

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

SIMON YUKIITI KANEMATSU

**Porte relativo e η -eficiência: dois novos conceitos
baseados em DEA como ferramenta de apoio à
tomada de decisões**

NITERÓI

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

SIMON YUKIITI KANEMATSU

**Porte relativo e η -eficiência: dois novos conceitos
baseados em DEA como ferramenta de apoio à
tomada de decisões**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Compu-
tação da Universidade Federal Fluminense
como requisito para a obtenção do Grau de
Mestre em Computação. Área de concentra-
ção: Algoritmos e Otimização

Orientador:
Carlos Alberto Martinhon

NITERÓI

2018

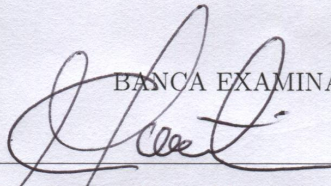
SIMON YUKIITI KANEMATSU

Porte relativo e η -eficiência: dois novos conceitos baseados em DEA como ferramenta de apoio à tomada de decisões

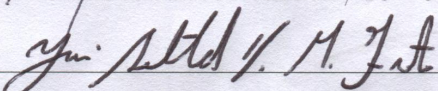
Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito para a obtenção do Grau de Mestre em Computação. Área de concentração: Algoritmos e Otimização.

Aprovada em Julho de 2018.

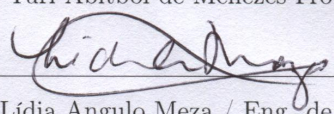
BANCA EXAMINADORA



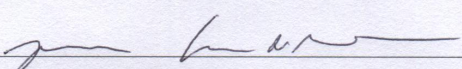
Prof. Dr. Carlos Alberto Martinhon / IC - UFF (Presidente)



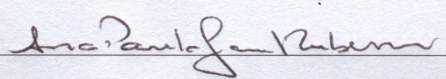
Prof. Dr. Yuri Abitbol de Menezes Frota / IC - UFF



Profa. Dra. Lúcia Angulo Meza / Eng. de Produção - UFF



Prof. Dr. João Carlos C. B. S. de Mello / Eng. Produção - UFF



Profa. Dra. Ana Paula dos Santos Rubem / Marinha do Brasil

Niterói

2018

Ficha catalográfica automática - SDC/BEE

K16p Kanematsu, Simon Yukiiti
Porte relativo e n-eficiência: dois novos conceitos
baseados em DEA como ferramenta de apoio à tomada de decisões
/ Simon Yukiiti Kanematsu ; Carlos Alberto Martinhon,
orientador. Niterói, 2018.
110 f. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Niterói, 2018.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PGC.2018.m.07130211954>

1. Porte Relativo. 2. N-eficiência. 3. Área leque. 4.
Supereficiência DEA. 5. Produção intelectual. I. Título
II. Martinhon, Carlos Alberto , orientador. III. Universidade
Federal Fluminense. Escola de Engenharia.

CDD -

Dedico este trabalho a todos que tenham interesse de apreciá-lo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por proporcionar a vida e condições de mantê-la.

Agradeço ao IFMT e a UFF pelo convênio de MINTER que me oportunizou a realização deste mestrado.

Agradeço a todos os professores que ministraram aulas neste programa de MINTER. O conhecimento transferido, além de fundamental para a realização da dissertação, me fez evoluir muito como profissional.

Sou extremamente grato ao meu orientador Prof. Carlos Alberto Martinhon, por me aceitar como orientado e por me orientar com muita paciência e dedicação em todas as etapas deste mestrado. Obrigado por esta experiência e pelo grande conhecimento proporcionado. Eu admiro muito o seu trabalho e a pessoa que é. A conclusão deste mestrado seria impossível sem a sua orientação.

O meu profundo agradecimento a Profa. Mariana Rodrigues de Almeida pela prontidão em ajudar e a pela contribuição dada ao trabalho, principalmente na área de DEA e aplicações; a Ney Paranaguá de Carvalho pela ajuda nas modelagens em Linguagem AMPL e a Anderson Farias de Oliveira pela disposição em ajudar na API da aplicação AMPL.

Agradeço a todos os meus colegas do MINTER. A nossa união foi fundamental para realizarmos os créditos e nos manter motivados a finalizar este mestrado. Agradeço em especial Andrei Mantesso Coimbra por me ajudar muito em estruturas de dados; Joeder Moura pela ajuda em algoritmos paralelos, Eder de Oliveira por dedicar o seu tempo me ajudando na instalação da API em C++ da aplicação AMPL; Paulo Henrique Lopes por me ouvir em momentos de dificuldade e sempre propor alguma solução ao problema e pela ajuda na implementação em C. Obrigado a Joelias Júnior, Danilo Xavier, Ademir Cardoso da Silva, Alessandro Mundim, Monica da Silva, Eder de Oliveira, Paulo Henrique Lopes pelos momentos de descontração.

Agradeço a minha família que sempre foram a minha base. Aos meus pais José

Yutaka Kanematsu e Marlene Yoshiko Ito que desde sempre me incetivaram a estudar e priorizaram a minha educação. A educação muda o mundo. Mudou o meu mundo. Aos meus irmãos Liege Regina Akemi Kanematsu e Victor Sussumu Kanematsu que sempre me relembram quem eu sou e de onde eu vim. Vocês são a minha Terra Natal. A minha avó, *Batian Fofa*, pelo seu carisma e por me ouvir e me aconselhar.

"Tudo vale a pena, se a alma não é pequena".

Fernando Pessoa

Resumo

No presente trabalho, propomos uma nova maneira de definir tamanho de organizações ou *Unidades Tomadoras de Decisão* (*DMU*- do inglês *Decision Making Units*) com base em *Análise Envoltória de Dados* (*DEA*- do inglês *Data Envelopment Analysis*). Um grande número de decisões gerenciais, atividades socioeconômicas, análise política e processos de engenharia incluem em suas análises alguma informação referente ao tamanho de corporações. Normalmente, essas corporações consideram atributos particulares, como receita, número de clientes, lucro e assim por diante para avaliação de porte, o que pode resultar em uma estimativa de tamanho incompleta e/ou parcial. Aqui, investigamos esta questão mais profundamente e propomos uma abordagem não-paramétrica para classificação de porte. Assumimos que as *DMUs* são homogêneas e compartilham o mesmo conjunto I de entradas (ou *Inputs*) e o mesmo conjunto O de saídas (ou *Outputs*). Assim, além da determinação de eficiência de cada *DMU* utilizando I e O , avaliamos seu porte baseados em subconjuntos $I' \subseteq I$ e $O' \subseteq O$. Para abordar esta questão, apresentamos dois novos conceitos, chamados de η -eficiência e *porte relativo* baseados em seus *inputs* e *outputs* virtuais. Para isso, consideramos um vetor alvo de supereficiências DEA e construímos um conjunto de Tecnologia idealizado (estendido) na determinação de porte relativo e eficiência com base em um conjunto de pesos comuns. Depois, mostramos como construir uma área de alcance, chamada aqui de *Área Leque*, associada a η -eficiências e *portes relativos* menores ou iguais a *um*. Além disso, com base em decisões gerenciais, mostramos como utilizar essas ideias para definição de novas metas de eficiência e porte relativo para uma ou mais *DMUs*. Consideramos uma aplicação empírica para ilustrar essas ideias em um conjunto de dados de companhias aéreas internacionais e concluímos o trabalho com algumas observações finais e direções futuras.

Palavras-chave: Supereficiências DEA, Conjunto de pesos comuns, Porte relativo, η -eficiência, superdimensionamento, *Área leque*.

Abstract

In this work, we propose a new way to define the size of organizations or *Decision Making Units (DMUs)* based on *Data Envelopment Analysis (DEA)*. A great number of managerial decisions, social and economic activities, political analysis, engineering process include in their analysis some information about the size of corporations. Usually, organizations consider particular attributes such as revenues, employees, number of clients, profit and so forth to evaluate their sizes, which could result on an incomplete and/or partial size evaluation. Here, we investigate this question more deeply and propose a non-parametric approach for ranking size. We assume that all *DMUs* are homogeneous and share the same set I of inputs and the same set O of outputs. Therefore, besides the computation of their efficiency scores, we evaluate their weighted size based on subsets I' and O' with $I' \subseteq I$ and $O' \subseteq O$. To address this issue, we introduce two new concepts; namely, the η -efficiency and *relative size* of *DMUs* based on virtual inputs and outputs. We consider a DEA super-efficiency target vector and we construct an expanded Technology set to determine *relative sizes* and efficiencies based on a common set of weights. After, we show how to construct a *range area*, associated to η -efficiencies and *relative sizes* that are less than or equal to *one*. Additionally, based on managerial decisions, we show how to use these ideas to achieve new efficiency and *relative size* goals for one or more *DMUs* in the set. We consider an empirical application to illustrate our approach on a dataset of international airlines and conclude the paper with some final remarks and future directions.

Keywords: DEA Super-efficiency, Common set of weights, Relative size, η -efficiency, Relative oversize, Range area.

Lista de Figuras

2.1	Representação da eficiência de cada <i>DMU</i> referente aos dados da Tabela 2.1.	24
2.2	Representação das eficiências para as 3 <i>DMUs</i> fictícias mostradas da Tabela 2.2. A linha contínua, indicada em preto, representa a fronteira de eficiência.	27
2.3	Variações do Modelo DEA CCR.	28
2.4	Modelos (a) orientado ao <i>Input</i> (b) orientado ao <i>Output</i>	30
2.5	Representação do Conjunto de Tecnologia T , definido pelo poliedro convexo $WABCZ$; e do Conjunto de Tecnologia T_B , definido pelo poliedro convexo $WACZ$	35
3.1	Assumimos $M' \subseteq M$. As coordenadas (a''_j, b''_j) são <i>representativas</i> de M , as coordenadas (a'_j, b'_j) são <i>restritas a</i> M' e as coordenadas (a_j, b_j) são <i>representativas</i> de M' . Se $M' = M$ então (a_j, b_j) , (a'_j, b'_j) e (a''_j, b''_j) são idênticos. Produzimos a sequência (a''_j, b''_j) , (a'_j, b'_j) e (a_j, b_j) . Em (a), temos uma seta direta de -45° entre (a'_j, b'_j) e (a_j, b_j) . Em (b), temos um arco direcionado entre (a'_j, b'_j) e (a_j, b_j)	41
3.2	Ilustração da etapas de cálculos do Algoritmo 1	49
3.3	Possíveis representações da <i>área leque</i> contendo 6 <i>DMUs</i> : (a) <i>Área leque</i> para $q = 1$, representada por <i>inputs</i> e <i>outputs virtuais</i> ; (b) <i>Área leque</i> para $q = 2$, representada por <i>inputs</i> e <i>outputs virtuais</i>	50
3.4	Possíveis representações da <i>área leque</i> contendo 6 <i>DMUs</i> : (a) <i>Área leque</i> para $q = 1$; (b) <i>Área leque</i> para $q = 2$	50

- 3.5 Conjuntos de Tecnologia T e \bar{T} . (a) Exemplo com 5 $DMUs$, um único *input* e um único *output* (b) Exemplo com 5 $DMUs$ e 2 *inputs*. Os pontos em verde representam as $DMUs$ associadas aos dados de entrada originais. Os pontos em amarelo representam as $DMUs$ virtuais associadas às $DMUs$ eficientes. 55
- 3.6 Conjuntos de Tecnologia T, \bar{T} e \tilde{T} . (a) Exemplo com 5 $DMUs$, um único *input* e um único *output* (b) Exemplo com 5 $DMUs$ e 2 *inputs*. Os pontos em verde, A, B, C, D e E , representam as $DMUs$ associadas aos dados de entrada originais. Os pontos em amarelo, A'', B'' e C'' , representam as novas $DMUs$ virtuais obtidas a partir de A', B' e C' (em cinza), definindo a fronteira de \tilde{T} 58
- 3.7 Representação da *Range Area* (Área Leque proposta em [16]). 61
- 4.1 O ponto $(\tilde{\mathbf{a}}''_j, \tilde{\mathbf{b}}''_j)$ é *representativo* de M ; $(\tilde{\mathbf{a}}'_j, \tilde{\mathbf{b}}'_j)$ é *restrito* a M' e $(\tilde{\mathbf{a}}_j, \tilde{\mathbf{b}}_j)$ com $\tilde{\mathbf{a}}_j = \bar{K}_j C_j \alpha''_j$ e $\tilde{\mathbf{b}}_j = \bar{K}_j C_j \beta''_j$ é *representativo* de M' . O semicírculo verde delimita a restrição de *porte relativo* da DMU_j pertencente a Ψ 68
- 4.2 Ilustração das etapas de cálculos do Algoritmo 2 71
- 4.3 Subconjunto $\Psi = \{DMU_2, DMU_3, DMU_4\}$ com metas $\tilde{\Theta}_j$ para $j \in \Psi$. Todos os pontos são *representativos* de M' . (a) Cálculo das novas eficiências e *porte relativos* (pontos *vermelhos*) com pontos pretos simbolizando η -*eficiências* e *portes relativos* atualizados. (b) Reposicionamento de todas as $DMUs$ no interior da *área leque* (pontos *amarelos*). Cálculo das novas η -*eficiências* e *porte relativos*. 73
- 5.1 Posições relativas das 28 $DMUs$ da Tabela 5.1. *Área leque* para o caso de todos *inputs* e *outputs* na avaliação do porte (cenário (i)). (a) η -*eficiências* e *portes relativos* (resultados do Algoritmo 1). (b) Novas η -*eficiências* e *portes relativos* (Resultados do Algoritmo 2). 80
- 5.2 Posições relativas das 28 $DMUs$ da Tabela 5.1. *Área leque* para o caso de apenas *outputs* na avaliação de porte (cenário (ii)). (a) η -*eficiências* e *portes relativos* (resultados do Algoritmo 1). (b) Novas η -*eficiências* e *portes relativos* (Resultados do Algoritmo 2). 81

