como uma amplitude de probabilidade na variável  $A^2$ , cujo módulo quadrado fornece uma

densidade exponencial negativa,

$$|r^{sP}(x=A,\tau)|^2 = |I(x_0,t_-)|^2 e^{-A^2|I(x_0,t_-)|^2}$$
(4.87)

à qual está associada uma densidade de Poisson da forma,

$$p^{s}(k; A^{2}) = \frac{1}{k!} (A|I(x_{0}, t_{-})|)^{2k} e^{-A^{2}|I(x_{0}, t_{-})|^{2}}, \quad x = A$$
(4.88)

De forma semelhante ao proposto para a célula da *classe complexa*, dado o estímulo no instante t, nós vamos assumir que a emissão de spikes se dá de acordo com a densidade de Poisson acima, com a energia dada por  $A^2 \equiv A_n^2 = (x_0^n |I(x_0, t)|)^2$ .<sup>10</sup>

$$p_n^s(k|I(x_0,t)) \equiv p(k;A_n^2) =$$
  
=  $\frac{1}{k!} (x_0^n |I(x_0,t)| |I(x_0,t_-)|)^{2k} e^{-|I(x_0,t)|^2 |I(x_0,t_-)|^2}, \quad x = x_0 I(x_0,t)$ (4.89)

Assim, dado o estímulo  $I(x_0, t)$ , a probabilidade de resposta numa dada posição x será nula, exceto quando  $x = x_0 A \equiv x_0 I(x_0, t)$ . Isto implica em que a resposta da célula da classe simples a um estímulo cuja polaridade varia irá aparecer retificada em meia-onda, já que a posição x em que a resposta é obtida determina a polaridade do estímulo capaz de estimulá-la, a polaridade oposta levando a resposta nula. Esta não-linearidade se verifica experimentalmente para as respostas das células simples, e requer a introdução de uma etapa de retificação, após a filtragem linear, nos modelos correntes dessas células. Já na abordagem sintonizada, esta propriedade emerge naturalmente, embora ela não haja sido explicitamente incorporada ao modelo de filtragem considerado.

Assim como no caso da célula da *classe complexa*, a taxa de emissão de spikes pela célula da *classe simples* fornece uma medida da correlação entre os estímulos nos instantes  $t e t - \tau$ , neste caso tratando-se de uma correlação no domínio da frequência, já que

$$x_0^{2n}[|I(x_0,t)||I(x_0,t_-)|]^2 \equiv |(ix_0)^n \mathcal{F}_{\omega \to x_0}^{-1} \{\tilde{I}(\omega,t) \star_\omega \tilde{I}(\omega,t_-)\}|^2$$
(4.90)

onde  $\star_{\omega}$  denota correlação em frequência,

$$\tilde{I}(\omega,t)\star_{\omega}\tilde{I}(\omega,t_{-}) = \int \tilde{I}^{*}(\Omega,t_{-})\tilde{I}(\Omega+\omega,t)d\Omega \qquad (4.91)$$

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>O que corresponde ao módulo quadrado da transformada inversa de Fourier da enésima derivada com relação à frequência do estímulo  $\tilde{I}(\omega, t)$ .

### 4.4.2.1 Relação entre a Resposta de Onda Plana e a Resposta Forçada

É fácil concluir que, quando consideradas como funções de  $\omega$  e  $\tau$ , as respostas natural e forçada da célula da *classe simples* apresentam uma relação semelhante à demonstrada na Seção 2 para as respostas da célula da *classe complexa*. Especificamente, se nós consideramos uma combinação linear de respostas de onda plana, sob a forma

$$r_n^{sH}(\omega,\tau) = \frac{i^n}{2\pi} \int r^{sP}(\omega,\tau;A-x_0)A^n dA$$
(4.92)

ou seja,

$$r_n^{sH}(\omega,\tau) = \frac{i^n}{2\pi} I^*(x_0,t_-) e^{-i\omega x_0} \int e^{iA\omega} A^n e^{-\frac{1}{2}(A-x_0)^2 |I(x_0,t_-)|^2} dA$$
(4.93)

esta se mostra equivalente ao núcleo da resposta propagada da célula da *classe simples*, conforme a Eq. (4.78), que pode ser reescrita como

$$r_n^s(\omega,\tau) = \int r_n^{sH}(\omega-\Omega,\tau)e^{i\Omega x_0}\tilde{I}(\Omega,t)d\Omega$$
(4.94)

para

$$r_n^{sH}(\omega,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(-1)^n}{|I(x_0,t_-)|^n} e^{-i\phi(x_0,t_-)} \overline{H}_n \left[ \frac{\omega - ix_0 |I(x_0,t_-)|^2}{|I(x_0,t_-)|} \right] e^{-\frac{\omega^2}{2|I(x_0,t_-)|^2}}$$
(4.95)

A nossa interpretação é portanto a de que campo receptivo da célula da *classe simples*,  $r_n^{sH}(\omega, \tau)$ , fica definido pela soma ponderada das respostas de onda plana recebidas das suas células aferentes.

#### 4.4.2.2 Relação entre a Resposta Forçada e a Taxa de Emissão de Spikes

Tomando a transformada de Fourier inversa da resposta forçada da célula da *classe sim*ples, nós podemos relacionar esta resposta à taxa de emissão de spikes por esta célula. Especificamente, conforme demonstrado a seguir, verifica-se que a taxa de resposta da célula, dada pela intensidade de Poisson na Eq. (4.90), corresponde ao módulo quadrado da componente DC (i.e., para x = 0) da transformada de Fourier inversa da sua resposta forçada. Para demonstrá-lo, consideremos esta transformada inversa, segundo a Eq. (4.77),

$$\mathcal{F}^{-1}\{r_n^s(\omega,\tau)\}(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-i\phi(x_0,t_-)}}{|I(x_0,t_-)|^n} \times \int \mathcal{F}_{\omega\to x}^{-1} \left\{ \overline{H}_n \left[ \frac{(\omega-\Omega) - ix_0 |I(x_0,t_-)|^2}{|I(x_0,t_-)|} \right] e^{-\frac{(\Omega-\omega)^2}{2|I(x_0,t_-)|^2}} \right\} e^{i\Omega x_0} \tilde{I}(\Omega,t) d\Omega$$
(4.96)

onde a transformada no integrando pode ser reescrita como

$$e^{2i\Omega x_{0}}e^{-\frac{x_{0}^{2}}{2}|I(x_{0},t_{-})|^{2}} \times \\ \times \mathcal{F}_{\omega \to x}^{-1} \left\{ e^{-i\omega x_{0}}\overline{H}_{n} \left[ \frac{(\omega - \Omega) - ix_{0}|I(x_{0},t_{-})|^{2}}{|I(x_{0},t_{-})|} \right] e^{-\frac{[(\omega - \Omega) - ix_{0}|I(x_{0},t_{-})|^{2}]^{2}}{2|I(x_{0},t_{-})|^{2}}} \right\}$$
(4.97)

e fazendo referência à Eq. (4.26),

$$\sqrt{2\pi}[i(x-x_0)]^n |I(x_0,t_-)|^{n+1} e^{i\Omega(x+x_0)} e^{-\frac{x^2}{2}|I(x_0,t_-)|^2}$$
(4.98)

Substituído na Eq. (4.96), o resultado acima fornece

$$\mathcal{F}^{-1}\{r_n^s(x,\tau)\}(x) = \\ = [-i(x-x_0)]^n |I(x_0,t_-)| e^{-i\varphi(\omega,t_-)} e^{-\frac{\omega'^2}{2}|\tilde{I}(\omega,t_-)|^2} \int e^{i\Omega(x+x_0)} \tilde{I}(\Omega,t) d\Omega$$
(4.99)

e, portanto,

$$\mathcal{F}^{-1}\{r_n^s(x,\tau)\}(x) = [-i(x-x_0)]^n I^*(x_0,t_-) I(x+x_0,t) e^{-\frac{x^2}{2}|I(x_0,t_-)|^2}$$
(4.100)

Para x = 0, nós obtemos então

$$\mathcal{F}^{-1}\{r_n^s(x,\tau)\}(x=0) = (ix_0)^n I^*(x_0,t_-)I(x_0,t)$$
(4.101)

cujo módulo quadrado corresponde à intensidade de Poisson para a emissão de spikes pela célula da *classe simples*, conforme a Eq. (4.90),

$$|\mathcal{F}^{-1}\{r_n^s(x,\tau)\}(x=0)|^2 = x_0^{2n}|I(x_0,t_-)|^2|I(x_0,t)|^2$$
(4.102)

### 4.4.2.3 Interpretação da Resposta Forçada

É possível chegar a interpretações para a resposta forçada da célula da *classe simples* semelhantes às obtidas no caso da célula da *classe complexa*. Por exemplo, considerando que  $|I(x_0, t_-)|$  é grande, nós podemos aproximar a Eq. (4.93) como

$$r_n^{sH}(\omega,\tau) \approx \frac{(ix_0)^n}{2\pi} I^*(x_0,t_-) e^{-i\omega x_0} \int e^{iA\omega} e^{-\frac{1}{2}(A-x_0)^2 |I(x_0,t_-)|^2} dA$$
(4.103)

onde a integral fornece

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{|I(x_0,t_-)|}e^{i\omega x_0}e^{-\frac{\omega^2}{2|I(x_0,t_-)|^2}}$$
(4.104)

e, portanto,

$$r_n^{sH}(\omega,\tau) \approx \frac{(ix_0)^n}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\phi(x_0,t_-)} e^{-\frac{\omega^2}{2|I(x_0,t_-)|^2}}$$
(4.105)

A resposta forçada na Eq. (4.94) fica então dada, aproximadamente, por

$$r_n^s(\omega,\tau) \approx \frac{(ix_0)^n}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i[\Omega x_0 - \phi(x_0,t_-)]} e^{-\frac{(\Omega-\omega)^2}{2|I(x_0,t_-)|^2}} \tilde{I}(\Omega,t) d\Omega$$
(4.106)

onde a integral é a resposta forçada para n = 0,

$$r_n^s(\omega,\tau) \approx (ix_0)^n r_0^s(\omega,\tau) \tag{4.107}$$

# 4.5 Experimentos

## 4.5.1 Geração de Espículas com Sinais Sintéticos

Com o objetivo de avaliar o comportamento do modelo sintonizado para as células da classe simples e da classe complexa no processo de geração de espículas, foram feitos experimentos com grades senoidais em contrafase e também com grades senoidais em movimento, simples e compostas. Tais experimentos reproduzem os padrões neurofisiológicos, como já verificado pelo estudo analítico das células sintonizadas simples e complexas apresentado no Capítulo 2.

