UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

JOÃO VINICIUS CORRÊA THOMPSON

Partições & Convexidades de Caminhos em Grafos

NITERÓI 2017

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

JOÃO VINICIUS CORRÊA THOMPSON

Partições & Convexidades de Caminhos em Grafos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doutor em Computação. Área de concentração: Algoritmos e Otimização

Orientador: FÁBIO PROTTI

Orientadora: LOANA TITO NOGUEIRA

> NITERÓI 2017

JOÃO VINICIUS CORRÊA THOMPSON

Partições & Convexidades de Caminhos em Grafos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doutor em Computação. Área de concentração: Algoritmos e Otimização

Aprovada em novembro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Fábio Protti - Orientador, UFF

Prof. Loana Tito Nogueira - Orientadora, UFF

Prof. Sulamita Klein, UFRJ

Prof. Mitre Costa Dourado, UFRJ

Prof. Luiz Satoru Ochi, UFF

Prof. Carlos Alberto de Jesus Martinhon, UFF

Prof. Raquel de Souza Francisco Bravo, UFF

Niterói 2017

Resumo

Esta tese aborda diversos conceitos e aspectos de Teoria dos Grafos, tendo como foco principal problemas de partição e de convexidades de caminhos. Para os problemas de partição, consideramos originalmente o problema da *M*-Partição proposto por Feder, Hell, Klein e Motwani que consiste em verificar se o conjunto de vértices de um dado grafo Gpode ser particionado segundo as condições impostas por uma matriz M quadrada e simétrica de ordem m sob os valores 0, 1, *, onde os elementos na diagonal principal representam as relações internas entre os vértices de cada uma das m partes, podendo os vértices de uma parte i serem completamente adjacentes ($M_{ii} = 1$, e neste caso a parte *i* é uma clique); completamente não adjacentes ($M_{ii} = 0$, e a parte *i* é um conjunto independente); ou não terem nenhuma restrição $(M_{ii} = *)$. Os mesmos valores (0, 1, *)são aplicáveis ao restante da matriz, representando as relações externas, onde $M_{ij} = 1$ indica que todos os elementos da parte i são adjacentes a todos os elementos da parte j; $M_{ij} = 0$ indica que nenhum elemento da parte i é adjacente a algum elemento da parte j; e $M_{ij} = *$ indica que não existe restrição de adjacência entre as partes $i \in j$. A partir do problema da *M*-Partição, propusemo-nos a estudar duas configurações específicas: P_k -Partição e $(k, 0)^j$ -Partição. O problema da P_k -Partição de um grafo G consiste em encontrar uma partição dos vértices de G de forma que, ao escolhermos um vértice de cada partição, o grafo induzido por estes vértices é um P_k , para quaisquer que sejam os vértices escolhidos; assim, estudamos condições para que um grafo seja P_k -particionável. O problema da $(k, 0)^j$ -Partição consiste em estudar o problema da M-Partição em que as matrizes M são restritas àquelas em que a diagonal principal contenha apenas 0's e a última linha/coluna contenha apenas 1's e/ou *'s. Para as convexidades de caminhos, que são definidas através de coleções especiais de caminhos em grafos - por exemplo, a coleção dos caminhos mínimos, associada à convexidade geodésica; ou a coleção dos caminhos induzidos, associada à convexidade monofônica -, propusemos uma estrutura geral (*framework*) capaz de representar diversas convexidades conhecidas, e mostramos que um conjunto de problemas é NP-completo quando mantemos esta estrutura na sua forma mais genérica. No entanto, quando restritos a configurações específicas, mostramos que alguns problemas podem se manter difíceis ou apresentar algoritmos polinomiais de acordo com a convexidade escolhida e do problema em questão.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos, Convexidades de Caminhos, M-Partições.

Abstract

This thesis deals with several aspects and concepts of graph theory, focusing on partition problems and path convexities. Regarding the partition problems, we first consider the M-Partition problem proposed by Feder, Klein, Hell, and Motwani, that consists of verifying if the vertex set of a given graph can be partitioned according to some conditions imposed by a symmetric, square matrix M defined over 0, 1, * where the elements in the main diagonal represent internal relations between vertices in each of the m parts: vertices in part i can be completely adjacent $(M_{ii} = 1, \text{ and}, \text{ in this case, part } i \text{ is a clique});$ completely non-adjacent ($M_{ii} = 0$, and, in this case, part *i* is an independent set); or have no adjacency restrictions $(M_{ii} = *)$. The same values 0, 1, * applies to the rest of the matrix, representing external relations between parts, where $M_{ij} = 1$ means that parts i and j are completely adjacent; $M_{ij} = 0$ means that parts i and j are completely non-adjacent; and $M_{ij} = *$ means that parts i and j have no adjacency restrictions. From the *M*-partition problem, we propose the study of two specific matrix problems: the P_k -Partition problem and the $(k, 0)^j$ -Partition problem. The P_k -Partition problem consists of finding (if any) a partition of the vertex set such that, by choosing a vertex in each partition, the graph induced by such vertices is a P_k , for any choice of such vertices; therefore, we study conditions for a graph to be P_k -partitionable. The $(k, 0)^j$ -Partition problem consists of studying the M-Partition problem on restricted matrices M such that their main diagonal contains only 0's and the last row/column contains only 1's and/or *'s. Regarding the path convexities, which are defined over special collections of paths in graphs - for example, the collection of shortest paths, associated with the geodetic convexity; or the collection of induced paths, associated with the monophonic convexity -, we propose a general framework able to represent several well-known convexities, and show that a set of problems is NP-complete when we consider such framework in its more generic formulation. However, when restricted to specific configurations, some problems may still be hard, or admit polynomial algorithms according to the chosen convexity.

Keywords: Graph Theory, Path Convexities, M-Partitions.

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de co-árvore	8
1.2	Operações gêmeo falso e gêmeo verdadeiro	9
1.3	Exemplo da construção do cografo formado pela sequência S_1	9
1.4	Exemplo da construção do cografo formado pela sequência S_2	10
2.1	Exemplo de representação dos conjuntos	13
2.2	Exemplo de adjacências entre os conjuntos	13
2.3	Exemplo de matriz, M , e sua representação gráfica	14
2.4	Exemplo de matriz, N , e sua representação gráfica	14
2.5	Grafo proibido para cordal- $(2, 1)$	15
2.6	Obstruções minimais para os cografos- $(2, 1)$	18
2.7	Matriz M^1 com três conjuntos independentes e uma restrição externa	19
2.8	Obstruções para M^1	19
2.9	Matriz M^1 com três conjuntos independentes e duas restrições externas	19
2.10	Obstruções para M^2	20
2.11	Matriz M^3 com dois conjuntos independentes e uma restrição externa	20
2.12	Obstruções para M^3	20
2.13	Matriz M^4 com quatro conjuntos independentes e uma restrição externa. $% M^4$.	21
2.14	Obstruções para M^4	21
2.15	Matriz M^5 com quatro conjuntos independentes e duas restrições externas.	21
2.16	Obstruções para M^5	22
2.17	Matriz M^6 com quatro conjuntos independentes e três restrições externas	22
2.18	Obstruções para M^6	22
2.19	Obstruções para $k = 7$	29

2.20	Exemplo de P_k -partição.	30
2.21	P_k extraído da P_k -partição	31
2.22	Grafo com P_5 induzido e P_3 -particionável	32
2.23	Vértices v_1 e v_4 pertencendo à mesma partição	35
2.24	Vértices v_1 e v_4 pertencendo a partições não adjacentes	36
2.25	P_4 induzido em 3 partições	37
3.1	Exemplo de intervalo para o grafo $G,S=\{a,b\}$ e convexidade geodésica	43
3.2	Exemplo de intervalo para o grafo $G, S = \{a, b\}$ e convexidade monofônica.	44
3.3	Exemplo de conjuntos convexo e não convexo para convexidade g^3	45
3.4	Determinar intervalo para convexidade P_3	45
3.5	Determinar a envoltória convexa para convexidade $triangle - path.$	46

Sumário

1	Introdução			1
	1.1	Motiva	ação	1
	1.2	Defini	ções fundamentais	2
	1.3	Comp	lexidade de algoritmos	5
	1.4	Cogra	fos	7
		1.4.1	Co-árvore	7
		1.4.2	Sequência de operações para construção do cografo	8
	1.5	Estrut	ura da tese	11
2	Part	tições e	m Grafos	12
	2.1	M-par	tição	12
		2.1.1	M -Partição em cografos $\ldots \ldots \ldots$	16
	2.2	$(k, 0)^{j}$	-partição em cografos	23
	2.3	P_k -Pa	rtição	30
3	Abo	rdagem	unificada para convexidades de caminhos	41
	3.1	Prelin	inares	41
		3.1.1	Convexidade de caminhos na literatura	42
		3.1.2	Problemas computacionais	44
		3.1.3	Resultados existentes em convexidade de caminhos	46
		3.1.4	Dois fatos úteis	47
	3.2	Um fr	amework geral para convexidades de caminhos	48
		3.2.1	Colocando as matrizes como parte da entrada	49

		3.2.2	Matrizes constantes: convexidade de caminhos (a, b, c, d)	53
		3.2.3	Convexidade matricial em grafos com $treewidth$ limitado $\ldots \ldots$	54
		3.2.4	Casos particulares para convexidade da caminhos matriciais \ldots	57
		3.2.5	Novas convexidades derivadas do <i>framework</i> de convexidade de ca-	
			minhos matriciais	58
	3.3	Preen	chendo os $gaps$ da literatura	59
		3.3.1	Resultados para convexidade m^3	60
		3.3.2	Resultados para a convexidade <i>all-path</i>	63
		3.3.3	Consequências diretas	63
4	Con	clusões		65
	4.1	Traba	lhos Futuros	66
Re	eferên	cias		68

Capítulo 1

Introdução

"Let go your earthly tether. Enter the void. Empty and become wind."

(Michael Dante DiMartino)

Esta tese é apresentada como requisito obrigatório para obtenção de título de doutor em computação e, também, é resultado de trabalhos obtidos através do estudo em anos prévios. Ao longo do texto apresenta-se uma variedade de problemas e resultados discutidos sob a perspectiva de teoria dos grafos e algoritmos.

1.1 Motivação

Espera-se que uma tese de doutorado apresente evoluções teóricas ou aplicadas na área que se dispõe a estudar. Neste sentido, estudamos problemas que apresentam vastas bibliografias e produções acadêmicas com intuito de desvendar os resultados ainda não explorados de cada um dos tópicos.

Mais especificamente, para produção desta tese, decidimos trazer os estudos dos problemas de **convexidade de caminhos em grafos** e de **partições em grafos**, sendo o primeiro o tópico principal deste trabalho, discutido no Capítulo 3. Apesar da vasta produção acadêmica evidenciada no *survey*/livro de Pelayo [70], é possível perceber que existem muitas formas de representação que dificultam o entendimento rápido da convexidade ou, até mesmo, de como ela se relaciona com as diversas outras convexidades e problemas. Assim, o objetivo desta tese foi desenvolver um *framework* capaz de representar diversas convexidades diferentes, estudar resultados anteriores e apresentar novos resultados computacionais - tanto para convexidades já existentes, quanto para convexidades propostas.

Além do tópico principal, apresentamos também os problemas de partições em grafos como complemento de trabalhos anteriores e anotações adicionais. Nos estudos anteriores, de Leite [64] e Viana [78], foram apresentadas obstruções minimais para classe dos cografos-(k, l) (sob a interpretação de *M*-Partição), porém estes trabalhos limitaram os tamanhos das matrizes apresentadas e deixaram em aberto diversas generalizações. Dessa forma, o Capítulo 2, na Seção 2.2, tratará uma dessas generalizações. Por fim, a Seção 2.3 apresenta o problema P_k -Partição sob a ótica de *M*-Partição, tendo por objetivo oferecer resultados iniciais para o estudo mais aprofundado de partições de caminhos.

1.2 Definições fundamentais

Esta seção introduz conceitos, definições e termos utilizados durante a tese.

Todos os grafos nesta tese são simples; o termo grafo é utilizado para designar um grafo simples. Um grafo simples G é um par ordenado (V(G), E(G)) (ou apenas (V, E)), tal que V(G) é um conjunto não vazio de vértices e E(G) representa o conjunto de arestas. Cada aresta do conjunto E(G) é representada por um par de vértices distintos e não ordenados de G. Denotamos o número de vértices e de arestas de um grafo G por n(G) e m(G) (ou simplesmente n e m, quando o contexto permitir), respectivamente. Se e = (u, v) é uma aresta pertencente a E(G) (denotada por $uv \in E(G)$), então dizemos que os vértices u e v são adjacentes no grafo G, e são extremidades de e. Também dizemos que e é incidente aos vértices $u \in v$ e vice-versa. Um grafo que contém um único vértice é dito grafo trivial.

O grau de um vértice v, denotado por d(v), é a quantidade de arestas incidentes a v.

Um grafo H é dito subgrafo de G $(H \subseteq G)$ se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$; neste caso, dizemos que H está contido em G e que G contém H, ou que G é um supergrafo de H. Além disso, H será subgrafo induzido de G se vale a seguinte propriedade: $u, v \in V(H)$ e $uv \in E(G)$ implica $uv \in E(H)$. Se H é subgrafo induzido de G e V(H) = X, utilizamos a notação H = G[X].

A diferença entre dois grafos $G \in H$, denotada por G - H, é o subgrafo induzido pela diferença entre seus conjuntos de vértices, isto é, $G - H = G[V(G) \setminus V(H)]$.

Seja G um grafo. Um conjunto $I \subseteq V(G)$ é um conjunto independente de G se $E(G[I]) = \emptyset$. Denotamos por I_n um conjunto independente com n vértices. Dizemos que um conjunto $K \subseteq V(G)$ é uma clique se para qualquer par de vértices $u, v \in K$, $u \in v$ são adjacentes. Denotamos por K_n um grafo cujo conjunto de vértices é uma clique; este grafo é chamado grafo completo. Denotamos a cardinalidade da maior clique de G por $\omega(G)$.

Um particionamento $\mathcal{P}(G)$ de um grafo G consiste em uma família de conjuntos tal que a interseção entre cada membro seja vazia e a união de todos eles seja igual ao conjunto de vértices de G. Ou seja, $\mathcal{P}(G) = \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k\}$ é um particionamento de G se: (a) para $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$, temos $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \emptyset$; (b) $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{P}_k = V(G)$. Dizemos também que $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k)$ é uma partição de G.

Um grafo G é *bipartido* se seu conjunto de vértices pode ser particionado em dois conjuntos independentes $X \in Y$; isto é, toda aresta de E(G) possui uma extremidade em X e outra extremidade em Y. Tal partição (X, Y) é dita *bipartição* do grafo, e $X \in Y$ suas *partes*. O grafo é dito *bipartido completo* quando existe a partição (X, Y) e todos os vértices de Xsão adjacentes a todos os vértices de Y. Um grafo *estrela* é um grafo bipartido completo que admite bipartição (X, Y) onde |X| = 1 ou |Y| = 1.

Um caminho P em um grafo G é uma sequência de vértices distintos que pode ser ordenada de tal forma que dois vértices consecutivos em P são adjacentes em G. Da mesma forma, um ciclo em um grafo é uma sequência com três ou mais vértices distintos que pode ser ordenada de forma cíclica tal que dois vértices consecutivos são adjacentes em G. Quando dois vértices não consecutivos em um caminho (ciclo) possuem uma aresta entre eles, esta aresta é chamada corda. Um caminho induzido (ciclo induzido) com n vértices que não possui cordas é denotado por P_n (C_n).

O comprimento de um caminho P em G, denotado por |P|, é o número de arestas deste caminho. Um caminho P em G com extremidades $u \in v$ é um uv-caminho. Um uvcaminho P em G é um uv-caminho mínimo se não existe outro uv-caminho P' tal que |P'| < |P|. Em um uv-caminho mínimo P, |P| é a distância entre $u \in v$ em G, denotada por |P| = dist(u, v).

O comprimento de uma corda (v_i, v_j) em um caminho $P = (v_1, v_2, \dots, v_{|P|})$ é igual ao comprimento do caminho $P' = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$.

Denotamos por N(v) o conjunto dos vértices que são adjacentes ao vértice v e chamamos esse conjunto de vizinhança de v. A vizinhança fechada de v é denotada por N[v] = $N(v) \cup \{v\}$. De uma forma genérica, dizemos que a *i-ésima vizinhança* de v, denotada por $N^i(v)$, é o conjunto $\{w \mid dist(v, w) = i\}$, ou seja, todos os vértices cuja distância até v é igual a i.

Dizemos que dois vértices u e v são $g \hat{e} m eos$ se $N(u) \setminus \{u, v\} = N(v) \setminus \{u, v\}$; em particular se N[u] = N[v] eles são ditos $g \hat{e} m eos$ verdadeiros. Um par de vértices g meos não adjacentes é dito um par de $g \hat{e} m eos$ falsos. Um vértice u é vértice pendente se |N(u)| = 1.

Um grafo G é *conexo* se para cada par de vértices $u, v \in V(G)$, existe um uv-caminho em G; caso contrário o grafo é *desconexo*.

Um grafo G é dito *acíclico* ou uma *floresta* se este não contém ciclos. Uma *árvore* é um grafo conexo e acíclico.

O complemento \overline{G} de um grafo G é um grafo com o mesmo conjunto de vértices V(G) e com pares de arestas entre os vértices não adjacentes em G.

Seja \mathscr{F} uma família de subgrafos de um grafo G. Um membro F da família \mathscr{F} é dito maximal se F não está contido em nenhum outro elemento de \mathscr{F} . Analogamente, um membro F da família \mathscr{F} é dito minimal se F não contém nenhum outro elemento de \mathscr{F} . Seja \mathscr{F} a família de subgrafos conexos de um grafo G; os membros maximais da família \mathscr{F} são ditos componentes conexas de G.

Denotamos por e(v) a *excentricidade* do vértice v, que é a maior distância de v a todos os outros vértices de V(G), ou seja, $e(v) = \max\{dist(v, w) \mid w \neq v, w \in V(G)\}$. O *diâmetro* do grafo G é a maior excentricidade entre os vértices, isto é, $diam(G) = \max\{e(v) \mid v \in V(G)\}$.

Um grafo G é k-colorível se $V(G) = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k$ onde cada $A_i, 1 \leq i \leq k$ é um conjunto independente (possivelmente vazio). O menor k tal que o grafo G seja k-colorível é chamado de número cromático e é denotado por $\chi(G)$.

Um grafo G é *perfeito* se para todo subgrafo induzido $G' \subseteq G$, $\chi(G') = \omega(G')$. Se G é um grafo perfeito então \overline{G} também é perfeito.

Se estivermos aplicando uma operação a um grafo e o contexto não for suficiente para especificar em qual grafo a operação está sendo aplicada, utilizaremos o subíndice para fazer-se compreender. Por exemplo, para diferenciar operações de distâncias entre dois vértices v, w nos grafos $G \in H$, utilizaremos $dist_G(v, w) \in dist_H(v, w)$ respectivamente.