Lista de Tabelas

2.1	Dados das empresas a-g e seus respectivos <i>inputs</i> (funcionários), <i>outputs</i> (faturamento) e a razão <i>output/input</i> . Baseado em Cooper et. al. (2006) [15].	24
2.2	<i>Inputs</i> e <i>outputs</i> associados a 3 <i>DMUs</i> distintas. Os valores a_j^0 e b_j^0 indicam suas coordenadas e e_j^0 , suas respectivas eficiências.	27
2.3	Dados fictícios para ilustração do cálculo da supereficiência AP	34
2.4	Resultado computacional da Eficiência DEA-CCR (primeira etapa do modelo de Kao e Hung) e Eficiência de Pesos comuns, com base nos dados da Tabela 2.3	37
3.1	Exemplo com 6 <i>DMUs</i> (veja Adler et al. (2002) [2] e Sexton et al. (1986) [36]), $M' = I' \cup O'$, com $I' = \{Supp\}$ e $O' = \{MCPD, PPPD\}$ e $q = 2$. Cálculo da η -eficiência e <i>porte relativo</i> restrito a $M' = \{Supp, MCPD, PPPD\}$. Neste caso, $\phi_e = 1.89$ e $\phi_s = 0.0150$	48
3.2	Comparação entre o <i>ModeloSRQ</i> e <i>ModeloSRQS</i> na definição do <i>porte relativo</i> . Consideramos a norma- ℓ_2	51
4.1	Execução do <i>ModeloSRQS</i> ₂ com $\psi = \{DMU_2, DMU_3, DMU_4\}$ e metas de supereficiência normalizada $\tilde{\Theta}_j$, para $j \in \Psi$. No exemplo, a DMU_3 é η -eficiente e a DMU_1 define uma <i>barreira normalizada</i> com $\tilde{\Theta}_{max} = E_1^*/\phi_e = 2.00/1.89 = 1.058$. A DMU_4 tem o maior <i>porte relativo</i> do conjunto.	73
5.1	<i>Input</i> e <i>output</i> de 28 companhias aéreas durante o ano de 1990. (Fonte: Ray [31] e Coelli et al. [14]).	76

5.2	Resultados computacionais para os dados da Tabela 5.1. Assumimos as metas $\tilde{\Theta}_j \leq 1.28, \forall j \in \Psi$ com $\Psi = \{DMU_9, \dots, DMU_{16}\}$. No exemplo, fixamos: $\tilde{\Theta}_{09} = 0.65$; $\tilde{\Theta}_{10} = 0.85$; $\tilde{\Theta}_{11} = 1.09$; $\tilde{\Theta}_{12} = 0.86$; $\tilde{\Theta}_{13} = 1.01$; $\tilde{\Theta}_{14} = 0.86$; $\tilde{\Theta}_{15} = 1.08$ e $\tilde{\Theta}_{16} = 0.71$ (aumento de 20% na eficiência). Para a avaliação do <i>porte relativo</i> consideramos: (i) $M' = I' \cup O'$ com $I' = I$ e $O' = O$, e (ii) $M' = I' \cup O'$ com $I' = \emptyset$ e $O' = O$	77
-----	--	----

Lista de Abreviaturas e Siglas

DEA	: <i>Data Envelopment Analysis</i> - Análise da Envoltória de Dados;
DMU	: <i>Decision Maker Units</i> - Unidades Tomadoras de Decisão;
PPS	: <i>Production Possibility Set</i> - Conjunto de Possibilidades de Produção;
DEA CCR	: Modelo DEA de Charnes, Cooper e Rhodes;
DEA BCC	: Modelo DEA de Banker, Charnes e Cooper;
ModeloAP	: Modelo de Supereficiência de Anderson-Peterson;
ModeloSRQ	: Modelo da Soma de Razões Quadráticas de Kao-Hung;
ModeloSRQS	: Modelo da Soma de Razões Quadráticas com Supereficiência;
<i>ModeloSRQS</i> ₁	: Modelo SRQS não-normalizado (p/ definição de metas);
<i>ModeloSRQS</i> ₂	: Modelo SRQS normalizado (p/ definição de metas);
SBM	: <i>Slack Based Model</i> - Modelo de eficiência baseado em folgas;
AMPL	: Linguagem de Programação Matemática;
PSRQ	: Problema da Soma de Razões Quadráticas;
PNL	: Problema de Programação Não-Linear;
DDF	: <i>Directional Distance Function</i> - Função de Distância Direcional;

Sumário

1	Introdução	16
1.1	Introdução	16
1.2	Motivação	20
1.3	Objetivos	21
1.4	Metodologia da pesquisa	21
1.5	Estrutura da dissertação	22
2	Fundamentação teórica	23
2.1	Data Envelopment Analysis - DEA	23
2.1.1	O modelo DEA CCR	24
2.1.2	Variações do modelo DEA CCR	28
2.1.3	O Conjunto de Possibilidades de Produção	31
2.2	Modelos de Supereficiência	32
2.2.1	Conjunto de Tecnologia e Supereficiência	34
2.3	Modelos de Pesos Comuns	36
2.3.1	Não-convexidade do modelo de Kao e Hung [24]	37
3	Porte Relativo e η-eficiência	40
3.1	Considerações iniciais e a definição de M'	40
3.2	Modelo SRQS - Soma de Razões Quadráticas com Supereficiência	42
3.3	Rotação e Translação de DMUs	44
3.4	Considerações adicionais sobre o <i>ModeloSRQS</i>	51

3.5	Definição de uma Tecnologia \bar{T} estendida	52
3.5.1	Mais sobre o <i>ModeloSRQS</i>	56
3.6	Comparação com a definição porte relativo apresentada em Carvalho[16] .	58
4	Definição de metas restritas a um conjunto Ψ de <i>DMUs</i>	63
4.1	Formulação auxiliar não-normalizada	63
4.2	Formulação normalizada	65
4.3	Supereficiência e Superdimensionamento	69
5	Ilustração dos modelos: Uma aplicação em companhias aéreas	75
6	Conclusão e considerações finais	82
	Referências	85
	Apêndice A - Modelagens em AMPL (<i>A Mathematical Programming Language</i>)	89
A.1	Modelagens	89
A.1.1	<i>ModeloAP</i>	89
A.1.2	<i>ModeloSQRS</i>	90
A.1.3	<i>ModeloSQRS₂</i>	91
A.2	Dados: Enfermarias	92
A.3	Dados: Companhia Aéreas	93
	Apêndice B - Algoritmo em linguagem C/C++	96

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

Um grande número de decisões gerenciais, atividades socioeconômicas, análise política, processos de engenharia, entre outras, incluem em suas análises alguma informação referente ao tamanho de corporações. Por exemplo, em Laukkanen et al. [27], os autores discutem a adoção de um sistema de Planejamento de Recursos Empresariais (ERP- *Enterprise Resource Planning*) investigando a relação do tamanho de empresas com objetivos e restrições na adoção do sistema. Eles encontraram diferenças significativas em relação aos objetivos e restrições das empresas de pequeno, médio e grande porte. Eles alegam que, enquanto as pequenas empresas têm maiores dificuldades com relação ao conhecimento do sistema, as grandes e médias empresas são desafiadas pelas mudanças impostas na adoção do ERP.

Em Schubert e Yang [34], os autores estudaram as atividades de pesquisa e ensino de universidades alemãs entre os anos 2000 e 2011. Eles discutem importantes mudanças neste período, relacionadas ao ensino (principalmente por meio das reformas de Bologna-veja Kehm [25]) e à pesquisa, por meio da *Excellence Initiative*, usada na alocação de fundos para importantes universidades e programas de pesquisa (veja Schubert [37]). Eles sugerem que as universidades menores foram fortemente favorecidas por estas políticas de mudança porque estas são mais flexíveis às estas mudanças institucionais. Por outro lado, as organizações mais complexas (geralmente, de maior porte) encontraram dificuldade de adaptação às estas reformas na educação.

Em Subrahmanya [39], o autor apresenta uma perspectiva comparativa do padrão de inovações tecnológicas realizadas por pequenas empresas do setor de engenharia em

Bangalore na Índia, e no nordeste da Inglaterra. Ele relata que, apesar das diferenças no apoio político à inovações tecnológicas de pequenas empresas nos dois países, o padrão geral de inovações tecnológicas realizadas por pequenas empresas parecem similares.

Em resumo, classificar uma companhia como pequena, média ou grande pode influenciar em diversos fatores, como, por exemplo, em como tratá-la no processo de vendas, como tomar decisões financeiras e como uma determinada tecnologia deve ser implementada ou modelada. Além disso, a escolha dos parâmetros utilizados na definição do porte destas corporações pode variar enormemente de uma região para outra, podendo depender de uma legislação particular ou mesmo de critérios impostos pelas próprias corporações (veja Subrahmanya [39]). Para uma maior leitura a respeito do porte das empresas ou corporações e a sua relação com aspectos sociais e econômicos, veja Alvarez e Crespi [3], Audretsch [6] e Acs e Audretsch [1].

A Análise Envoltória de Dados (DEA-*Data Envelopment Analysis*) proposta por Charnes, Cooper and Rhodes em 1978 (veja Charnes et al. [11]) é uma técnica não-paramétrica utilizada na medição da eficiência relativa de um conjunto de n Unidades Tomadoras de Decisão (*DMUs - Decision Making Units*) representando empresas, corporações, governos, etc. Esta técnica representa uma extensão do trabalho de Farrel (Charnes [10]) na determinação da fronteira de eficiência e pode trabalhar com diversos *inputs* (entradas) e *outputs* (saídas) simultaneamente. Ela é utilizada na identificação da eficiência relativa da *DMU* em observação, em relação à uma fronteira construída pelas *DMUs* eficientes do conjunto de referência *benchmark*¹ (Seiford e Thrall [35]). Um conceito importante introduzido pelo DEA é combinar linearmente os *inputs*, *outputs* e pesos para construir *inputs* e *outputs* virtuais. Dessa forma, esta técnica pode lidar com múltiplos *inputs* e *outputs* como entidades individuais, o que era uma limitação no trabalho de Farrel [19]. Assim, para cada instância DEA com uma *DMU* sob observação (*DMU*₀) determina-se sua eficiência relativa, isto é, o quão eficiente ela é em comparação às *DMUs* eficientes e que representam seu *benchmark*. Assim, o DEA consegue estimar a eficiência relativa de todas as *DMUs* envolvidas, o que é sem dúvida um indicador bastante importante para as organizações em análise.

Portanto, uma questão interessante a ser abordada em DEA seria a determinação de outros indicadores além da eficiência relativa. Assim, dado um conjunto de n *DMUs* juntamente com um conjunto I de m *inputs* e um conjunto O de s *outputs*, estaremos interessados na determinação do porte de todas as *DMUs* envolvidas. Mais particular-

¹*DMUs* eficientes que representam uma referência para as demais.

mente, estaremos interessados em estabelecer um *rank* completo de *porte relativo* de todas as *DMUs*. Usualmente, organizações consideram atributos particulares, como rendimentos, empregados, número de clientes, lucro entre outros para avaliar seu tamanho, o que pode resultar em uma avaliação parcial ou incompleta de porte. Assim, de forma similar à análise de eficiência, espera-se que uma definição precisa de porte incorpore atributos distintos, considerando, simultaneamente, um subconjunto de *inputs* e *outputs* virtuais.

Em nosso trabalho, assumimos que todas as variáveis (ou atributos) presentes na definição do *porte relativo* pertencem ao conjunto de *inputs* e *outputs* considerados na análise da eficiência. Adicionalmente, apontamos que a seleção de $m' \leq m$ *inputs* e $s' \leq s$ *outputs* é crucial para uma definição conveniente de *porte relativo* e depende da aplicação considerada. Por exemplo, suponha uma companhia poluente fictícia com um conjunto I de *inputs* e um conjunto O de *outputs* como acima. Considere também um subconjunto de *outputs* indesejados $\bar{O} \subseteq O$, representado, por exemplo, o número total de poluentes não-recicláveis da companhia, o número de reclamações, etc. Neste caso, poderíamos excluir este subconjunto \bar{O} da nossa análise de *porte relativo* sem prejuízo. Note que todos os *outputs* de \bar{O} afetam negativamente na eficiência da companhia e são essenciais para o cálculo de sua eficiência relativa, entretanto, estes não devem afetar a definição de *porte relativo*. Assim, podemos assumir que um conceito de *porte relativo* mais adequado e ajustado considere apenas subconjuntos $I' \subseteq I$ e $O' \subseteq O$, escolhidos em função da aplicação considerada.

Neste trabalho, visando a definição de porte relativo, introduzimos uma representação bidimensional com coordenadas (a_j, b_j) da DMU_j denotando, respectivamente, *inputs* e *outputs* virtuais. Mostramos como relacionar a nossa definição de *porte relativo* (formalizada posteriormente) com uma métrica utilizando alguma norma- ℓ_p , entre as coordenadas (a_j, b_j) e o vetor nulo $(0, 0)$ de *inputs* e *outputs* virtuais. No trabalho de Costa et al. [18], os autores apresentam uma representação gráfica bidimensional diferente envolvendo múltiplos *inputs* e *outputs*. Eles discutem que as *DMUs* “pequenas” estão perto do ponto $(0, 0)$ e de forma inversa, as *DMUs* “grandes” estão longe do mesmo ponto. Eles observam que há dois problemas para se formalizar tal conceito utilizando DEA. O primeiro é que os *inputs* e *outputs* virtuais, assim como, os *inputs* e *outputs* virtuais modificados propostos por eles, dependem dos pesos de cada *DMU*. Estes pesos são determinados a fim de se maximizar o valor da eficiência da *DMU* em análise, e o seu uso em medida de tamanho é bastante discutível. Em outras palavras, o porte relativo é obtido como subproduto da avaliação de eficiência. O segundo problema surge apenas para as *DMUs* eficientes. Eles mostram que para tais *DMUs*, a representação gráfica é um segmento

de reta e não um ponto fixo. Como consequência, o “tamanho” de uma *DMU* eficiente não é determinado de forma única. A primeira questão é pertinente também em nosso trabalho e será rediscutida posteriormente. Porém, a segunda questão está intimamente relacionada ao método proposto em Costa *et al.* [18] e não será aqui considerada.