Para a geração das respostas da célula do *tipo simples*, em cada instante de tempo, um valor aleatório uniformemente distribuído é obtido. Uma espícula será gerada sempre que esse valor aleatório for menor ou igual ao produto entre a intensidade de Poisson e um intervalo padrão de tempo. A intensidade de Poisson neste caso é dada por:

$$\lambda = x^{2n} |I(x;t)|^2 |I(x;t-\tau)|^2 \tag{4.108}$$

O processo de geração de espículas para a célula do *tipo complexo* ocorre de forma semelhante, sendo que, neste caso a intesidade de Poisson é dada por:

$$\lambda = \omega^{2n} |\tilde{I}(\omega; t)|^2 |\tilde{I}(\omega; t - \tau)|^2 \tag{4.109}$$

### 4.5.1.1 Grade Senoidal em Contrafase - Célula da Classe Simples

Inicialmente, foi usado o sinal grade senoidal em contrafase como estímulo de entrada para o processo de geração de espículas pela célula do *tipo simples*, como mostram as Figs. 4.2 e 4.3. Neste caso, a produção de espículas se dá na mesma frequência temporal do estímulo o que está de acordo com os estudos neurofisiológicos [16].



Figura 4.2: Geração de espículas. Célula do *Tipo Simples*, Grade Senoidal em contrafase. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 0$ ,  $\omega = 26$ , x = 208, além de n = 0. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.



Figura 4.3: Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig. 4.2.



Figura 4.4: Geração de espículas. Célula do *Tipo Simples*, Grade Senoidal em contrafase. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 10$ ,  $\omega = 26$ , x = 208 e n = 1. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.



Figura 4.5: Geração de espículas. Célula do *Tipo Simples*, Grade Senoidal em contrafase. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 20$ ,  $\omega = 26$ , x = 208 e n = 2. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.

### 4.5.1.2 Grade Senoidal em Contrafase - Célula da Classe Complexa

A célula complexa, quando o estímulo dado é a grade senoidal em contrafase, gera espículas no dobro da frequência temporal do estimulo, estando conforme os relatos experimentais [16].



Figura 4.6: Geração de espículas. Célula do *Tipo Complexo*, Grade Senoidal em Contrafase. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 0$ ,  $\omega = 26$ , x = 208 e n = 0. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.



Figura 4.7: Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig. 4.6.



Figura 4.8: Geração de espículas. Célula do *Tipo Complexo*, Grade Senoidal em Contrafase. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 10$ ,  $\omega = 26$ , x = 208 e n = 1. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.



Figura 4.9: Geração de espículas. Célula do *Tipo Complexo*, Grade Senoidal em Contrafase. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 20$ ,  $\omega = 26$ , x = 208 e n = 2. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.

### 4.5.1.3 Grade Senoidal em Movimento - Célula da Classe Simples

Quando o estímulo de entrada é a grade senoidal em movimento, a célula simples gera espículas na mesma frequência temporal do estímulo. Tal comportamento está de acordo com os resultados obtidos em estudos neurofisiológicos.



Figura 4.10: Geração de espículas. Célula do *Tipo Simples*, Grade Senoidal em Movimento Simples. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 0$ ,  $\omega = 26$ , x = 208 e n = 0. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.



Figura 4.11: Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig. 4.10.



Figura 4.12: Geração de espículas. Célula do *Tipo Simples*, Grade Senoidal em Movimento Simples. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 10$ ,  $\omega = 26$ , x = 208 e n = 1. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.



Figura 4.13: Geração de espículas. Célula do *Tipo Simples*, Grade Senoidal em Movimento Simples. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 20$ ,  $\omega = 26$ , x = 208 e n = 2. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.

### 4.5.1.4 Grade Senoidal em Movimento - Célula da Classe Complexa

Quando o estímulo é a grade senoidal em movimento, a produção de espículas da célula complexa não apresenta modulação temporal estando consistente com resultados experimentais [16].



Figura 4.14: Geração de espículas. Célula do *Tipo Complexo*, Grade Senoidal em Movimento Simples. Em cima, o sinal temporal na posição x = 204. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 0$ ,  $\omega = 26$ , x = 208 e n = 0. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.



Figura 4.15: Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig. 4.14.



Figura 4.16: Geração de espículas. Célula do *Tipo Complexo*, Grade Senoidal em Movimento Simples. Em cima, o sinal temporal na posição x = 204. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 10$ ,  $\omega = 26$ , x = 208 e n = 1. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.



Figura 4.17: Geração de espículas. Célula do *Tipo Complexo*, Grade Senoidal em Movimento Simples. Em cima, o sinal temporal na posição x = 204. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 20$ ,  $\omega = 26$ , x = 208 e n = 2. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.

### 4.5.1.5 Grade Senoidal em Movimento Composta - Célula da Classe Simples

Neste caso, assim como verificado experimentalmente [42], a resposta da célula da *classe simples* mostrou-se difícil de prever a partir das características do estímulo.



Figura 4.18: Geração de espículas. Célula do *Tipo Simples*, Grade Senoidal em Movimento Composta. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 0$ ,  $\omega = 29$ , x = 208 e n = 0. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.



Figura 4.19: Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig. 4.18.


Figura 4.20: Geração de espículas. Célula do *Tipo Simples*, Grade Senoidal em Movimento Composta. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 10$ ,  $\omega = 29$ , x = 208 e n = 1. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.



Figura 4.21: Geração de espículas. Célula do *Tipo Simples*, Grade Senoidal em Movimento Composta. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 20$ ,  $\omega = 29$ , x = 208 e n = 2. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.

# 4.5.1.6 Grade Senoidal em Movimento Composta - Célula da Classe Complexa

Com o estímulo grade senoidal em movimento composta, a modulação das intensidades de Poisson da célula complexa é dada na diferença da frequência da grade composta. Tal comportamento está em consonância com os dados experimentais [42].



Figura 4.22: Geração de espículas. Célula do *Tipo Complexo*, Grade Senoidal em Movimento Composta. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 0$ ,  $\omega = 29$ , x = 208 e n = 0. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.



Figura 4.23: Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig. 4.22.



Figura 4.24: Geração de espículas. Célula do *Tipo Complexo*, Grade Senoidal em Movimento Composta. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 10$ ,  $\omega = 29$ , x = 208 e n = 1. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.



Figura 4.25: Geração de espículas. Célula do *Tipo Complexo*, Grade Senoidal em Movimento Composta. Em cima, o sinal temporal na posição x = 208. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo,  $\tau = 20$ ,  $\omega = 29$ , x = 208 e n = 2. Embaixo, as espículas geradas, como função do tempo, para várias repetições do experimento.

#### 4.5.2 Geração de Espículas com Sinais Reais

O estímulo considerado é uma linha de uma sequência de vídeo de dimensão 504 x 480 pixels (Fig. 4.26). O processo de geração de espículas é o mesmo empregado para os sinais sintéticos. No caso dos sinais reais, tanto para as células simples como para as complexas, observou-se maior coerência temporal dos trens de espículas do que com os sinais sintéticos.



Figura 4.26: Estímulos de entrada. No topo, o instante inicial. Os demais representam os instantes subsequentes de um vídeo. Retirado de http://vasc.ri.cmu.edu /idb/html/motion/UMassMotion/index.html, em 2016.

#### 4.5.2.1 Células Simples



Figura 4.27: Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal na posição x = 252. No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as espículas geradas com x = 252 e  $\tau = 3$ ; usando a linha (225) do filme como estímulo.



Figura 4.28: Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal na posição x = 252. No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as espículas geradas com x = 252 e  $\tau = 3$ ; usando a linha (465) do filme como estímulo.



Figura 4.29: Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal na posição x = 252. No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as espículas geradas com x = 252 e  $\tau = 3$ ; usando a linha (400) do filme como estímulo.



Figura 4.30: Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal na posição x = 252. No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as espículas geradas com x = 252 e  $\tau = 3$ ; usando a linha (200) do filme como estímulo.



Figura 4.31: Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal na posição x = 252. No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as espículas geradas com x = 252 e  $\tau = 3$ ; usando a linha (170) do filme como estímulo.



Figura 4.32: Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal na posição x = 252. No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as espículas geradas com x = 252 e  $\tau = 3$ ; usando a linha (205) do filme como estímulo.



Figura 4.33: Geração de espículas usando a célula simples. Em cima, o sinal temporal na posição x = 252. No meio, as intesidades de Poisson. Embaixo, as espículas geradas com x = 252 e  $\tau = 3$ ; usando a linha (430) como estímulo.

#### 4.5.2.2 Células Complexas



Figura 4.34: Geração de espículas usando a célula complexa. Em cima, o sinal temporal, correspondente à linha 225 de um vídeo, na posição x = 252. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo. Embaixo, as espículas geradas em função do tempo, com x = 252,  $\omega = 3$  e  $\tau = 4$ .



Figura 4.35: Corresponde à linha 18 do gráfico de espículas em função do tempo da Fig. 4.34.



Figura 4.36: Uma nova geração de espículas para a célula complexa, desta vez, usando como estímulo uma outra linha (465) do mesmo vídeo. Parâmetros  $\omega = 3$  e  $\tau = 9$ . Em cima, o sinal temporal na posição x = 252. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo. Embaixo, as espículas geradas em função do tempo, onde cada linha corresponde a uma de dezoito iterações.



Figura 4.37: Uma nova geração de espículas para a célula complexa, desta vez, usando como estímulo uma outra linha (400) do mesmo vídeo. Parâmetros  $\omega = 3$  e  $\tau = 3$ . Em cima, o sinal temporal na posição x = 252. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo. Embaixo, as espículas geradas em função do tempo, onde cada linha corresponde a uma de dezoito iterações.



Figura 4.38: Uma nova geração de espículas para a célula complexa, desta vez, usando como estímulo uma outra linha (200) do mesmo vídeo. Parâmetros  $\omega = 3$  e  $\tau = 2$ . Em cima, o sinal temporal na posição x = 252. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo. Embaixo, as espículas geradas em função do tempo.



Figura 4.39: Uma nova geração de espículas para célula complexa, desta vez, usando como estímulo a linha (170) do mesmo vídeo. Parâmetros  $\omega = 3$  e  $\tau = 1$ . Em cima, o sinal temporal na posição x = 170. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo. Embaixo, as espículas geradas em função do tempo.



Figura 4.40: Geração de espículas para a célula complexa, usando como estímulo a linha (205) do mesmo vídeo. Parâmetros  $\omega = 3 \text{ e } \tau = 4$ . Em cima, o sinal temporal na posição x = 252. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo. Embaixo, as espículas geradas em função do tempo.



Figura 4.41: Geração de espículas para a célula complexa, usando como estímulo a linha (205) do mesmo vídeo. Parâmetros  $\omega = 1 \text{ e } \tau = 4$ . Em cima, o sinal temporal na posição x = 334. No meio, as intensidades de Poisson em relação ao tempo. Embaixo, as espículas geradas em função do tempo.

## Capítulo 5

## Conclusões e Trabalhos Futuros

Esta Tese apresentou uma abordagem para a modelagem de células do córtex visual primário (V1) baseada nas funções sintonizadas de Gabor. Tais funções haviam sido originalmente definidas como funções de Gabor — ou seja, senóides moduladas por Gaussianas cujos parâmetros (largura e fase) ficam determinados por um sinal de sintonia [61], e esta definição foi aqui estendida pela incorporação de uma modulação adicional por polinômios de Hermite. Na sua versão estendida, as funções sintonizadas de Gabor constituem funções de codificação das derivadas, em qualquer ordem, do sinal de sintonia.