Seja A um conjunto. Uma relação $r: 2^A \to 2^A$ é um mapeamento entre os subconjuntos de A, onde 2^A é a família de todos os subconjuntos de A.

Em 1964, o matemático Herstein publicou em seu trabalho [59] uma formalização do princípio da casa dos pombos, que consiste em afirmar que dados dois conjuntos $A \in B$, se |A| > |B|, então não existe uma função $f : A \to B$ tal que f seja injetora. Herstein mostra, portanto, que existe pelo menos um elemento de B que estaria associado a pelo menos dois elementos de A. Este princípio foi generalizado muitas vezes, sempre no que diz respeito a cardinalidade e mapeamento de funções entre dois conjuntos. Aqui, neste trabalho, vamos observar a aplicação deste princípio quando particionarmos um grafo G com n vértices em k conjuntos, pois sempre que k < n, então existe pelo menos uma partição que apresenta mais que um vértice.

Todos os grafos nesta tese são finitos, não vazios e conexos. As demais definições podem ser encontradas no livro de Bondy e Murty [5].

1.3 Complexidade de algoritmos

Uma área da Ciência da Computação que teve um grande e rápido crescimento nas últimas décadas é o campo de *Algoritmos e Teoria da Complexidade* - em particular, o desenvolvimento e análise de algoritmos computacionais. O objetivo da pesquisa nesta área é estudar a natureza dos problemas que podem ser resolvidos através de um computador, para fornecer soluções para problemas resolvíveis, assim como classificá-los em categorias dependendo do seu grau de dificuldade ou intratabilidade.

Formalmente, um problema algorítmico π consiste de um conjunto D de todas as possíveis entradas para o problema, chamado *conjunto de instâncias*, e de uma *questão Q* sobre estas instâncias. Resolver um problema algorítmico é desenvolver um algoritmo cuja entrada é uma instância do problema e cuja saída é uma resposta à questão do problema.

Um problema é dito de *decisão* quando a questão exige uma resposta do tipo SIM ou NÃO. Como exemplo, seja π o seguinte problema: "Dado um grafo G, reconhecer se G é k-colorível." O conjunto de instâncias de π é obviamente o conjunto de todos os grafos. O problema π pode ser assim esquematizado:

Entrada: Um grafo G.

Questão: O grafo $G \notin k$ -colorível?

Fica evidente que o problema π acima é um problema de decisão. Resolver π significa elaborar um algoritmo capaz de responder se o grafo G é um grafo k-colorível ou não.

Dizemos que um algoritmo é *polinomial* quando sua complexidade de tempo (medida do número de passos que o algoritmo efetua) é uma função polinomial no tamanho da sua entrada. Os problemas de decisão para os quais existem algoritmos polinomiais constituem a classe P. Tais problemas são chamados *polinomiais*.

Um problema de decisão é *não-determinístico polinomial* quando qualquer instância que produz resposta SIM possui um *certificado* sucinto, isto é, uma comprovação de que a resposta SIM é de fato verificável em tempo polinomial no tamanho da instância. Esta classe de problemas de decisão é a classe NP. A classe Co-NP é formada pelos problemas que possuem um certificado sucinto para as instâncias que produzem resposta NÃO.

Sejam $\pi_1(D_1, Q_1) \in \pi_2(D_2, Q_2)$ dois problemas de decisão. Uma transformação ou redução polinomial de $\pi_1 \in \pi_2$ é uma função $f : D_1 \to D_2$ tal que as seguintes condições são satisfeitas:

- f pode ser calculada em tempo polinomial;
- para toda instância $I \in D_1$, tem-se que I produz resposta SIM para π_1 se e somente se f(I) produz resposta SIM para π_2 .

Um problema de decisão π pertence à classe *NP-completo* quando as seguintes condições são satisfeitas:

- $\pi \in NP;$
- para todo problema $\pi' \in NP$ existe uma transformação polinomial de $\pi' \in m \pi$.

Um problema pertencente à classe *NP-completo* é chamado *NP-completo*. Para provar que um certo problema π é NP-completo, basta mostrar que $\pi \in$ NP e que existe uma transformação de um problema NP-completo π' em π .

Analogamente, prova-se que um problema de decisão π pertence à classe *Co-NP-completo* (e, neste caso, π é dito *Co-NP-completo*) quando $\pi \in$ Co-NP e existe um problema π' (Co-)NP-completo tal que:

- se π' é NP-completo, existe uma função f que pode ser calculada em tempo polinomial tal que para toda instância I' de π' , tem-se que I' produz SIM para π' se e somente se I = f(I') produz NÃO para π ;
- se π' é Co-NP-completo, existe uma função f que pode ser calculada em tempo polinomial tal que para toda instância I' de π' , tem-se que I' produz NÃO para π' se e somente se I = f(I') produz NÃO para π .

Como fonte de referências para esta seção, indicamos [49, 75].

1.4 Cografos

Uma classe de grafos bastante estudada é a classe dos *cografos*, já que muitos problemas difíceis em grafos gerais são resolvidos eficientemente em cografos. Nos anos 70 diversos pesquisadores estudaram os cografos independentemente, porém utilizando diferentes definições e nomenclaturas. Jung, em [63], utilizou o termo grafo D^* . Seinsche em [72] trabalhou com grafos que não possuem subgrafos induzidos isomorfos ao P_4 . Sumner, em [74], os chamou de grafos HD. Lerchs, em [65] e [66], introduziu o termo cografo e, como extensão de seus trabalhos, Stewart [73] desenvolveu um algoritmo polinomial de reconhecimento para grafos desta classe. Posteriormente foram desenvolvidos algoritmos que reconhecem se o grafo é um cografo em tempo linear [28, 52, 55].

Existem diversas definições equivalentes para a classe dos cografos. Por exemplo, podemos dizer que um cografo é um grafo G = (V, E) que não possui caminho induzido com quatro vértices (P_4) como subgrafo induzido, ou seja, G é *livre* de P_4 .

Outra maneira de definir a classe dos cografos é a partir de duas operações distintas: as operações *join* (+) e *union* (\cup) são operações entre dois grafos $A \in B$ que geram um novo grafo G. Desta forma, G = A + B é o grafo formado pelas partes $V(A) \in V(B)$ onde todos os vértices de A são adjacentes a todos os vértices de B. Simetricamente, $G = A \cup B$ é o grafo tal que nenhum vértice de A é adjacente a algum vértice de B. Assim, podemos escrever o cografo G de duas possibilidades diferentes [28]:

Teorema 1 ([28]) Dado um grafo G, G é um cografo se, e somente se, G pode ser escrito de uma das seguintes maneiras:

- a) G é conexo: $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_l$, onde cada G_i é um grafo trivial ou é um cografo desconexo, $1 \le i \le l$;
- b) $G \notin desconexo: G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_l$, onde cada $G_i \notin um$ grafo trivial ou $\notin um$ cografo conexo, $1 \le i \le l$.

1.4.1 Co-árvore

O teorema anterior permite obter uma representação dos cografos através de uma árvore especial (*co-árvore*) que facilita a resolução de problemas. A partir da co-árvore podemos obter diversas propriedades e informações sobre o cografo utilizando algoritmos, por exemplo, que executam em tempo linear. Numa co-árvore T(G) os nós são rotulados tipo 1 ou tipo 0 e as folhas representam os vértices de cografo G. Dois vértices são adjacentes se, e somente se, o primeiro ancestral comum é um nó tipo 1. Uma co-árvore possui uma alternância entre nós tipo 1 e tipo 0, ou seja, um nó tipo 1 terá apenas filhos tipo 0 ou folhas e um nó tipo 0 terá apenas filhos tipo 1 ou folhas. Duas co-árvores representando o mesmo cografo são isomorfas; portanto a co-árvore de um cografo G é única. É fácil observar que se a raiz da co-árvore for um nó tipo 0 o cografo será desconexo, caso contrário, o cografo será conexo. Corneil et al. provou, em [27], que um grafo é um cografo se, e somente se, pode ser representado por uma co-árvore. Na Figura 1.1 mostramos exemplo de uma co-árvore e o cografo representado. Podemos notar a alternância entre os nós tipo 1 e tipo 0 e as adjacências de acordo com o ancestral comum mais próximo.



Figura 1.1: Exemplo de co-árvore.

1.4.2 Sequência de operações para construção do cografo

Uma outra forma para representar um cografo G é através de uma sequência de operações consecutivas. A sequência de operações inicia-se com um vértice v_1 , e cada uma das operações aplicadas gera um grafo intermediário, que é um subgrafo induzido, e apenas ao final das operações chegamos ao cografo G. As operações utilizadas na sequência de operações consiste em criar novos vértices, que são gêmeos verdadeiros ou gêmeos falsos de algum vértice v_i já existente no grafo intermediário. Assim, as operações são nomeadas: operaçõe gêmeo verdadeiro $(T(v_i))$ e operação gêmeo falso $(F(v_i))$.

A Figura 1.2 mostra um exemplo das operações gêmeo verdadeiro e gêmeo falso para um cografo.



Figura 1.2: Operações gêmeo falso e gêmeo verdadeiro.

A dissertação apresentada por Thompson [76] discute e apresenta algoritmos para obter esta sequência em tempo linear dada a co-árvore do cografo G. Segue, abaixo, um Teorema que formaliza esta sequência.

Teorema 2 Um grafo G é um cografo se, e somente se, existe uma sequência de operações $S = v_1, O_2u_2, O_3u_3, \ldots, O_nu_n$ que constrói G tal que, para todo $i, j \in \{2, \ldots, n\}$:

- (b) v_1 é o vértice inicial de G;
- (b) $O_i \in \{F, T\}$, onde $F \notin uma$ operação gêmeo falso, $e T \notin uma$ operação gêmeo verdadeiro;
- (c) a operação $O_i u_i$ cria um novo vértice v_i em G;
- (d) $u_i \in \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}.$

A Figura 1.3 mostra a construção de um cografo a partir de sua sequência de operações $S_1 = v_1, T(v_1), F(v_2), T(v_2), T(v_3), F(v_1).$



Figura 1.3: Exemplo da construção do cografo formado pela sequência S_1 .

Vale observar que a sequência de operações para construção de um cografo arbitrário não é única. Observe que a sequência de operações apresentada na Figura 1.3, $S_1 = v_1, T(v_1), F(v_2), T(v_2), T(v_3), F(v_1)$, gera um cografo isomorfo ao cografo construído pela sequência $S_2 = v_1, T(v_1), F(v_1), F(v_2), T(v_2), T(v_4)$, como mostra a Figura 1.4.



Figura 1.4: Exemplo da construção do cografo formado pela sequência S_2 .

Entendendo que as sequências que constroem um grafo não são únicas e com objetivo de uniformizá-las, a dissertação apresentada por Thompson prova que para quaisquer duas operações aplicadas consecutivamente $(S = S_1, O_i(u_i), O_{i+1}(u_{i+1}), S_2)$ em vértices diferentes $(u_i \neq u_{i+1})$ geram um grafo isomorfo ao da sequência em que as duas operações estão trocadas $(S' = S_1, O_{i+1}(u_{i+1}), O_i(u_i), S_2)$ - desde que $u_{i+1} \neq v_i$. De forma prática, dado um cografo G, sabemos então que existe uma sequência de operações $S = v_1, O_2u_2, O_3u_3, \ldots, O_nu_n$ tal que se existem índices i < j com $v_k = u_i$ e $v_l = u_j$, então $l \geq k$.

Teorema 3 (Modificado) Um grafo G é um cografo se existe uma sequência de operações $S = v_1, O_2u_2, O_3u_3, \ldots, O_nu_n$ que constrói G tal que, para todo $i, j \in \{2, \ldots, n\}$:

- (b) v_1 é o vértice inicial de G;
- (b) $O_i \in \{F, T\}$, onde $F \notin uma$ operação gêmeo falso, $e T \notin uma$ operação gêmeo verdadeiro;
- (c) a operação $O_i u_i$ cria um novo vértice v_i em G;
- (d) $u_i \in \{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\};$
- (e) se existem índices i < j com $v_k = u_i$ e $v_l = u_j$, então $l \ge k$.

1.5 Estrutura da tese

Apresentamos agora a estrutura do restante desta tese. Sendo observados os diferentes temas em que a tese será desenvolvida, os dois capítulos subsequentes tratam dos problemas de particionamentos em grafos e convexidades de caminhos em grafos, respectivamente, Capítulos 2 e 3. No capítulo final desta tese (Capítulo 4), são discutidos os resultados obtidos e apresentam-se propostas para pesquisas futuras.

Capítulo 2

Partições em Grafos

"You know nothing, Jon Snow"

(George R.R. Martin)

Este capítulo será dedicado à discussão acerca dos assuntos de partição em grafos, começando com a apresentação da M-Partição e, depois, instanciando cada um dos problemas estudados.

2.1 *M*-partição

O problema da M-partição foi inicialmente introduzido por Feder et al. em [45] da seguinte forma: seja M uma matriz simétrica $m \times m$ com valores $M_{ij} \in \{0, 1, *\}$. Uma M-partição de um grafo G é uma partição de G em m conjuntos, obecedendo as restrições impostas pelos índices da matriz M, tal que: dados dois vértices distintos, $u \in v$ de V(G), alocados nos conjuntos $i \in j$ (possivelmente i = j), respectivamente, temos:

- Se $M_{ij} = 0$, então $(u, v) \notin E(G)$;
- Se $M_{ij} = 1$, então $(u, v) \in E(G)$; e
- Se M_{ij} = *, não podemos afirmar nada sobre a existência ou não da aresta no grafo
 G;

Observe que os valores apresentados na diagonal definem a característica de cada parte de G; essas características serão chamadas *restrições internas*, isto é, quando a parte *i* apresenta restrição interna $M_{ii} = 1$, isso implica dizer que a parte em questão é uma clique; quando a parte *i* apresenta restrição interna $M_{ii} = 0$, implica dizer que é um conjunto independente; e, por fim, quando a restrição interna da parte *i* é $M_{ii} = *$, então o conjunto *i* não apresenta restrições internas e pode possuir qualquer tipo de adjacência internamente. A Figura 2.1 apresenta a forma gráfica que utilizaremos para indicar a representação dos conjuntos.



Clique

Conjunto Independente Conjunto sem restrições

Figura 2.1: Exemplo de representação dos conjuntos.

Os valores fora da diagonal principal de M representam o que chamamos de restrições externas, pois regulam as adjacências entre as diferentes partes de G. Assim, quando a parte i é totalmente adjacente à parte j, temos $M_{ij} = 1$; simetricamente, quando $M_{ij} = 0$ as partes i e j não possuem nenhuma adjacência; e quando $M_{ij} = *$ não podemos afirmar nada sobre a adjacência entre os conjuntos i e j. A Figura 2.2 mostra a forma como indicaremos essas adjacências graficamente; nessa figura o conjunto A é completamente adjacente ao conjunto B ($M_{AB} = 1$); o conjunto B pode possuir arestas em relação ao conjunto C ($M_{BC} = *$); e os conjuntos A e C não possuem nenhum tipo de adjacência ($M_{AC} = 0$).



Figura 2.2: Exemplo de adjacências entre os conjuntos.

Uma instância do problema de M-partição é um grafo G e uma matriz M, e a solução são m conjuntos que respeitem as restrições de M (onde m é o posto de M). Quando encontramos tal partição, dizemos que o grafo G é M-particionável. Nas matrizes apresentadas nas Figuras 2.3 e 2.4 mostramos: M, uma matriz que particiona o grafo em duas cliques e um conjunto independente e não possui restrições externas entre as partes (Figura 2.3); N, uma matriz que particiona o grafo em duas cliques e um conjunto independente o grafo em duas cliques e um conjunto independente e não possui restrições e um conjunto e possui restrições e um conjunto possui restrições e um conjunto e possui restrições e um conjun

todos os vértices do conjunto independente são adjacentes a todos os vértices das duas cliques (Figura 2.4).



Figura 2.3: Exemplo de matriz, M, e sua representação gráfica.



Figura 2.4: Exemplo de matriz, N, e sua representação gráfica.

Para facilitar a compreensão, daqui em diante usaremos a notação M_i para representar a *i*-ésima parte de um grafo G dada pela *i*-ésima linha (coluna) de M.

Na versão proposta por Feder et al. [45], as partes podem ser vazias. Assim, podemos observar que uma matriz que contenha * em sua diagonal principal pode particionar qualquer grafo G. Pois poderíamos assumir que o conjunto M_i , tal que $M_{ii} = *$, contém todos os vértices de G, ou seja, $M_i = V(G)$; fazendo os outros conjuntos M_j , $j \neq i$, vazios, sabemos que as restrições externas também são cumpridas.

Uma outra classe importante para esta tese é a classe dos grafos-(k, l), pois ela traz resultados importantes quanto à complexidade do problema de *M*-Partição. Esta classe fora definida em 1996, por Brandstädt[8]. Um grafo G é (k, l)-particionável (ou apenas (k, l)), se pode ser particionado em k conjuntos independentes e l cliques. Observe que os grafos-(k, 0) são os grafos k-coloríveis, pois os grafos que pertencem a esta classe podem ser particionados em k conjuntos independentes e zero cliques. Em [8] e [9], Brandstädt apresentou algoritmos eficientes para reconhecer as classes dos grafos (2, 1), (1, 2) e (2, 2), e mostrou que reconhecer grafos-(k, l) com $k \ge 3$ ou $l \ge 3$ é um problema NP-completo. Observe que a *M*-Partição generaliza o problema de reconhecer os grafos-(k, l) e, portanto, reconhecer se um grafo é *M*-particionável para matrizes de ordem maior ou igual a 3 é um problema *NP*-completo (veja Tabela 2.1).

k/l	0	1	2	≥ 3
0	P	P	P	NPc
1	P	P	P	NPc
2	P	P	P	NPc
≥ 3	NPc	NPc	NPc	NPc

Tabela 2.1: Complexidade para reconhecer grafos-(k, l).

Uma vez que o problema de reconhecer grafos-(k, l) é um problema NP-Completo para $k \geq 3$ ou $l \geq 3$, restringir o problema a classes de grafos faz-se necessário a fim de encontrar situações em que o problema seja tratável. Neste intuito, diversos trabalhos foram desenvolvidos para reconhecer se um dado grafo $G \in (k, l)$ quando o grafo de entrada G está restrito a uma classe de grafos específica. Em geral, esses estudos têm sido feitos em subclasses de grafos perfeitos: cordais, cografos, P_4 -esparsos, etc. E os resultados são, normalmente, apresentados em forma de *obstruções minimais (subgrafos proibidos)*, que são subgrafos induzidos que impedem um grafo de ser (k, l)-particionável, isto é, um grafo $G \in (k, l)$ -particionável se não possui H_1, H_2, \ldots como subgrafos induzidos.