Apontamos ainda outras duas dificuldades resultantes da aplicação direta do Modelo DEA CCR (como proposto em Charnes, Cooper e Rhodes [11]) com vista à definição de porte relativo. Na primeira: as *DMUs* em DEA selecionam individualmente os pesos mais vantajosos para o cálculo de eficiência, o que pode ocasionar também uma definição tendenciosa de porte. Em outras palavras, o “tamanho” depende da *DMU* sendo avaliada na função objetivo. Na segunda: os modelos orientados a *inputs* (resp., modelos orientados a *outputs*) possuem *outputs* virtuais limitados superiormente por *inputs* virtuais. Como veremos posteriormente, isto que pode causar imprecisão na medida de *porte relativo* para dados específicos, como ocorre por exemplo, com *DMUs* com *outputs* muito grandes e *inputs* muito pequenos, ou seja, para *DMUs* altamente produtivas. Neste caso, como $b_j \leq a_j$ para $j = 1, \dots, n$, independentemente da métrica considerada e independentemente do tamanho da DMU_j , poderíamos ter uma distância pequena entre (a_j, b_j) e o vetor nulo $(0, 0)$ de *inputs* e *output* virtuais, o que iria contra nossas expectativas com relação a uma definição precisa de porte relativo. Portanto, em nosso trabalho, para a solução do primeiro problema, não levamos em conta os pesos dedicados a uma *DMU* particular, mas a um conjunto de pesos que seja comum a todas as *DMUs*. No segundo problema, mostramos como os modelos de supereficiência, aliados à definição de um conjunto de Tecnologia \bar{T} estendido, podem ser utilizados satisfatoriamente na minimização dos resultados indesejados produzidos pelo conjunto de dados particular, como mencionado acima.

Essencialmente, nosso trabalho se baseia no conceito de supereficiência, introduzido inicialmente por Anderson e Petersen [4], e na definição de um conjunto pesos comuns, como proposto em Kao e Hung [24]. Introduzimos os conceitos de *η -eficiência* e *porte relativo*, discutidos detalhadamente no Capítulo 3. Para tal, consideramos um vetor de supereficiências DEA como meta (ao invés das eficiências DEA, como em Kao e Hung [24]) definido sobre um conjunto de Tecnologia \bar{T} estendido. Resolvemos então um problema de programação não-linear, mais particularmente, uma soma de razões quadráticas na determinação de um vetor de $\bar{\ell}_2$ -eficiências (definido posteriormente), podendo assumir valores maiores que *um*. Desta forma, determinamos coordenadas (a_j, b_j) para $j = 1, \dots, n$ de *inputs* e *outputs* virtuais e calculamos as distâncias entre (a_j, b_j) e $(0, 0)$, através de alguma norma- ℓ_q . Em seguida, definimos um *Lema Fundamental* que nos permite realizar

movimentos de rotação e translação da DMU_j visando a determinação de eficiências normalizadas (as η -eficiências) e *portes relativos* limitados pela unidade. Para resumir estas ideias, introduzimos o conceito de *Área Leque*, utilizado na representação bidimensional conjunta das η -eficiências e *portes relativos*. Dizemos que a DMU_j está no interior da *Área Leque* se sua η -eficiência e seu *porte relativo* forem positivos e menores ou iguais a um.

Finalmente, após a determinação das η -eficiências e *portes relativos*, com base no conjunto de Tecnologia \bar{T} estendido, consideramos também a possibilidade de decisões gerenciais restritas a um subconjunto Ψ de $DMUs$, incluindo aí as $DMUs$ eficientes e ineficientes. Mostraremos que novas metas de eficiência e *porte relativo* podem produzir pontos fora da *Área Leque*, o que caracteriza *supereficiência* e/ou *superdimensionamento*, quando o porte relativo é maior que a unidade. Neste caso, consideramos novamente o *Lema Fundamental* para executar movimentos de rotação e translação necessários para restaurar as η -eficiências e *portes relativos* de todas as $DMUs$ de Ψ no interior da *Área Leque*.

1.2 Motivação

Conforme discutido inicialmente, um grande número de decisões gerenciais, atividades sociais e econômicas, análise política, processos de engenharia incluem em suas análises alguma informação sobre o tamanho das empresas ou corporações envolvidas. Dessa forma, acreditamos que uma medida não-paramétrica de porte mais precisa, assim como as medidas de eficiência relativa, pode nos trazer subsídios importantes para o processo de tomada de decisão.

Incluímos também a possibilidade de definição de metas para $DMUs$ eficientes, ao contrário da grande maioria dos trabalhos em DEA, onde metas gerenciais são estabelecidas apenas para as $DMUs$ ineficientes através de *benchmarks*. Apesar de violar em um primeiro momento o conjunto de produção de possibilidades ou PPS (ou conjunto de Tecnologia), definido mais adiante (do inglês, *Production Possibility Set*), essa suposição nos pareceu bastante razoável, já que problemas reais são dinâmicos e variam constantemente. Outros trabalhos nesta linha podem ser encontrados em Sowlati e Paradi [38] e Suzuki e Nijkamp [41].

Finalmente, este trabalho representa uma continuação ao trabalho desenvolvido inicialmente em Carvalho [16], onde o conceito de porte era construído com base na definição

de uma *área relativa*. O presente trabalho, representa um avanço significativo em relação ao trabalho de Carvalho [16] já que, além da introdução de distâncias utilizando uma norma- ℓ_p qualquer, possibilita a identificação de um subconjunto de *inputs* e *outputs*, I' e O' respectivamente, tornando a definição de porte mais precisa.

1.3 Objetivos

Em linhas gerais, podemos descrever os seguintes objetivos principais em nosso trabalho:

- i)* Definir o conceito de η -*eficiência* e *porte relativo*;
- ii)* Introduzir uma medida não-paramétrica de porte;
- iii)* Avaliar eficiência e porte relativo conjuntamente, auxiliando assim o processo de gestão com a definição de metas para *DMUs* eficientes e ineficientes.

Como objetivos específicos podemos citar:

- a)* Desenvolver um sistema na linguagem C que implemente todas as etapas descritas no presente trabalho;
- b)* Mostrar aplicabilidade do *framework* aqui apresentado com a exibição de resultados computacionais para dados reais de companhias aéreas.
- c)* Publicar os resultados obtidos em periódicos de reconhecido nível internacional (vide Kanematsu *et. al.* [23]).

1.4 Metodologia da pesquisa

No desenvolvimento deste trabalho, trabalhamos primeiramente na pesquisa bibliográfica e nos dedicamos às principais referências da literatura sobre DEA. Em seguida, nos dedicamos aos trabalhos de Carvalho [16] e Costa et al. [18], identificando suas principais dificuldades e deficiências na busca por uma definição mais precisa de porte relativo.

Em seguida, trabalhamos no desenvolvimento de novos modelos teóricos visando uma solução para alguns dos problemas listados acima. Propomos uma ferramenta combinando nossa proposta com modelos de supereficiência e pesos comuns existentes na literatura. Testes computacionais foram realizados em linguagem C, juntamente com a linguagem AMPL (*A Mathematical Programming Language* - Uma Linguagem de Programação Matemática). A resolução dos problemas lineares e não-lineares presentes em nossa aborda-

gem foi realizada pelos *solvers* que compõem o *software* livre AMPL, particularmente os *Solvers* MINOS 5.51 e SNOPT 7.5-1.2.

1.5 Estrutura da dissertação

No Capítulo 1, mostramos uma visão geral do trabalho por meio da introdução, motivação, objetivos gerais e específicos e a metodologia de pesquisa. No Capítulo 2 apresentamos a notação básica e a fundamentação teórica necessária para a compreensão do trabalho. No Capítulo 3 introduzimos formalmente as definições de η -eficiência, porte relativo, superdimensionamento, *Área Leque*, entre outras. Mostramos como todos esse conceitos podem ser obtidos essencialmente através de um *Lema Fundamental* utilizado na definição de rotações e translações de *DMUs*. No Capítulo 4, discutimos as metas de eficiência e porte relativo para um subconjunto Ψ de *DMUs*. No Capítulo 5 mostraremos uma aplicação prática do modelo, com dados de companhias aéreas. Por fim, no Capítulo 6 concluímos o trabalho com comentários gerais sobre os resultados obtidos e futuras direções de pesquisa.

Capítulo 2

Fundamentação teórica

Neste capítulo apresentamos a fundamentação teórica e alguns dos conceitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Abordamos o modelo clássico DEA CCR, o modelo de supereficiência desenvolvido em Anderson e Petersen [4] e o modelo de pesos comuns como descrito em Kao e Hung [24]. Estes conceitos nos ajudarão definir a η -eficiência e o *porte relativo* discutidos mais detalhadamente no próximo capítulo.

2.1 Data Envelopment Analysis - DEA

Como discutido em Cooper et al.(2006)[15], o cálculo da eficiência de organizações ou corporações em DEA faz uso da razão entre *inputs* e *outputs*.

$$eficiência = \frac{outputs}{inputs} \quad (2.1)$$

Para ilustrar esse conceito em sua versão mais simplificada, considere empresas que fabricam componentes eletrônicos, como mostrados na Tabela 2.1. Elas têm como único *input* o número de funcionários e como *output* seu o faturamento em milhares de reais. Então, calculando-se a razão *output/input*, obtém-se sua eficiência associada como observado na quarta coluna da Tabela 2.1.

Os dados da Tabela 2.1 mostram que a empresa **d** é a mais eficiente, pois apresenta a maior razão *output/input*. A *DMU* (empresa) **c** apresenta a menor eficiência. Todas as *DMUs* são ineficientes, com exceção a *DMU d*, que possui eficiência igual a 1. Ela é chamada de *benchmark* e representa uma *referência* para as demais. Observando-se o gráfico da Figura 2.1, a linha que passa pela origem e pela *DMU d* é chamada de Linha da Fronteira de Eficiência. Esta linha passa por pelo menos uma *DMU*, e todas as *DMUs*

$Empresa(DMU_j)$	$Funcionários$	$Faturamento$	$Faturamento/Funcionários$
a	560	410	0.73
b	300	210	0.70
c	556	345	0.62
d	230	230	1.00
e	352	241	0.68
f	350	220	0.63
g	114	67	0.59

Tabela 2.1: Dados das empresas **a-g** e seus respectivos *inputs* (funcionários), *outputs* (faturamento) e a razão *output/input*. Baseado em Cooper et. al. (2006) [15].

ineficientes estão localizadas abaixo desta linha. Verifica-se que para melhorar a eficiência de alguma *DMU* ineficiente, é necessário manter o faturamento constante e diminuir o número de funcionários ou manter o número de funcionários e aumentar o faturamento ou diminuir o número de funcionários e aumentar o faturamento simultaneamente.

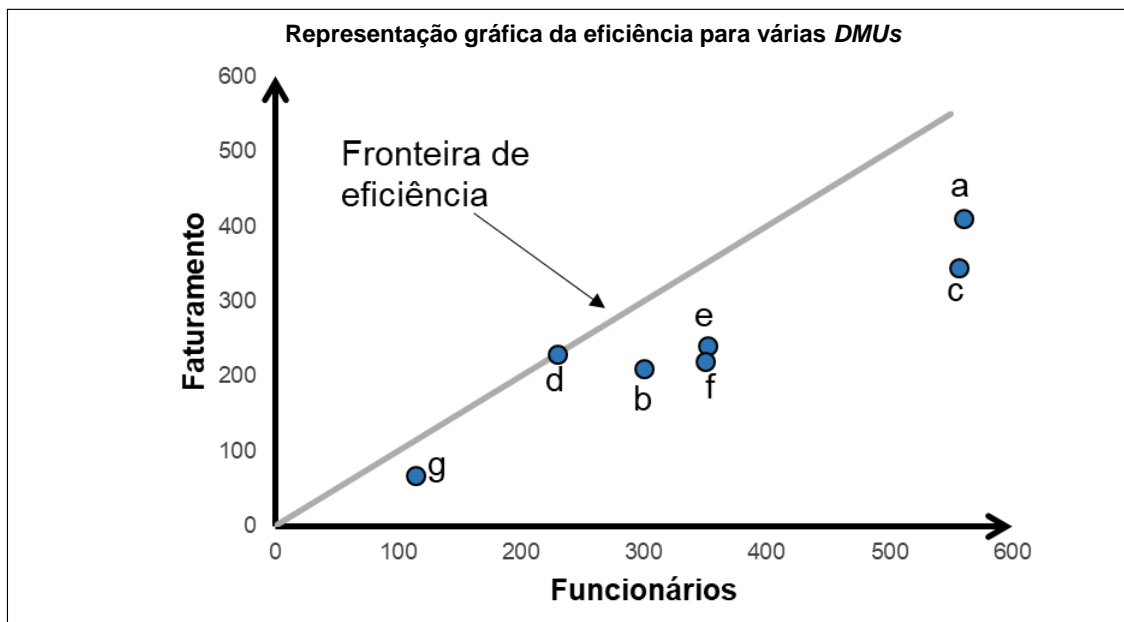


Figura 2.1: Representação da eficiência de cada *DMU* referente aos dados da Tabela 2.1.

Este modelo é viável apenas se temos um *input* e um *output*. O modelo DEA CCR, que será mostrado na próxima seção, permite que um ou mais *inputs* e *outputs* distintos sejam utilizados.