Em nossa aplicação à modelagem neuronal, funções sintonizadas de Gabor definidas no domínio espacial, cujos parâmetros ficam determinados pela transformada de Fourier espacial do sinal espaço-temporal de sintonia, modelam os campos receptivos das células que nós denotamos como da *classe complexa* – que incluem as células complexas do V1 como caso particular —, enquanto funções sintonizadas de Gabor definidas no domínio espectral, cujos parâmetros ficam determinados pelo sinal de sintonia, modelam os campos receptivos das células que nós denotamos como da *classe simples* – que incluem as células simples do V1 como caso particular. As respostas de ambas classes de célula, por outro lado, ficam definidas pelo produto escalar entre o campo receptivo da célula e a respectiva versão (espaço-temporal ou espectro-temporal) do sinal de sintonia, que é assumido como sendo o estímulo à célula. Nós demonstramos que as respostas assim definidas satisfazem equações de movimento equivalentes a equações de Schrödinger para sistemas com massa imaginária e potencial complexo, ambos dependentes do tempo, e estas, por sua vez, levam a dois tipos de soluções correspondentes às funções de onda quânticas, uma delas baseada na onda-plana, e a outra na função de Airy. Com base nisto, nós propusemos uma interpretação quantum-like para o modelo sintonizado das respostas neuronais, em que o módulo quadrado da resposta de onda-plana fornece uma probabilidade de Poisson para a emissão de espículas pela célula, enquanto a resposta da função de Airy — como já sugerido anteriormente [54] — descreveria a propagação das espículas.

Um resultado significativo da nossa abordagem é o fato de que dela resulta, naturalmente, a retificação da resposta das células simples. Esta propriedade se mostra de acordo com as observações experimentais, e surge, no contexto da abordagem sintonizada, sem a necessidade de incorporação de um estágio adicional de retificação após uma filtragem linear, como assumido pelos modelos correntes das células simples. Ademais, é importante salientar que, na abordagem sintonizada, tanto para as células da *classe simples* como para as da *classe complexa*, a dinâmica subjacente à geração das respostas — representada pelas respectivas equações de movimento e suas respostas naturais (funções de onda) — assume o papel preponderante, demonstrando-se, por exemplo, que os campos receptivos das células podem ser entendidos como resultando de uma combinação linear das suas respostas de onda plana.

Finalmente, o estudo analítico, bem como o trabalho de simulação, das respostas fornecidas por nosso modelo para entradas-padrão, como grades em contrafase, grades em movimento e fendas, mostrou que a abordagem sintonizada replica as propriedades neurofisiológicas das células simples e complexas do córtex visual, e também a variação do seu campo receptivo com a classe do sinal de entrada. Na simulação da emissão de espículas quando o estímulo é uma sequência de vídeo real, uma característica do nosso modelo foi a maior consistência temporal observada entre as respostas obtidas para diferentes apresentações do estímulo, em comparação com os resultados para sinais sintéticos.

### 5.1 Extensões do Nosso Trabalho

A seguir nós indicamos possíveis vertentes para a extensão do nosso trabalho.

#### 5.1.1 Formulação Baseada no Logaritmo do Estímulo

A Fig. 5.1 ilustra a variação da resposta (intensidade de Poisson) de uma célula sintonizada complexa em função do contraste do estímulo, quando a resposta é baseada no *logaritmo* deste. A saturação da resposta nos altos contrastes é um comportamento coerente com os resultados experimentais [3] que não se obtém quando a intensidade do processo é baseada no valor do estímulo (conforme a Eq.(4.38)). No que se segue, nós esboçamos a formulação de uma abordagem sintonizada baseada no logaritmo do estímulo.



Figura 5.1: Funções de resposta ao contraste para células sintonizadas complexas. Curva inferior, para frequência  $\omega = 12$ . Curva superior, para frequência  $\omega = 20$ .

Vamos considerar uma célula da *classe complexa* com dinâmica definida pela massa

$$M_c(\tau) = i\partial_{\tau}^{-1}\log^2 |\tilde{I}(\omega, t_-)|$$
(5.1)

e pelo potencial (comparar com as Eqs.(4.2) e (4.3))

$$U_c(\tau) = i\partial_\tau \log\{|\tilde{I}(\omega, t_-)|^{m^2} e^{-i\varphi(\omega, t_-)}\}$$
(5.2)

onde m é um inteiro. A ela estarão associadas respostas de onda plana da forma

$$r^{P}(x,\tau) = |\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{m^{2}} e^{i[Ax - \varphi(\omega,t_{-})]} e^{-\frac{1}{2}A^{2}\log^{2}|\tilde{I}(\omega,t_{-})|}$$
(5.3)

cujo módulo quadrado fornece

$$|r^{P}(x,\tau)|^{2} = |\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2m^{2}} e^{-A^{2}\log^{2}|\tilde{I}(\omega,t_{-})|}$$
(5.4)

Identificando

$$\tau_p = \log^2 |\tilde{I}(\omega, t_-)| \tag{5.5}$$

e assumindo  $|\tilde{I}(\omega, t_{-})| > 1$ , a Eq. (5.4) pode ser reescrita como

$$|r^{P}(x,\tau)|^{2} = e^{-A^{2}\tau_{p}}e^{2m^{2}\sqrt{\tau_{p}}}$$
(5.6)

o que admite uma interpretação probabilística, se nós assumirmos que o estímulo  $\tilde{I}(\omega, t_{-})$ ,

e portanto  $\tau_p$ , está sujeito a ruído.<sup>1</sup> Neste caso, nós podemos identificar  $|r^P(x,\tau)|^2$  como uma densidade de probabilidade conjunta nas variáveis  $\sqrt{\tau_p}$  e  $A^2$ ,

$$f(\sqrt{\tau_p}, A^2) \equiv |r^P(x, \tau)|^2 \tag{5.7}$$

As correspondentes probabilidades condicionais são obtidas como

$$f(A^2|\sqrt{\tau_p}) = \frac{f(\sqrt{\tau_p}, A^2)}{f(\sqrt{\tau_p})}$$
(5.8)

е

$$f(\sqrt{\tau_p}|A^2) = \frac{f(\sqrt{\tau_p}, A^2)}{f(A^2)}$$
(5.9)

onde

$$f(\sqrt{\tau_p}) = \int_0^\infty f(\sqrt{\tau_p}, A^2) dA^2 = \frac{e^{2m^2\sqrt{\tau_p}}}{\tau_p}$$
(5.10)

е

$$f(A^2) = \int_0^\infty f(\sqrt{\tau_p}, A^2) d\sqrt{\tau_p} = e^{\frac{m^4}{A^2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2A} \operatorname{erfc}\left(-\frac{m^2}{A}\right)$$
(5.11)

com erfc denotando a função erro complementar. Nós chegamos, portanto, às condicionais

$$f(A^2|\sqrt{\tau_p}) = \tau_p e^{-A^2 \tau_p} \tag{5.12}$$

que corresponde a uma densidade exponencial negativa - a que estará associada uma probabilidade de resposta de Poisson, como antes, mas com intensidade relacionada ao logaritmo do estímulo -, e

$$f(\sqrt{\tau_p}|A^2) = \frac{2A}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-A^2(\sqrt{\tau_p} - \frac{m^2}{A^2})^2}}{\operatorname{erfc}\left(-\frac{m^2}{A}\right)}$$
(5.13)

que corresponde a uma densidade normal truncada, como modelo para o ruído. Como extensão do nosso trabalho, nós iremos estudar este modelo sintonizado alternativo. É interessante observar que um modelo sintonizado para células com campos receptivos espaço-cromáticos, conforme descrito na próxima seção, também se baseia no logaritmo do estímulo.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Em [21], por exemplo, foi proposto um modelo para a taxa de resposta dos neurônios visuais em que um ganho aleatório modula uma componente de origem sensorial. Neste caso, nós também poderíamos assumir  $\tau_p = \tau_s \tau_n$ , onde  $\tau_s \in \tau_n$  denotam, respectivamente, a componente sensorial e o ganho.

#### 5.1.2 Modelagem Sintonizada para Campos Receptivos Espaço-Cromáticos

As células do Núcleo Geniculado Lateral (NGL), assim como as células ganglionares da retina, apresentam campos receptivos circularmente simétricos. Em [59] foi proposto um modelo sintonizado para os campos receptivos com organização *centro-periferia*, característicos de algumas dessas células, em que se identifica uma região central, excitatória ou inibitória, circundada por uma periferia de polaridade oposta.

Esse modelo objetivava descrever a codificação de versões branqueadas das imagens retinais, segundo a hipótese formulada por Atick e seus colaboradores [5], para quem os primeiros estágios do caminho visual teriam a finalidade de transmitir ao córtex visual primário versões descorrelacionadas das suas entradas. Sendo sabido que o espectro espaço-temporal das imagens naturais decai com a magnitude da frequência [45], o papel das células da retina e do NGL seria o de equalizar esse espectro, ao mesmo tempo atenuando componentes de ruído em alta frequência. Além de implementar o branqueamento das imagens de entrada, o modelo sintonizado para as células *centro-periferia* mostrou-se capaz de replicar várias das propriedades neurofisiologicamente observadas destas células, como a ausência de resposta a entradas uniformes, e a variação do seu campo receptivo com a frequência [59].

No NGL, além de células que respondem à luminância do estímulo, encontram-se também células sensíveis à cor. Dentre estas, as células classificadas como Tipo II, segundo a nomenclatura introduzida por Hubel e Wiesel [65], são do tipo *centro* — ou seja, não se identifica uma periferia do campo receptivo circularmente simétrico, seja ele excitatório ou inibitório. Por outro lado, esse campo apresenta *oposição cromática*, mostrando-se excitatório para certa banda espectral, e inibitório para outra. No NGL foram identificadas células Tipo II com oposição vermelho-verde e também com oposição azul-amarelo, com amarelo aqui representando uma combinação de vermelho e verde.

Além das células Tipo II, encontram-se também no NGL células com campo receptivo centro-periferia e oposição cromática, classificadas como Tipo I, por Hubel e Wiesel. Nestas, a periferia apresenta polaridade oposta à do centro, do mesmo modo que nas células sensíveis à luminância, mas centro e periferia respondem a bandas espectrais diferentes. Assim, podemos encontrar células com centro excitatório para a luz vermelha e periferia inibitória para a luz verde (identificadas como  $r^+g^-$ ), ou células com centro inibitório para a luz vermelha e periferia excitatória para a luz verde (ou seja,  $r^-g^+$ ), bem como todas as outras combinações possíveis. Da mesma forma, encontram-se células Tipo I com oposição azul-amarelo: células  $b^+y^-$ , por exemplo, e as demais variações. Os campos receptivos dos neurônios sensíveis à cor são tradicionalmente modelados por funções espaço-cromáticas do tipo [48]

$$R(x, y, \lambda) = a_L L(\lambda) r_L(x, y) + a_M M(\lambda) r_M(x, y) + a_S S(\lambda) r_S(x, y)$$
(5.14)

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz, e  $L(\lambda)$ ,  $M(\lambda)$  e  $S(\lambda) - \operatorname{com} L$ , M e S denotando longo (long), médio (medium) e curto (small) - são as funções de resposta espectral dos cones vermelho, verde e azul da retina, cuja maior sensibilidade se encontra, respectivamente, na faixa dos longos, médios e curtos comprimentos de onda. As funções  $r_L(x, y)$ ,  $r_M(x, y)$  e  $r_S(x, y)$  representam, por sua vez, a sensibilidade espacial do campo receptivo às entradas recebidas dos respectivos cones, enquanto  $a_L$ ,  $a_M$  e  $a_S$  são parâmetros que permitem o ajuste do modelo, controlando o peso e a polaridade de cada componente espectral na resposta do neurônio, em geral obtida pela convolução do sinal de entrada com o campo  $R(x, y, \lambda)$ .