Uma subclasse bastante estudada dos grafos perfeitos são os grafos *cordais*, por exemplo. Um grafo é cordal se, e somente se, todo ciclo C com quatro ou mais vértices possui corda. Os grafos cordais-(k, l) foram estudados e caracterizados em Hell et al.[58]. Os grafos cordais-(k, l) foram caracterizados por obstruções minimais como se segue:

Teorema 4 Um grafo cordal $G \notin (k, l)$ se, e somente se, não contém (l + 1) cliques isoladas (mutuamente não adjacentes) de tamanho k + 1 como subgrafo induzido, isto é, l + 1 cópias isoladas de completos com k + 1 vértices.

Assim, por exemplo, um grafo cordal $G \in (2, 1)$ se, e somente se, não contém duas cópias isoladas de K_3 . A Figura 2.5 mostra esta obstrução.



Figura 2.5: Grafo proibido para cordal-(2, 1).

Outras classes que foram caracterizadas por obstruções minimais são as classes com poucos P'_4 s: P_4 -esparsos e P_4 -redutíveis. A classe dos grafos P_4 -esparsos fora definida inicialmente por Hoàng em [61] como grafos G tais que para qualquer subconjunto $Q \subseteq V(G)$ com cinco vértices, G[Q] induz no máximo um P_4 . Hoang ainda mostrou, no mesmo trabalho, que estes grafos são grafos perfeitos. Os P_4 -redutíveis foram introduzidos por Jamison e Olariu, em [62], como os grafos tais que cada vértice pertence a no máximo um P_4 . É fácil ver que a classe dos P_4 -redutíveis contém a classe dos cografos, pois os cografos não possuem P_4 's induzidos; da mesma forma é fácil ver que os grafos P_4 -redutíveis estão contidos nos grafos P_4 -esparsos, pois satisfazem a condição de que para qualquer conjunto com cinco vértices existe no máximo um P_4 . Logo:

 $cografos \subset P_4 - redutive is \subset P_4 - esparsos.$

Bravo et al., em [10], provaram que os subgrafos proibidos para P_4 -esparsos-(k, l) são exatamente os mesmos proibidos para os cografos-(k, l) - os quais vamos citar na próxima seção.

Podemos observar que os trabalhos citados acima tratam o problema no âmbito de grafos-(k, l), porém diversos trabalhos foram desenvolvidos no âmbito de *M*-Partição, apresentando diferentes variações de restrições internas e externas, entre os quais podemos citar: [10, 11, 43, 44, 46, 47, 48, 50, 58].

2.1.1 *M*-Partição em cografos

Entre os diversos trabalhos em M-partição, destacamos alguns que propõem-se a estudar a M-partição em cografos.

O primeiro estudo relevante para esta tese trata das M-partições que não possuem restrições externas, e que consideram as partições com k conjuntos independentes e l cliques (m = k + l). Ou seja:

- $M_{ij} = 0, 1 \le i \le k;$
- $M_{ij} = 1, k+1 \le i \le k+l;$ e
- $M_{ij} = *, i \neq j.$

Este estudo foi apresentado por Bravo et al., em [12], e teve por objetivo encontrar os subgrafos proibidos minimais que impossibilitam a M-partição. O conjunto de todas

as obstruções minimais de M será denotado por Ob(M). Assim, para cada matriz M, Bravo et al., em [12], apresentaram um conjunto de obstruções minimais, tais que se um cografo G possuir qualquer uma destas obstruções como subgrafo induzido, então G não é M-particionável. Como no estudo em questão não há restrições externas, um grafo é dito (k, l)-particionável se aceitar um particionamento em k conjuntos independentes e lcliques (M-partição com matriz de ordem k + l).

Vamos denotar as famílias de obstruções encontradas por Bravo et al. por B(k, l). Estes conjuntos de obstruções podem ser encontrados recursivamente da seguinte forma:

• $B(k,0) = \{K_{k+1}\};$

•
$$B(0,l) = \{I_{l+1}\};$$

• $B(k,l) = \bigcup_{\substack{a=1, \ B_1 \in B(a-1,l), \ B_2 \in B(k-a,l)}}^k \{B_1 + B_2\} \cup \bigcup_{\substack{b=1, \ B_1 \in B(k,b-1), \ B_2 \in B(k,l-b)}}^l \{B_1 \cup B_2\}.$

Como exemplo, vamos encontrar todas as obstruções para os cografos-(2, 1) (B(2, 1)). Para isso, é necessário que resolvamos também para as classes B(1, 1), B(2, 0), B(1, 0) e B(0, 1).

- $B(0,1) = I_2$.
- $B(1,0) = K_2$.
- $B(2,0) = K_3$.

$$B(1,1) = \bigcup_{a=1}^{1} \bigcup_{\substack{B_1 \in B(a-1,1), \\ B_2 \in B(1-a,1)}} \{B_1 + B_2\} \cup \bigcup_{b=1}^{1} \bigcup_{\substack{B_1 \in B(1,b-1), \\ B_2 \in B(1,l-b)}} \{B_1 \cup B_2\}$$
$$= \bigcup_{\substack{B_1 \in B(0,1), \\ B_2 \in B(0,1)}} \{B_1 + B_2\} \cup \bigcup_{\substack{B_1 \in B(1,0), \\ B_2 \in B(1,0)}} \{B_1 \cup B_2\}$$
$$= \bigcup_{\substack{B_1 \in \{I_2\}, \\ B_2 \in \{I_2\}}} \{B_1 + B_2\} \cup \bigcup_{\substack{B_1 \in \{K_2\}, \\ B_2 \in \{K_2\}}} \{B_1 \cup B_2\}$$
$$= \{I_2 + I_2\} \cup \{K_2 \cup K_2\} = \{I_2 + I_2, K_2 \cup K_2\}$$

Agora podemos apenas substituir as recorrências e encontrar as obstruções minimais para os cografos-(2, 1).

$$B(2,1) = \bigcup_{a=1}^{2} \bigcup_{\substack{B_{1} \in B(a-1,1), \\ B_{2} \in B(2-a,1)}} \{B_{1} + B_{2}\} \cup \bigcup_{b=1}^{1} \bigcup_{\substack{B_{1} \in B(2,b-1), \\ B_{2} \in B(2,l-b)}} \{B_{1} \cup B_{2}\}$$

$$= \bigcup_{\substack{B_{1} \in B(0,1), \\ B_{2} \in B(1,1)}} \{B_{1} + B_{2}\} \cup \bigcup_{\substack{B_{1} \in B(1,1), \\ B_{2} \in B(0,1)}} \{B_{1} + B_{2}\} \cup \bigcup_{\substack{B_{1} \in B(1,1), \\ B_{2} \in B(0,1)}} \{B_{1} \cup B_{2}\}$$

$$= \bigcup_{\substack{B_{1} \in \{I_{2}\}, \\ B_{2} \in \{I_{2}+I_{2},K_{2} \cup K_{2}\}} \{B_{1} + B_{2}\} \cup \bigcup_{\substack{B_{1} \in \{K_{3}\}, \\ B_{2} \in \{K_{3}\}}} \{B_{1} \cup B_{2}\}$$

$$= \{I_{2} + I_{2} + I_{2}\} \cup \{I_{2} + (K_{2} \cup K_{2})\} \cup \{K_{3} \cup K_{3}\}$$

As três obstruções para os cografos-(2, 1) são apresentadas na Figura 2.6 abaixo.



Figura 2.6: Obstruções minimais para os cografos-(2, 1)

Para as provas na próxima seção note que as únicas obstruções minimais para as partições com l = 0 são as cliques que possuem k + 1 vértices.

Outros dois estudos relevantes para esta tese são os trabalhos [64] e [78]. Ambos os trabalhos utilizam matrizes com tamanhos limitados, porém trabalham com diferentes conjuntos de restrições externas para os cografos-(k, l).

Especificamente, o trabalho [78] apresenta principalmente problemas onde as matrizes possuem ordem 3, utilizando as diversas variações tais que k + l = 3 e variando as restrições externas. Este trabalho apresenta muitas reduções e equivalências entre matrizes, o que justifica resultados semelhantes para diferentes configurações. Dentre os diversos resultados obtidos para os cografos-(k, l), devemos destacar aqueles que referem-se às matrizes com 3 conjuntos independentes e restrições externas diferentes de 0 na última linha/coluna.

A Figura 2.7 apresenta uma das matrizes do trabalho [78], que será importante para as provas nas próximas seções.



Figura 2.7: Matriz M^1 com três conjuntos independentes e uma restrição externa.

Teorema 5 ([78]) Dado um cografo G, G é M^1 -particionável se, e somente se, não contém K_4 ou $K_3 \cup K_2$ como subgrafos induzidos.

• $Ob(M^1) = \{K_4, K_3 \cup K_2\}.$



Figura 2.8: Obstruções para M^1 .

A Figura 2.9 apresenta mais uma das matrizes do trabalho [78], que será importante para as provas nas próximas seções.



Figura 2.9: Matriz M^1 com três conjuntos independentes e duas restrições externas.

Teorema 6 ([78]) Dado um cografo G, G é M^2 -particionável se, e somente se, não contém K_4 ou $K_3 \cup K_1$ como subgrafos induzidos.

•
$$Ob(M^2) = \{K_4, K_3 \cup K_1\}$$



Figura 2.10: Obstruções para M^2 .

Outro resultado importante de [78] para esta tese diz respeito à matriz de ordem 2 que apresenta a única restrição externa como 1. A Figura 2.11 apresenta a matriz M^3 , e a Figura 2.12 apresenta suas obstruções minimais.



Figura 2.11: Matriz M^3 com dois conjuntos independentes e uma restrição externa.

Teorema 7 ([78]) Dado um cografo G, G é M^3 -particionável se, e somente se, não contém K_3 ou $K_2 \cup K_2$ como subgrafos induzidos.

•
$$Ob(M^3) = \{K_3, K_2 \cup K_1\}.$$



Figura 2.12: Obstruções para M^3 .

Por sua vez, o trabalho [64] estuda as matrizes de ordem 4, porém restritas aos valores k = 4 e l = 0. Novamente, vamos destacar as configurações de matrizes que nos são convenientes, que são as matrizes que apresentam restrições externas diferentes de * apenas na última coluna; mais especificamente, estamos interessados em matrizes que possuem restrições do tipo 1 na última coluna, ou seja, que não possuem restrições externas iguais a

0 e apresentam restrições do tipo 1 apenas na última coluna. As Figuras 2.13, 2.15 e 2.17 apresentam respectivamente as matrizes M^4 , M^5 e M^6 . A seguir, são apresentados os teoremas e as obstruções minimais para cada uma das matrizes (respectivamente, Figuras 2.14, 2.16 e 2.18).

Matriz M^4 :



Figura 2.13: Matriz M^4 com quatro conjuntos independentes e uma restrição externa.

Teorema 8 ([64]) Dado um cografo G, G é M^4 -particionável se, e somente se, não contém K_5 ou $K_4 \cup K_3$ como subgrafos induzidos.

• $Ob(M^4) = \{K_5, K_4 \cup K_3\}.$



Figura 2.14: Obstruções para M^4 .

Matriz M^5 :



Figura 2.15: Matriz M^5 com quatro conjuntos independentes e duas restrições externas.

Teorema 9 ([64]) Dado um cografo G, G é M^5 -particionável se, e somente se, não contém K_5 ou $K_4 \cup K_2$ como subgrafos induzidos.

• $Ob(M^5) = \{K_5, K_4 \cup K_2\}.$



Figura 2.16: Obstruções para M^5 .

Matriz M^6 :



Figura 2.17: Matriz M^6 com quatro conjuntos independentes e três restrições externas.

Teorema 10 ([64]) Dado um cografo G, G é M^6 -particionável se, e somente se, não contém K_5 ou $K_4 \cup K_1$ como subgrafos induzidos.

• $Ob(M^6) = \{K_5, K_4 \cup K_1, (K_2 \cup K_1) + (K_2 \cup K_1)\}.$



Figura 2.18: Obstruções para M^6 .

2.2 $(k,0)^j$ -partição em cografos

Um dos problemas estudados que faz parte desta tese é o que chamamos de $(k, 0)^{j}$ partição. Neste problema, generalizamos as soluções para o problema da (k, 0)-partição com restrições externas na última coluna. O problema $(k, 0)^{j}$ -partição consiste em particionar o grafo em k conjuntos independentes (M_1, M_2, \ldots, M_k) , de forma que o k-ésimo conjunto (M_k) seja completamente adjacente a j outros conjuntos, $j \ge 1$. Vamos assumir, sem perda de generalidade, que as partições $M_{k-j}, M_{k-j+1}, \ldots, M_{k-1}$ são completamente adjacentes a M_k . Assim podemos escrever sua matriz da seguinte maneira:

- $M_{ij} = 0, \ 1 \le i \le k;$
- $M_{ij} = M_{ji} = 1, i = k, j \neq k, k j < i < k;$ e
- $M_{ij} = *$, caso contrário.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & * & * & * & \dots & * & * \\ * & 0 & * & * & \dots & * & \vdots \\ * & * & 0 & * & \dots & * & * \\ * & * & * & 0 & \dots & * & 1 \\ * & * & * & * & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 1 \\ * & \dots & * & 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos denotar a matriz M que representa a (k, 0)-partição com j restrições externas (todas iguais a 1) na última coluna por $M : (k, 0)^j$.

Teorema 11 Dado um cografo G e uma matriz $M : (k, 0)^{k-1}$, G é M-particionável se, e somente se, G não contém K_{k+1} ou qualquer grafo da forma $(K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \dots + (K_{a_p} \cup K_1), 1 < a_i \leq k, a_1 + a_2 + \dots + a_p = k$, como subgrafo induzido.

Prova.

A prova deste teorema baseia-se fortemente na forma que um cografo G pode ser escrito, como desconexo ou conexo, respectivamente:

$$G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_l$$

ou

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_l.$$

Se G é desconexo, então G pode ser escrito como a união de l cografos G_1, G_2, \ldots, G_l (vide acima) onde cada G_i é um grafo trivial ou um cografo conexo [28]. Para esta demonstração, porém, caso existam grafos triviais na decomposição, consideramos que G_1 é um conjunto independente consistindo da união de todos os grafos triviais da decomposição proposta em [28]. Assim, G_2, \ldots, G_l são sempre cografos conexos não triviais. Da mesma forma, se G é conexo, caso existam grafos triviais na decomposição, consideramos que G_1 é uma clique e G_2, \ldots, G_l são cografos desconexos.

Vale ressaltar que as únicas obstruções minimais para que um cografo possa ser particionado em t conjuntos independentes, sem restrições externas, são as cliques de tamanho t+1, isto é, K_{t+1} 's. Também vale lembrar que no particionamento M em questão, apenas um dos k conjuntos possui restrições externas em relação aos outros conjuntos – arbitrariamente, assuma que é M_k . Assim, durante a prova, vamos supor diversas vezes que $G - M_k$ não pode ser um grafo (k - 1, 0)-particionável – caso contrário, G admitiria um M-particionamento.

(\Leftarrow) Suponha que *G* seja minimalmente não-*M*-particionável. Vamos mostrar que *G* deve ser o grafo K_{k+1} ou um grafo da forma $(K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \ldots + (K_{a_p} \cup K_1),$ $1 < a_i \leq k, a_1 + a_2 + \ldots + a_p = k.$

i) Suponha, inicialmente, que G é desconexo. Assim, temos $G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_l$.

O grafo G deve possuir ao menos uma clique de tamanho k, caso contrário G seria Mparticionável. Portanto, G deve conter ao menos um K_k em algum de seus subgrafos. Por conveniência, e sem perda de generalidade, vamos assumir que G_l possui K_k (a operação \cup é comutativa e bastaria que renomeássemos os diversos subgrafos e trocássemos a ordem das operações).

Como G é minimalmente não-M-particionável, cada G_i , $1 \leq i \leq l$, tem que ser Mparticionável. Além disso, como G_l contém K_k , todas as partes M_1, M_2, \ldots, M_k são não vazias, para que seja possível particionar G_l . Dessa forma nenhum vértice de algum G_i , para $i \neq l$, poderá ser incluído em qualquer M_j , $1 \leq j \leq k$, pois irá infringir as restrições externas do conjunto M_k . Desta forma, como supomos G minimal, podemos afirmar: $l = 2, G_1$ é trivial e $G_l = K_k$, fazendo com que $G = K_k \cup K_1$.

ii) Suponha agora que G é conexo. Portanto, $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_l$.

Vamos dividir esta parte da prova de acordo com o valor de l.

Caso 1: l > k.

Neste caso, como todos os vértices de cada G_i são vizinhos de todos os vértices dos outros G_j 's, $j \neq i$, então temos ao menos uma clique de tamanho $l \geq k + 1$; portanto; G possui K_{k+1} e, por minimalidade, G é o grafo K_{k+1} .

Caso 2: l = k.

Suponha que todo G_i , $1 \leq i \leq l$, seja um conjunto independente. Assim, poderíamos atribuir cada G_i à respectiva M_i , e G seria M-particionável (absurdo). Portanto, existe algum G_i , $1 \leq i \leq l$, que não é um conjunto independente. Assim, também construímos uma clique de tamanho maior ou igual a k+1. Logo, por minimalidade, G é o grafo K_{k+1} .

Caso 3: l < k.

Sejam $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l, n_i = |V(Q_i)|, 1 \le i \le l$, cliques máximas de G_1, G_2, \ldots, G_l , respectivamente. Se $n_1 + n_2 + \ldots + n_l \le k - 1$ então G é M-particionável, um absurdo. Se $n_1 + n_2 + \ldots + n_l \ge k + 1$ então G é por minimalidade o grafo K_{k+1} . Assuma então $n_1 + n_2 + \ldots + n_l = k$.

Para as considerações abaixo, seja $G'_1 = G - G_1 = G_2 + G_3 + \ldots + G_l$. Como, pela minimalidade de $G, G'_1 \in M$ -particionável, segue que $G'_1 \in (k - n_1, 0)$ -particionável. Observamos que os argumentos usados abaixo para G'_1 serão análogos para qualquer $G'_i = G - G_i$, $1 < i \leq l$. Assim, ao provarmos especificamente para o primeiro subgrafo G_1 , temos também uma prova extensível para todos os subgrafos G_i , simplesmente pelo fato de a operação *join* (+) ser comutativa.

Fato (a): Nenhum G_i , $1 \le i \le l$, é $(n_i, 0)^{n_i-1}$ -particionável.

Suponha que G_1 seja $(n_1, 0)^{n_1-1}$ -particionável. Sabemos que o subgrafo G_1 é completamente adjacente a G'_1 ; portanto, se G_1 admite um particionamento de forma que M_k é preenchida, então G admitiria uma M-partição (pois sabemos que G'_1 pode ser particionado nos outros $k - n_1$ conjuntos – sua maior clique possui tamanho $k - n_1$), dado que Mpossui apenas restrições do tipo 1 na última coluna, e G_1 é completamente adjacente a G'_1 , estando as restrições externas sendo satisfeitas. Logo, G_1 não é $(n_1, 0)^{n_1-1}$ -particionável (apesar de ser $(n_1, 0)$ -particionável).