2.1.1 O modelo DEA CCR

O modelo DEA CCR desenvolvido por Charnes, Cooper e Rhodes [11] juntamente com o trabalho de Farrell [19], estabeleceram as bases necessárias para o surgimento da área de

Data Envelopment Analysis - DEA [10]. O trabalho de Charnes, Cooper e Rhodes [11] por exemplo, possui mais de 11.000 citações (Fonte: *Scopus*), e foi desenvolvido sobre questões levantadas em Farrel (1957) [19] ligadas ao desenvolvimento de métodos e modelos para avaliação de produtividade. O modelo DEA CCR nos permite a utilização de múltiplos *inputs* e *outputs* com pesos que são calculados de forma a maximizar a eficiência da *DMU* em análise. Considere um conjunto de n *DMUs* e uma matriz de *inputs* X e outra matriz de *outputs* Y com coordenadas X_{ij} e Y_{rj} , representando, respectivamente, o i -ésimo *input* (para $i = 1, \dots, m$) e o r -ésimo *output* (para $r = 1, \dots, s$) da *DMU* $_j$ (para $j = 1, \dots, n$). Dada uma *DMU* $_k$ qualquer, os *inputs* X_{ik} multiplicados por seus pesos v_i associados (para $i = 1, \dots, m$) e os *outputs* Y_{rk} multiplicados por seus pesos u_r associados (para $r = 1, \dots, s$) são chamados de *input virtual* e *output virtual* respectivamente:

$$\text{Input virtual da } DMU_k = v_1 \cdot X_{1k} + \dots + v_m \cdot X_{mk} \quad (2.2)$$

$$\text{Output virtual da } DMU_k = u_1 \cdot Y_{1k} + \dots + u_s \cdot Y_{sk} \quad (2.3)$$

Com base na Equação 2.1, o cálculo da eficiência da *DMU* $_k$ para este modelo é dado pela Equação 2.4 a seguir:

$$\text{Eficiência}(k) = \frac{\text{Output virtual da } DMU_k}{\text{Input virtual da } DMU_k} \quad (2.4)$$

Se fizermos $DMU_0 \equiv DMU_k$ para algum $k \in \{1, \dots, n\}$, temos o seguinte modelo fracionário DEA CCR orientado ao *input*, desenvolvido por Charnes et. al. [11]:

$$(FO) \quad e_0^* = \max \left(\frac{u_1 \cdot Y_{10} + u_2 \cdot Y_{20} + \dots + u_s \cdot Y_{s0}}{v_1 \cdot X_{10} + v_2 \cdot X_{20} + \dots + v_m \cdot X_{m0}} \right) \quad (2.5)$$

$$s.t. : \frac{u_1 \cdot Y_{1j} + u_2 \cdot Y_{2j} + \dots + u_s \cdot Y_{sj}}{v_1 \cdot X_{1j} + v_2 \cdot X_{2j} + \dots + v_m \cdot X_{mj}} \leq 1 \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

$$u_r, v_i \geq \epsilon > 0, \quad \forall r = 1, \dots, s \text{ e } i = 1, \dots, m. \quad (2.7)$$

Na modelagem acima, a função objetivo (FO) representada na Equação 2.5, determina a razão entre *output* virtual e *input* virtual associado à *DMU* $_0$ em observação. Os pesos v_i e u_r obtidos na solução do modelo indicam respectivamente a importância relativa do *input* i e *output* r no cálculo da eficiência e_0^* da *DMU* $_0$ em análise. A Equação 2.6 nos diz que as eficiências de cada *DMU* $_j$ devem ser no máximo iguais a 1. Finalmente, a Equação 2.7 indica que todos os pesos devem ser estritamente positivos. A constante $\epsilon > 0$ simboliza um número não-arquimediano muito pequeno para evitar valores indesejados de pesos iguais a *zero*.

Note que se (v^*, u^*) é uma solução ótima, então qualquer solução do tipo $(\alpha v^*, \alpha u^*)$

para $\alpha > 0$ será também solução ótima do modelo, ou seja, teremos sempre infinitas soluções ótimas. Ao fixarmos o *input* virtual da DMU_0 igual a 1, garantimos uma solução ótima sem multiplicidade e obtemos o seguinte modelo linear como mostrado nas Equações 2.8 a 2.11. Note que o conjunto de restrições continua linear e a função objetivo se torna linear já que possui denominador unitário.

$$e_0^* = \max \left(\sum_{r=1}^s u_r Y_{r0} \right) \quad (2.8)$$

$$s.t. : \sum_{i=1}^m v_i X_{i0} = 1, \quad (2.9)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.10)$$

$$u_r, v_i \geq \epsilon > 0, \quad \forall r = 1, \dots, s \text{ e } i = 1, \dots, m. \quad (2.11)$$

Por exemplo, se substituirmos os dados da Tabela 2.1, e considerarmos a $DMU_0 = \mathbf{d}$ teremos a seguinte modelagem:

$$e_0^* = \max (230.u_1) \quad (2.12)$$

$$s.t. : 230.v_1 = 1, \quad (2.13)$$

$$410.u_1 - 560.v_1 \leq 0, \quad (2.14)$$

$$210.u_1 - 300.v_1 \leq 0, \quad (2.15)$$

$$345.u_1 - 556.v_1 \leq 0, \quad (2.16)$$

$$230.u_1 - 230.v_1 \leq 0, \quad (2.17)$$

$$241.u_1 - 352.v_1 \leq 0, \quad (2.18)$$

$$220.u_1 - 350.v_1 \leq 0, \quad (2.19)$$

$$67.u_1 - 114.v_1 \leq 0, \quad (2.20)$$

$$u_1, v_1 \geq \epsilon > 0 \quad . \quad (2.21)$$

Consideremos agora a seguinte notação auxiliar. Suponha que a DMU_0 , em investigação, selecione os pesos (u_r^0, v_i^0) maximizando assim sua eficiência. Denotamos por $a_j^0 = \sum_{i=1}^m v_i^0 X_{ij}$ e $b_j^0 = \sum_{r=1}^s u_r^0 Y_{rj}$, respectivamente, os *inputs* e *outputs* virtuais da DMU_j associados à DMU_0 . Além disso, dizemos que $e_j^0 = b_j^0/a_j^0$ denota a *eficiência* da DMU_j associada à DMU_0 em observação. Dizemos que a DMU_0 é DEA-*eficiente* se $e_0^* = 1$, caso contrário, ela será DEA-*ineficiente*. Note que, ao representarmos um gráfico com coordenadas (a_j^0, b_j^0) (para $j = 1, \dots, n$), teremos o coeficiente angular de cada

DMU_j	X_{1j}	X_{2j}	Y_{1j}	Y_{2j}	a_j^0	b_j^0	e_j^0
DMU_1	35	45	56	69	1.00	0.88	0.88
DMU_2	21	32	45	78	0.71	0.71	1.00
DMU_3	96	52	31	47	1.16	0.49	0.42

Tabela 2.2: *Inputs* e *outputs* associados a 3 *DMUs* distintas. Os valores a_j^0 e b_j^0 indicam suas coordenadas e e_j^0 , suas respectivas eficiências.

semi-reta com origem no ponto $(0,0)$ representando suas eficiências associadas à DMU_0 em análise. Para ilustração, considere 3 *DMUs* com *inputs* e *outputs* como mostrado na Tabela 2.2.

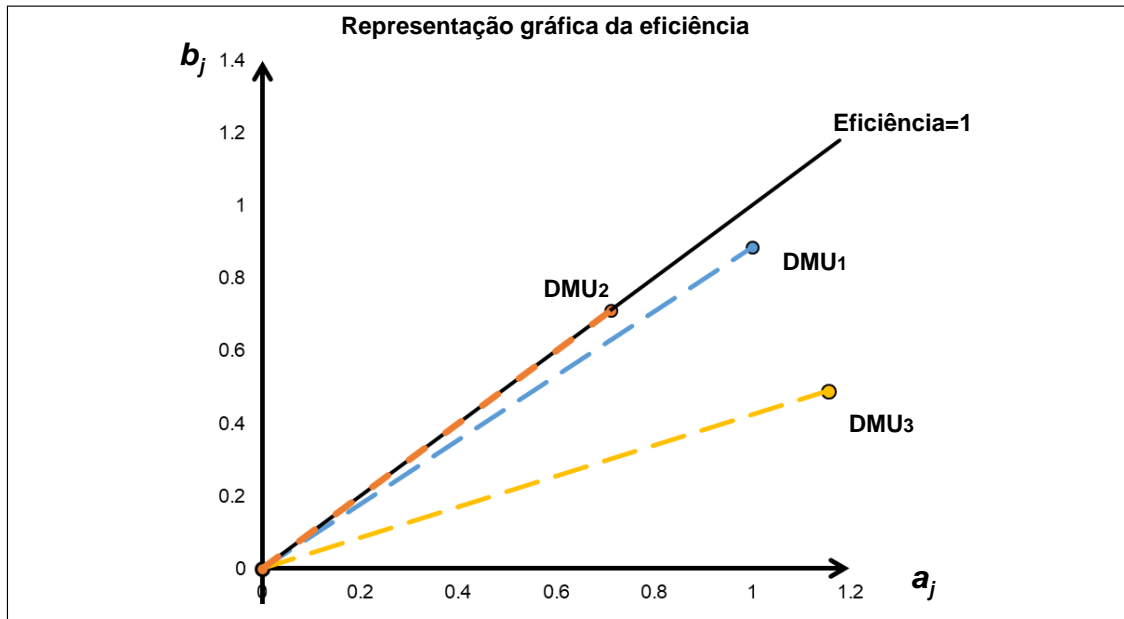


Figura 2.2: Representação das eficiências para as 3 *DMUs* fictícias mostradas da Tabela 2.2. A linha contínua, indicada em preto, representa a fronteira de eficiência.

A Figura 2.2 mostra as coordenadas (a_j, b_j) para $j = 1, 2$ e 3 . Nesta tabela, consideramos $DMU_0 \equiv DMU_1$ com coordenadas $(1.00, 0.88)$ (veja as Colunas “ a_j ” e “ b_j ” da Tabela 2.2), definindo a linha azul tracejada a partir do vetor $(0,0)$ de *inputs* e *outputs* virtuais. Já a DMU_2 , está sobre a fronteira de eficiência e possui coordenadas $(0.71, 0.71)$, conforme mostra a linha tracejada na cor laranja. Neste caso, os pesos utilizados para o cálculo de eficiência das *DMUs* 2 e 3 foram os mesmos utilizados na maximização da DMU_1 , ou seja, $e_2^0 \equiv e_2^1 = 1$, evidenciando assim a eficiência da DMU_2 mesmo neste caso. Por outro lado, a DMU_3 , com coordenadas $(1.16, 0.49)$, (linha amarela da Figura 2.2) tem a menor eficiência, igual a 0.42. Note que o Modelo DEA CCR não permite eficiências maiores que 1. Apesar disso, como veremos mais adiante, essa possibilidade pode ser explorada nos modelos de supereficiência visando o ranqueamento das *DMUs*

eficientes¹.

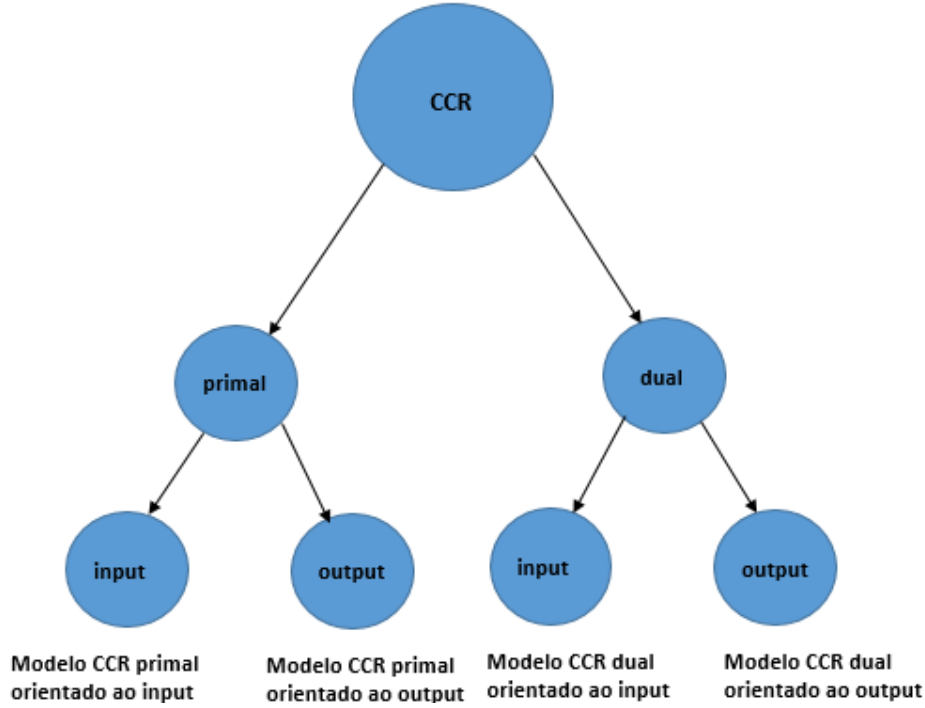


Figura 2.3: Variações do Modelo DEA CCR.

2.1.2 Variações do modelo DEA CCR

O modelo (2.8)-(2.11) apresentado anteriormente representa o modelo DEA CCR com orientação a *inputs*. Para simplificar nossa explanação, se fizermos $\epsilon = 0$ na desigualdade (2.11), teremos a seguinte formulação dual:

$$\theta_0^* = \min \theta_0 \quad (2.22)$$

$$s.t. : \sum_{j=1}^n \lambda_j X_{ij} \leq \theta_0 X_{i0}, \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (2.23)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_{rj} \geq Y_{r0}, \quad \forall r = 1, \dots, s. \quad (2.24)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.25)$$

Este modelo é também conhecido na literatura como modelo *envelado* (orientado a *inputs*). Nesta programação linear temos que $e_0^* = \theta_0^*$, significando que ambas as formulações podem ser utilizadas na determinação dos valores de eficiência. Note que, ao

¹Em nosso trabalho, exploramos também os modelos de supereficiência, combinados aos pesos comuns, na definição das η -eficiências.

fazermos $\theta_0 = 1$, $\lambda_0^* = 1$ e $\lambda_j^* = 0$ para $j \neq 0$ no modelo envelopado, teremos garantida a existência de uma solução dual viável. Dessa forma, temos que $\theta_0^* \leq 1$, representa a eficiência da DMU_0 em análise. Este processo pode ser repetido para cada $DMU_k \equiv DMU_0$, para $k = 1, \dots, n$. Se $\theta_k^* < 1$, a DMU_k será *ineficiente*, caso contrário, a DMU_k será *eficiente* ($\theta_k^* = 1$) e estará sobre a fronteira da região viável.