Os campos receptivos das células Tipo I e Tipo II discutidas acima são conhecidos como de *oposição simples*, e podem ser modelados pela função da Eq. 5.14, com os seguintes parâmetros: i) para células vermelho-verde,  $a_S = 0$  e  $a_L = -a_M$ ; ii) para células azul-amarelo:  $a_S = -(a_L + a_M)$ . Em ambos os casos, as funções  $r_L(x, y)$ ,  $r_M(x, y)$  e  $r_S(x, y)$  são aproximadas por Gaussianas bidimensionais circularmente simétricas, com larguras  $\sigma_L$ ,  $\sigma_M$  e  $\sigma_S$ . O campo receptivo das células Tipo II distingue-se por combinar componentes Gaussianas de larguras iguais, enquanto que o das Tipo I resulta da composição de Gaussianas com larguras diferentes, o que gera a sua configuração centro-periferia.

O nosso objetivo aqui é estudar modelos sintonizados para os campos receptivos espaço-cromáticos das células Tipo I e Tipo II do núcleo geniculado lateral, considerados como funções de representação dos sinais de entrada destas células. Para isto, nós introduzimos funções Gaussianas rotacionalmente simétricas, da forma

$$\psi_B(r;\omega_x,\omega_y) = \frac{e^{\frac{-\pi r^2}{\Sigma_B(\omega_x,\omega_y)}}}{\Sigma_B(\omega_x,\omega_y)}$$
(5.15)

onde  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $\omega_x$  e  $\omega_y$  são as componentes da frequência espacial, e *B* denota a banda cromática considerada. A largura da Gaussiana,  $\Sigma_B(\omega_x, \omega_y)$ , será aqui obtida da condição de que o conjunto de funções { $\psi_B(r; \omega_x, \omega_y), \forall (\omega_x, \omega_y)$ } forneça a representação exata da densidade de energia do sinal de entrada à célula na banda considerada – o que denotaremos por  $I_B(x, y)$ . Assim, nós impomos

$$P_B(x,y) = \int \int e^{i(\omega'_x x + \omega'_y y)} * \psi_B(r;\omega'_x,\omega'_y) d\omega'_x d\omega'_y$$
(5.16)

onde o asterisco denota uma convolução espacial bidimensional, e  $P_B$  é um sinal cuja transformada de Fourier fornece a densidade de energia recebida pela célula na banda B – isto é, nós assumimos  $|\tilde{P}_B(\omega_x, \omega_y)| = |\tilde{I}_B(\omega_x, \omega_y)|^2$ . Como de praxe na abordagem sintonizada, nós tomamos a transformada de Fourier dos dois lados da equação acima, para obter

$$\tilde{P}_B(\omega_x, \omega_y) = \int \int \delta(\omega_x - \omega'_x, \omega_y - \omega'_y) e^{-\frac{\Sigma_B(\omega'_x, \omega'_y)}{4\pi}(\omega_x^2 + \omega_y^2)} d\omega'_x d\omega'_y$$
(5.17)

e, portanto,

$$\tilde{P}_B(\omega_x, \omega_y) = e^{-\frac{\Sigma_B(\omega_x, \omega_y)}{4\pi}(\omega_x^2 + \omega_y^2)}$$
(5.18)

Daí resulta

$$|\tilde{P}_B(\omega_x, \omega_y)| \equiv |\tilde{I}_B(\omega_x, \omega_y)|^2 = e^{-\frac{\Sigma_B(\omega_x, \omega_y)}{4\pi}(\omega_x^2 + \omega_y^2)}$$
(5.19)

e então,

$$\Sigma_B(\omega_x, \omega_y) = -8\pi \frac{\log |\tilde{I}_B(\omega_x, \omega_y)|}{(\omega_x^2 + \omega_y^2)}$$
(5.20)

Como requeremos que o argumento da Gaussiana na Eq. (5.15) seja negativo, nós devemos impor a condição de que  $\log |\tilde{I}_B(\omega_x, \omega_y)| \leq 0$ , e portanto de que  $|\tilde{I}_B(\omega_x, \omega_y)| \leq 1$ , o que pode ser obtido trabalhando-se com os valores da transformada original divididos pelo seu máximo em magnitude.

As funções  $\psi_B$  da Eq. (5.15) tomam portanto a forma,

$$\psi_B(r;\omega_x,\omega_y) = \frac{1}{8\pi} \frac{(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{\left|\log|\tilde{I}_B(\omega_x,\omega_y)|\right|} e^{-\frac{1}{8} \frac{(\omega_x^2 + \omega_y^2)}{\left|\log|\tilde{I}_B(\omega_x,\omega_y)|\right|}r^2}$$
(5.21)

Elas modelam o campo receptivo de uma célula *centro*, e constituem funções de representação das componentes na frequência espacial  $(\omega_x, \omega_y)$  do sinal  $P_B(x, y)$ , que por sua vez representa a densidade da energia de entrada à célula na banda cromática B. Nós tencionamos estudar estas funções como possível modelo sintonizado para os campos receptivos espaço-cromáticos.

#### 5.1.3 Equações de Movimento das Respostas Sintonizadas e a Equação do Cabo

Um outro campo a ser explorado na continuação do nosso trabalho é a investigação de uma possível relação entre a equação de movimento das respostas sintonizadas e a equação do cabo, que descreve a propagação passiva ou quase-ativa do potencial da membrana nos modelos compartimentais dos neurônios [23]:

$$\frac{\partial}{\partial t}V(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}V(x,t) - \frac{1}{\Theta}V(x,t)$$
(5.22)

onde V denota o potencial da membrana, e D e  $\Theta$  são parâmetros reais positivos que dependem das propriedades físicas e geométricas do segmento de neurônio considerado, como o seu diâmetro, e a resistência e capacitância elétricas da sua membrana. O estabelecimento de tal relação poderia levar a uma fundamentação biofísica para a abordagem sintonizada.

## APÊNDICE A - Respostas a Grades em Contrafase

A seguir, nós apresentamos os cálculos das respostas obtidas com o modelo proposto quando o estímulo são grades senoidais da forma

$$I(x,t) = \cos(kx + \phi)\cos(\kappa t + \delta)$$
(A.1)

Para tal estímulo, pode-se trabalhar com uma versão unidimensional das funções de campo receptivo, com as respostas das células baseadas nas transformadas sintonizadas 1D das Eqs. (2.5) e (2.14), conforme descrito abaixo.

### A.1 Células Simples

A resposta de uma célula simples sintonizada à frequência  $\omega$  e centrada na posição x é obtida como  $[r_s(t; \omega, x, \tau)]_+$ , onde  $[\cdot]_+$  denota a retificação de meia onda, e onde (ver Eq. (2.14))

$$r_s(t;\omega,x,\tau) = (2\pi)^2 I^*(x,t-\tau) \int e^{-i\omega(\xi-x)} e^{-4\pi^3 |I(x,t-\tau)|^2(\xi-x)^2} I(\xi,t) d\xi$$
(A.2)

Tomando como entrada a grade senoidal em contrafase da Eq. (A.1), obtém-se

$$r_s(t;\omega,x,\tau) = 2\pi^2 \cos(kx+\phi) \cos[\kappa(t-\tau)+\delta] \cos(\kappa t+\delta) e^{i\omega x} \times$$
$$\times \int \left\{ e^{-i[(\omega-k)\xi-\phi]} + e^{-i[(\omega+k)\xi+\phi]} \right\} e^{-4\pi^3 |I(x,t-\tau)|^2 (\xi-x)^2} d\xi$$
(A.3)

A integral acima corresponde a duas transfomadas de Fourier, que resultam em

$$r_{s}(t;\omega,x,\tau) = \frac{\pi}{|I(x,t-\tau)|} \cos(kx+\phi) \cos[\kappa(t-\tau)+\delta] \cos(\kappa t+\delta) \times \\ \times \left\{ e^{i(kx+\phi)} e^{-\frac{(\omega-k)^{2}}{16\pi^{3}|I(x,t-\tau)|^{2}}} + e^{-i(kx+\phi)} e^{-\frac{(\omega+k)^{2}}{16\pi^{3}|I(x,t-\tau)|^{2}}} \right\}$$
(A.4)

e, fazendo uso da Eq. (A.1), obtém-se

$$r_{s}(t;\omega,x,\tau) = \pi \frac{I(x,t-\tau)}{|I(x,t-\tau)|} \cos(\kappa t + \delta) \times \\ \times \left\{ e^{i(kx+\phi)} e^{-\frac{(\omega-k)^{2}}{16\pi^{3}|I(x,t-\tau)|^{2}}} + e^{-i(kx+\phi)} e^{-\frac{(\omega+k)^{2}}{16\pi^{3}|I(x,t-\tau)|^{2}}} \right\}$$
(A.5)

que produz uma resposta modulada na frequência temporal do estímulo, e dependente de sua fase espacial, o que se mostra consistente com os resultados experimentais para as células corticais simples [16].