Fato (b): Para $1 \leq i \leq l$, temos $n_i > 1$.

Suponha $n_1 = 1$. Então G_1 é um conjunto independente que é adjacente a todos os outros vértices de G'_1 . Mais especificamente, G'_1 é (k - 1, 0)-particionável, pois sua maior clique possui tamanho k - 1. Logo poderíamos atribuir os vértices de G_1 para M_k e particionar G'_1 nos outros k - 1 conjuntos; assim, G seria M-particionável. Absurdo. Logo $n_1 > 1$.

Fato (c): Todo G_i , $1 \le i \le l$, é da forma $K_{n_i} \cup K_1$.

Suponha que G_1 seja uma clique. Assim, G_1 seria $(n_1, 0)^{n_1-1}$ -particionável, pois conteria apenas a clique Q_1 . Pelo Fato (a), G_1 não pode ser $(n_1, 0)^{n_1-1}$ -particionável; portanto, G_1 não é clique. Logo, pela estrutura de construção de G (retorne ao início da prova), G_1 é desconexo.

Assim, sabemos que cada G_i será da forma $K_{n_i} \cup K_1$, pois não há outra obstrução minimal desconexa, e $G = (K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \ldots + (K_{a_p} \cup K_1), a_1 + a_2 + \ldots + a_p = k,$ $a_j > 1, 1 \le j \le p.$

(⇒) Vamos mostrar que K_{k+1} e $(K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \ldots + (K_{a_p} \cup K_1), 1 < a_i \leq k,$ $a_1 + a_2 + \ldots + a_p = k$ são obstruções minimais. Se H contém como subgrafo induzido K_{k+1} ou $(K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \ldots + (K_{a_p} \cup K_1), 1 < a_i \leq k, a_1 + a_2 + \ldots + a_p = k,$ então claramente H não é M-particionável.

Seja:

$$H = (K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \ldots + (K_{a_p} \cup K_1), a_1 + a_2 + \ldots + a_p = k, a_j > 1, 1 \le j \le l.$$

Vamos provar por indução matemática que H é uma obstrução minimal para M. Podemos verificar para k = 3 e k = 2, que as únicas soluções possíveis são $a_1 = 3$ e $a_1 = 2$, respectivamente. Assim,

$$H = (K_3 \cup K_1)$$
, para $k = 3$, e
 $H = (K_2 \cup K_1)$, para $k = 2$.

Assim as obstruções para $M_2 \in M_3$ são:

$$Ob(M_2) = \{K_4, K_3 \cup K_1\},\$$

 $Ob(M_3) = \{K_3, K_2 \cup K_1\}.$

Estes resultados já são conhecidos, e foram publicados no trabalho [78].

Suponha agora que, para qualquer valor $2 \le i \le p$, o grafo G seja uma obstrução minimal para $M: (i, 0)^{i-1}$:

$$G = (K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \ldots + (K_{a_l} \cup K_1), a_1 + a_2 + \ldots + a_l = i, a_j > 1, 1 \le j \le l.$$

Vamos mostrar que o grafo H também é uma obstrução para $M: (p+1,0)^p$.

$$H = (K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \ldots + (K_{a_l} \cup K_1), a_1 + a_2 + \ldots + a_l = p + 1, a_j > 1, 1 \le j \le l.$$

Para os casos em que $a_1 = p+1, l = 1$, a prova é trivial, pois é fácil verificar que $(K_{p+1} \cup K_1)$ não é *M*-particionável e é minimal. Assim, vamos supor que $l \ge 2$.

Seja $G' = (K_{a_2} \cup K_1) + \ldots + (K_{a_l} \cup K_1), A = a_2 + a_3 + \ldots + a_l$. Pela hipótese de indução, G' é minimalmente não- $(A, 0)^{A-1}$ -particionável, pois $2 \le A \le p$. Da mesma maneira, sabemos que $H_1 = (K_{a_1} \cup K_1)$ é minimalmente não- $(a_1, 0)^{a_1-1}$ -particionável. Em particular, tanto G' quanto H_1 não podem atribuir vértices para a parte M_{p+1} , e como G possui uma clique K_{p+1} , não conseguimos particioná-lo em apenas p conjuntos M_1, M_2, \ldots, M_p . Portanto, H é uma M-obstrução minimal.

Vale observar que os resultados obtidos geram um família de subgrafos proibidos para uma matriz $M : (k, 0)^{k-1}$ em cografos. O grafo completo de tamanho k + 1 e os outros diversos grafos $(K_{a_1} \cup K_1) + (K_{a_2} \cup K_1) + \ldots + (K_{a_l} \cup K_1)$, tais que $1 < a_i \leq k, a_1 + a_2 + \ldots + a_l = k$. Na teoria dos números, encontrar o número de diferentes somas de números inteiros positivos tal que o resultado é n é chamado de *particionamento de n* [26].

Definição 12 ([26]) Seja n um inteiro positivo. Cada partição de n em m operandos pode ser considerada uma solução inteira, com $y_i \ge 1$, $1 \le i \le m$, tal que:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_m = n, y_1 \ge y_2 \ge \ldots \ge y_m \ge 1.$$
 (2.1)

Podemos reescrever da seguinte maneira:

Teorema 13 ([26]) Encontrar uma partição de n (uma solução da Equação 2.1) é equivalente a encontrar uma solução inteira com $x_i \ge 0$ para:

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n. (2.2)$$
Observe, da Equação 2.2, que a variável x_i indica quantos operandos *i* são utilizados naquela solução. Por exemplo, seguem abaixo as soluções para n = 4:

$$x_4 = 1, \ 4 = 4x_4 = 4 \times 1;$$

$$x_3 = 1, \ x_1 = 1, \ 4 = 1x_1 + 3x_3 = 1 \times 1 + 3 \times 1 = 1 + 3;$$

$$x_2 = 2, \ 4 = 2x_2 = 2 \times 2 = 2 + 2;$$

$$x_2 = 1, \ x_1 = 2, \ 4 = 1x_1 + 2x_2 = 1 \times 2 + 2 \times 1 = 1 + 1 + 2;$$

$$x_1 = 4, \ 4 = 1x_4 = 1 \times 4 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Interpretando a Equação 2.2, podemos modificá-la de forma a satisfazer a restrição das obstruções dada no Teorema 11. Uma vez que não utilizaremos 1 como operando, pois cada $a_i \ge 2$, podemos reescrever a fórmula da seguinte maneira:

$$2x_2 + 3x_3 + \ldots + kx_k = k, \tag{2.3}$$

onde cada solução dessa equação está associada a uma obstrução para $M : (k, 0)^{k-1}$. Porém, podemos perceber que a quantidade de soluções de 2.3 (vamos chamar de p(k)) cresce rapidamente e, portanto, também o número de obstruções para M. Por exemplo, existem 30701 diferentes soluções para k = 50, e para k > 1000 temos valores com mais de 30 dígitos decimais. A Tabela 2.2 mostra valores para $1 \le k \le 30$.

k	p(k)	k	p(k)	k	p(k)
1	0	11	14	21	165
2	1	12	21	22	210
3	1	13	24	23	253
4	2	14	34	24	320
5	2	15	41	25	383
6	4	16	55	26	478
7	4	17	66	27	574
8	7	18	88	28	708
9	8	19	105	29	847
10	12	20	137	30	1039

Tabela 2.2: Quantidade de particionamentos de k que não contêm 1 como operando.

Por exemplo, quando escolhemos k = 7, temos 4 soluções diferentes. Podemos escrever

7 = 5 + 2 = 4 + 3 = 2 + 2 + 3. Considere $M: (7,0)^6$. Então:

$$ob(M) = \{K_8, K_7 \cup K_1, (K_5 \cup K_1) + (K_2 \cup K_1), (K_4 \cup K_1) + (K_3 \cup K_1), (K_2 \cup K_1) + (K_2 \cup K_1) + (K_3 \cup K_1)\}.$$

Observe que quando $a_1 = k$ ($x_k = 1$), formamos exatamente a única obstrução desconexa para a matriz M. Também podemos observar que |ob(M)| = p(k) + 1, devido à clique com k + 1 vértices, que também é uma obstrução para M. A Figura 2.19 apresenta as obstruções para o caso acima (k = 7).



Figura 2.19: Obstruções para k = 7.

2.3 P_k -Partição

Ainda no estudo dos problemas de partição, e como introdução aos estudos de caminhos, trabalhamos também as "partições em caminhos", as quais chamamos de P_k -partições.

Dado um grafo G e um inteiro k, o problema da P_k -Partição é aqui apresentado como um particionamento dos vértices de G em k conjuntos não vazios $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_k$, ordenados de tal forma que: se $v \in \mathcal{K}_i$ e $v' \in \mathcal{K}_j, i \neq j$, então v é adjacente a v' se, e somente se, |i - j| = 1; ao mesmo tempo, quando i = j, não há restrições de adjacências para $v \in v'$. A Figura 2.20 apresenta um exemplo do comportamento das partes.



Figura 2.20: Exemplo de P_k -partição.

Assim, podemos observar que ao escolher um vértice de cada parte, formamos sempre um caminho induzido com k vértices, um P_k (como mostra a Figura 2.21), e dizemos, portanto, que um grafo que aceita tal particionamento é um grafo P_k -particionável.



Figura 2.21: P_k extraído da P_k -partição.

Neste sentido, pode-se fazer uma nova abordagem, encarando o problema como uma M-Partição em que a diagonal principal contém apenas *, as diagonais secundárias possuem apenas 1, e o restante das entradas da matriz possuem valores 0, formando uma matriz esparsa tridiagonal. Neste problema, no entanto, deve-se notar que os conjuntos, diferentemente do problema original da M-Partição, não podem ser vazios – caso contrário todos os vértices poderiam ser alocados no primeiro conjunto (\mathcal{K}_1) e todos os grafos seriam P_k -particionáveis, para qualquer k. A matriz M, abaixo, é uma matriz genérica de como a M-Partição deve ser construída a fim de representar uma P_k -partição.

$$M = \begin{bmatrix} * & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & * & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & * & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Esse tipo de particionamento origina uma coleção de caminhos induzidos, sem cordas, de comprimento k - 1, porém isto não implica dizer que um grafo não possui caminhos induzidos de comprimento maiores que k - 1 – a falta de restrições internas dos conjuntos possibilita que cada conjunto possua subgrafos com características distintas. A Figura 2.22, por exemplo, apresenta um grafo que possui um caminho induzido com 5 vértices e possui uma P_3 -partição.



Figura 2.22: Grafo com P_5 induzido e P_3 -particionável.

Juntamente com o particionamento, podemos associar dois problemas: o primeiro, de decisão, que consiste em dizer se um grafo G é P_k -particionável; o segundo, de "maximização", que consiste em verificar (encontrar) o maior inteiro tal que o grafo G seja P_k -particionável ($\kappa(G)$). Na verdade, o segundo problema também será formulado como um problema de decisão, de modo que relaxaremos a noção do que normalmente se entende como um problema de otimização.

 P_k -PARTIÇÃO- DECISÃO Entrada: Um grafo G e um inteiro k. Questão: G é P_k -particionável? P_k -PARTIÇÃO- "MAXIMIZAÇÃO" Entrada: Um grafo G e um inteiro k. Questão: $\kappa(G) \geq k$?

Proposição 14 Dado um grafo G, decidir se G é P_2 -particionável é polinomial.

Prova. Considerando que G deve ser particionado em apenas dois conjuntos que são completamente adjacentes, dado um vértice $v \in V(G)$, podemos dizer que v está arbitrariamente em \mathcal{K}_1 e, consequentemente, todos os não vizinhos de v também devem estar em \mathcal{K}_1 , caso contrário \mathcal{K}_2 conteria vértices não adjacentes a v.

Dessa forma, podemos estabelecer arbitrariamente uma sequência de operações:

$$S(V) = V \cup \{w \mid w \in V(G) \in \exists v, v \in V \to w \notin N[v]\};$$

$$S^{0}(V) = V;$$

$$S^{j+1}(V) = S(S^{j}(V)).$$

Essa sequência de operações adiciona os vértices não vizinhos do conjunto anterior a cada iteração – o que pode ser calculado em tempo polinomial –, de modo que para algum i < n a sequência converge e $S^{i+1}(V) = S^i(V)$, digamos $\mathcal{S}(V) = S^i(V)$. Assim, seja $\mathcal{K}_1 = \mathcal{S}(\{v_0\}), v_0 \in V(G)$, de forma que $\forall v, v \in \mathcal{K}_1 \to \exists v', v' \in \mathcal{K}_1 \land (v, v') \notin E(G)$. Portanto nenhum vértice que está em \mathcal{K}_1 poderia estar em \mathcal{K}_2 , pois teria um não vizinho em \mathcal{K}_1 e, ainda, podemos atribuir $\mathcal{K}_2 = V(G) \setminus \mathcal{K}_1$, pois todos os vértices que não estão em \mathcal{K}_1 são adjacentes a todos os vértices que estão em \mathcal{K}_1 .

Assim temos dois casos possíveis:

a)
$$\mathcal{K}_2 = \emptyset$$
.

Se o conjunto \mathcal{K}_2 for vazio, G não é P_2 -particionável.

b) $\mathcal{K}_2 \neq \emptyset$.

Se o conjunto \mathcal{K}_2 não for vazio, então $\forall v, v', v \in \mathcal{K}_1 \land v' \in \mathcal{K}_2 \to (v, v') \in E(G)$; logo $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ é uma P_2 -partição para G.

Baseado na Proposição 14, o Algoritmo 1 abaixo apresenta o pseudo-código para encontrar a P_2 -partição de um grafo G. O algoritmo tem como entrada um grafo G e como saída dois conjuntos - \mathcal{K}_1 e \mathcal{K}_2 . Quando G não é P_2 -particionável, o algoritmo retorna dois conjuntos vazios. Algoritmo 1 P₂-Partição

Entrada: Grafo GSaída: P₂-Partição $v \leftarrow v \in V(G)$ $\mathcal{K}_1 \leftarrow \{v_0\}$ $W \leftarrow V(G) \setminus N[v]$ enquanto $W \neq \emptyset$ faça $v \leftarrow v \in W$ $\mathcal{K}_1 \leftarrow \mathcal{K}_1 \cup \{v'\}$ $W \leftarrow W \cup (V(G) \setminus N[v])$ $W \leftarrow W \setminus \mathcal{K}_1$ fim enquanto $\mathcal{K}_2 \leftarrow V(G) \setminus \mathcal{K}_1$ se $\mathcal{K}_2 \neq \emptyset$ então retorna $(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ senão retorna (\emptyset, \emptyset) fim se

Proposição 15 Seja G um grafo que admite uma P_k -partição. Então, para quaisquer $v, w, i \neq j, v \in K_i \land w \in K_j \rightarrow dist_G(v, w) = |j - i|.$

Prova. Para esta prova, vamos considerar que i < j, pois o caso i > j é simétrico. Se $dist_G(v_i, v_j) > j - i$ temos um absurdo, pois existe um caminho $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j), v_l \in \mathcal{K}_l$, que possui comprimento |i - j|. Suponha agora $dist_G(v_i, v_j) < j - i$, e seja P um caminho mínimo entre $v_i \in v_j, V(P) \subseteq \mathcal{K}_i \cup \mathcal{K}_{i+1} \cup \ldots \cup \mathcal{K}_j$. Mas então existe l tal que $V(P) \cap \mathcal{K}_l = \emptyset$, e devem existir vértices $v_{l-1} \in \mathcal{K}_{l-1}, v_{l+1} \in \mathcal{K}_{l+1}$ adjacentes. Absurdo, pois pela definição eles não podem ser adjacentes.

Portanto, $dist_G(v_i, v_j) = |j - i|$.

Proposição 16 Nenhum P₄ é P₃-particionável.

Prova. Seja $G = P_4$, um caminho induzido com 4 vértices (v_1, v_2, v_3, v_4) . Vamos mostrar que G não é 3-particionável.

Podemos observar que v_1 e v_4 ou (i) estão na mesma parte, ou (ii) estão em partes não adjacentes, pois eles não são vizinhos.

(i) Suponha que ambos, $v_1 \in v_4$, estejam na mesma parte. Então v_2 deve estar em uma parte vizinha, pois é vizinho de v_1 . Mas v_2 não é vizinho de v_4 , e portanto não pode estar em uma parte vizinha; logo, não há forma de particionar $v_1, v_2 \in v_4$ em conjuntos diferentes. A Figura 2.23 exemplifica o caso (i).



Figura 2.23: Vértices $v_1 \in v_4$ pertencendo à mesma partição.

(ii) Suponha que v_1 e v_4 estejam em partes não adjacentes, \mathcal{K}_1 e \mathcal{K}_3 , respectivamente. Os vértices v_2 e v_3 não poderiam estar na parte \mathcal{K}_2 , pois não são vizinhos de v_4 e v_1 , respectivamente; logo, também deveriam estar em \mathcal{K}_1 e \mathcal{K}_3 por serem vizinhos de v_1 e v_4 . Mas por definição \mathcal{K}_1 não pode ter vértice que é vizinho de algum vértice em \mathcal{K}_3 . Logo v_1 e v_4 não podem ser posicionados em partes não adjacentes. A Figura 2.24 abaixo exemplifica o caso (ii).



Figura 2.24: Vértices v_1 e v_4 pertencendo a partições não adjacentes.

Pelos fatos (i) e (ii), v_1 e v_4 não podem estar na mesma partição e não podem estar em partições não adjacentes. Como não há aresta entre tais vértices, então eles também não podem estar em conjuntos adjacentes. Logo não é possível posicionar os vértices v_1 e v_4 nos três conjuntos disponíveis e, portanto, G não é P_3 -particionável.

Corolário 17 Nenhum $P_k \notin P_{(k-1)}$ -particionável.

Prova. Pelo princípio da casa dos pombos, existem três conjuntos que devem conter quatro elementos, que deve ser um P_4 , caso contrário seria impossível realizar a partição nos (k-1) conjuntos. A Figura 2.25, abaixo, exemplifica os casos.



Figura 2.25: P_4 induzido em 3 partições.

Logo, pela proposição acima, sabemos que não é possível realizar o particionamento em questão. ■

Corolário 18 Dado um grafo G e um inteiro $k \ge 4$, se $diam(G) \ne k - 1$ então G não é P_k -particionável.

Prova. Suponha diam(G) < k-1. Então, $\forall v, v' \in V(G)$ temos $dist_G(v, v') < k-1$. Pela Proposição 15, não podemos atribuir vértices para as partes $\mathcal{K}_k \in \mathcal{K}_1$ se a distância entre os vértices for diferente de k-1. Portanto, não é possível particionar $G \in \mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_k$ se diam(G) < k-1.