Analogamente, nas versões orientadas a *outputs*, temos o seguinte Modelo DEA CCR:

$$e_0^* = \min \left(\sum_{i=1}^m v_i X_{i0} \right) \quad (2.26)$$

$$s.t. : \sum_{r=1}^s u_r Y_{r0} = 1, \quad (2.27)$$

$$\sum_{i=1}^m v_i X_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.28)$$

$$u_r, v_i \geq 0, \quad \forall r = 1, \dots, s \text{ e } i = 1, \dots, m. \quad (2.29)$$

Seu correspondente dual, ou modelo DEA *envelopado* com orientação a *outputs* será dado por:

$$\phi_0^* = \max \phi_0 \quad (2.30)$$

$$s.t. : \sum_{j=1}^n \lambda_j X_{ij} \leq X_{i0}, \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (2.31)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j Y_{rj} \geq \phi_0 Y_{r0}, \quad \forall r = 1, \dots, s. \quad (2.32)$$

$$\lambda_j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.33)$$

A Figura 2.3 mostra um esquema com as possíveis variações do Modelo DEA CCR nas suas diferentes versões.

Uma DMU ineficiente pode se tornar eficiente através de sua projeção na fronteira da região viável. Nas orientações a *input*, pode-se aumentar a eficiência da DMU em questão através da redução proporcional de *inputs*, enquanto que nas versões orientadas a *outputs* buscamos um aumento proporcional dos *outputs*. Na Figura 2.4, ilustramos uma situação hipotética com 5 $DMUs$, 2 *inputs* e 2 *outputs* respectivamente. Na Figura 2.4.(a), o ponto $E = (X_{15}, X_{25})$ representa a posição correspondente aos *inputs* da DMU_5 , no interior da região delimitada por A, B, C e D respectivamente. Ao nos deslocarmos de E para E' , teremos uma redução proporcional de ambos os *inputs*, ou seja, teremos $E' = (\theta_5^* X_{15}, \theta_5^* X_{25})$. Analogamente, na Figura 2.4.(b), o ponto $\bar{E} = (Y_{15}, Y_{25})$ representa a

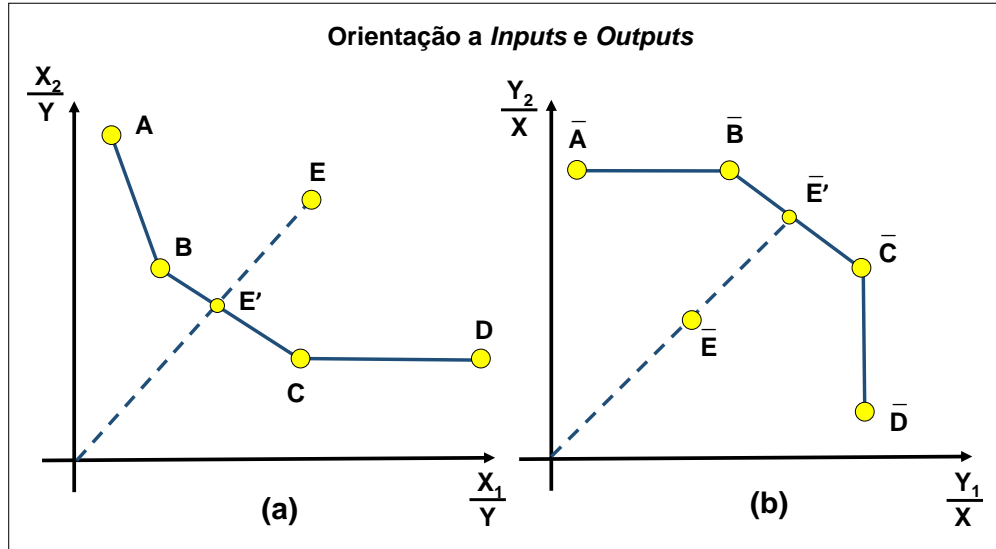


Figura 2.4: Modelos (a) orientado ao *Input* (b) orientado ao *Output*.

posição correspondente aos *outputs* da DMU_5 . Ao nos deslocarmos de \bar{E} para \bar{E}' , teremos um incremento proporcional de ambos *outputs*. Neste caso obtemos $\bar{E}' = (\phi_5^* Y_{15}, \phi_5^* Y_{25})$. De maneira geral, se $\theta_k^* = 1$ (na orientação a *inputs*), ou $\phi_k^* = 1$ (na orientação a *outputs*) para alguma DMU_k , significa que já estamos sobre a fronteira de eficiência.

Embora não seja nosso objetivo aqui explorar as diferentes versões do modelo DEA CCR, o teorema seguinte mostra a correspondência existente entre as duas versões.

Teorema: Seja (θ^*, λ^*) uma solução ótima para o modelo DEA envelopado com orientação a *inputs*. Então $(1/\theta^*, \lambda^*/\theta^*) = (\phi^*, \hat{\lambda}^*)$ será ótima para seu modelo envelopado correspondente com orientação a *outputs*. Analogamente, se $(\phi^*, \hat{\lambda}^*)$ é ótima para o modelo envelopado com orientação a *outputs*, então $(1/\phi^*, \hat{\lambda}^*/\phi^*) = (\theta^*, \lambda^*)$ será ótima para o modelo envelopado correspondente com orientação a *inputs*. \square

Para maiores detalhes, sobre a teoria clássica de DEA, vide [10] ou [15], por exemplo.

Comentários Adicionais: Além do Modelo CCR, há também o Modelo BCC como proposto por Banker, Charnes e Cooper (1984) [7] nas suas formas primal e dual respectivamente, podendo ser orientado a *input* ou *output*. A principal diferença entre o Modelo CCR e o BCC é que no primeiro, presume-se que haja retorno constante de escala entre insumos e produtos, enquanto que no segundo modelo, os retornos são variáveis em escala. Em linhas gerais, dizemos que um modelo possui *retornos constantes de escala*, se alterações nos *inputs* provocam alterações proporcionais dos *outputs*. Já no modelo BCC, por exemplo, as escalas podem ser crescentes ou decrescentes. Em Cooper et al. (2006) [15], os autores trazem outros modelos alternativos, como o Modelo Aditivo e o SBM

(*Slacks-Based Measure of Efficiency*- Medidas de eficiência baseadas em folgas), entre outros. Aqui, em nosso trabalho, nos dedicamos particularmente ao Modelo DEA CCR com orientação aos *inputs*.

2.1.3 O Conjunto de Possibilidades de Produção

Nesta seção descrevemos brevemente algumas das propriedades a serem satisfeitas em um sistema produtivo. Inicialmente, para simplificar a notação, considere as matrizes $X \equiv [X_{ij}]_{m \times n}$ e $Y \equiv [Y_{rj}]_{s \times n}$ como definidas anteriormente. Assim:

$$X_j = \begin{pmatrix} X_{1j} \\ X_{2j} \\ \vdots \\ X_{mj} \end{pmatrix} \quad e \quad Y_j = \begin{pmatrix} Y_{1j} \\ Y_{2j} \\ \vdots \\ Y_{sj} \end{pmatrix} \quad \text{para } j = 1, \dots, n. \quad (2.34)$$

onde X_j, Y_j representam, respectivamente, todos os *inputs* e todos os *outputs* produzidos pela DMU_j . Com base nos pares (X_j, Y_j) (para $j = 1, \dots, n$), deseja-se estabelecer novas possibilidades para o sistema produtivo. Por exemplo, se introduzimos uma DMU_t genérica, como saber se *inputs* X_t podem produzir *outputs* Y_t ? Formalmente, definimos o seguinte conjunto:

Definição: O *Conjunto de Possibilidades de Produção* (do inglês *Production Possibility Set* - PPS) é o conjunto $T = \{(X_t, Y_t) \mid X_t \text{ pode produzir } Y_t\}$, conhecido também como *Conjunto de Tecnologia*.

A definição do conjunto de tecnologia T deve satisfazer regras precisas (postulados) e podem variar sensivelmente em função de certas características do sistema produtivo. Por exemplo, se assumimos retornos constantes de escala, teremos os seguintes postulados na definição do conjunto T :

Postulado 1: (Inclusão de Observações). Todos os pares observados (X_j, Y_j) , para $j = 1, \dots, n$, pertencem a T .

Postulado 2: (Convexidade). Se $(X_t, Y_t) \in T$, e $(X_u, Y_u) \in T$, então $(\lambda X_t + (1 - \lambda)X_u, \lambda Y_t + (1 - \lambda)Y_u) \in T$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Postulado 3: (Monotonicidade). Se $(X_t, Y_t) \in T$, e $X_u \geq X_t$, $Y_u \leq Y_t$, então $(X_u, Y_u) \in T$.

Postulado 4: (Raio ilimitado). Se $(X_t, Y_t) \in T$, então $(\lambda X_t, \lambda Y_t) \in T$ para todo

$\lambda \geq 0$.

Postulado 5: (Extrapolação Mínima). Se um conjunto de possibilidades de produção T' satisfaz os postulados 1, 2, 3 e 4, então $T \subset T'$.

O Postulado 1 estabelece, em outras palavras, que todos os pontos, ou pelo menos um subconjunto dos n pontos conhecidos, devem definir a fronteira do *PPS*. Os demais pontos, não pertencentes a fronteira, deverão pertencer ao interior do *PPS*. A convexidade e monotonicidade (Postulados 2 e 3), definem características essenciais e devem estar presentes em qualquer sistema produtivo. No Postulado 4 presume-se retornos constantes de escala. Ele não se aplica por exemplo a sistemas produtivos com retornos variáveis de escala, como ocorre no modelo BCC mencionado acima. Finalmente, o Postulado 5 estabelece que qualquer outro sistema produtivo T deverá estar contido em T' , definido pelos postulados 1, 2, 3 e 4, respectivamente.

Assim, com base nos Postulados 1–4 acima, podemos definir o *Conjunto de Tecnologia* de maneira mais precisa como a seguir:

$$T = \{(X_t, Y_t) | X_t \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, Y_t \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \text{ e } \lambda_j \geq 0 \text{ p/ } j = 1, \dots, n\}. \quad (2.35)$$

O exemplo da Figura 2.1, ilustra o *Conjunto de Tecnologia* associado a 7 *DMUs* distintas com um único *input* e um único *output*. Neste caso, note que todos os pontos na interseção do primeiro quadrante (positivo) com o semi-espaco abaixo da fronteira de eficiência unitária, satisfazem os postulados acima.

Finalmente, note a semelhança existente entre as formulações envelopadas (orientadas a *input* e *output*, respectivamente) com o conjunto T . Se (X_t, Y_t) está no interior do *Conjunto de Tecnologia*, na orientação a *inputs*, apenas os *inputs* devem ser decrementados (vide Equação (2.23)). Ao contrário, na orientação a *outputs*, apenas os *outputs* são incrementados (vide Equação 2.32). Vários trabalhos da literatura utilizam funções de distância direcionais (do inglês, *Directional Distance Function* - *DDF*) e consideram a variação simultânea de *inputs* e *inputs* visando a fronteira de eficiência. Para maiores detalhes sobre o tema, vide por exemplo Aparicio *et. al.* [5] e Briec *et. al.* [9].

2.2 Modelos de Supereficiência

Andersen e Petersen [4] desenvolveram uma nova forma de ranquear as *DMUs* eficientes. Eles criaram um modelo de supereficiência, denominado aqui *ModeloAP* (Andersen e

Petersen), que permite que a DMU_0 em questão apresente uma eficiência maior que a unidade. Neste trabalho, eles consideram o Modelo DEA BCC, porém seus resultados se estendem naturalmente ao Modelo DEA CCR. O modelo consiste em se retirar a DMU_0 , em observação, do conjunto de restrições da Equação 2.10. Isso permite que sua eficiência não fique restrita a um valor menor ou igual a 1. Formalmente, o *ModeloAP* pode ser descrito como a seguir:

$$e_0^* = \max \left(\sum_{r=1}^s u_r Y_{r0} \right) \quad (2.36)$$

$$s.t. : \sum_{i=1}^m v_i X_{i0} = 1, \quad (2.37)$$

$$\sum_{r=1, j \neq 0}^s u_r Y_{rj} - \sum_{i=1, j \neq 0}^m v_i X_{ij} \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \text{ com } j \neq 0 \quad (2.38)$$

$$u_r, v_i \geq \epsilon > 0, \quad \forall r = 1, \dots, s \text{ e } i = 1, \dots, m. \quad (2.39)$$

No trabalho de Thrall [42], o autor comenta que o *ModeloAP* pode apresentar inviabilidade e instabilidade quando algum *input* é próximo de zero, e Zhu [45], mostra que esta inviabilidade pode ocorrer, se e somente, existe algum valor nulo presente nos dados de entrada. Adicionalmente, o *ModeloAP* pode produzir valores de supereficiência muito elevados. Para evitar esta situação, Sueyoshi (1999) [40] sugere limites específicos nos pesos que limitam o valor máximo de supereficiência. Em nosso trabalho, por não apresentar problemas nas instâncias avaliadas, consideramos apenas o *ModeloAP*. Porém, não especificamos nenhum modelo particular para lidar com supereficiências e qualquer método da literatura pode ser considerado. Outras alternativas para se calcular supereficiência abordando diversos aspectos podem ser encontradas em Mehrabian *et. al.* [30], Li *et. al.* [28] e Tone [43].

Para a ilustração do modelo de supereficiência, considere os dados fictícios da Tabela 2.3. Nestes dados, temos 5 *DMUs* e cada uma possui 3 *inputs* e 2 *outputs*. Neste exemplo, note que a DMU_2 e a DMU_3 são consideradas eficientes (veja Coluna “Eficiência DEA CCR” da Tabela 2.3) e as demais são ineficientes. Ao se calcular suas supereficiências, vemos que a DMU_2 tem supereficiência maior do que a DMU_3 (veja Coluna “Supereficiência AP”). Sendo assim, ela pode ser considerada a “mais eficiente” de todas do conjunto. Note ainda que as eficiências das *DMUs* ineficientes permanecem inalteradas.