#### A.2 Células Complexas

A resposta da célula complexa sintonizada à frequência  $\omega$ , e com campo receptivo centrado na posição x, pode ser obtida como (ver Eq. (2.5))

$$r_{c}(t;\omega,x,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i[\omega\xi + \varphi(\omega;t-\tau)]} e^{-\frac{(\xi-x)^{2}}{2|\tilde{I}(\omega;t-\tau)|^{2}}} I(\xi,t) d\xi$$
(A.6)

que, para a entrada da Eq. (A.1), torna-se

$$r_{c}(t;\omega,x,\tau) = e^{-i\varphi(\omega;t-\tau)} \frac{\cos(\kappa t+\delta)}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \times \int \left\{ e^{-i[(\omega-k)\xi-\phi]} + e^{-i[(\omega+k)\xi+\phi]} \right\} e^{-\frac{(\xi-x)^{2}}{2|I(\omega;t-\tau)|^{2}}} d\xi$$
(A.7)

Novamente, a integral corresponde a duas transformadas de Fourier, que resolvidas fornecem

$$r_{c}(t;\omega,x,\tau) = \tilde{I}^{*}(\omega;t-\tau)\frac{\cos(\kappa t+\delta)}{4\pi} \times \left\{ e^{-i[(\omega-k)x-\phi]}e^{-|\tilde{I}(\omega;t-\tau)|^{2}\frac{(\omega-k)^{2}}{2}} + e^{-i[(\omega+k)x+\phi]}e^{-|\tilde{I}(\omega;t-\tau)|^{2}\frac{(\omega+k)^{2}}{2}} \right\}$$
(A.8)

Para uma grade senoidal como a da Eq. (A.1), nós temos

$$\tilde{I}(\omega;t) = \pi e^{i\varphi(\omega)}\cos(\kappa t + \delta)\{\delta(\omega - k) + \delta(\omega + k)\}$$
(A.9)

onde

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \phi, & \text{se } \omega = k \\ -\phi, & \text{se } \omega = -k \end{cases}$$
(A.10)

Devido à presença do fator multiplicativo  $\tilde{I}^*(\omega; t - \tau)$  na Eq. (A.8), deduz-se que a célula não vai responder a menos que  $\omega = \pm k$ . Em cada um desses casos, um dos fatores

da Gaussiana da Eq. (A.8) desaparecerá, enquanto o outro será igual a um. A resposta da célula complexa torna-se então

$$r_c(t;\omega,x,\tau) = \frac{1}{4} \cos[\kappa(t-\tau) + \delta] \times$$
$$\times \cos(\kappa t + \delta) \left\{ e^{-i[\varphi(k)-\phi]} \delta(\omega-k) + e^{-i[\varphi(-k)+\phi]} \delta(\omega+k) \right\}$$
(A.11)

e, pelo uso da Eq. (A.10),

$$r_c(t;\omega,x,\tau) = \frac{1}{4}\cos[\kappa(t-\tau)+\delta]\cos(\kappa t+\delta)\{\delta(\omega-k)+\delta(\omega+k)\}$$
(A.12)

ou, alternativamente,

$$r_c(t;\omega,x,\tau) = \frac{1}{8} [\cos(\kappa\tau) + \cos(2\kappa t + 2\delta - \kappa\tau)] \{\delta(\omega - k) + \delta(\omega + k)\}$$
(A.13)

que equivale a uma resposta modulada no dobro da frequência temporal do estímulo, e independente da sua fase espacial. Isto se mostra consistente com os resultados experimentais para as células corticais complexas [16].

# APÊNDICE B – Respostas a grades senoidais em movimento

Os cálculos acima podem ser facilmente adaptados para o cômputo das respostas a grades senoidais em movimento, da forma

$$I(x,t) = \cos(kx - \kappa t + \phi) = \cos[kx + \phi(t)]$$
(B.1)

onde definimos  $\phi(t) = \phi - \kappa t$ .

### B.1 Células Simples

A função de resposta da Eq. (A.2) torna-se agora

$$r_{s}(t;\omega,x,\tau) = 2\pi^{2}I(x,t-\tau)e^{i\omega x} \times \int \left\{ e^{-i[(\omega-k)\xi-\phi(t)]} + e^{-i[(\omega+k)\xi+\phi(t)]} \right\} e^{-4\pi^{3}|I(x,t-\tau)|^{2}(\xi-x)^{2}} d\xi$$
(B.2)

onde a integral corresponde a um par de transformadas de Fourier semelhante ao da Eq. (A.3). Obtém-se então

$$r_{s}(t;\omega,x,\tau) = \pi \frac{I(x,t-\tau)}{|I(x,t-\tau)|} \times \left\{ e^{i[kx+\phi(t)]} e^{-\frac{(\omega-k)^{2}}{16\pi^{3}|I(x,t-\tau)|^{2}}} + e^{-i[kx+\phi(t)]} e^{-\frac{(\omega+k)^{2}}{16\pi^{3}|I(x,t-\tau)|^{2}}} \right\}$$
(B.3)

que apresenta, através de  $\phi(t)$ , uma modulação na mesma frequência temporal do estímulo. Novamente, assume-se que a função  $r_s(t; \omega, x, \tau)$  sofrerá retificação de meia onda, para que a resposta da célula simples seja obtida.

### B.2 Células Complexas

Para a resposta da célula complexa, a Eq. (A.6) fornece

$$r_{c}(t;\omega,x,\tau) = \frac{e^{-i\varphi(\omega;t-\tau)}}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left\{ e^{-i[(\omega-k)\xi-\phi(t)]} + e^{-i[(\omega+k)\xi+\phi(t)]} \right\} e^{-\frac{(\xi-x)^{2}}{2|\bar{I}(\omega;t-\tau)|^{2}}} d\xi \qquad (B.4)$$

e assim (ver Eq. (A.8))

$$r_{c}(t;\omega,x,\tau) = \frac{I^{*}(\omega;t-\tau)}{4\pi} \times \left\{ e^{-i[(\omega-k)x-\phi(t)]} e^{-|\tilde{I}(\omega;t-\tau)|^{2} \frac{(\omega-k)^{2}}{2}} + e^{-i[(\omega+k)x+\phi(t)]} e^{-|\tilde{I}(\omega;t-\tau)|^{2} \frac{(\omega+k)^{2}}{2}} \right\}$$
(B.5)

onde, agora,

$$\tilde{I}(\omega;t) = \pi e^{i\varphi(\omega;t)} [\delta(\omega-k) + \delta(\omega+k)]$$
(B.6)

para

$$\varphi(\omega;t) = \begin{cases} \phi(t), & \text{se } \omega = k \\ -\phi(t), & \text{se } \omega = -k \end{cases}$$
(B.7)

Um raciocínio semelhante ao que se seguiu à Eq. (A.10), nos leva a

$$r_{c}(t;\omega,x,\tau) = \frac{1}{4} \left\{ e^{-i[\varphi(k;t-\tau)-\phi(t)]} \delta(\omega-k) + e^{-i[\varphi(-k;t-\tau)+\phi(t)]} \delta(\omega+k) \right\}$$
(B.8)

e, por meio da Eq. (B.7),

$$r_c(t;\omega,x,\tau) = \frac{1}{4} [e^{i\kappa\tau}\delta(\omega-k) + e^{-i\kappa\tau}\delta(\omega+k)]$$
(B.9)

que não apresenta modulação temporal, de forma consistente com os resultados experimentais para as células complexas [16].

É também interessante calcular a resposta da célula complexa para grades compostas em movimento. Verifica-se que esta é consistente com os resultados experimentais [42], quando se considera uma grade observada sob uma janela finita, ao invés da grade infinita considerada até agora.

Para uma grade composta de frequências espaciais  $k_1$  e  $k_2$ , em movimento rígido observado sob uma janela de largura  $\Delta$ , o sinal de entrada torna-se

$$I(x,t) = P_{\Delta}(x) \{ \cos[k_1 x + \phi_1(t)] + \cos[k_2 x + \phi_2(t)] \}$$
(B.10)

com  $\phi_1(t) = \phi_1 - \kappa_1 t$  e  $\phi_2(t) = \phi_2 - \kappa_2 t$ , para  $\kappa_j = k_j v$ , j = 1, 2, onde v corresponde à

velocidade de movimento. Na expressão acima,  $P_{\Delta}(x)$  denota a função pulso retangular,

$$P_{\Delta}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} & -\frac{\Delta}{2} < x < \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
(B.11)

Por conveniência, vamos reescrever a Eq. (B.10) como

$$I(x,t) = I_1(x,t) + I_2(x,t)$$
(B.12)

onde  $I_j(x,t) = P_{\Delta}(x) \cos[k_j x + \phi_j(t)].$ 

A tranformada de Fourier de cada  $I_j(x,t)$  é obtida como

$$\tilde{I}_{j}(\omega;t) = \Delta \left\{ \operatorname{sinc} \left[ \frac{(\omega - k_{j})\Delta}{2\pi} \right] e^{i\phi_{j}(t)} + \operatorname{sinc} \left[ \frac{(\omega + k_{j})\Delta}{2\pi} \right] e^{-i\phi_{j}(t)} \right\}$$
(B.13)

que pode ser reescrita sob a forma

$$\tilde{I}_j(\omega;t) = \tilde{I}_j^-(\omega;t) + \tilde{I}_j^+(\omega;t)$$
(B.14)

onde

$$\tilde{I}_{j}^{\mp}(\omega;t) = \Delta \operatorname{sinc}\left[\frac{(\omega \mp k_{j})\Delta}{2\pi}\right] e^{\pm i\phi_{j}(t)}$$
(B.15)

Não é difícil concluir, tendo como referência a Eq. (B.5), que a resposta da célula complexa será dada por

$$r_{c}(t;\omega,x,\tau) = \frac{\sum_{l} I_{l}^{*}(\omega;t-\tau)}{4\pi} \times \sum_{j} \left\{ e^{-i[(\omega-k_{j})x-\phi_{j}(t)]} e^{-|\sum_{l} \tilde{I}_{l}(\omega;t-\tau)|^{2} \frac{(\omega-k_{j})^{2}}{2}} + e^{-i[(\omega+k_{j})x+\phi_{j}(t)]} e^{-|\sum_{l} \tilde{I}_{l}(\omega;t-\tau)|^{2} \frac{(\omega+k_{j})^{2}}{2}} \right\}$$
(B.16)

Considerando que a largura do pulso  $\Delta$  seja suficientemente grande, tal que as funções sinc da Eq. (B.15) sejam estreitas e altas, aproximando-se de funções delta, podemos aproximar a Eq. (B.16) como

$$r_c(t;\omega,x,\tau) \cong \frac{\Delta}{4\pi} [r_c^-(t;\omega,x,\tau) + r_c^+(t;\omega,x,\tau)]$$
(B.17)

com  $r_c^-(t;\omega,x,\tau)$  dada por

$$r_{c}^{-}(t;\omega,x,\tau) =$$

$$= \operatorname{sinc}\left[\frac{(\omega-k_{1})\Delta}{2\pi}\right] \left\{ e^{i\kappa_{1}\tau} + e^{-i[(k_{1}-k_{2})x+(\kappa_{1}-\kappa_{2})t-(\phi_{1}-\phi_{2})-\kappa_{1}\tau]} e^{-|\sum_{l}\tilde{I}_{l}(\omega;t-\tau)|^{2}\frac{(k_{1}-k_{2})^{2}}{2}} \right\} +$$

$$+\operatorname{sinc}\left[\frac{(\omega-k_{2})\Delta}{2\pi}\right] \left\{ e^{i\kappa_{2}\tau} + e^{-i[(k_{2}-k_{1})x+(\kappa_{1}-\kappa_{2})t-(\phi_{2}-\phi_{1})-\kappa_{2}\tau]} e^{-|\sum_{l}\tilde{I}_{l}(\omega;t-\tau)|^{2}\frac{(k_{2}-k_{1})^{2}}{2}} \right\}$$
(B.18)

e com uma expressão similar valendo para  $r_c^+(t;\omega,x,\tau)$ .

Vemos então que, em acordo com os dados experimentais [42], nossa resposta da célula complexa apresenta uma modulação na diferença das frequências da grade composta, além da componente não modulada dominante. Quando  $\Delta$  tende a infinito, de modo que as funções sinc da Eq. (B.15) se transformam em funções delta, as componentes moduladas da Eq. (B.18) desaparecem, já que  $|\sum_{l} \tilde{I}_{l}|$  também tende a infinito.