Suponha diam(G) > k-1. Então existe pelo menos um caminho $P_{k+1} = (v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$ tal que $dist(v_1, v_{k+1}) = k$, ou seja, não existe um caminho mais curto que comece em v_1 e termine em v_{k+1} , e sabemos que este caminho (subgrafo) P_{k+1} não é P_k -particionável, pelo Corolário 17. Assim o caminho P_{k+1} em questão deveria estar disposto em um único conjunto; porém $N(v_1) \setminus V(P_{k+1}) \neq N(v_{k+1}) \setminus V(P_{k+1})$. Logo, não seria possível atribuir os vértices deste caminho a uma única parte.

Dado que o diâmetro não pode ser maior nem menor que k - 1, necessariamente temos diam(G) = k - 1.

Assim, dado um grafo G, o problema de otimização da P_k -Partição fica limitado a duas opções quando $diam(G) \ge 3$: $P_k(G) \in \{1, diam(G) + 1\}$.

Teorema 19 Dado um grafo G, decidir se $P_k(G) = diam(G) + 1$ ($diam(G) \ge 5$) pode ser realizado em tempo polinomial.

Prova. Sejam $u, v \in V(G)$ tais que k - 1 = dist(u, v) = diam(G). Pela Proposição 15, necessariamente $u \in \mathcal{K}_1$ e $v \in \mathcal{K}_k$. Mas ocorre que, para todo v' com $v' \in V(G)$ e $dist_G(u, v') \geq 3$, temos $v' \in \mathcal{K}_{dist_G(u,v')+1}$. Além disso, para todo u' com $u' \in V(G)$ e $dist_G(u', v) \geq 3$, temos $u' \in \mathcal{K}_{k-dist_G(u',v)}$, também pela Proposição 15. Observe que os vértices v' tais que $dist_G(u, v') \leq 2$ possuem $dist_G(v, v') \geq 3$ (supondo $dist_G(v, v') < 3$, teríamos um uv-caminho menor que o caminho mínimo entre $u \in v$, um absurdo).

Portanto, isso é suficiente para verificarmos se as condições externas são satisfeitas. Caso as condições de adjacência não forem satisfeitas, então G não possui uma P_k -partição e $P_k(G) = 1$. Caso contrário, $P_k(G) = diam(G) + 1$.

O Algoritmo 2 implementa a sequência de passos proposta no Teorema 19.

E com este teorema finalizamos o capítulo relacionado a partições em grafos, para passarmos a discorrer apenas sobre os problemas de convexidade de caminhos em grafos (no próximo capítulo).

Deixamos em aberto os problemas da P_k -Partição tais que $3 \le k \le 5$. Acreditamos que possam ser resolvidos com algoritmos de força bruta, por se tratarem de valores constantes.

Consideremos, por um momento, um problema importante do próximo capítulo, denominado FPATH(G, u, v, w, k), assim definido: "dados três vértices u, v, w e um inteiro k, decidir se existe caminho induzido de u para v que passe por w e possua comprimento no mínimo k". Provaremos que este problema é NP-completo no Teorema 37. Podemos observar, no entanto, o seguinte: se G é um grafo com $u, v, w \in V(G)$ e $P_k(G) = diam(G) + 1 \geq 5$ então o problema FPATH(G, u, v, w, diam(G)) pode ser decidido em tempo polinomial, pois se $w \in \mathcal{K}_1$ ou $w \in \mathcal{K}_{P_k(G)}$ então não existe uv-caminho induzido que passe por w, caso contrário podemos escolher, arbitrariamente, um vértice de cada parte K_i (na parte em que w está incluso, ele deve ser o escolhido), de forma que os vértices escolhidos formam um P_k e são um uv-caminho induzido que passa pelo vértice w.

Algoritmo 2 P_k -Partição, $k \ge 6$

```
Entrada: Grafo G
Saída: P_k-Partição
   M_{ij} \leftarrow dist_G(i,j)
   (u,v) \leftarrow (i,j) \in \{(i,j) | dist_G(i,j) = max(M_{ij})\}
   k \leftarrow dist_G(u, v) + 1
   \mathcal{K}_1 \leftarrow \{u\}
   \mathcal{K}_k \leftarrow \{v\}
   T \leftarrow V(G)
   enquanto T \neq \emptyset faça
       i \leftarrow v \in T
       d \leftarrow dist_G(i, u)
       se d \ge 3 então
           d \leftarrow d + 1
           \mathcal{K}_d \leftarrow \mathcal{K}_d \cup \{i\}
       fim se
       d \leftarrow dist_G(i, v)
       se d \ge 3 então
           d \leftarrow k - d
           \mathcal{K}_d \leftarrow \mathcal{K}_d \cup \{i\}
       fim se
       T \leftarrow T \setminus \{i\}
   fim enquanto
   i \leftarrow 1
   enquanto i < k faça
       j \leftarrow i + 1
       enquanto j \leq k faça
           L \leftarrow \mathcal{K}_i \cap \mathcal{K}_i
           se L \neq \emptyset então
              retorna (\emptyset, \ldots, \emptyset)
           fim se
           j \leftarrow J + 1
       fim enquanto
       para x \in \mathcal{K}_i faça
           para y \in \mathcal{K}_{i+1} faça
               se (x, y) \notin E(G) então
                  retorna (\emptyset, \ldots, \emptyset)
              fim se
           fim para
       fim para
       i \leftarrow i + 1
   fim enquanto
   retorna (\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \ldots, \mathcal{K}_k)
```

Capítulo 3

Abordagem unificada para convexidades de caminhos

"It is over, isn't it?"

(Rebecca Sugar)

Este capítulo discorre sobre o principal tema desta tese, as convexidades de caminhos em grafos. Aqui vamos apresentar diversos problemas associados às convexidades de caminhos. Porém, ao discorrermos sobre estas convexidades, podemos perceber que cada uma delas possui características intrínsecas que são relevantes aos estudos dos problemas, pois diferentes escolhas de coleções de caminhos alteram consideravelmente o comportamento da função intervalo, de forma que o desenvolvimento das técnicas para encontrar algoritmos polinomiais para os problemas associados torna-se difícil em muitos casos.

Ainda assim, neste capítulo apresentaremos uma estrutura que será capaz de representar cada uma das convexidades estudadas. Com esta estrutura, *framework*, que unifica as diversas representações, pudemos perceber a dificuldade real de alguns problemas estudados, para os quais apresentamos reduções provando serem problemas NP-completos.

3.1 Preliminares

Um espaço finito de convexidade é um par (V, \mathcal{C}) que consiste de um conjunto finito V e uma família \mathcal{C} de subconjuntos de V tais que $\emptyset \in \mathcal{C}$, $V \in \mathcal{C}$, e \mathcal{C} é fechado por interseção. Elementos de \mathcal{C} são chamados de conjuntos convexos.

Seja \mathscr{P} uma coleção de caminhos de um grafo G, e seja $I_{\mathscr{P}} : 2^{V(G)} \to 2^{V(G)}$ uma função (que chamaremos de *função intervalo*) tal que:

$$I_{\mathscr{P}}(S) = S \cup \{ z \notin S \mid \exists u, v \in S \text{ tal que } z \text{ está em um } uv\text{-caminho } P \in \mathscr{P} \}, S \subseteq V(G)$$

$$(3.1)$$

Observe que a função intervalo agrega, a cada iteração, todos os vértices que pertencem a pelo menos um dos caminhos da coleção \mathscr{P} que possui como extremidades vértices de S, i.e., $I_{\mathscr{P}}(S)$ é a união entre o conjunto S e os vértices que se encontram nos caminhos de \mathscr{P} que possuem extremidades em S.

Seja $\mathcal{C}_{\mathscr{P}}$ a família de subconjuntos de V(G) tal que $S \in \mathcal{C}_{\mathscr{P}}$ se, e somente se, $I_{\mathscr{P}}(S) = S$. Então é fácil ver que $(V(G), \mathcal{C}_{\mathscr{P}})$ é um espaço finito de convexidade, assim os conjuntos convexos são precisamente os pontos fixos em $I_{\mathscr{P}}$.

Proposição 20 $(V(G), \mathcal{C}_{\mathscr{P}})$ é um espaço finito de convexidade.

Prova. Para mostrar que $(V(G), \mathcal{C}_{\mathscr{P}})$ é um espaço finito de convexidade, é suficiente mostrar que a interseção de quaisquer dois conjuntos convexos também resulta em um conjunto convexo. Assim, sejam $S_1 \in S_2$ dois conjuntos convexos de $\mathcal{C}_{\mathscr{P}}$, e seja $S = S_1 \cap S_2$. Se $|S| \leq 1$, então S é trivialmente convexo. Suponha |S| > 1, e que S não seja convexo. Então existem dois vértices distintos $s, t \in S$ e um vértice $w \in I_{\mathscr{P}}(\{s,t\}) \setminus S$. Porém, dado que $s, t \in S_1$, então $w \in I_{\mathscr{P}}(S_1) = S_1$ e, analogamente, $w \in S_2$. Portanto, $w \in S_1 \cap S_2 = S$, um absurdo, pois supomos $w \notin S$. Portanto S é convexo e isso conclui a prova.

Para facilitar a notação, vamos omitir o subscrito \mathscr{P} sempre que o contexto for suficiente para indentificarmos a informação.

3.1.1 Convexidade de caminhos na literatura

Variando as escolhas das coleções \mathscr{P} , funções de intervalo podem ter comportamentos diferentes e podem ser definidas pela Expressão (3.1). Os espaços de convexidade associados com tais funções são chamados de *convexidades de caminhos*.

Na Tabela 3.1 listamos as principais convexidades de caminhos que aparecem na literatura. Nesta tabela, cada convexidade é definida por uma coleção de caminhos \mathscr{P} considerada.

Como exemplo, seja G o grafo representado na Figura 3.1; escolha \mathscr{P} como a coleção de caminhos mínimos do grafo G (convexidade geodésica). Ao escolhermos $S = \{a, b\}$,

nome da convexidade	coleção de caminhos ${\mathscr P}$ considerada
geodésica [57, 56, 67]	caminhos mínimos
monofônica $[19, 40, 41]$	caminhos induzidos
g^3 [68]	caminhos mínimos com comprimento no mínimo três
m^3 [13, 39]	caminhos induzidos com comprimento no mínimo três
g_k [42]	caminhos mínimos de comprimento no máximo k
P_3 [14, 37, 69]	caminhos de comprimento dois
P_3^* [1]	caminhos induzidos de comprimento dois
triangle-path $[18, 20, 21]$	caminhos permitindo cordas de comprimento dois
total $[25]$	caminhos permitindo cordas de comprimento três
detour [22, 24, 23]	caminhos máximos no grafo
all-path [17, 53, 71]	todos os caminhos

Tabela 3.1: Principais convexidades estudadas na literatura.

temos que $I(S) = S \cup \{a, c, b\} \cup \{a, d, b\} = \{a, b, c, d\}$. Observe que os vértices $e \in f$ não participam de nenhum caminho mínimo entre $a \in b$, e portanto não pertencem ao intervalo I(S).



Figura 3.1: Exemplo de intervalo para o grafo $G, S = \{a, b\}$ e convexidade geodésica.

Agora, considere G o grafo representado na Figura 3.2, e escolha \mathscr{P} como a coleção de caminhos induzidos (convexidade monofônica) do grafo G. Ao escolhermos $S = \{c, f\}$, temos que $I(S) = S \cup \{c, b, f\} \cup \{c, d, f\} = \{b, c, d, f\}$. Observe que os vértices $a \in e$ não participam de nenhum caminho induzido entre $c \in f$, e portanto não pertencem ao intervalo I(S).



Figura 3.2: Exemplo de intervalo para o grafo $G, S = \{a, b\}$ e convexidade monofônica.

3.1.2 Problemas computacionais

Nesta seção focamos em detalhar seis problemas computacionais que são normalmente estudados no campo de convexidade em grafos. A lista, certamente, não é completa e existem outros problemas importantes que também podem ser considerados.

Para melhor representação, vamos utilizar algumas notações adicionais. Seja $S \subseteq V(G)$. Se I(S) = V(G), então S é um conjunto de intervalo ou interval set. Se I(S) = S, então S é um conjunto convexo. A envoltória convexa H(S) de S é o menor conjunto convexo que contém S. Escrevemos $I^0(S) = S$ e definimos $I^{i+1}(S) = I(I^i(S))$ para $i \ge 0$. Observe que $I(S) = I^1(S)$ e existe um índice i (o menor i possível) de forma que $H(S) = I^i(S)$. Se H(S) = V(G) então S é um conjunto de envoltória ou hull set. O número de convexidade ou convexity number (c(G)) de G é o tamanho do maior conjunto convexo $S \ne V(G)$. O número de intervalo ou interval number (i(G)) de G é o tamanho do menor interval set de G. O número de envoltória ou hull number h(G) de G é o tamanho do menor hull set de G. Com as definições introduzidas, podemos, agora, lidar com os problemas estudados neste capítulo:

TESTE DE CONVEXIDADE - CS (CONVEX SET) Entrada: Um grafo G e um conjunto $S \subseteq V(G)$. Questão: S é convexo?

Considere \mathscr{P} a coleção dos caminhos mínimos com comprimento no mínimo três (convexidade g^3). Considere também os grafos representados na Figura 3.3. Ao escolhermos $S = \{a, b\}$, para o primeiro grafo G observamos que não existem caminhos mínimos com comprimento no mínimo três entre $a \in b$, e portanto S é convexo para g^3 no grafo G. No entanto, no segundo grafo G', com a retirada das arestas (c,b) e (d,b), temos um caminho mínimo (a, e, f, b) e portanto S não é convexo para a convexidade g^3 no grafo G'.



Figura 3.3: Exemplo de conjuntos convexo e não convexo para convexidade g^3 .

DETERMINAR INTERVALO - ID (INTERVAL DETERMINATION) Entrada: Um grafo G, um conjunto $S \subseteq V(G)$, e um vértice $z \in V(G)$. Questão: O vértice z pertence ao intervalo I(S)?

Considere \mathscr{P} a coleção dos caminhos com comprimento dois (convexidade P_3). Considere também o grafo representado na Figura 3.4. Ao escolhermos $S = \{d, e\}$, temos dois caminhos de comprimento dois para S: $(d, a, e) \in (d, c, e)$; ambos os caminhos apresentam corda de comprimento dois entre os vértices $d \in e$. Os vértices $b \in f$ não estão em I(S)para a convexidade P_3 e o grafo em questão.



Figura 3.4: Determinar intervalo para convexidade P_3 .

DETERMINAR A ENVOLTÓRIA CONVEXA - CHD (CONVEX HULL DETERMINATION) Entrada: Um grafo G, um conjunto $S \subseteq V(G)$, e um vértice $z \in V(G)$. Questão: O vértice z pertence à envoltória convexa H(S)? Considere G o grafo representado na Figura 3.5, e escolha \mathscr{P} como a coleção de caminhos que aceitam cordas de tamanho dois (convexidade triangle – path) do grafo G. Ao escolhermos $S = \{d, e\}$, temos que $I(S) = \{a, c, d, e\}$, $I^2(S) = \{a, b, c, d, e\}$, H(S) = $I^3(S) = \{a, b, c, d, e, f\}$. Então a envoltória convexa de $\{d, e\}$ é o todo o conjunto de vértices do grafo. Portanto a resposta é positiva para qualquer que seja o vértice de G quando $S = \{d, e\}$.



Figura 3.5: Determinar a envoltória convexa para convexidade triangle – path.

NÚMERO DE CONVEXIDADE - CN (CONVEXITY NUMBER) Entrada: Um grafo G e um número inteiro positivo r. Questão: $c(G) \ge r$? NÚMERO DE INTERVALO - IN (INTERVAL NUMBER) Entrada: Um grafo G e um número inteiro positivo r. Questão: $i(G) \le r$? NÚMERO DE ENVOLTÓRIA - HN (HULL NUMBER)

Entrada: Um grafoGe um número inteiro positivo
 r.Questão: $h(G) \leq r?$

3.1.3 Resultados existentes em convexidade de caminhos

A tabela abaixo mostra a complexidade dos seis problemas apresentados anteriormente para alguns espaços de convexidade. Todas as linhas da tabela correspondem a resultados encontrados na literatura ou a resultados triviais (indicados por '[t]').

	geodésica		monofônica		P_3		P_{3}^{*}		triangle-path	
CS	Р	[t]	Р	[35]	Р	[t]	Р	[1]	Р	[38]
ID	P	[t]	NPc	[35]	Р	[t]	Р	[1]	NPc	[38]
CHD	Р	[t]	Р	[35]	Р	[t]	Р	[1]	Р	[38]
CN	NPc	[51]	NPc	[35]	NPc	[16]	NPc	[1]	Р	[38]
IN	NPc	[3]	NPc	[35]	NPc	[15]	NPc	[1]	NPc	[38]
HN	NPc	[35]	P	[35]	NPc	[16]	NPc	[1]	Р	[38]

Tabela 3.2: Problemas vs Convexidades: complexidades e resultados conhecidos.

3.1.4 Dois fatos úteis

As próximas duas proposições são úteis para entender a Tabela 3.2. Elas trabalham o fato de que se o problema DETERMINAR O INTERVALO ou o problema TESTE DE CONVEXI-DADE puderem ser resolvidos em tempo polinomial para algum espaço de convexidade, então outros problemas listados na Seção 3.1.2 também podem ser resolvidos em tempo polinomial, para as respectivas convexidades.

Proposição 21 Seja (V(G), C) um espaço de convexidade. Se DETERMINAR O INTER-VALO pode ser resolvido em tempo polinomial para (V(G), C), então TESTE DE CON-VEXIDADE e DETERMINAR A ENVOLTÓRIA CONVEXA também podem ser resolvidos em tempo polinomial para (V(G), C).

Prova.

Seja $S \subseteq V(G)$. Sendo que DETERMINAR O INTERVALO está em P para $(V(G), \mathcal{C}), I(S)$ pode ser computado em tempo polinomial. Seja *i* o menor índice tal que $I^{i+1}(S) = I^i(S)$. Observe que determinar tal índice *i* assim como $I^i(S)$ também podem ser determinados em tempo polinomial, porque $i \leq n$. Portanto:

- Se I(S) = S, então S é um conjunto convexo, caso contrário S não é convexo.
- Se $z \in I^i(S)$, então $z \in H(S)$, caso contrário $z \notin H(S)$.

Pelas observações acima, os problemas TESTE DE CONVEXIDADE e DETERMINAR A ENVOLTÓRIA CONVEXA são resolvidos em tempo polinomial para $(V(G), \mathcal{C})$.

Seja $S \subseteq V(G)$. Se S não é convexo, então um *conjunto aumentante* de S é qualquer S' tal que $S \subset S' \subseteq H(S)$ (onde o símbolo \subset significa inclusão própria). **Proposição 22** Seja (V(G), C) um espaço de convexidade. Se existe um algoritmo que fornece uma certificação para o problema TESTE DE CONVEXIDADE para (V(G), C) e que encontre um conjunto aumentante em tempo polinomial quando o problema possui uma resposta negativa, então DETERMINAR A ENVOLTÓRIA CONVEXA também pode ser resolvido em tempo polinomial para (V(G), C).