DMU_j	X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}	Y_{1j}	Y_{2j}	<i>Eficiência</i> <i>DEA CCR</i>	<i>Supereficiência</i> <i>AP</i>
DMU_1	12	61	14	5	13	0.61	0.61
DMU_2	14	27	17	6	42	1.00	2.06
DMU_3	16	41	11	11	31	1.00	1.53
DMU_4	26	50	14	6	25	0.64	0.64
DMU_5	22	38	12	10	21	0.98	0.98

Tabela 2.3: Dados fictícios para ilustração do cálculo da supereficiência AP

2.2.1 Conjunto de Tecnologia e Supereficiência

Nos modelos de supereficiência, o Conjunto de Tecnologia T_k associado a uma DMU_k , pode ser definido da seguinte forma:

$$T_k = \{(X_t, Y_t) | X_t \geq \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j X_j, Y_t \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n \lambda_j Y_j \text{ e } \lambda_j \geq 0 \text{ p/ } j = 1, \dots, n \text{ e } j \neq k\}. \quad (2.40)$$

Note que o ponto (X_k, Y_k) é retirado do conjunto de Tecnologia T . Neste caso, o valor da supereficiência associado à DMU_k , representa a distância (obtida por uma dada métrica) de (X_k, Y_k) a algum ponto sobre a fronteira de T_k .

Para ilustrar essa situação, observe o exemplo da Figura 2.5, onde temos um conjunto de conjunto de tecnologia T associado a um problema com um único *input* X e um único *output* Y . Suponha que tenhamos 3 *DMUs* eficientes A, B e C respectivamente. O conjunto T , neste caso, será definido por todos os pontos contidos no poliedro convexo determinado por $WABCZ$.

Dessa forma, se retiramos o ponto B , teremos um novo conjunto de tecnologia T_B associado ao poliedro convexo definido por $WACZ$. Neste caso, a medida de supereficiência irá expressar a distância de B a seu conjunto T_B , utilizando-se, a princípio, a orientação a *inputs* ou *outputs*. Por exemplo, na orientação a *inputs*, ao nos deslocarmos de B para B' teremos um incremento θ^* de $B = (X_B, Y_B)$ até que o novo ponto $B' = (\theta^* X_B, Y_B)$ seja obtido. Um valor $\theta^* > 1$ irá representar neste caso o valor da supereficiência obtida na orientação a *inputs*. Em outras palavras, teremos uma indicação do quanto o *input* X_B pode ser piorado (incrementado), de forma a garantir eficiência sobre a nova fronteira de T_B .

Analogamente, se nos deslocamos de $B = (X_B, Y_B)$ para $B''' = (X_B, \phi^* Y_B)$, teremos um decremento $\phi^* = 1/\theta^* < 1$ representando o valor da supereficiência na orientação a *outputs*. Neste caso, teremos uma indicação do quanto o *output* Y_B pode ser piorado

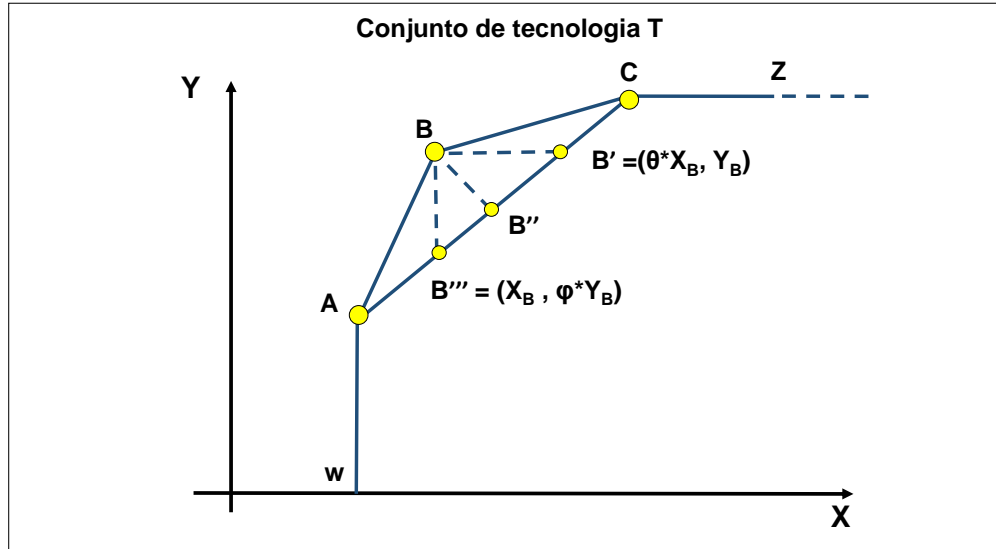


Figura 2.5: Representação do Conjunto de Tecnologia T , definido pelo poliedro convexo $WABCZ$; e do Conjunto de Tecnologia T_B , definido pelo poliedro convexo $WACZ$.

(decrementado), de forma a garantir eficiência sobre a nova fronteira de T_B .

Podemos encontrar na literatura formas distintas de avaliação de supereficiência combinando-se a atualização simultânea de *inputs* e *outputs*, como é o caso por exemplo de técnicas utilizando Funções de Distância Direcionais ou *DDFs* (do inglês *Distance Directional Functions*). Note na Figura 2.5 que podemos nos deslocar por exemplo de $B = (X_B, Y_B)$ para $B'' = (\bar{\theta}^* X_B, \bar{\phi}^* Y_B)$, promovendo simultaneamente uma redução de *outputs* e um incremento de *inputs*. Para maiores detalhes sobre *DDF* e medidas de supereficiência, vide por exemplo, Chen *et.al* [13], Jahanshahloo *et.al* [22] e Jin-Xiao Chen *et.al* [12].

Note finalmente que nenhum dos deslocamentos acima deve ser de fato implementado, já que, neste caso, estaríamos piorando uma solução eficiente sobre a fronteira de T . Em outras palavras, estaríamos nos deslocando para o interior do conjunto T . Em função disso, encontramos inúmeros trabalhos na literatura onde os valores de supereficiência são utilizados apenas na classificação de *DMUs* eficientes e não para a definição de metas. Diferentemente, neste trabalho (vide Capítulo 3), propomos uma nova abordagem para supereficiência com pesos comuns onde o Conjunto de Tecnologia T está contido dentro de um novo Conjunto de Tecnologia \bar{T} idealizado (estendido). Dessa forma, esperamos que dois objetivos principais sejam alcançados. Primeiramente, propomos um *ranking* completo de *DMUs*² onde todas eficiências são menores ou iguais a 1 (vide Capítulo 3). Posteriormente, baseado em decisões gerenciais, mostramos como utilizar um novo

²Informalmente falando, dizemos que um *ranking* é *completo* se observamos uma discriminação das eficiências de todas ou quase todas *DMUs*

conjunto \bar{T} (normalizado) na definição de metas para *DMUs* eficientes e ineficientes (vide Capítulo 4).

2.3 Modelos de Pesos Comuns

As *DMUs* nos Modelos DEA CCR selecionam individualmente os pesos mais vantajosos de forma a maximizar suas respectivas eficiências. Como comentado no Capítulo 1, isto pode dificultar uma comparação mais igualitária entre as *DMUs*. Portanto, uma maneira mais “justa” de se evitar tal problema é através de pesos que sejam comuns a todas as *DMUs*. Vários artigos a respeito do tema podem ser encontrados na literatura (Doyle [17], Friedman & Sinuany- Stern [21], Kao e Hung [24], Roll e Golany [32]).

Como veremos, na abordagem apresentada por Kao e Hung [24], a ideia é determinar um conjunto de pesos comuns que produza valores de eficiência próximos a metas pré-estabelecidas. Neste trabalho, nos voltamos às ideias descritas em Kao e Hung [24] e Yu [44]. Depois de resolver o Modelo DEA CCR para cada DMU_j , os autores em [24] constroem um vetor $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ de eficiências DEA e encontram um conjunto ótimo de pesos (\bar{u}, \bar{v}) no cálculo de um novo vetor $e(\bar{u}, \bar{v}) = (e_1(\bar{u}, \bar{v}), \dots, e_n(\bar{u}, \bar{v}))$ com eficiências de pesos comuns, denotado aqui por vetor de ℓ_p -eficiências. Dessa forma, espera-se que a distância (utilizando alguma norma- ℓ_p) entre $e(\bar{u}, \bar{v})$ e a solução alvo e^* seja minimizada. Obviamente, neste caso, teremos $e_j(\bar{u}, \bar{v}) \leq e_j^*$, para $j = 1, \dots, n$. Portanto, a partir das ideias desenvolvidas em Yu[44], os autores em Kao e Hung [24] apresentam um modelo para o cálculo dessa distância induzida pela norma- ℓ_p , para algum $p \geq 1$. Formalmente tem-se:

$$\bar{D} = \min \left(\sum_{j=1}^n (e_j^* - e_j(u, v))^p \right)^{1/p} \quad (2.41)$$

$$s.t. : \quad e_j(u, v) = \frac{\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i X_{ij}} \leq e_j^*, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.42)$$

$$u_r, v_i \geq \epsilon > 0, \quad \forall r = 1, \dots, s \text{ e } i = 1, \dots, m. \quad (2.43)$$

A Função Objetivo (2.41) minimiza a distância entre as eficiências DEA e as eficiências de pesos comuns. A Desigualdade (2.42) garante que as eficiências de pesos comuns sejam sempre menores ou iguais a 1. A Restrição (2.43) garante que todos os pesos calculados sejam maiores que um número não-arquimediano muito pequeno $\epsilon > 0$ para evitar pesos indesejáveis iguais a *zero*.

DMU_j	<i>Eficiência</i> <i>DEA- CCR</i>	<i>Eficiência</i> <i>pesos comuns</i>
DMU_1	0.61	0.30
DMU_2	1.00	1.00
DMU_3	1.00	1.00
DMU_4	0.64	0.50
DMU_5	0.98	0.90

Tabela 2.4: Resultado computacional da Eficiência DEA-CCR (primeira etapa do modelo de Kao e Hung) e Eficiência de Pesos comuns, com base nos dados da Tabela 2.3

Neste modelo, todos os desvios são penalizados igualmente para $p = 1$, o que parece ser uma escolha natural em várias aplicações. Note que, conforme p aumenta, maiores penalizações são dadas para desvios maiores. Como discutido em [24], soluções ótimas de Pareto³ são obtidas para $1 \leq p < \infty$. Para $p = 1$ e $p = \infty$, a solução ótima obtida pode não ser única, o que, em nosso caso, pode causar dificuldades nas avaliações de porte e eficiência. Como veremos mais adiante, um conflito poderia ocorrer, já que duas ou mais soluções ótimas estariam associadas a duas ou mais medidas de eficiência (respectivamente, medidas de porte). Dessa forma, a distância euclidiana, obtida para $p = 2$, nos garante simultaneamente unicidade e ótimo de Pareto, o que é crucial para uma definição consistente de porte relativo. Além disso, para $p = 2$, os desvios individuais das ℓ_2 -eficiências para suas correspondentes eficiências DEA têm a menor variância e é a melhor escolha do ponto de vista estatístico [24].

Para exemplificarmos o modelo de Kao e Hung [24], considere novamente os dados da Tabela 2.3. Os resultados são detalhados na Tabela 2.4 para $p = 2$ e mostram as eficiências DEA e as eficiências de pesos comuns para cada DMU . Utilizamos a Linguagem *AMPL* e o *solver* MINOS 5.51. Em nosso exemplo, para $\epsilon = 10^{-7}$, obtivemos uma distância entre e_j^* e $e(\bar{u}, \bar{v})$ igual a 0.117204. Note ainda que as eficiências de pesos comuns são menores ou iguais às eficiências DEA. As DMU_2 e DMU_3 permanecem eficientes, porém observamos uma redução das eficiências das demais $DMUs$. Os pesos comuns determinados foram $\bar{v}_1 = 0.0001$, $\bar{v}_2 = 51.8668$, $\bar{v}_3 = 23.7425$, $\bar{u}_1 = 160.721$ e $\bar{u}_2 = 19.9929$, respectivamente.

2.3.1 Não-convexidade do modelo de Kao e Hung [24]

No modelo de Kao e Hung [24], os autores ressaltam que seu modelo pode ser resolvido satisfatoriamente por pacotes de Programação Não-Linear - PNL, o que realmente pôde ser verificado em nossos experimentos. Entretanto, mostramos que o modelo utilizado em

³Dizemos que uma solução é Pareto eficiente, se é impossível fazer qualquer melhoria individualmente sem que pelo menos um indivíduo piore para qualquer alocação de recursos.

Kao e Hung [24] é na verdade não-convexo e só pode ser resolvido de maneira exata através de técnicas de otimização global, fato este não mencionado pelos autores. Isto significa que vários mínimos locais podem ser obtidos e uma atenção especial deve ser dada na seleção do *solver* de PNL utilizado. Para comprovar esta afirmação, considere o seguinte *Problema da Soma de Razões Quadráticas* - PSRQ, como apresentado em Benson [8]:

$$\min \sum_{k=1}^p \frac{\alpha_k(x)}{\beta_k(x)} \quad \text{para } x \in X \quad (2.44)$$

onde $p \geq 2$, $\alpha_k : \Re^n \leftarrow \Re$ é finita e convexa, $\beta_k : \Re^n \leftarrow \Re$ é finita e côncava para $k = 1, \dots, p$ e X é um conjunto compacto⁴ não vazio em \Re^n . Além disso, $\alpha_k(x) \geq 0$ e $\beta_k(x) \geq 0$ para todo $x \in X$ e $k = 1, \dots, p$. Como provado em Schaible [33], este problema é não-convexo mesmo quando X é um poliedro, $p = 2$, $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\beta_1(x)$ são funções afins e $\beta_2(x)$ é constante.