## APÊNDICE C - Respostas a Fendas

As respostas do modelo sintonizado serão calculadas, a seguir, para uma fenda em movimento, com largura  $\Delta$  e orientação dada pelo ângulo  $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$  com o eixo horizontal. O sinal de entrada corresponde a

$$I(x, y; t) = \mathcal{P}_{\Delta}[z(x, y; \alpha, t)] \tag{C.1}$$

onde  $P_{\Delta}[\cdot]$  é mais uma vez a função pulso retangular da Eq. (B.11), em que  $z(x, y; \alpha, t)$ , dada por

$$z(x, y; \alpha, t) = [x - x_s(t)] \cos \alpha + [y - y_s(t)] \sin \alpha$$
(C.2)

para  $x_s(t) = x_0 + v_x t$  e  $y_s(t) = y_0 + v_y t$ , indica a posição do centro da fenda ao longo do eixo z no instante t, sendo  $(v_x, v_y)$ , para  $v_x = v \cos \alpha$  e  $v_y = v \sin \alpha$ , a sua velocidade.

Aqui, nós devemos trabalhar como os modelos bidimensionais para os campos receptivos.

### C.1 Células Simples

A resposta do modelo proposto para a células simples é obtida como a versão retificada em meia onda da função (ver Eq. (2.30))

$$r_s(t;\omega_x,\omega_y;x,y,\tau) = (2\pi)^{-4} \times$$
$$\times \int \int e^{i(\Omega_x x + \Omega_y y)} e^{-\frac{(\Omega_x - \omega_x)^2 + (\Omega_y - \omega_y)^2}{16\pi^3 |I(x,y;t-\tau)|}} \tilde{I}(\Omega_x,\Omega_y;t) d\Omega_x d\Omega_y$$
(C.3)

para uma célula localizada em (x, y) e sintonizada à frequência  $(\omega_x, \omega_y)$ . Na equação acima levou-se em consideração que a fase do sinal de entrada é sempre zero.

A transformada de Fourier do sinal de entrada é dada por

$$\tilde{I}(\Omega_x, \Omega_y; t) = \int \int e^{-i(\Omega_x \xi + \Omega_y \eta)} \mathcal{P}_{\Delta}[z(\xi, \eta; \alpha, t)] d\xi d\eta =$$

$$= \sec \alpha e^{-i\Omega_x[x_s(t)+y_s(t)\tan\alpha]} \int e^{-i\Omega_x\eta(\tan\Theta-\tan\alpha)} d\eta \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^{-i\Omega_xz\sec\alpha} dz \qquad (C.4)$$

onde  $\tan \Theta = \Omega_y / \Omega_x$ .

onde

Ambas as integrais do lado direito da Eq. (C.4) podem ser calculadas sem dificuldades, sendo a primeira

$$2\pi\delta[\Omega_x(\tan\Theta - \tan\alpha)] = 2\pi\frac{\cos\Theta}{\Omega}\delta(\Theta - \alpha) \tag{C.5}$$

para  $\Omega = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2} \neq 0$ , onde se usou a propriedade da função delta

$$\delta[f(x)] = \sum_{k} \frac{\delta(x - x_k)}{f'(x_k)}$$
(C.6)

com  $x_k$  denotando os zeros da função genérica f(x) com a derivada f'(x).

A segunda integral do lado direito da Eq. (C.4) fornece

$$\Delta \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_x \Delta \sec \alpha}{2\pi}\right) \tag{C.7}$$

e assim obtém-se, para a transformada de Fourier da fenda retangular bidimensional,

$$\tilde{I}(\Omega_x, \Omega_y; t) = 2\pi e^{-i\Omega[x_s(t)\cos\alpha + y_s(t)\sin\alpha]} \frac{\Delta}{\Omega} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega\Delta}{2\pi}\right) \delta(\Theta - \alpha)$$
(C.8)

Usando este resultado na Eq. (C.3), mudando para as variáveis polares de integração,  $\Omega$  e  $\Theta$ , e integrando em  $\Theta$ , encontramos

$$r_{s}(t;\omega_{x},\omega_{y};x,y,\tau) = \frac{\Delta}{(2\pi)^{3}} \times \\ \times \int_{0}^{\infty} e^{i\Omega\{[x-x_{s}(t)]\cos\alpha + [y-y_{s}(t)]\sin\alpha\}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega\Delta}{2\pi}\right) e^{-\frac{[\Omega^{2}+\omega^{2}-2\Omega\omega\cos(\theta-\alpha)]}{16\pi^{3}\mathrm{P}\Delta[z(x,y;t-\tau)]}} d\Omega \qquad (C.9)$$
$$\omega = \sqrt{\omega_{x}^{2}+\omega_{y}^{2}} \in \theta = \tan^{-1}(\omega_{y}/\omega_{x}).$$

Relembrando a expressão para a fenda em movimento, dada pelas Eqs. (C.1), (C.2) e (B.11), obtemos finalmente

$$r_s(t;\omega_x,\omega_y;x,y,\tau) = \frac{\Delta}{(2\pi)^3} \int_0^\infty e^{i\Omega z(x,y;\alpha,t)} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega\Delta}{2\pi}\right) e^{-\frac{[\Omega^2 + \omega^2 - 2\Omega\omega\cos(\theta - \alpha)]}{16\pi^3}} d\Omega \quad (C.10)$$

desde que  $-\frac{\Delta}{2} < z(x, y; \alpha, t - \tau) < \frac{\Delta}{2}$ , e zero, em caso contrário. Isto significa que a célula responderá apenas enquanto a fenda atravessa o centro do seu campo receptivo. Ademais, a resposta será máxima se a fenda possuir a mesma orientação que o campo receptivo, de vez que, quando  $\alpha = \theta$ , o fator Gaussiano na Eq. (C.10) será maximizado. Tais resultados estão de acordo com os dados experimentais [34].

### C.2 Células Complexas

A resposta da célula complexa será dada por (ver a Eq. (2.31))

$$r_{c}(t;\omega_{x},\omega_{y};x,y,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{3}} \times$$
$$\times \int \int e^{-i[\omega_{x}\xi + \omega_{y}\eta + \varphi(\omega_{x},\omega_{y};t-\tau)]} e^{-\frac{(\xi-x)^{2} + (\eta-y)^{2}}{2|\tilde{I}(\omega_{x},\omega_{y};t-\tau)|}} I(\xi,\eta;t) d\xi d\eta \qquad (C.11)$$

A transformada da fenda retangular foi calculada anteriormente - Eq. (C.8) -,e assim temos

$$\varphi(\omega_x, \omega_y; t - \tau) = \phi(\omega) - \omega[x_s(t - \tau)\cos\alpha + y_s(t - \tau)\sin\alpha]$$
(C.12)

onde

$$\phi(\omega) = \begin{cases} \pi, & \text{se } -\frac{2\pi(k+1)}{\Delta} < \omega < \frac{2\pi(k+2)}{\Delta}, \text{ for } k = 0, 2, \dots \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
(C.13)

е

$$\left|\tilde{I}(\omega_x, \omega_y; t - \tau)\right| = 2\pi \frac{\Delta}{\omega} \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2\pi}\right)\right| \delta(\theta - \alpha) \tag{C.14}$$

de modo que, devido ao fator da função delta,

$$e^{-\frac{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}{2|\tilde{I}(\omega_x,\omega_y;t-\tau)|}} = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta = \alpha\\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
(C.15)

Usando as Eqs. C.12 e C.15 na Eq. C.11, obtém-se

$$r_{c}(t;\omega_{x},\omega_{y};x,y,\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{3}} e^{i\{\omega[x_{s}(t-\tau)\cos\alpha+y_{s}(t-\tau)\sin\alpha]-\phi(\omega)\}} \times \int \int e^{-i\omega[\xi\cos\alpha+\eta\sin\alpha]} I(\xi,\eta;t)d\xi d\eta$$
(C.16)

quando  $\theta \equiv \tan^{-1}(\omega_y/\omega_x) = \alpha$ , e zero, em caso contrário. Identificando a integral como uma transformada de Fourier, podemos reescrever

$$r_{c}(t;\omega_{x},\omega_{y};x,y,\tau) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{3}} e^{i\{\omega[x_{s}(t-\tau)\cos\alpha+y_{s}(t-\tau)\sin\alpha]-\phi(\omega)\}} \tilde{I}(\omega\cos\alpha,\omega\sin\alpha;t)$$
(C.17)

e, fazendo uso das Eqs. (C.12) and (C.14),

$$r_{c}(t;\omega_{x},\omega_{y};x,y,\tau) =$$

$$= e^{-i\omega\{[x_{s}(t)-x_{s}(t-\tau)]\cos\alpha+[y_{s}(t)-y_{s}(t-\tau)]\sin\alpha\}} \frac{\Delta}{(2\pi)^{2}\omega} \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2\pi}\right)\right| \delta(\theta-\alpha) \quad (C.18)$$

Lembrando que  $x_s(t) = x_0 + v_x t$  e  $y_s(t) = y_0 + v_y t$ , encontra-se, finalmente,

$$r_c(t;\omega_x,\omega_y;x,y,\tau) = e^{-i\omega v\tau} \frac{\Delta}{(2\pi)^2 \omega} \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \Delta}{2\pi}\right) \right| \delta(\theta - \alpha)$$
(C.19)

Assim, não haverá resposta para fendas que não estejam alinhadas com o campo receptivo; por outro lado, para fendas que estiverem com esta mesma orientação, a célula complexa irá responder independentemente da posição da fenda com relação ao centro do campo receptivo. Tais resultados estão, novamente, em conformidade com os dados experimentais [35].

Do exposto acima, pode-se também obter a resposta do nosso modelo para a célula complexa quando o estímulo é um par de fendas estacionárias apresentadas simultaneamente. Neste caso, o sinal de entrada é dado por

$$I(x, y; t) = I_1(x, y; t) + I_2(x, y; t)$$
(C.20)

com  $I_1$  e  $I_2$  definidos pelas Eqs. (C.1) e (C.2), mas com as duas fendas assumindo diferentes posições estacionárias.

Para o cálculo da resposta da célula, deve-se usar a Eq. (C.11) com

$$\tilde{I}(\omega_x, \omega_y; t) = \tilde{I}_1(\omega_x, \omega_y; t) + \tilde{I}_2(\omega_x, \omega_y; t)$$
(C.21)

onde ambas as transformadas no lado direito são dadas pela Eq. (C.8), de forma que se obtém

$$\left|\tilde{I}_{i}(\omega_{x},\omega_{y};t)\right| = 2\pi \frac{\Delta}{\omega} \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2\pi}\right)\right| \delta(\theta - \alpha)$$
(C.22)

е

$$\varphi_i(\omega_x, \omega_y; t) = \phi(\omega) - \omega(x_{s_i} \cos \alpha + y_{s_i} \sin \alpha)$$
(C.23)

para i = 1, 2, com  $(x_{s_i}, y_{s_i})$  denotando as posições estacionárias das fendas — assumidas de mesma polaridade, largura e orientação —, e com  $\phi(\omega)$  tal como na Eq. (C.13).