Prova.

Seja $S \subseteq V(G)$ e $z \in V(G)$. Sendo que TESTE DE CONVEXIDADE pode ser resolvido em tempo polinomial para $(V(G), \mathcal{C})$, podemos aplicar um teste de convexidade para S em tempo polinomial. Se o teste for validado, então S é um conjunto convexo e, consequentemente, a envoltória convexa de S é ele mesmo; caso contrário, se o teste falhar, existe um conjunto S_1 (um certificado negativo para o teste) que pode ser usado como um conjunto aumentante para o conjunto original S. Relembre que S está propriamente contido em S_1 .

Para encontrar a envoltória convexa de S, podemos aplicar o algoritmo para testar a convexidade do conjunto sucessivas vezes, sempre obtendo um conjunto S_{i+1} que aumenta S_i , até que em algum momento o conjunto não possa ser aumentado. Seja j o menor índice tal que S_j resulta em um conjunto convexo. Observe que $j \leq |V(G) \setminus S|$, dado que pelo menos um vértice é adicionado a cada iteração. Ainda, cada teste de convexidade pode ser realizado em tempo polinomial. Portanto, todo o processo pode ser realizado em tempo polinomial.

Se um vértice $z \in V(G)$ é tal que $z \in S_j$, então $z \in H(S)$. Portanto, DETERMINAR A ENVOLTÓRIA CONVEXA está em P para $(V(G), \mathcal{C})$.

3.2 Um *framework* geral para convexidades de caminhos

Nesta seção, propomos um framework para representar as diversas convexidades de caminhos que estudamos. Daqui em diante, vamos assumir que cada um dos n vértices de um grafo G é nomeado na sequência 1, 2, ..., n. Uma matriz de comprimento é uma matriz M simétrica $n \times n$ tal que cada entrada M(i, j), para $i, j \in V(G)$, é um número natural; adicionalmente, todos os valores na diagonal principal de M são zero.

Sejam A, B, C, D quatro $n \times n$ matrizes de comprimento. Suponha que \mathscr{P} seja uma família

de caminhos de G tal que um *ij*-caminho P de G é um membro de \mathscr{P} se, e somente se:

- (1) $|P| \ge A(i,j);$
- (2) $|P| \le B(i, j);$
- (3) todas as cordas de P são de comprimento no mínimo C(i, j);
- (4) todas as cordas de P são de comprimento no máximo D(i, j).

Seja $I_{\mathscr{P}} : 2^{V(G)} \to 2^{V(G)}$ a seguinte função intervalo: $I_{\mathscr{P}}(S) = S \cup \{z \mid \exists i, j \in S \text{ tal que } z \notin S \text{ e está em um } ij\text{-caminho } P \in \mathscr{P}\}.$

Seja também $\mathcal{C}_{\mathscr{P}}$ a família de subconjuntos convexos de V(G), ou seja, tal que $S \in \mathcal{C}_{\mathscr{P}}$ se, e somente se, $I_{\mathscr{P}}(S) = S$. Dado que \mathscr{P} é uma coleção particular de caminhos de G, pela Proposição 20, temos que $(V(G), \mathcal{C}_{\mathscr{P}})$ é um espaço de convexidade finito, com uma função intervalo $I_{\mathscr{P}}$. Neste caso, vamos dizer que este espaço de convexidade define uma convexidade de caminhos matriciais.

Novamente nós vamos omitir o subescrito \mathscr{P} quando o contexto for suficiente.

Dizemos que um ij-caminho P satisfaz as matrizes A, B, C, D se todas as condições (1) a (4) forem satisfeitas por P.

3.2.1 Colocando as matrizes como parte da entrada

Nos seis problemas listados na Seção 3.1.2, o grafo G sempre é parte da entrada; no entanto, a regra que determina a coleção de caminhos de G não é considerada como parte da entrada. Algumas versões mais gerais do problema são possíveis quando o espaço de convexidade desejado é expresso como um grafo juntamente com quatro matrizes de comprimento como parte da entrada. Por exemplo, considere a seguinte versão de TESTE DE CONVEXIDADE :

MATRIX CONVEX SET

Entrada: Um grafo G, quatro $n \times n$ matrizes de comprimento A, B, C, D, e $S \subseteq V(G)$. Questão: O conjunto S é convexo na convexidade de caminhos matriciais definida por A, B, C, D?

Todos os problemas listados na Seção 3.1.2 podem ser definidos de forma análoga.

Os próximos teoremas mostram que os "problemas matriciais" são todos difíceis. Entretanto, devemos perceber que restrições nas matrizes A, B, C, D geram casos interessantes. Nesse sentido, alguns tipos de matrizes de comprimento são especialmente interessantes. Para um grafo G, a matriz de distâncias de G é uma matriz de comprimento M_{dist} com valores $M_{dist}(i, j) = dist_G(i, j)$, para $i, j \in V(G)$. Para uma constante inteira positiva k, a (n - k)-matriz e a k-matriz são as matrizes M_{n-k} e M_k com todos os valores fora da diagonal principal iguais, respectivamente, a n - k e k.

Teorema 23 TESTE DE CONVEXIDADE MATRICIAL é Co-NP-completo.

Prova. Um certificado para resposta negativa para o problema TESTE DE CONVEXIDADE MATRICIAL é a tripla i, j, z (com $i, j \in S \in z \notin S$) e um ij-caminho P no grafo G contendo z, tal que P satisfaça as matrizes de A a D. Tal certificado pode ser verificado em tempo polinomial facilmente. Portanto TESTE DE CONVEXIDADE MATRICIAL está em CoNP.

Para provar que TESTE DE CONVEXIDADE MATRICIAL é Co-NP-completo, nós vamos mostrar uma redução do seguinte problema NP-completo [54]: dados três vértices distintos i, j, z em um grafo H, decidir se existe um ij-caminho sem corda passando por z.

Seja G o grafo obtido pela substituição de cada aresta (s, z) incidente a z por um caminho contendo n - 1 vértices de grau dois no grafo H, onde n = |V(H)|. Em outras palavras, G é o grafo resultante da subdivisão das arestas incidentes a z em n - 1 novos vértices. Sejam $A \in B$ as matrizes de comprimento com valores fora da diagonal principal iguais, respectivamente, a $2n \in 3n - 3$. Seja, também, $C = D = M_1$ (as k-matrizes para k = 1). Finalmente, seja $S = \{i, j\}$. Observe que a coleção de caminhos \mathscr{P} , definidos por A, B, C, D contém os caminhos sem cordas com comprimento no mínimo 2n e no máximo 3n - 3.

Suponha que exista um ij-caminho sem cordas em H passando por z. Faça $P_H = (s_0 = i, s_1, \ldots, s_{h-1}, s_h = z, s_{h+1}, \ldots, s_l = j)$. Então existe um ij-caminho sem cordas P_G em G obtido por P_H pela subdivisão das arestas (s_{h-1}, z) e (z, s_{h+1}) , utilizando n - 1 vértices de grau dois. Observe também que $|P_G| = (l-2) + 2n$. Dado que $2 \le l \le n - 1$, temos $2n \le |P_G| \le 3n - 3$. Portanto, P_G satisfaz A, B, C, D, e sua existência implica que S não é convexo.

Suponha que S não seja convexo. Então existe um ij-caminho sem cordas P_G de comprimento 2n passando por algum vértice de G que não está em S. Porém, pela construção de G, todos os ij-caminhos de comprimento 2n, necessariamente, passam por z. Seja P_{hz} o subcaminho de P_G com comprimento n que começa em um vértice h e termina no vértice z. Analogamente, seja $P_{zh'}$ o subcaminho de P_G com comprimento n que começa em z e termina em um vértice h'. Substituindo os subcaminhos P_{hz} e $P_{zh'}$ pelas arestas (h, z) e $(z,h^\prime),$ obtemos um $ij\mbox{-}caminho$ sem cordas em Hpassando por z. Isto completa a prova. \blacksquare

Teorema 24 MATRIX INTERVAL DETERMINATION é NP-completo.

Prova. Um certificado para uma resposta positiva para MATRIX INTERVAL DETERMI-NATION é um par $i, j \pmod{i, j \in S}$ e um ij-caminho P em G contendo z (relembre que z é parte da entrada) tal que P satisfaça A, B, C, D. Ainda, esse certificado pode ser verificado em tempo polinomial. Portanto, MATRIX INTERVAL DETERMINATION está em NP.

Para provar que MATRIX INTERVAL DETERMINATION É NP-completo, relembre a Tabela 3.2 em que DETERMINAR O INTERVALO É NP-completo para convexidade monofônica. Se $A = M_2$, $B = M_{n-1}$ e $C = D = M_1$, a coleção de caminhos \mathscr{P} associada às matrizes em questão são precisamente as que representam a coleção de caminhos induzidos em G. Então DETERMINAR O INTERVALO para a convexidade monofônica é uma restrição de MATRIX INTERVAL DETERMINATION, i.e., um problema já provado ser NP-completo.

Teorema 25 DETERMINAR A ENVOLTÓRIA CONVEXA MATRICIAL é NP-completo.

Prova.

Um certificado para uma resposta positiva para DETERMINAR A ENVOLTÓRIA CONVEXA MATRICIAL é formada por uma sequência de caminhos P_1, P_2, \ldots, P_r tal que $r \leq n - 1$, $z \in V(P_r)$, e cada P_k é um $i_k j_k$ -caminho que satisfaz as matrizes A, B, C, D com $i_k, j_k \in$ $S \cup V(P_1) \cup \cdots \cup V(P_{k-1})$. É fácil ver que este certificado é facilmente verificado em tempo polinomial e, portanto, MATRIX INTERVAL DETERMINATION está em NP.

Para a prova de completude, usamos a mesma redução descrita no Teorema 23. Novamente, se existe um *ij*-caminho sem cordas $P_H = (i, \ldots, h, z, h', \ldots, j)$ em H, então existe um *ij*-caminho sem cordas P_G em G, obtido de P_H pela subdivisão das arestas (h, z) e (z, h'), como explicado na prova do Teorema 23, tal que P_G satisfaça A, B, C, D. Portanto, $z \in I(S) \subseteq H(S)$.

Suponha, agora, que $z \in H(S)$. Então existe uma sequência de caminhos P_1, P_2, \ldots, P_r tal que $z \in V(P_r)$ e, para $1 \le k \le r$, P_k está em um $i_k j_k$ -caminho que satisfaz as matrizes A, B, C, D, onde $i_k, j_k \in S \cup V(P_1) \cup \cdots \cup V(P_{k-1})$. Observe que $i_1, j_1 \in S$. Então, $\{i_1, j_1\} = \{i, j\}$. Ademais, $|P_1| \ge 2n$. Mas, pela construção de G, todos os ij-caminhos de comprimento no mínimo 2n devem, necessariamente, passar por z. Assim, $z \in V(P_1)$. O restante da prova segue como na prova do Teorema 23: seja P_{hz} (resp., $P_{zh'}$) o subcaminho de P_1 com comprimento n começando em algum vértice h(resp., em z) e terminando em z (resp., em algum vértice h'). Substituindo P_{hz} e $P_{zh'}$ por arestas (h, z) e (z, h') produzimos um ij-caminho sem cordas em H passando por z.

Teorema 26 1. NÚMERO DE CONVEXIDADE MATRICIAL é NP-difícil. 2. NÚMERO DE INTERVALO MATRICIAL é NP-completo. 3. NÚMERO DE ENVOLTÓRIA MATRICIAL é NP-completo.

Prova. Inicialmente vamos provar que ambos MATRIX INTERVAL NUMBER e MATRIX HULL NUMBER estão em NP.

Um certificado para uma resposta positiva para NÚMERO DE INTERVALO MATRICIAL consiste em um conjunto $S \subseteq V(G)$ de tamanho no máximo r, e uma coleção de caminhos $\{P_z \mid z \in V(G) \setminus S\}$ tal que para cada caminho P_z existem $i_z, j_z \in S$ tais que P_z é um $i_z j_z$ -caminho contendo z e satisfazendo A, B, C, D. Dado que o número de caminhos na coleção é O(n), NÚMERO DE INTERVALO MATRICIAL está em NP.

Um certificado para uma resposta positiva para NÚMERO DE ENVOLTÓRIA MATRI-CIAL consistem em uma sequência de caminhos P_1, P_2, \ldots, P_r tal que:

- (a) $r \le n 1;$
- (b) $V(G) \setminus S \subseteq V(P_1) \cup \cdots \cup V(P_r);$
- (c) para $1 \le k \le r$, P_k é um $i_k j_k$ -caminho satisfazendo as matrizes A, B, C, D, com $i_k, j_k \in S \cup V(P_1) \cup \cdots \cup V(P_{k-1})$.

Dado que tal certificado pode ser verificado em tempo polinomial, NÚMERO DE ENVOL-TÓRIA MATRICIAL está em NP.

Agora vamos descrever as provas de que os problemas em questão são difíceis. Como no Teorema 24, usamos uma prova por restrição. Relembre da Tabela 3.2 que NÚMERO DE CONVEXIDADE, NÚMERO DE INTERVALO e NÚMERO DE ENVOLTÓRIA são todos NPcompletos para a convexidade geodésica. Se $A = B = M_{dist}$ e $C = D = M_1$, a coleção de caminhos \mathscr{P} associada a tais matrizes é precisamente a coleção de caminhos \mathscr{P} associada à coleção de caminhos mínimos de G. Isso significa que NÚMERO DE CONVEXIDADE, NÚMERO DE INTERVALO, e NÚMERO DE ENVOLTÓRIA para a convexidade geodésica são, respectivamente, restrições de NÚMERO DE CONVEXIDADE MATRICIAL, NÚMERO DE INTERVALO MATRICIAL E NÚMERO DE ENVOLTÓRIA MATRICIAL. Portanto o teorema está provado.

3.2.2 Matrizes constantes: convexidade de caminhos (a, b, c, d)

Nesta seção, vamos estudar o caso em que existem quatro constantes a, b, c, d tais que $A = M_a$, $B = M_b$, $C = M_c$ e $D = M_d$. Nesta configuração nós podemos assumir que as matrizes não são parte da entrada do problema, porque sabemos as restrições de comprimentos. Assim, temos as versões "matrizes constantes" dos problemas apresentados nas seções anteriores. Por exemplo, considere os problemas:

TESTE DE CONVEXIDADE (a, b, c, d)

Entrada: Um grafo G e um conjunto $S \subseteq V(G)$

Questão: O conjunto S é convexo para convexidade matricial composta pelas matrizes A, B, C, D?

Equivalente: O conjunto S é convexo na convexidade de caminhos definida pela coleção de caminhos $\mathscr{P}(a, b, c, d)$ do grafo G, tais que os comprimentos são maiores ou iguais a a e menores ou iguais a b, e as cordas são maiores ou iguais a c e menores ou iguais a d?

DETERMINAR INTERVALO (a, b, c, d)

Entrada: Um grafo G, um conjunto $S \subseteq V(G)$, e um vértice $z \in V(G)$.

Questão: O vértice z pertence ao intervalo I(S), onde I é a função intervalo associada com a coleção de caminhos $\mathscr{P}(a, b, c, d)$ do grafo G?

Novamente, os demais problemas listados na Seção 3.1.2 podem ser definidos de forma análoga.

A convexidade de caminhos que é regida por comprimentos de caminhos e cordas constantes (a, b, c, d), como explicado, é chamada *convexidade de caminhos* (a, b, c, d).

Teorema 27 DETERMINAR O INTERVALO (a, b, c, d) pode ser resolvido em tempo polinomial.

Prova. Observe que para constante ℓ existem $O(n^{\ell+1})$ caminhos de comprimento ℓ em *G*. Portanto existem $O(\sum_{\ell=a}^{b} n^{\ell+1})$ caminhos em *G* com comprimento pelo menos *a* e no máximo *b*. Para cada par de vértices distintos (i, j) em *S*, existem $O(\sum_{\ell=a}^{b} n^{\ell-1})$ *ij*-caminhos com comprimento no mínimo *a* e no máximo *b*, dado que *i* e *j* são fixados como extremidades de tal caminho. O conjunto *S* possui $O(|S|^2)$ pares de vértices distintos. Assim temos $O(|S|^2 \sum_{\ell=a}^{b} n^{\ell-1})$ caminhos para checar. Sabendo que um caminho de comprimento ℓ pode possuir no máximo $O(\ell^2)$ cordas, podemos selecinar todos os ijcaminhos em $\mathscr{P}(a, b, c, d), i, j \in S$, em tempo $O(|S|^2 \sum_{\ell=a}^{b} \ell^2 n^{\ell-1})$. Finalmente, checar se z pertence ou não a pelo menos um dos caminhos pode ser realizado em O(1) por caminho, dado que o comprimento do caminho é limitado por b. Assim, conseguimos um algoritmo simples de bruta força que checa em tempo polinomial se $z \in I(S)$.

Pela Proposição 21, Temos:

Corolário 28 TESTE DE CONVEXIDADE (a, b, c, d) *e* DETERMINAR A ENVOLTÓRIA CONVEXA (a, b, c, d) podem ser resolvidos em tempo polinomial.

Para os outros três problemas (NÚMERO DE CONVEXIDADE/INTERVALO/ENVOLTÓRIA (a, b, c, d)), vamos destacar casos especiais

$$(a = 2, b = 2, c = 1, d = 2)$$
 e $(a = 2, b = 2, c = 1, d = 1)$

correspondendo precisamente as convexidades de caminhso P_3 e P_3^* , como indicado na Tabela 3.1. Para ambas as convexidades todos os três problemas são NP-completo (veja Tabela 3.2).

3.2.3 Convexidade matricial em grafos com treewidth limitado

Seja G um grafo, T uma árvore, e $V = (V_t)_{t \in T}$ uma família de conjuntos de vértices $V_t \subseteq V(G)$ indexados pelos vértices de T. O par (T, V) é uma árvore de decomposição de G se satisfaz as seguinte condições [34]:

- **(T1)** $V(G) = \bigcup_{t \in T} V_t;$
- (T2) Para cada aresta $e \in E(G)$ existe $t \in T$ tal que ambas as extremidades de e estão em V_t ;
- (T3) Se V_{t_i} e V_{t_j} contêm um vértice v, então $v \in V_{t_k}$ para todo nó t_k no caminho entre $t_i \in t_j$.

A largura de (T, V) é o número max $\{|V_t| - 1 : t \in T\}$, e a treewidth tw(G) de G é a largura mínima de qualquer árvore de decomposição de G.

Os grafos com treewidth no máximo k são chamados de k-árvores. Algumas classes de grafos possuem treewidth limitada, dentre elas podemos destacar: florestas (treewidth 1); pseudo florestas (treewidth 2), cactos (treewidth 2); redes Apollonianas (treewidth 3) [4, 7]; dentre outras. Grafos de controle de fluxo na compilação de programas estruturados também possuem treewidth limitada (no máximo 6), o que permite que algumas tarefas como alocação para registradores sejam feitas eficientemente [77].