Note que o modelo de Kao e Hung [24], para $p = 2$, pode ser reescrito seguinte forma:

$$\bar{D} = \min \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{e_j^* \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} - \sum_{r=1}^s u_r Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i X_{ij}} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (2.45)$$

$$s.t. : \quad \sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} \leq e_j^* \sum_{i=1}^m v_i X_{ij}, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.46)$$

$$u_r, v_i \geq \epsilon > 0, \quad \forall r = 1, \dots, s \text{ e } i = 1, \dots, m. \quad (2.47)$$

Agora, se assumirmos que X_j e Y_j representam vetores coluna e fizermos $u^T = (u_1, \dots, u_s)^T$ e $v^T = (v_1, \dots, v_m)^T$ então obtemos:

$$\bar{D} = \min \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{e_j^*(v^T X_j) - u^T Y_j}{v^T X_j} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (2.48)$$

$$s.t. : \quad u^T Y_j \leq e_j^*(v^T X_j), \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.49)$$

$$u^T, v^T \geq \epsilon > 0, \quad \forall u^T \in \Re^{1 \times s} \text{ e } v^T \in \Re^{1 \times m}. \quad (2.50)$$

⁴Dizemos que um conjunto X é compacto, se e somente se, X for fechado e limitado.

onde $X_j \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ e $Y_j \in \mathbb{R}^{s \times 1}$. Assim:

$$\bar{D} = \min \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{(v^T u^T) \begin{pmatrix} e_j^* X_j \\ -Y_j \end{pmatrix}}{(v^T u^T) \begin{pmatrix} X_j \\ 0 \end{pmatrix}} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (2.51)$$

$$s.t. : \quad (v^T u^T) \begin{pmatrix} e_j^* X_j \\ -Y_j \end{pmatrix} \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.52)$$

$$u^T, v^T \geq \epsilon > 0, \quad \text{for } u^T \in \mathbb{R}^{1 \times s} \text{ e } v^T \in \mathbb{R}^{1 \times m}. \quad (2.53)$$

Se fizermos $x^T = (v^T, u^T)$ e $a_j = \begin{pmatrix} e_j^* X_j \\ -Y_j \end{pmatrix}$ e $b_j = \begin{pmatrix} X_j \\ 0 \end{pmatrix}$ para $j = 1, \dots, n$, segue que:

$$\bar{D} = \min \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{x^T a_j}{x^T b_j} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (2.54)$$

$$s.t. : \quad x^T a_j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.55)$$

$$x^T \geq \epsilon > 0, \quad \text{for } u^T \in \mathbb{R}^{1 \times s} \text{ e } v^T \in \mathbb{R}^{1 \times m}. \quad (2.56)$$

Finalmente obtemos:

$$\bar{D} = \min \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{x^T A_j x}{x^T B_j x} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (2.57)$$

$$s.t. : \quad a_j^T x \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (2.58)$$

$$x \geq \epsilon > 0, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^{n \times 1}. \quad (2.59)$$

onde $A_j = a_j^T a_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_j = b_j^T b_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Assim, ao fazermos $\alpha_j(x) = x^T A_j x$, $\beta_j(x) = x^T B_j x$ e $X = \{x | a^T x \geq 0 \text{ e } x^T \geq \epsilon > 0\}$ obtemos (2.44) com funções $\alpha_j(x), \beta_j(x)$ convexas. Dessa forma, de acordo com Schaible [33], constatamos facilmente do *PSRQ* acima que o modelo não-linear apresentado em Kao e Hung [24] é não-convexo.

Em nosso trabalho, denotaremos por *ModeloSRQ*, o modelo da Soma de Razões Quadráticas de Kao e Hung [24].

Capítulo 3

Porte Relativo e η -eficiência

Neste capítulo, exibimos uma definição de porte mais precisa e introduzimos formalmente o conceito de *porte relativo* com base em um subconjunto $M' \subseteq M$ de *inputs* e *outputs* virtuais. Na sequência, com base nas ideias desenvolvidas em Kao e Hung [24] e Carvalho [16], apresentamos um modelo combinando supereficiências com pesos comuns, definidos sobre uma Tecnologia \bar{T} estendida, seguido de movimentos de rotação e translação de *DMUs*. Dessa forma, determinamos um *ranking* completo de eficiências (as η -eficiências), exibindo, paralelamente, um procedimento para definição de *porte relativo*. Obtemos então a *Área Leque*, região onde medidas de porte e η -eficiência são menores ou iguais a *um*.

3.1 Considerações iniciais e a definição de M'

Inicialmente, apresentamos uma primeira intuição sobre o conceito de *porte relativo*. Para isso, consideramos uma representação conjunta bidimensional qualquer (a_j, b_j) da *DMU_j* para algum $j \in \{1, \dots, n\}$ denotando, respectivamente, os *inputs* e *outputs* virtuais. Diferentemente da representação bidimensional de Costa *et al.* [18], nossos *input* e *output* virtuais são calculados por meio de um conjunto de pesos comuns, por exemplo (\bar{u}, \bar{v}) . Dessa forma, esperamos obter coordenadas $a_j = K_j \cdot \sum_{i=1}^m \bar{v}_i X_{ij}$ e $b_j = K_j \cdot \sum_{r=1}^s \bar{u}_r Y_{rj}$ para alguma constante $K_j > 0$, de modo que (a_j, b_j) seja suficiente para determinar a eficiência $e_j = b_j/a_j$ com pesos comuns e o *porte relativo* da *DMU_j*. Essencialmente, a ideia é relacionar a definição de *porte relativo* com alguma métrica induzida por uma norma- ℓ_q para algum $1 \leq q < \infty$, entre as coordenadas (a_j, b_j) e o vetor nulo $(0, 0)$ dos *inputs* e *outputs* virtuais. Mais precisamente, queremos determinar K_j e os valores $\|(a_j, b_j)\|_q = ((a_j)^q + (b_j)^q)^{1/q}$ para expressar o *porte relativo* da *DMU_j*.

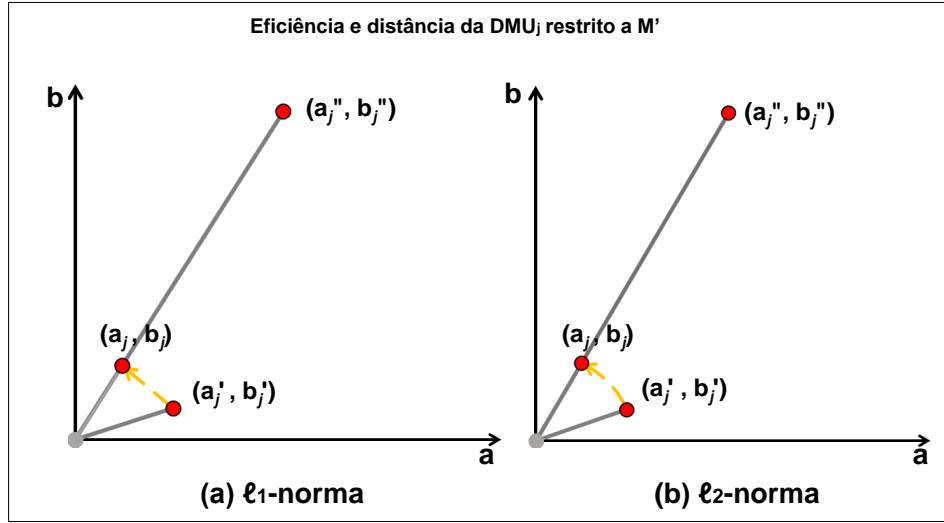


Figura 3.1: Assumimos $M' \subseteq M$. As coordenadas (a''_j, b''_j) são *representativas* de M , as coordenadas (a'_j, b'_j) são *restritas a M'* e as coordenadas (a_j, b_j) são *representativas* de M' . Se $M' = M$ então (a_j, b_j) , (a'_j, b'_j) e (a''_j, b''_j) são idênticos. Produzimos a sequência (a''_j, b''_j) , (a'_j, b'_j) e (a_j, b_j) . Em (a), temos uma seta direta de -45° entre (a'_j, b'_j) e (a_j, b_j) . Em (b), temos um arco direcionado entre (a'_j, b'_j) e (a_j, b_j) .

Primeiramente, assumamos $M = I \cup O$, o conjunto I dos m *inputs* e o conjunto O dos s *outputs* compartilhados por todos as n *DMUs*. Além disso, considere um subconjunto não-vazio de *inputs* e *outputs* $M' = I' \cup O'$ a ser utilizado na definição do *porte relativo*, onde $I' \subseteq I$ e $O' \subseteq O$. A escolha dos subconjuntos I' e O' depende de cada aplicação particular e será ilustrada posteriormente.

Assim, dadas as coordenadas (a_j, b_j) com um conjunto de pesos comuns (\bar{u}, \bar{v}) e um subconjunto $M' \subseteq M$ dos *inputs* e/ou *outputs* selecionados, dizemos que $a'_j = \sum_{i \in I'} \bar{v}_i X_{ij}$ e $b'_j = \sum_{r \in O'} \bar{u}_r Y_{rj}$ denotam, respectivamente, os *inputs* e *outputs* virtuais *restritos a M'* . Idealmente, gostaríamos de considerar apenas as coordenadas (a'_j, b'_j) na definição de *porte relativo*. Para nossos propósitos, a distância entre (a'_j, b'_j) e $(0, 0)$ é apropriada para expressar o *porte relativo* da *DMU_j restrito a M'* . Contudo, teríamos neste caso $e_j \neq e'_j$. Apesar disso, desde que a constante $K_j > 0$ utilizada na definição de (a_j, b_j) não afete a eficiência da *DMU_j*, podemos selecionar K_j de forma que a distância das coordenadas (a_j, b_j) e (a'_j, b'_j) em relação ao vetor nulo $(0, 0)$ sejam iguais. Para isto, podemos introduzir um novo ponto auxiliar (a''_j, b''_j) , de modo que $a''_j = \sum_{i=1}^m \bar{v}_i X_{ij}$ e $b''_j = \sum_{r=1}^s \bar{u}_r Y_{rj}$. Note que, $e''_j = b''_j/a''_j = e_j$. Agora, se considerarmos alguma norma- ℓ_q para algum $1 \leq q < \infty$, esperamos que: $K_j \|(a''_j, b''_j)\|_q = \|(a'_j, b'_j)\|_q \Rightarrow K_j \cdot ((a''_j)^q + (b''_j)^q)^{1/q} = ((a'_j)^q + (b'_j)^q)^{1/q}$.

Assim sendo, podemos obter novas coordenadas (a_j, b_j) onde:

$$a_j = K_j \cdot a_j'' \quad e \quad b_j = K_j \cdot b_j'' \quad com \quad K_j = \left(\frac{(a_j')^q + (b_j')^q}{(a_j'')^q + (b_j'')^q} \right)^{1/q}. \quad (3.1)$$

Portanto, dadas as coordenadas (a_j'', b_j'') , (a_j', b_j') e (a_j, b_j) como acima, dizemos que (a_j'', b_j'') é *representativo de M*, (a_j', b_j') é *restrito a M'* e (a_j, b_j) é *representativo de M'*. Observe que as coordenadas (a_j, b_j) expressam a eficiência e a distância da DMU_j (*restrito a M'*) ao vetor nulo $(0, 0)$ de *inputs* e *outputs* virtuais. Na Figura 3.1, representamos esta situação para $q = 1$ e $q = 2$.

3.2 Modelo SRQS - Soma de Razões Quadráticas com Supereficiência

Outro inconveniente pode surgir na busca por uma definição adequada de *porte relativo*. Se todos os valores de eficiência forem limitados à unidade (como ocorre no DEA CCR ou no *ModeloSRQ* de Kao e Hung), teríamos sempre $b_j \leq a_j$ na representação bidimensional conjunta dos *inputs* e *outputs* virtuais. O problema pode surgir para dados com *inputs* virtuais a_j pequenos ou muito pequenos, produzindo coordenadas (a_j, b_j) próximas ao vetor nulo $(0, 0)$, independentemente da quantidade de *outputs* produzida pela DMU_j .

Para melhor ilustrar este fenômeno, considere o cenário com uma DMU_j com *outputs* Y_j muito grandes produzidos por recursos X_j limitados (*inputs* pequenos), como por exemplo, uma *start-up* altamente lucrativa. Neste cenário, poderíamos esperar uma DMU bastante eficiente, e possivelmente, de grande *porte relativo*. Porém, se os valores de eficiência forem limitados à unidade, pode ocorrer que o *output* virtual b_j seja limitado por um *input* virtual a_j pequeno ou muito pequeno. Desta forma, a DMU_j estaria próxima de $(0, 0)$ para uma norma- ℓ_q qualquer e isto não representaria nossa expectativa com relação à definição de *porte relativo*. Assim, uma forma de se minimizar este problema é resolvê-lo com a utilização das supereficiências DEA definindo novas metas para o modelo (2.41)-(2.43) da Soma de Razões Quadráticas desenvolvido por Kao e Hung [24]. Em outras palavras, estaríamos reduzindo a dependência entre os *inputs* e *outputs* virtuais. Na Seção 3.4, depois de introduzirmos formalmente o conceito de *porte relativo*, voltaremos a discutir esta questão para melhor ilustrar este cenário.