Lembrando que

$$|\tilde{I}_1 + \tilde{I}_2|^2 = |\tilde{I}_1|^2 + |\tilde{I}_2|^2 + 2|\tilde{I}_1||\tilde{I}_2|\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$
(C.24)

usando a Eq. (C.22), e seguindo os mesmos passos que levaram da Eq. (C.11) à Eq. (C.19), obtém-se

$$r_c(t;\omega_x,\omega_y;x,y,\tau) = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\Delta}{\omega} \left| \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \right| \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\Delta}{2\pi}\right) \right| \delta(\theta - \alpha)$$
(C.25)

o que implica em que a resposta da célula depende da posição relativa das duas fendas, através do fator

$$\Delta \varphi \equiv \varphi_1 - \varphi_2 = \omega [(x_{s_2} - x_{s_1}) \cos \alpha + (y_{s_2} - y_{s_1}) \sin \alpha]$$
(C.26)

Em consonância com os resultados experimentais [35], o modelo proposto prevê que a célula complexa terá uma resposta menor para um par de fendas do que para uma única fenda (compare as Eqs. (C.19) e (C.25)), a menos que a distância entre os estímulos seja pequena o suficiente – em nosso modelo, tal que  $\cos(\Delta \varphi/2) > 0.5$ . Se considerarmos um par de fendas de polaridades opostas, um fator extra de  $\pi$  surgirá na diferença de fase da Eq. (C.26), resultando em uma resposta facilitada para separações maiores entre as fendas, o que se mostra novamente em acordo com os experimentos.

# APÊNDICE D – Obtenção da Equação de Movimento para a Resposta da Célula da Classe Complexa

Aqui nós obtemos a equação de movimento satisfeita pela resposta da célula do *tipo* complexo,  $r_n(x, \tau)$ , dada pela Eq. 4.31. Para isto, nós calculamos as derivadas de  $r_n(x, \tau)$ em relação a seus argumentos.

i) Derivada com relação a  $\tau$ :

Tomando a derivada com relação a  $\tau$  de ambos os lados da Eq. (4.31), nós obtemos

$$\partial_{\tau} r_n(x,\tau) = -\left(i\partial_{\tau}\varphi(\omega,t_-) + n|\tilde{I}(\omega,t_-)|^{-1}\partial_{\tau}|\tilde{I}(\omega,t_-)|\right)r_n(x,\tau) + \\ +|\tilde{I}(\omega,t_-)|^{-3}\partial_{\tau}|\tilde{I}(\omega,t_-)|\left(Int+|\tilde{I}(\omega,t_-)|Int_2+i\omega|\tilde{I}(\omega,t_-)|^3Int_3\right)$$
(D.1)

 $\operatorname{com}$ 

$$Int = \int (\xi - x)^2 G(\xi, x, t_{-}) \ \overline{H}_n \left[ \frac{x - \xi + i\omega |\tilde{I}(\omega, t_{-})|^2}{|\tilde{I}(\omega, t_{-})|} \right] I(\xi, t) d\xi$$
(D.2)

$$Int_{2} = \int (\xi - x)G(\xi, x, t_{-}) \ \overline{H}'_{n} \left[ \frac{x - \xi + i\omega |\tilde{I}(\omega, t_{-})|^{2}}{|\tilde{I}(\omega, t_{-})|} \right] I(\xi, t)d\xi$$
(D.3)

е

$$Int_{3} = \int G(\xi, x, t_{-}) \ \overline{H}'_{n} \left[ \frac{x - \xi + i\omega |\tilde{I}(\omega, t_{-})|^{2}}{|\tilde{I}(\omega, t_{-})|} \right] I(\xi, t) d\xi \tag{D.4}$$

onde  $\overline{H}'_n(\cdot)$  denota a derivada da função  $\overline{H}_n(\cdot)$  com relação ao seu argumento.

ii) Derivada com relação a x:

Tomando a primeira derivada com relação a x de ambos os lados da Eq. (4.31), resulta

$$\partial_x r_n(x,\tau) = |\tilde{I}(\omega, t_-)|^{-2} \int (\xi - x) G(\xi, x, t_-) \overline{H}_n \left[ \frac{x - \xi + i\omega |\tilde{I}(\omega, t_-)|^2}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left[ \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi + \frac{1}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \left$$

Apêndice D - Obtenção da Equação de Movimento para a Resposta da Célula da Classe Complexa 118

$$+|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{-1}\int G(\xi,x,t_{-})\overline{H}'_{n}\left[\frac{x-\xi+i\omega|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{2}}{|\tilde{I}(\omega,t_{-})|}\right]I(\xi,t)d\xi$$
(D.5)

e, a partir daí,

$$\partial_x^2 r_n(x,\tau) =$$
  
=  $-|\tilde{I}(\omega,t_-)|^{-2} r_n(x,\tau) + |\tilde{I}(\omega,t_-)|^{-4} Int + 2|\tilde{I}(\omega,t_-)|^{-3} Int_2 + |\tilde{I}(\omega,t_-)|^{-2} Int_4$  (D.6)

 $\operatorname{com}$ 

$$Int_4 = \int G(\xi, x, t_-) \ \overline{H}''_n \left[ \frac{x - \xi + i\omega |\tilde{I}(\omega, t_-)|^2}{|\tilde{I}(\omega, t_-)|} \right] I(\xi, t) d\xi \tag{D.7}$$

onde  $\overline{H}_n''(\cdot)$  denota a segunda derivada da função  $\overline{H}_n(\cdot)$  com relação ao seu argumento.

Resolvendo para Int na Eq. (D.6), nós encontramos

$$Int = |\tilde{I}(\omega, t_{-})|^4 \times$$

$$\times \left[ \partial_x^2 r_n(x,\tau) + |\tilde{I}(\omega,t_-)|^{-2} r_n(x,\tau) - 2|\tilde{I}(\omega,t_-)|^{-3} Int_2 - |\tilde{I}(\omega,t_-)|^{-2} Int_4 \right]$$
(D.8)

e substituindo na Eq. (D.1),

$$\partial_{\tau} r_{n}(x,\tau) = -\left(i\partial_{\tau}\varphi(\omega,t_{-}) + n|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{-1}\partial_{\tau}|\tilde{I}(\omega,t_{-})|\right)r_{n}(x,\tau) + \\ +|\tilde{I}(\omega,t_{-})|\partial_{\tau}|\tilde{I}(\omega,t_{-})|\left(\partial_{x}^{2}r_{n} + |\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{-2}r_{n} - 2|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{-3}Int_{2} - |\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{-2}Int_{4}\right) + \\ +|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{-3}\partial_{\tau}|\tilde{I}(\omega,t_{-})|\left(|\tilde{I}(\omega,t_{-})|Int_{2} + i\omega|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{3}Int_{3}\right)$$
(D.9)

de onde resulta

$$\partial_{\tau} r_n(x,\tau) = |\tilde{I}(\omega,t_-)| \partial_{\tau} |\tilde{I}(\omega,t_-)| \partial_x^2 r_n(x,\tau) + \\ + \left[ (1-n) |\tilde{I}(\omega,t_-)|^{-1} \partial_{\tau} |\tilde{I}(\omega,t_-)| - i \partial_{\tau} \varphi(\omega,t_-) \right] r_n(x,\tau) - \\ - |\tilde{I}(\omega,t_-)|^{-1} \partial_{\tau} |\tilde{I}(\omega,t_-)| \left( Int_4 + |\tilde{I}(\omega,t_-)|^{-1} Int_2 - i\omega |\tilde{I}(\omega,t_-)| Int_3 \right)$$
(D.10)

O termo entre parênteses na terceira linha da equação acima corresponde a

$$\int G(\xi, x, t_{-}) \left( \overline{H}_{n}^{\prime\prime}(\cdot) - \left[ \frac{x - \xi + i\omega |\tilde{I}(\omega, t_{-})|^{2}}{|\tilde{I}(\omega, t_{-})|} \right] \overline{H}_{n}^{\prime}(\cdot) \right) I(\xi, t) d\xi$$
(D.11)

ou, usando a propriedade dos polinômios  $\overline{H}_n$  apresentada na Eq. (4.23),

$$-n\int G(\xi, x, t_{-})\overline{H}_{n}(\cdot)I(\xi, t)d\xi = -nr_{n}(x, \tau)$$
(D.12)

de modo que nós finalmente obtemos a equação

$$\partial_{\tau} r_n(x,\tau) = |\tilde{I}(\omega,t_-)|\partial_{\tau}|\tilde{I}(\omega,t_-)|\partial_x^2 r_n(x,\tau) +$$

Apêndice D – Obtenção da Equação de Movimento para a Resposta da Célula da Classe Complexa 119

$$+\left[|\tilde{I}(\omega,t_{-})|^{-1}\partial_{\tau}|\tilde{I}(\omega,t_{-})|-i\partial_{\tau}\varphi(\omega,t_{-})\right]r_{n}(x,\tau)+\tag{D.13}$$

o que equivale a

$$\partial_{\tau} r_n(x,\tau) = \frac{1}{2} \partial_{\tau} |\tilde{I}(\omega,t_-)|^2 \partial_x^2 r_n(x,\tau) + \partial_{\tau} \log[\tilde{I}^*(\omega,t_-)] r_n(x,\tau), \quad \forall n$$
(D.14)

conforme a Eq. (4.33).