Assim sendo, nesta seção, estamos interessados em investigar a complexidade dos seis problemas de convexidade matriciais em classes de grafos com *treewidth* limitada.

Em 1990 [29], Bruno Courcelle mostrou que qualquer grafo G com treewidth limitada por uma constante k, e para cada propriedade Π do grafo que pode ser formulada em uma lógica de segunda ordem monádica contável (CMSOL₂), existe um algoritmo de tempo linear que decide se G satisfaz Π (veja [29, 33, 30, 31]). A lógica CMSOL₂ generaliza a lógica de segunda ordem monádica (MSOL), onde uma quantificação sobre conjuntos de vértices e arestas, além de uma coleção de predicados testando os tamanhos dos conjuntos módulo constantes são permitidas. Este resultado foi estendido inúmeras vezes [2, 6, 32, 60], e S. Arnborg e J. Lagergren [2] estenderam tais resultados para problemas de otimização que admitem $CMSOL_2$.

Usando os meta-teoremas de Courcelle, baseados na lógica de segunda ordem monádica contável [29, 33, 30], com o propósito de mostrar que podemos encontrar algoritmos de tempo linear para as classes que possuem *treewidth* limitada para os problemas de convexidade matriciais propostos, seguem demonstrações de que tais problemas podem ser expressados em $CMSOL_2$.

Teorema 29 DETERMINAR O INTERVALO (a, b, c, d) pode ser resolvido em tempo linear em classes de grafos com treewidth limitada.

Prova. É suficiente mostrar que a propriedade "z pertence a I(S)" é expressível em $CMSOL_2$.

Dados $G, A = M_a, B = M_b, C = M_c, D = M_d, S \in z$, construímos $\varphi(G, A, B, C, D, S, z)$ tal que $z \in I(S) \Leftrightarrow \varphi(G, A, B, C, D, S, z)$ e segue:

$$(z \in S) \lor$$

$$[\exists u, v, P [u, v \in S \land$$

$$P \notin um uv \text{-caminho} \land$$

$$z \in P \land$$

$$Card(P) \ge a \land$$

$$Card(P) \le b \land$$

$$\forall P' [P' \subseteq P \land$$

$$Gard(P') \ge 2 \land$$

$$\exists u', v'[(P' \notin um u'v' \text{-caminho}) \land adj(u', v')]$$

$$\exists v' ([P' \notin um u'v' \text{-caminho}) \land adj(u', v')]$$

$$\exists v' (Card(P') \ge c) \land (Card(P') \le d)]$$

Na fórmula anterior, caminhos são representados como subconjuntos de arestas. Usando essa abordagem "P é um uv-caminho" pode ser expressa em em $CMSOL_2$ (veja [30]). Note que a corda é expressa como um "u'v'-caminho", subcaminho de P, com cardinalidade superior a c e inferior a d.

Corolário 30 TESTE DE CONVEXIDADE (a, b, c, d) e DETERMINAR A ENVOLTÓRIA CONVEXA (a, b, c, d) podem ser resolvidos em tempo linear em classes de grafos com treewidth limitada.

Prova. Segue diretamente do Teorema 29 e da Proposição 21.

Corolário 31 NÚMERO DE CONVEXIDADE (a, b, c, d), NÚMERO DE INTERVALO (a, b, c, d) e NÚMERO DE ENVOLTÓRIA (a, b, c, d) podem ser resolvidos em tempo linear em classes de grafos com treewidth limitada.

Prova. Pelo Teorema 29, "z pertence a I(S)" é expressível em $CMSOL_2$. Portanto a propriedade " $c(G) \ge r$ " também pode ser expressa em $CMSOL_2$:

$$\exists S [S \subset V(G) \land [\forall z (z \in I(S)) \Rightarrow (z \in S)] \land Card(S) \ge r].$$

Analogamente a propriedade " $i(G) \leq r$ " pode ser expressa em $CMSOL_2$:

$$\exists S [S \subseteq V(G) \land [\forall z (z \in V(G)) \Rightarrow (z \in I(S))] \land Card(S) \le r].$$

Finalmente, " $h(G) \leq r$ " pode ser expressa em $CMSOL_2$, como segue abaixo:

$$\exists S (Card(S) \le r) \land [\nexists H (S \subseteq H) \land (I(H) \subseteq H) \land (H \subset V(G))]$$
(3.3)

3.2.4 Casos particulares para convexidade da caminhos matriciais

As provas de complexidade por restrições apresentadas na subseção anterior sugerem que poucos tipos de matrizes de comprimento são suficientes para representar as convexidades de caminhos mais importantes.

Considere um tipo adicional de matriz. Para um grafo G, a matriz de caminhos máximos é a matriz M_{long} tal que cada valor de $M_{long}(i, j)$ é igual ao comprimento do maior caminho entre $i \in j \in G$ ($i \neq j$). Neste momento, não vamos levar em consideração a complexidade para computar M_{long} .

Utilizando apenas as matrizes M_{dist} , M_{n-k} , M_k , e M_{long} , todas as convexidades de caminhos listadas na Tabela 3.1 podem ser representadas como casos particulares do caso geral do *framework* para convexidades de caminhos matriciais proposta neste trabalho. Veja a Tabela 3.3. Para duas $n \times n$ matrizes $M' \in M''$, seja min $\{M', M''\}$ a matriz M, $n \times n$, com valores $M(i, j) = \min\{M'(i, j), M''(i, j)\}$.

Convexity	A	В	C	D
geodésica	M_{dist}	M_{dist}	M_1	M_1
monofônica	M_2	M_{n-1}	M_1	M_1
g^3	M_3	M_{dist}	M_1	M_1
g_k	M_{dist}	$\min\{M_k, M_{dist}\}$	M_1	M_1
m^3	M_3	M_{n-1}	M_1	M_1
P_3	M_2	M_2	M_1	M_2
P_3^*	M_2	M_2	M_1	M_1
triangle-path	M_2	M_{n-1}	M_1	M_2
total	M_2	M_{n-1}	M_3	M_{n-1}
detour	M_{long}	M_{long}	M_1	M_{n-1}
all-path	M_2	M_{n-1}	M_1	M_{n-1}

Tabela 3.3: Convexidades de caminhos como casos particulares do *framework* de convexidades de caminhos matriciais. Observe que adotar C = D = 1 implica que todos os caminhos considerados para coleção \mathscr{P} não possuem cordas.

3.2.5 Novas convexidades derivadas do *framework* de convexidade de caminhos matriciais

Vamos aqui propor cinco novas convexidades que não haviam sido consideradas na literatura anteriormente. As Tabelas 3.4 e 3.5 descrevem tais convexidades.

nome da convexidade	Coleção ${\mathscr P}$ de caminhos considerados
g^k	caminhos mínimos com comprimento no mínimo \boldsymbol{k}
m^k	caminhos induzidos com comprimento no mínimo \boldsymbol{k}
(k, l)-path	caminhos sem cordas com comprimento entre $k \in l$
$k ext{-path}$	caminhos sem cordas com k vértices
Hamiltonian	caminhos Hamiltonianos

Tabela 3.4: Novas convexidades proposta neste trabalho.

Convexidade	A	B	C	D
g^k	M_k	M_{dist}	M_1	M_1
m^k	M_k	M_{n-1}	M_1	M_1
(k, l)-path	M_k	M_l	M_1	M_1
k-path	M_{k-1}	M_{k-1}	M_1	M_1
Hamiltonian	M_{n-1}	M_{n-1}	M_{n-1}	M_{n-1}

Tabela 3.5: Convexidades da Tabela 3.4 descritas de acordo com o framework de convexidades de caminhos matriciais.

3.3 Preenchendo os *gaps* da literatura

A Tabela 3.6 mostra novos resultados, provados nesta tese. Nas próximas seções, apresentamos provas de tais resultados. O símbolo ? significa que o problema não possui uma prova formal conhecida em relação à sua complexidade computacional.

	m^3		g^3		g_k		all-path	
	Compl Ref		Compl Ref		Compl	Ref	Compl	Ref
CS	P	Th 40	P	Cor 33	P	Cor 35	P	Th 42
ID	NPc	Cor 38	P	Th 32	P	Th 34	P	Th 42
CHD	P	Cor 41	P	Cor 33	P	Cor 35	P	Th 42
CN	?		?		?		P	Th 42
IN	NPc	Th 39	?		?		P	Th 42
HN	?		?		?		P	Th 42

Tabela 3.6: Problemas vs Convexidades: novos resultados de complexidade.

Nesta seção continuaremos a utilizar as Proposições 21 e 22 para facilitar as provas das complexidades computacionais dos problemas.

Teorema 32 DETERMINAR O INTERVALO pode ser resolvido em tempo polinomial para a convexidade g^3 .

Prova. Dado um grafo G, um conjunto $S \subseteq V(G)$, e um vértice $z \in V(G) \setminus S$, determinar se $z \in I(S)$ é o mesmo que verificar se existe um caminho mínimo de comprimento no mínimo 3 entre quaisquer vértices de S passando por z.

Assim, para cada par u, v de vértices de S, podemos verificar se existe um uv-caminho mínimo passando por z em tempo polinomial - basta lembrar que os subcaminhos de um caminho mínimo também são mínimos. Dado que o número de combinações dos elementos de S dois a dois é polinomial de ordem 2, determinar se existe um caminho mínimo entre quaisquer dois vértices de S que inclui z pode ser feito em tempo polinomial. Se algum desses caminhos possuir comprimento no mínimo três, então $z \in I(S)$, caso contrário $z \notin I(S)$.

Corolário 33 TESTE DE CONVEXIDADE *e* DETERMINAR A ENVOLTÓRIA CONVEXA *po*dem ser resolvidos em tempo polinomial para a convexidade g^3 .

Teorema 34 DETERMINAR O INTERVALO pode ser resolvido em tempo polinomial para a convexidade g_k . **Prova.** Esta prova segue exatamente os mesmos termos do teorema anterior. Como verificar se existe um caminho mínimo entre dois vértices quaisquer passando por um terceiro vértice pode ser feito em tempo polinomial, basta comparar os caminhos encontrados com k. Se existir algum caminho mínimo cujo comprimento seja no máximo k, então $z \in I(S)$, caso contrário $z \notin I(S)$.

Corolário 35 TESTE DE CONVEXIDADE e DETERMINAR A ENVOLTÓRIA CONVEXA podem ser resolvidos em tempo polinomial para convexidade g_k .

3.3.1 Resultados para convexidade m^3

Seja \mathscr{I}^3 a família de caminhos induzidos com comprimento no mínimo três. Todas as noções de convexidade desta seção interpretarão $\mathscr{P} = \mathscr{I}^3$ como a definição de coleção para a equação de intervalo.

Teorema 36 ([54], Teorema 10) Sejam u, v, w três vértices distintos em um grafo G. Decidir se existe um caminho induzido de u até v passando por w é NP-Completo.

Dado um grafo G e três vértices u, v, w de V(G), vamos nos referir ao problema de verificar se existe um uv-caminho passando por w de comprimento no mínimo k por FPATH(u, v, w, k).

Teorema 37 Seja k uma constante, inteira e positiva. Então FPATH(u, v, w, k) é NP-Completo.

Prova.

Este problema está em NP, pois um caminho induzido com comprimento no mínimo k e contendo u, v, w, nesta ordem, pode ser verificado em tempo polinomial; portanto teríamos um certificado verificável em tempo polinomial.

Agora vamos mostrar uma redução de FPATH(u, v, w, 2) para FPATH(u, v, w, k) usando indução matemática. Pelo Teorema 36 acima, FPATH(u, v, w, 2) é NP-Completo.

Suponha que FPATH(u, v, w, k - 1) seja NP-Completo. Vamos mostrar uma redução do problema FPATH(u, v, w, k - 1) para FPATH(u, v, w, k).

Considere o grafo H e três vértices u, v, w em V(H). Pela suposição, FPATH(u, v, w, k-1) é NP-Completo. Construa o grafo G da seguinte maneira: $V(G) = V(H) \cup \{u'\}$ e

 $E(G) = E(H) \cup \{(u', u)\}$. Portanto, FPATH(u, v, w, k - 1) é verdadeiro se, e somente se, FPATH(u', v, w, k) é verdadeiro.

Corolário 38 DETERMINAR O INTERVALO é NP-Completo para a convexidade m^3 .

Prova. Seja H um grafo e $u, v, w \in V(H)$. Atribua $G = H, S = \{u, v\}$, e w = z. Então $w \in I(S)$ se, e somente se, FPATH(u, v, w, 3) for verdadeiro.

O teorema a seguir, Teorema 39, é similar ao Teorema 3.4 de [36]; porém, na prova aqui apresentada, utilizamos as restrições ao comprimento dos caminhos que devem ser maiores ou iguais a três.

Teorema 39 NÚMERO DE INTERVALO \acute{e} NP-Completo para a convexidade m^3 .

Prova. Seja X um conjunto com no máximo k vértices, juntamente com um conjunto com no máximo $|V(G) \setminus X|$ caminhos induzidos de comprimento no mínimo 3, cada um começando e terminando em vértices distintos de X, de forma que cada vértice de $V(G) \setminus X$ aparece em pelo menos um desses caminhos. Então estes conjuntos seriam um certificado de que o problema pertence a NP.

Vamos mostrar uma redução do problema de decidir quando um subconjunto S é um interval set (isto é, I(S) = V(G)) de um grafo H na convexidade monofônica, que é NP-Completo (veja [36]). Seja $S = \{v_1, \ldots, v_t\}, t \ge 2$ um subconjunto de vértices de um grafo H. Construa o grafo G como segue: defina $V(G) = V(H) \cup S'$, onde $S' = \{v'_1, \ldots, v'_t\}$ é um conjunto de t novos vértices, e $E(G) = E(H) \cup \{(v_i, v'_i) \mid 1 \le i \le t\}$. Defina k = t. Vamos provar que S é um interval set de H se, e somente se, $i(G) \le k$.

Suponha que S é um interval set em G. Seja $v \in V(G) \setminus S'$. Precisamos provar que v está um caminho induzido de comprimento no mínimo 3, com extremidades em S'. Existem dois casos a serem considerados:

Caso 1: $v \notin S$. Neste caso, dado que S é um *interval set* de H, então existe um caminho induzido $v_i, \ldots, v, \ldots, v_j$ em H, onde $v_i \in v_j$ são vértices distintos de X. Portanto v está em um caminho induzido $v'_i, v_i, \ldots, v, \ldots, v_j, v'_j$ em G.

Caso 2: $v \in S$. Neste caso , $v = v_i$ para algum *i*, e, dado que *G* é conexo, existe um caminho induzido em *G* entre $v_i \in v_j$, $v_j \in S$, $v_i \neq v_j$. Isso implica na existência de um caminho induzido $v'_i, v_i, \ldots, v, \ldots, v_j, v'_i$ em *G*, onde $v'_i \in v'_j$ são vértices distintos de *S'*.

Dado que S' contém apenas vértices que possuem apenas um vizinho, se G possui um *interval set* Y com no máximo k vértices, então Y = S'. Assim, suponha que S' seja um *interval set* de G, e seja $v \in V(H) \setminus S$. Precisamos provar que v está em um caminho induzido entre dois vértices distintos de S. Tal caminho pode ser obtido considerando qualquer caminho induzido $v'_i, v_i, \ldots, v, \ldots, v_j, v'_j$ em G, onde $v'_i \in v'_j$ são vértices distintos de S.

Teorema 40 TESTE DE CONVEXIDADE pode ser resolvido em tempo polinomial para a convexidade m^3 .

Prova. Considere o grafo G e o conjunto S. Determinar se S é convexo recai em saber quando existe um caminho induzido de comprimento no mínimo 3 começando e terminando em vértices de S, além de passar por algum vértice fora de S. Para encontrar tal caminho, devemos construir uma estratégia baseada na vizinhança de S.

Para cada par de vértices não adjacentes $u, v \in S$, considere o conjunto $B = N(v) \cap N(u)$. Existem duas possibilidades de caminhos induzidos de comprimento no mínimo 3 contendo-os: a) u, v são extremidades de um caminho; b) algum dos dois, $u \in v$, está no meio do caminho.

a) Neste caso, nenhum vértice de B poderia estar em caminhos de comprimento no mínimo 3 com extremidades em $u \in v$, caso contrário existiria um caminho sem cordas. Considere o grafo $H = G[V(G) \setminus (S \cup B)]$. Para cada componente conexa C de H, se $N(u) \cap C \neq \emptyset$ e $N(v) \cap C \neq \emptyset$, então obviamente existe um caminho de $u' \in N(u) \cap C$ para $v' \in N(v) \cap C$, dado que C é conexo; portanto existe um caminho induzido de comprimento no mínimo 3 de u para v. Caso contrário, $N(u) \cap C = \emptyset$ ou $N(v) \cap C = \emptyset$, que implicaria que nenhum caminho de comprimento no mínimo três, que conecta $u \in v$ e está completamente fora de S, passa por C.

b) Se não existe um caminho induzido de comprimento no mínimo 3 de u para v, então é possível que existam caminhos tais que $u \in v$ estão no meio. O único caminho aceitável contendo u, v no meio também deve começar em S, precisamente em $S \setminus B$ (dado que o caminho não possui cordas). Para cada par de vértices não adjacentes s, b com $s \in S \setminus B, b \in B \setminus S$, considere o grafo H' = G - B - N(b). Se existe um caminho de s para u (ou v) em H', então existe um caminho s, \ldots, u, b, v (s, \ldots, v, b, u), ou seja, existe um caminho de comprimento maior ou igual a 3 e S não é convexo.

Corolário 41 DETERMINAR A ENVOLTÓRIA CONVEXA pode ser resolvido em tempo polinomial para convexidade m^3 .

3.3.2 Resultados para a convexidade all-path

Seja \mathscr{P}_{Ω} a família de todos os caminhos de um grafo G. Todas as noções de convexidade nesta seção devem ser interpretadas levando-se em conta $\mathscr{P} = \mathscr{P}_{\Omega}$ na Eq. 3.1.

Teorema 42 Todos os seis problemas listados na Seção 3.1.2 podem ser resolvidos em tempo polinomial para a convexidade all-path.

Prova.

Seja $S \subseteq V(G)$ e $w \in V(G) \setminus S$. Diremos que um vértice $z \neq w$ separa $w \in V' \subseteq V(G) \setminus \{w\}$ se, no grafo G - z, a componente conexa que contém w não contém vértice de V'. É fácil ver que $w \in I(S)$ se, e somente se, existem $u, v \in S$ distintos, tal que não existe vértice $z \neq w$ que separa $w \in \{u, v\}$. Esse teste pode ser feito com um algoritmo simples que possui ordem de tempo $O(n^2(n+m))$. Portanto, DETERMINAR O INTERVALO está em \mathscr{P} . Isso implica que DETERMINAR A ENVOLTÓRIA CONVEXA e TESTE DE CONVEXIDADE também estão em \mathscr{P} .

Considere a decomposição em blocos de G, e seja G_i um bloco folha com número mínimo de vértices. Então $c(G) = n - |V(G_i)| + 1$. Dado que determinar a decomposição em blocos de G e localizar G_i podem ser feitos em O(n+m) operações, NÚMERO DE CONVEXIDADE está em \mathscr{P} . Ainda, $S \subseteq V(G)$ é um conjunto de intervalo se, e somente se, S contém no mínimo dois vértices de cada bloco de G; portanto, S é mínimo quando contém todos os vértices de corte de G, mais um vértice adicional de cada bloco folha, isto é, NÚMERO DE INTERVALO está em \mathscr{P} .

Finalmente, dado que todo grafo G é trivialmente monotônico na convexidade *all-path* (isto é, H(S) = I(S) para qualquer S) temos que i(G) = h(G). Portanto, NÚMERO DE ENVOLTÓRIA também está em \mathscr{P} , e isso conclui a prova.

3.3.3 Consequências diretas

Relembre, da Tabela 3.4, as definições para as convexidades g^k e m^k . Os resultados encontrados na Seção 3.3 são diretamente aplicados à convexidade g^k , e os resultados en-
contrados na Seção 3.3.1 são também aplicáveis à convexidade m^k . Portanto, construímos a seguinte tabela:

	m^k		g^k	
	Compl	Ref	Compl	Ref
\mathbf{CS}	?		P	Cor 33
ID	NPc	Cor 38	P	Th 32
CHD	?		P	Cor 33
CN	?		?	
IN	NPc	Th 39	?	
HN	?		?	

Tabela 3.7: Problemas v
s Convexidades: resultados para as convexidades $m^k \in g^k.$

Capítulo 4

Conclusões

"New growth cannot exist without the destruction of the old."

(Mao Zedong)

No que tange aos problemas abordados nesta tese, tratamos com maior importância o problema de convexidade de caminhos em grafos, apresentando uma revisão bibliográfica aprofundada e produzindo um *framework* que é capaz de representar as diversas convexidades documentadas através de parâmetros simples. Assim, entendendo o *framework* como uma ferramenta facilitadora, pudemos trabalhar diversos problemas em muitas variantes; o que possibilitou também buscar, encontrar e explicar complexidades computacionais dos problemas associados.

Devido à formulação apresentada no *framework*, fomos capazes de utilizar os metateoremas de Courcelle para provar que os problemas estudados no Capítulo 3 tornam-se polinomiais quando restritos a grafos que apresentam *treewidth* limitada e matrizes bem comportadas (com valores constantes). No entanto, vale observar e ressaltar que a convexidade (k, l)-*path*, proposta neste trabalho, é exatamente a convexidade que estudamos neste caso, porém limitada aos grafos com *treewidth* limitada.

Dentre os resultados de complexidades computacionais obtidos, é sempre interessante notar a peculiaridade apresentada pela convexidade monofônica. Esta convexidade já havia apresentado resultados aparentemente estranhos, quando tem-se *Interval Determination* como um problema difícil e ainda assim o problema que consiste em verificar se um vértice pertence à envoltória convexa apresenta-se, surpreendentemente, tratável em tempo polinomial. A mesma peculiaridade foi encontrada para a convexidade monofônica com caminhos maiores ou iguais a três.

Interessante observar, também, os resultados obtidos para as convexidades geodésicas

(clássica e variações). Apesar da facilidade para demonstrar os resultados para *Convex Set, Interval Determination* e *Convex Hull Determination*, não conseguimos evoluir e desenvolver provas para os "*Number Problems*", mesmo com a evidência da convexidade geodésica clássica levando à NP-completude dos três problemas de otimização.

Não obstante, os problemas de partição trabalhados apresentaram uma complexidade de detalhamento e, até mesmo, conteúdo menores. Tratando-se apenas de generalizações, continuações de trabalhos anteriores e proposta de um novo problema. O problema de particionamento $(0, l)^j$ -Partição em cografos, em si, apresenta uma generalização de parte dos trabalhos [64] e [78] e sua importância se dá, principalmente, devido à luz dada para que problemas ainda maiores sejam resolvidos em seu tempo.

Por fim, o problema de P_k -Partição, por sua vez, trabalha um novo conceito, apresentando uma formulação interessante através de M-Partição. No estudo da P_k -Partição conseguimos encontrar resultados que servirão como base para trabalhos futuros, além de conseguirmos tratar casos específicos que fazem com que problemas considerados difíceis (FPATH(G, u, v, w, k)) possam ser resolvidos em tempo polinomial para algumas instâncias - consequentemente, os problemas de *Interval Determination* para as convexidades monofônicas também podem ser resolvidos em tempo polinomial. O estudo da P_k -Partição serviu também como um intermédio entre os estudos de convexidades de caminhos e partições em grafos - uma vez que sua solução oferece uma coleção de caminhos do tamanho do diâmetro do grafo menos uma unidade.

4.1 Trabalhos Futuros

No que se refere aos trabalhos de partição em grafos, temos ainda variações e generalizações possíveis para o problema da M-Partição que não foram estudados, entre os quais podemos citar, por exemplo, o problema de $(0, l)^j$ -Partição em que o parâmetro j é variável. Aliando os resultados apresentados por Viana e Leite, com os que obtivemos nesta tese, acreditamos que o resultado será mais facilmente obtido.

Em relação à P_k -Partição, esperamos mostrar que os casos em que $diam(G) \in \{2, 3, 4\}$ também apresentam algoritmos polinomiais para sua solução - acreditamos que esses casos podem ser resolvidos em tempo polinomial com algoritmos de força bruta explorando as combinações para 3,4 ou 5 conjuntos; porém, estamos interessados em mostrar que a estrutura do problema pode ser interpretada de forma a deduzir um algoritmo.

Por fim, restam ainda diversos problemas associados às convexidades de caminhos para os

quais não conseguimos, até agora, encontrar as complexidades computacionais. Portanto um trabalho promissor seria preencher as lacunas deixadas por esta tese e outros trabalhos. Em particular, as convexidades propostas no final do Capítulo 3, principalmente a convexidade (k, l)-path, que acreditamos possuir algoritmos polinomiais para os problemas estudados pela evidência encontrada nos grafos com treewidth limitada.

Referências

- [1] ARAUJO, R. T.; SAMPAIO, R. M.; SZWARCFITER, J. L. The convexity of induced paths of order three. *Discrete Matematics* 44 (2013), 109–114.
- [2] ARNBORG, S.; LAGERGREN, J.; SEESE, D. Easy problems for tree-decomposable graphs. *Journal of Algorithms* 12, 2 (1991), 308–340.
- [3] ATICI, M. Computational complexity of geodetic set. Int. J. Comput. Math. 79 (2002), 587–591.
- [4] BODLAENDER, H. L. A partial k-arboretum of graphs with bounded treewidth. Theoretical Computer Science 209, 1–2 (1998), 1–45.
- [5] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. Graph theory. Springer (2008).
- [6] BORIE, R. B.; PARKER, R. G.; TOVEY, C. A. Automatic generation of linear-time algorithms from predicate calculus descriptions of problems on recursively constructed graph families. *Algorithmica* 7 (1992), 555–581.
- [7] BRANDSTÄDT, A.; LE, V. B.; SPINRAD, J. P. Graph Classes: A Survey. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1999.
- [8] BRANDSTÄDT, A. Partitions of graphs into one or two independent sets and cliques. Discrete Mathematics 152(1-3) (1996), 47–54.
- [9] BRANDSTÄDT, A. The complexity of some problems related to graph 3-colorability. Discrete Applied Mathematics 89 (1998), 59–73.
- [10] BRAVO, R. S. F.; KLEIN, S.; NOGUEIRA, L. T.; PROTTI, F. Characterization and recognition of P_4 -sparse graphs partitionable into k independent sets and l cliques. *Discrete Applied Mathematics 159*, 5 (2011), 165–173.
- [11] BRAVO, R. S. F.; KLEIN, S.; NOGUEIRA, L. T.; PROTTI, F.; SAMPAIO, R. M. Partitioning extended P₄-laden graphs into cliques and stable sets. *Information Pro*cessing Letters 112, 21 (2012), 829–834.
- [12] BRAVO, R. S. F.; NOGUEIRA, L. T.; KLEIN, S. Obstruções de cografos-(k, l). Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (2005), 2361–2369.
- [13] CÁCERES, J.; OELLERMANN, O. R.; PUERTAS, M. L. Minimal trees and monophonic convexity. Discuss. Math. Graph Theory 32, 4 (2012), 685–704.
- [14] CENTENO, C. C.; DANTAS, S.; DOURADO, M. C.; RAUTENBACH, D.; SZWARC-FITER, J. L. Convex partitions of graphs induced by paths of order three. *Discrete Mathematics* 12, 5 (2010), 175–184.

- [15] CENTENO, C. C.; DOURADO, M. C.; PENSO, L. D.; RAUTENBACH, D.; SZWARC-FITER, J. L. Irreversible conversion of graphs. *Theoretical Computer Science* 412 (2011), 3693–3700.
- [16] CENTENO, C. C.; DOURADO, M. C.; SZWARCFITER, J. L. On the convexity of paths of length two in undirected graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 32 (2009), 11–18.
- [17] CHANGAT, M.; KLAVZAR, S.; MULDER, H. M. The all-paths transit function of a graph. Czechoslovak Mathematic Journal 51, 2 (2001), 439–448.
- [18] CHANGAT, M.; MATHEW, J. On triangle path convexity in graphs. Discrete Mathematics 206 (1999), 91–95.
- [19] CHANGAT, M.; MATHEW, J. Induced path transit function, monotone and Peano axioms. Discrete Mathematics 286, 3 (2004), 185–194.
- [20] CHANGAT, M.; MULDER, H. M.; SIERKSMA, G. Convexities related to path properties on graphs. Discrete Mathematics 290, 2–3 (2005), 117–131.
- [21] CHANGAT, M.; NARASIMHA-SHENOI, P. G.; MATHEWS, J. Triangle path transit functions, betweenness and pseudo-modular graphs. *Discrete Mathematics 309*, 6 (2009), 1575–1583.
- [22] CHANGAT, M.; NARASIMHA-SHENOI, P. G.; PELAYO, I. The longest path transit function of a graph and betweenness. Utilitas Mathematica 82 (2010), 111–127.
- [23] CHARTRAND, G.; ESCUADRO, H.; ZHANG, P. Detour distance in graphs. J. Combin. Math. Combin. Comput. 52 (2005), 75–94.
- [24] CHARTRAND, G.; GARRY, L.; ZHANG, P. The detour number of a graph. Utilitas Mathematica 64 (2003), 97–113.
- [25] CHEPOI, V. Peakless functions on graphs. Discrete Applied Mathematic 73, 2 (1997), 175–189.
- [26] COMTET, L. Advanced Combinatorics. D. Reidel Publishing Company, Paris, 1974.
- [27] CORNEIL, D. G.; LERCHS, H.; BURLINGHAM, L. S. Complement reducible graphs. Discrete Applied Mathematics 3 (1981), 163–174.
- [28] CORNEIL, D. G.; PERL, Y.; STEWART, L. K. A linear recognition algorithm for cographs. SIAM Journal on Computing 14(4) (1985), 926–934.
- [29] COURCELLE, B. The monadic second-order logic of graphs I. Recognizable sets of finite graphs. Inf. Comput. 25, 1 (1990), 12–75.
- [30] COURCELLE, B. The expression of graph properties and graph transformations in monadic second-order logic. Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformations 1 (1997), 313–400.
- [31] COURCELLE, B.; ENGELFRIET, J. Graph structure and monadic second-order logic. Cambridge University Press (2011).

- [32] COURCELLE, B.; MAKOWSKY, J. A.; ROTICS, U. Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width. *Theory of Computing Systems* 33, 2 (2000), 125–150.
- [33] COURCELLE, B.; MOSBAH, M. Monadic second-order evaluations on treedecomposable graphs. *Theoretical Computer Science* 109, 1 (1993), 49–82.
- [34] DIESTEL, R. Graph theory. Springer (2005).
- [35] DOURADO, M. C.; GIMBEL, J. G.; KRATOCHVIL, J.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. L. On the computation of the hull number of a graph. *Discrete Mathematics 309* (2009), 5668–5674.
- [36] DOURADO, M. C.; PROTTI, F.; SZWARCFITER, J. L. Complexity results related to monophonic convexity. *Discrete Mathematics* 158 (2010), 1268–1274.
- [37] DOURADO, M. C.; RAUTENBACH, D.; DOS SANTOS, V. F.; SCHÄFER, P. M.; SZWARCFITER, J. L.; TOMAN, A. An upper bound on the P₃-Radon number. *Discrete Math 312*, 16 (2012), 2433–2437.
- [38] DOURADO, M. C.; SAMPAIO, R. M. Complexity aspects of the triangle path convexity. Discrete Applied Mathematics 206 (2016), 39–47.
- [39] DRAGAN, F. F.; NICOLAI, F.; BRANDSTÄDT, A. Convexity and HHD-free graphs. SIAM J. Discrete Math 12 (1999), 119–135.
- [40] DUCHET, P. Convex sets in graphs, II. Minimal path convexity. Journal of Combinatorial Theory, Series B 44 (1988), 387–316.
- [41] FARBER, M.; JAMISON, R. E. Convexity in graphs and hypergraphs. SIAM J. Alg. Disc. Math. 7, 3 (1986), 433–444.
- [42] FARBER, M.; JAMISON, R. E. On local convexity in graphs. Discrete Math. 66 (1987), 231–247.
- [43] FEDER, T.; HELL, P. Matrix partitions of perfect graphs. Discrete Mathematics 306, 19–20 (2006), 2450–2460.
- [44] FEDER, T.; HELL, P.; HOCHSTÄTTLER, W. Generalized colouring (matrix partitions) of cographs. Trends in Mathematics, in Memory of Claude Berger (2006), 149–167.
- [45] FEDER, T.; HELL, P.; KLEIN, S.; MOTWANI, R. Complexity of list partitions. ACM symposium on Theory of computing (1999), 164–472.
- [46] FEDER, T.; HELL, P.; RIZI, S. N. Chordal obstructions to M-partitions, 2005.
- [47] FEDER, T.; HELL, P.; SHKLARSKY, O. Matrix partitions of split graphs. Discrete Applied Mathematics 166 (2014), 91–96.
- [48] FEDER, T.; HELL, P.; XIE, W. Matrix partitions with finitely many obstructions. Electronic Notes in Discrete Mathematics 28 (2007), 371–378.

- [49] GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. Computers and Intractability: A guide to the theory of NP-completeness. W. H. Freeman, New York, 1979.
- [50] GÖBEL, A.; GOLDBERG, L. A.; RICHERBY, D.; MCQUILLAN, C.; YAMAKAMI, T. Counting list matrix partitions of graphs. *SIAM Journal on Computing* 44, 4 (2015), 1089–1118.
- [51] GIMBEL, J. G. Some remarks on the convexity number of a graph. *Graphs Comb.* 19 (2003), 357–361.
- [52] GIOAN, E.; PAUL, C. Dynamic distance hereditary graphs using split decompositon. International Symposium on Algorithms and Computation 4835 (2007), 41–51.
- [53] GUTIN, G.; YEO, A. On the number of connected convex subgraphs of a connected acyclic digraph. *Discrete Appl. Math.* 157, 7 (2009), 1660–1662.
- [54] HAAS, R.; HOFFMANN, M. Chordless path through three vertices. Theoretical Computer Science 351 (2006), 360–371.
- [55] HABIB, M.; PAUL, C. A simple linear time algorithm for cograph recognition. Discrete Applied Mathematics 145 (2005), 183–197.
- [56] HARARY, F.; LOUKAKIS, E.; TSOUROS, C. The geodetic number of a graph. Comput. Modelling 17, 11 (1993), 89–95.
- [57] HARARY, F.; NIEMINEN, J. Convexity in graphs. Journal of Differential Geometry 16 (1981), 185–190.
- [58] HELL, P.; KLEIN, S.; NOGUEIRA, L. T.; PROTTI, F. Partitioning chordal graphs into independent sets and cliques. *Discrete Applied Mathematics* 141 (2004), 185– 194.
- [59] HERSTEIN, I. N. Topics in Algebra. Waltham: Blaisdell Publishing Company, 1964.
- [60] HLINĚNÝ, P.; OUM, S.; SEESE, D.; GOTTLOB, G. Width parameters beyond tree-width and their applications. *The computer journal* 51, 3 (2008), 326–362.
- [61] HOÀNG, C. T. A Class of Perfect Graphs. Master's thesis., School of Computer Science, McGill University, Montreal, Canada, 1983.
- [62] JAMISON, B.; OLARIU, S. P₄-reducible graphs, a class of uniquely tree representable graphs. Studies in Applied Mathematics 81 (1989), 79–87.
- [63] JUNG, H. A. On a class of posets and the corresponding comparability graphs. J. Combin. Theory Ser. 24 (B) (1978), 125–133.
- [64] LEITE, J. S. S. Caracterização dos Cografos-(4,0) por Subgrafos Proibidos com Restrições Externas. Dissertação de Mestrado, Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil, Março 2013.
- [65] LERCHS, H. On cliques and kernels. Dept. of Comp. Sci., University of Toronto, 1971.

- [66] LERCHS, H. On the clique-kernel structure of graphs. Dept. of Comp. Sci., University of Toronto, 1972.
- [67] NEBESKÝ, L. A characterization of the interval function of a connected graph. Czechoslovak Math. J. 44, 1 (1994), 173–178.
- [68] NIELSEN, M. H.; OELLERMANN, O. R. Steiner trees and convex geometries. SIAM J. Discrete Math. 23, 2 (2011), 680–693.
- [69] PARKER, D. B.; WESTHOFF, R. F.; WOLF, M. J. Two-path convexity in clone-free regular multipartite tournaments. Australas. J. Combin. 36 (2006), 177–196.
- [70] PELAYO, I. M. Geodesic convexity in graphs. Springer (2013).
- [71] SAMPATHKUMAR, E. Convex sets in a graph. Indian J. Pure Appl. Math. 15, 10 (1984), 1065–1071.
- [72] SEINSCHE, S. On a property of the class of n-colorable graphs. Journal Combinatorial Theory B (1974), 191–193.
- [73] STEWART, L. Cographs, a class of tree representable graphs. Master thesis, University of Toronto, Toronto, Ontario, 1978.
- [74] SUMNER, D. P. Dacey graphs. J. Australian Math. Soc. 18, 4 (1974), 492–502.
- [75] SZWARCFITER, J. L. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Campus, Rio de Janeiro, 1983.
- [76] THOMPSON, J. V. C. Particionando grafos de distância hereditária em conjuntos independentes e cliques. Dissertação de Mestrado, Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil, Março 2013.
- [77] THORUP, M. All structured programs have small tree width and good register allocation. *Information and Computation* 142, 2 (1998), 159–181.
- [78] VIANA, C. C. M_{3,3}-obstrução minimal de cografos. Dissertação de Mestrado, Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil, Março 2013.