## Referências

- [1] ACACIO DE BARROS, J. Quantum-like model of behavioral response computation using neural oscillations. *Biosystems 110* (2012), 171–182.
- [2] ADELSON, E.; BERGEN, J. Spatiotemporal energy models for the perception of motion. J. Opt. Soc. Am. A2 (1985), 284-299.
- [3] ALBRECHT, D. G.; HAMILTON, D. B. Striate cortex of monkey and cat: Contrast response function. *Journal of Neurophysiology* 48, 1 (1982), 217–237.
- [4] ALLMAN, J.; MIEZIN, F.; MCGUINNESS, E. Stimulus specific responses from beyond the classical receptive field. Annu. Rev. Neuroscience 8 (1985), 407–430.
- [5] ATICK, J.; REDLICH, A. What does the retina know about natural scenes? Neural Comp. 4 (1992), 196-210.
- [6] BAIR, W. Visual receptive field organization. Current Opinion in Neurobiology 15, 4 (2005), 459-464.
- [7] BENOIT, A.; CAPLIER, A.; DURETTE, B.; HÉRAULT, J. Using human visual system modeling for bio-inspired low level image processing. *Computer Vision and Image* Understanding 114 (2010), 758-773.
- [8] BIVAR-WEINHOLTZ, A.; LAPIDUS, M. Product formula for resolvents of normal operators and the modified Feynman integral. Procs. Am. Math. Soc. 110, 2 (1990), 449–460.
- [9] BOASHASH, B. (Ed.) Time Frequency Signal Analysis and Processing A Comprehensive Reference, 2003. Elsevier, Amsterdam.
- [10] CARANDINI, M.; DEMB, J. B.; MANTE, V.; TOLHURST, D. J.; DAN, Y.; OLSHAU-SEN, B. A.; GALLANT, J. L.; RUST, N. C. Do we know what the early visual system does? J. of Neurosci. 25, 46 (2005), 10577–10597.
- [11] COHEN, L. Time-Frequency Analysis, 1995. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River.
- [12] DAN, Y.; ATICK, J. J.; REID, R. C. Efficient coding of natural scenes in the lateral geniculate nucleus: experimental test of a computational theory. J. Neurosci. 16, 10 (1996), 3351–3362.
- [13] DAUGMAN, J. D. Complete Discrete 2-D Gabor Transforms by Neural Networks for Image Analysis and Compression. *IEEE Trans. on Acoustics Speech And Signal Processing.* 36, 7 (1988), 1169–1179.
- [14] DAVID, S. V.; VINJE, W. E.; GALLANT, J. L. Natural stimulus statistics alter the receptive field structure of V1 neurons. *The Journal of Neuroscience* 24, 31 (2004), 6991–7006.
- [15] DAYAN, P.; ABBOTT, L. F. Theoretical Neurocience: Computational and Mathematical Modeling of Neural Systems, 2001. MIT Press, Cambridge.
- [16] DE VALOIS, R. L.; ALBRECHT, D. G.; THORELL, L. G. Spatial frequency selectivity of cells in macaque visual cortex. Vision Res. 22 (1982), 545–559.
- [17] DUROU, J. D.; FALCONE, M.; SAGONA, S. Numerical methods for shape-from shading: A new survey with benchmarks. *Computer Vision and Image Understanding* 109 (2008), 22–43.
- [18] EXNER, P. Open Quantum Systems and Feynman Integrals, 1985. Reidel, Dordrecht.
- [19] FANANY, M.; KUMAZAWA, I. A neural network for recovering 3-D shape from erroneous and few depth maps of shading surfaces. *Pattern Recognition Lett.* 25 (2004), 377–389.
- [20] FERNANDES, J. L. Shape from Shading: Novas Abordagens a partir de Movimento e de Foco. Tese de Doutorado, Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, 2006. Disponível em http://www.ic.uff.br/PosGraduacao.
- [21] GORIS, R.; MOVSHON, J.; SIMONCELLI, E. Partitioning neuronal variability. Nature Neurosci. 17, 6 (2014), 858–865.
- [22] HAAG, J.; DENK, W.; BORST, A. Fly motion is based on reichardt detectors regardless of the signal-to-noise ratio. *Proc. Natl. Acad. USA 101* (2004), 16333– 16338.
- [23] HOLMES, W. R.; RALL, W. Estimating the electrotonic structure of neurons with compartmental models. J. Neurophysiol. 68, 4 (1992), 1438–1452.
- [24] HORN, B. K. P. Robot Vision, 1986. MIT Press, Cambridge.
- [25] HUBEL, D. H. Eye, Brain and Vision, 1995. Scientific American Library, New York.
- [26] HUBEL, D. H.; WIESEL, T. Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex. J. Physiol. 160 (1962), 106–154.
- [27] KHRENNIKOV, A. Quantum-like model of cognitive decision making and information processing. *Biosystems* 95 (2009), 179–187.
- [28] KHRENNIKOV, A. Quantum-like model of processing of information in the brain based on classical electromagnetic field. *Biosystems* 105 (2011), 250–262.
- [29] LAUGHLIN, S. A simple coding procedure enhances a neuron's information capacity. Z. Naturforsch. 36 c (1981), 910–912.
- [30] LEHKY, S. R.; SEJNOWSKI, T. J. Network model of shape-from-shading: neural function arises from both receptive and projective fields. *Nature 333* (1988), 452–454.

- [31] MARCELJA, S. Mathematical description of the responses of simple cortical cells. J. Opt. Soc. Am. A, 70 (1980), 1297–1300.
- [32] MARTINEZ, L. M.; ALONSO, J. M. Complex receptive fields in primary visual cortex. *Neuroscientist* 9 (2003), 317–331.
- [33] MOVELLAN, J. R. Tutorial on Gabor Filters, 2013. Disponível em http://mplab. ucsd.edu/tutorials/Gabor.pdf (accessed on June 15, 2013).
- [34] MOVSHON, J. A.; THOMPSON, I. D.; TOLHURST, D. J. Spatial summation in the receptive fields of simple cells in the cat's striate cortex. J. Physiol. 283 (1978a), 53-77.
- [35] MOVSHON, J. A.; THOMPSON, I. D.; TOLHURST, D. J. Receptive field organization of complex cells in the cat's striate cortex. J. Physiol. 283 (1978b), 79–99.
- [36] OLSHAUSEN, B. A.; FIELD, D. J. How close are we to understanding V1? Neural Comp. 17, 8 (2005), 1665–1699.
- [37] OZAKTAS, H. M.; ZALEVSKY, Z.; KUTAY, M. A. The Fractional Fourier Transform, with Applications in Optics and Signal Processing, 2001. Wiley, West Sussex.
- [38] PENTLAND, A. P. A possible neural mechanism for computing shape from shading. Neural Computation 1 (1989), 208–217.
- [39] PHONG, B.-T. Ilumination for computer generated pictures. Commun. ACM 18, 6 (1975), 311–317.
- [40] POGGIO, G. F. Stereoscopic processing in monkey visual cortex: a review, in: Early Vision and Beyond, Papathomas, T.V., Chubb, C., Gorea, A. and Kowler, E. (Eds.). MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1995. pp. 43–53.
- [41] POGGIO, G. F.; TALBOT, W. H. Mechanisms of static and dynamic stereopsis in foveal cortex of the rhesus monkey. J. Physiology 315 (1981), 469–492.
- [42] POLLEN, D. A.; GASKA, J. P.; JACOBSON, L. D. Responses of simple and complex cells to compound sine-wave gratings. *Vision Res.* 1 (1988), 25–39.
- [43] QIAN, N.; MIKAELIAN, S. Relationship between phase and energy methods for disparity computation. Neural Comp. 12 (2000), 279–292.
- [44] RINGACH, D. L.; SHAPIRO, G.; SHAPLEY, R. Mapping receptive fields in primary visual cortex. Vision Res. 37, 17 (1997), 2455–2464.
- [45] RUDERMAN, D. L.; BIALEK, W. Statistics of natural images: Scaling in the woods. Phys. Rev. Lett. 73, 6 (1994), 814–817.
- [46] SAMARAS, D.; METAXAS, D. Incorporating illumination constraints in deformable models for shape from shading and light direction estimation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 25 (2003), 247–264.
- [47] SCENIAK, M. P.; RINGACH, D. L.; HAWKEN, M. J.; SHAPLEY, R. Contrast's effect on spatial summation by macaque V1 neurons. *Nature Neurosci.* 2 (1999), 733–739.

- [48] SHAPLEY, R.; HAWKEN, M. J. Color in the cortex: single- and double-oppponent cells. Vision Research 51 (2011), 701–717.
- [49] STOCKWELL, R. G.; MANSINHA, L.; LOWE, R. P. Localization of the complex spectrum: The S transform. *IEEE Trans. Signal Process.* 44, 4 (1996), 998–1001.
- [50] STORK, D.; WILSON, H. Do Gabor functions provide appropriate descriptions of visual cortical receptive fields? J. Opt. Soc. Am. A (1990), 1362–1373.
- [51] TORREÃO, J. R. A. A new approach to photometric stereo. *Pattern Recognition* Letters 20, 5 (1999), 535-540.
- [52] TORREÃO, J. R. A. A Green's function approach to shape from shading. Pattern Recognition 31, 12 (2001), 2367–2382.
- [53] TORREÃO, J. R. A. Geometric-photometric approach to monocular shape estimation. Image and Vision Computing 21 (2003), 1045–1061.
- [54] TORREÃO, J. R. A. Equation of Motion and General Solution for the One-Dimensional Complex Cell Response in the Signal-Tuned Approach. *Biological Cybernetics*. 109 (2015), 435–452.
- [55] TORREÃO, J. R. A. Holonomy, quantum mechanics, and the signal-tuned Gabor approach to the striate cortex. Int. J. Mod. Phys. C 27, 7 (2016), 1650089.
- [56] TORREÃO, J. R. A.; FERNANDES, J. L. Shading through defocus, in advances in visual computing. G. Bebis et al., editors 2 (2008), 501-510. Springer, Berlin.
- [57] TORREÃO, J. R. A.; FERNANDES, J. L. Linear-nonlinear neuronal model for shape from shading. Pattern Recognition Letters 32, 9 (2011), 1223–1239.
- [58] TORREÃO, J. R. A.; FERNANDES, J. L.; VICTER, S. M. C. A model for neuronal signal representation by stimulus-dependent receptive fields. Procs. Intl. Conf. on Artificial Neural Networks, ICANN 2009, Part I, C. Alippi et al. (Eds.), LNCS 5768 (2009), 356-362.
- [59] TORREÃO, J. R. A.; VICTER, S. M. C. A model for center-surround stimulusdependent receptive fields. Procs. Intl. Conf. on Artificial Neural Networks, ICANN 2010, Part I K. Diamantaras et al. (Eds.), LNCS 6352 (2010), 305-310.
- [60] TORREÃO, J. R. A.; VICTER, S. M. C.; AMARAL, M. S. Signal-tuned Gabor functions as models for stimulus-dependent cortical receptive fields. *Neural Computation* 26, 5 (2014), 920–952.
- [61] TORREÃO, J. R. A.; VICTER, S. M. C.; FERNANDES, J. L. A signal-tuned Gabor transform with application to EEG analysis. *Int. J. Mod. Phys. C*, 24 (2013), 1350017.
- [62] VALLÉE, O.; SOARES, M. Airy Functions and Applications to Physics. Imperial College Press, London, 2010.
- [63] VAN HATEREN, J.; VAN DER SCHAAF, A. Independent component filters of natural images compared with simple cells in primary visual cortex. *Procs. Biological Sciences* 265 (1998), 359–366.

- [64] VICTER, S. Funções de Gabor Sintonizadas: Aplicação à Análise e à Síntese de Sinais. Tese de Doutorado, Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil, Março 2012. Disponível em http://www.ic.uff.br/PosGraduacao.
- [65] WIESEL, T. N.; HUBEL, D. H. Spatial and chromatic interactions in the lateral geniculate body of the rhesus monkey. *Journal of Neurophysiology 29* (1966), 1115– 1156.
- [66] YEH, C.-I.; XING, D.; WILLIAMS, P. E.; SHAPLEY, R. M. Stimulus ensemble and cortical layer determine V1 spatial receptive fields. *Proceedings of the National Academy of Sciences 106* (2009), 14652–14657.
- [67] ZHANG, R.; TSAI, P. S.; CRYER, J.; SHAH, M. Shape from shading: a survey. *IEEE Trans. Patt. Analysis and Machine Intelligence 21* (1999), 247–264.