Portanto, primeiramente construímos um vetor $E^* = (E_1^*, \dots, E_n^*)$ de supereficiências DEA e calculamos um conjunto de pesos ótimos (\bar{u}, \bar{v}) na determinação de um novo vetor

$E(\bar{u}, \bar{v}) = (E_1(\bar{u}, \bar{v}), \dots, E_n(\bar{u}, \bar{v}))$ de supereficiências de pesos comuns (ou simplesmente, $\bar{\ell}_p$ -eficiências). De agora em diante, trabalharemos apenas com o *Problema da Soma de Razões Quadráticas com supereficiências* DEA (ou *ModeloSRQS*), assumindo-se E^* como meta e $p = 2$. De forma similar ao trabalho de Kao e Hung [24], o *ModeloSRQS* nos garante unicidade e ótimo de Pareto. Vale ressaltar que tanto o *ModeloSRQ* quanto o *ModeloSRQS* possuem função objetivo não-convexa com restrições lineares e podem ser resolvidos por *solvers* de Programação Não-Linear voltados à solução de problemas não-convexos. Formalmente, o *ModeloSRQS* pode ser descrito como a seguir:

$$\bar{D} = \min \left(\sum_{j=1}^n (E_j^* - E_j(u, v))^2 \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

$$s.t. : \quad E_j(u, v) = \frac{\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i X_{ij}} \leq E_j^*, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

$$u_r, v_i \geq \epsilon > 0, \quad \forall r = 1, \dots, s \text{ e } i = 1, \dots, m. \quad (3.4)$$

A Função Objetivo (3.2) minimiza a distância euclidiana entre o vetor $E(u, v)$ de $\bar{\ell}_2$ -eficiências e o vetor E^* de supereficiências DEA. A Restrição (3.3) garante que a $\bar{\ell}_2$ -eficiência seja sempre menor ou igual à sua correspondente supereficiência DEA e a Restrição (3.4) assegura pesos positivos ¹.

Assim, dado um subconjunto de *inputs* $I' \subseteq I$, *outputs* $O' \subseteq O$ e pesos ótimos (\bar{u}, \bar{v}) para o *ModeloSRQS*, determinamos as coordenadas (a_j'', b_j'') (*representativas* de M) e as coordenadas (a_j', b_j') (*restritas a M'*) de forma que $a_j'' = \sum_{i \in I} \bar{v}_i X_{ij}$, $b_j'' = \sum_{r \in O} \bar{u}_r Y_{rj}$, $a_j' = \sum_{i \in I'} \bar{v}_i X_{ij}$ e $b_j' = \sum_{r \in O'} \bar{u}_r Y_{rj}$ respectivamente, para $j = 1, \dots, n$. Finalmente, calculamos o vetor (\bar{a}_j, \bar{b}_j) , *representativo* de M' com coordenadas $\bar{a}_j = K_j \cdot a_j'$, $\bar{b}_j = K_j \cdot b_j'$ para $K_j = \|(a_j', b_j')\| / \|(a_j'', b_j'')\|$.

Formalmente, introduzimos as seguintes definições:

Definição 1: ($\bar{\ell}_2$ -eficiência e distância- ℓ_q restritas a M'). Considere (\bar{u}, \bar{v}) uma solução ótima do *ModeloSRQS* e um inteiro $1 \leq q < \infty$. Considere também $M' = I' \cup O'$ e o vetor (\bar{a}_j, \bar{b}_j) *representativo* de M' como acima. Então, (i) denotamos a $\bar{\ell}_2$ -eficiência da DMU_j **restrita a M'** por $E_j = \bar{b}_j / \bar{a}_j$; e, (ii) a **distância- ℓ_q da DMU_j restrita a M'** por $D_j^{M'}(q) = ((\bar{a}_j)^q + (\bar{b}_j)^q)^{1/q}$, $\forall j = 1, \dots, n$. \square

¹Note que uma grande variação nos pesos pode resultar em *inputs* e/ou *outputs* sendo associados à pesos insignificantes. Nas restrições acima, podemos assumir limites inferiores e/ou limites superiores específicos para os pesos dos *inputs* e/ou *outputs*. No trabalho de Portela (2010) [26], por exemplo, os autores consideram *Regiões de Segurança* em DEA e definem diferentes tipos de correspondência entre os pesos dos *inputs* e *outputs*

A definição acima estabelece um *ranking* de $\bar{\ell}_2$ -eficiências $E(\bar{u}, \bar{v})$ e distâncias- ℓ_q (restritas a M') para todas as n DMUs. Contudo, note que os valores de $E_j > 0$ e $D_j^{M'}(q) > 0$, respectivamente, para $j = 1, \dots, n$ não possuem limite superior. Assim, para melhor expressar as $\bar{\ell}_2$ -eficiências e as distâncias- ℓ_q , mostraremos agora como determinar as novas coordenadas através de movimentos de *rotação* e *translação* de DMUs de forma que os novos valores de eficiência (η -eficiências) e as novas distâncias- ℓ_q restritas a M' (representando *porte relativos*) estejam limitadas à unidade.

3.3 Rotação e Translação de DMUs

Considere então $E_j > 0$ e $D_j(q) \equiv D_j^{M'}(q)$ como acima (para algum $1 \leq q < \infty$), representando, respectivamente, a $\bar{\ell}_2$ -eficiência e a distância- ℓ_q da DMU_j restrita à M' . Considere também, dois parâmetros $k_e > 0$ e $k_s > 0$, representando taxas de rotação e translação, respectivamente, da DMU_j , para $j = 1, \dots, n$. Assim, se (\bar{a}_j, \bar{b}_j) é *representativo de M'* e indica as coordenadas da DMU_j associadas a E_j e $D_j(q)$, esperamos então determinar as novas coordenadas $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ de forma que $\tilde{e}_j = k_e E_j$ e $\tilde{d}_j(q) = k_s D_j(q)$ para $j = 1, \dots, n$. O par $[\tilde{e}_j, \tilde{d}_j(q)]$ irá indicar, respectivamente, a nova eficiência e a nova distância- ℓ_q da DMU_j .

Formalmente, podemos determinar o seguinte resultado:

Lema 1: (Lema Fundamental) Considere uma DMU_j com coordenadas (\bar{a}_j, \bar{b}_j) *representativas de M'* como acima. Considere também os parâmetros $k_e > 0$ e $k_s > 0$ de forma que $\tilde{e}_j = k_e E_j$ e $\tilde{d}_j(q) = k_s D_j(q)$ para algum $1 \leq q < \infty$. Então, teremos novas coordenadas $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ tal que:

$$\tilde{a}_j = (k_s A_j) \bar{a}_j \quad e \quad \tilde{b}_j = (k_e k_s A_j) \bar{b}_j \quad \text{com} \quad A_j = \left(\frac{1 + (E_j)^q}{1 + (\tilde{e}_j)^q} \right)^{1/q} \quad (3.5)$$

Prova: Para provar nosso resultado, realizaremos dois movimentos consecutivos da DMU_j . Primeiro, mantemos constante a $\bar{\ell}_2$ -eficiência da DMU_j e consideramos o deslocamento de (\bar{a}_j, \bar{b}_j) para (a'_j, b'_j) assumindo $k'_e = 1$ e $k'_s = k_s > 0$ (*movimento de translação*). Posteriormente, em um segundo momento, movemos de (a'_j, b'_j) para $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ preservando a nova distância- ℓ_q fazendo $k''_e = k_e > 0$ e $k''_s = 1$ (*movimento de rotação*).

Como $k'_e = 1$ e $k'_s = k_s > 0$ no movimento de translação, devemos ter $e'_j = E_j$ e $d'_j(q) = k_s D_j(q)$. Note que $e'_j = b'_j / a'_j = \bar{b}_j / \bar{a}_j = E_j$. Dessa forma, obtemos pela Definição

1 acima que:

$$\left((a'_j)^q + (b'_j)^q\right)^{1/q} = k_s \left((\bar{a}_j)^q + (\bar{b}_j)^q\right)^{1/q}. \quad (3.6)$$

Portanto, substituindo $\bar{b}_j = E_j \bar{a}_j$ e $b'_j = e'_j a'_j$ em (3.6), temos $a'_j = k_s \bar{a}_j$. De forma análoga, substituindo $a'_j = b'_j / e'_j$ e $\bar{a}_j = \bar{b}_j / E_j$ em (3.6), obtemos $b'_j = k_s \bar{b}_j$, concluindo o movimento de translação.

Considere agora o movimento de rotação de (a'_j, b'_j) para $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$. Para tal, assumimos $\tilde{d}_j(q) = k_s'' d'_j(q)$ e $\tilde{e}_j = k_e'' e'_j$ com $k_e'' = k_e > 0$ e $k_s'' = 1$. Assim:

$$\left((\tilde{a}_j)^q + (\tilde{b}_j)^q\right)^{1/q} = \left((a'_j)^q + (b'_j)^q\right)^{1/q} \Rightarrow (\tilde{a}_j)^q + (\tilde{b}_j)^q = (a'_j)^q + (b'_j)^q. \quad (3.7)$$

Considerando $\tilde{e}_j = k_e e'_j$, obtemos $b'_j = (\tilde{e}_j a'_j) / k_e$. Temos também $\tilde{b}_j = \tilde{e}_j \tilde{a}_j$. Então, se $E_j = \tilde{e}_j / k_e$, após a substituição de b'_j e \tilde{b}_j em (3.7) obtemos:

$$(\tilde{a}_j)^q (1 + (\tilde{e}_j)^q) = (a'_j)^q (1 + (E_j)^q). \quad (3.8)$$

Como $a'_j = k_s \bar{a}_j$ (*movimento de translação*) temos da Equação (3.8) que:

$$(\tilde{a}_j)^q = (k_s \bar{a}_j)^q \left(\frac{1 + (E_j)^q}{1 + (\tilde{e}_j)^q} \right) \quad (3.9)$$

Substituindo $\tilde{e}_j = k_e E_j$, temos que:

$$(\tilde{a}_j)^q = (k_s \bar{a}_j)^q \left(\frac{1 + (E_j)^q}{1 + (\tilde{e}_j)^q} \right) \Rightarrow \tilde{a}_j = k_s \bar{a}_j \left(\frac{1 + (E_j)^q}{1 + (\tilde{e}_j)^q} \right)^{1/q}. \quad (3.10)$$

Da mesma forma, para obter \tilde{b}_j substituímos $\tilde{a}_j = \tilde{b}_j / \tilde{e}_j$, $a'_j = k_s \bar{a}_j$ e $b'_j = k_s \bar{b}_j$ em (3.7). Assim, temos:

$$(\tilde{b}_j)^q \left(1 + \frac{1}{(\tilde{e}_j)^q} \right) = (k_s)^q ((\bar{a}_j)^q + (\bar{b}_j)^q) = (k_s)^q (\bar{b}_j)^q \left(1 + \frac{1}{(E_j)^q} \right). \quad (3.11)$$

Então

$$(\tilde{b}_j)^q = (k_s)^q (\bar{b}_j)^q \left(\frac{\tilde{e}_j}{E_j} \right)^q \left(\frac{1 + (E_j)^q}{1 + (\tilde{e}_j)^q} \right). \quad (3.12)$$

Lembrando que $\tilde{e}_j = k_e E_j$, temos:

$$\tilde{b}_j = k_s \bar{b}_j \left(\frac{\tilde{e}_j}{E_j} \right) \left(\frac{1 + (E_j)^q}{1 + (\tilde{e}_j)^q} \right)^{1/q} = k_s k_e \bar{b}_j \left(\frac{1 + (E_j)^q}{1 + (\tilde{e}_j)^q} \right)^{1/q}$$

o que prova o nosso resultado. \square

Uma vez definido o modelo de supereficiência com pesos comuns e os movimentos de rotação e translação de *DMUs*, estabelecemos formalmente as seguintes definições de η -eficiência e *porte relativo*:

Definição 2: (Porte relativo e η -eficiência restritos a M') Sejam (\bar{a}_j, \bar{b}_j) as coordenadas da DMU_j representativas de M' (para $j = 1, \dots, n$). Considere também $E_j = \bar{b}_j/\bar{a}_j$ e $D_j(q) = ((\bar{a}_j)^q + (\bar{b}_j)^q)^{1/q}$ para algum inteiro $1 \leq q < \infty$, respectivamente, as $\bar{\ell}_2$ -eficiências e distâncias- ℓ_q da DMU_j restritas a M' . Então, (i) indicamos por $\tilde{e}_j = E_j/\phi_e$, onde $\phi_e = \max\{E_j, \forall j = 1, \dots, n\}$, a **η -eficiência** da DMU_j ; e (ii) $\tilde{s}_j(q) = D_j(q)/\phi_s$ onde $\phi_s = \max\{D_j(q), \forall j = 1, \dots, n\}$, o **porte relativo da DMU_j restritos a M'** . \square

A adoção de η -eficiências e *portes relativos* (restritos a M') para definição de eficiências e tamanho das organizações parece razoável, já que ambos representam uma correspondência direta entre *inputs* e *outputs* virtuais. Além do mais, as η -eficiências e as medidas de *porte relativo* estabelecem um *rank* completo para todas as *DMUs*. Temos agora a seguinte definição:

Definição 3: (Normalização e Área Leque) Sejam (\bar{a}_j, \bar{b}_j) as coordenadas da DMU_j associadas aos pesos (\bar{u}, \bar{v}) (solução do *ModeloSRQS*) para $j = 1, \dots, n$. Considere também ϕ_e e ϕ_s como na Definição 2 acima. Dizemos que todas as *DMUs* estão *normalizadas* se suas novas coordenadas $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ forem obtidas para $k_e = 1/\phi_e$ e $k_s = 1/\phi_s$ no *Lema Fundamental*. Além disso, definimos *Área Leque*, como o conjunto de todas as coordenadas $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ para $j = 1, \dots, n$, correspondentes a *portes relativos* e η -*eficiências* menores ou iguais a *um*. \square

Note que o processo de normalização e a definição da *Área Leque* nos dá uma visão mais padronizada do conceito de *porte relativo*. Além do mais, se $\tilde{s}_j(q) = 1$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$ e $1 \leq q < \infty$, dizemos que a DMU_j tem o *porte relativo máximo* na *Área Leque* (restrito a M'). Se $\tilde{e}_j = 1$ então, dizemos que DMU_j é η -eficiente, caso contrário, a DMU_j é η -ineficiente.

O próximo resultado é consequência do *Lema Fundamental* e estabelece a relação entre (\bar{u}, \bar{v}) e (\tilde{u}, \tilde{v}) , onde (\tilde{u}, \tilde{v}) indica o novo conjunto de pesos obtido após a normalização.

Corolário 1: Considere (\bar{a}_j, \bar{b}_j) para $j = 1, \dots, n$, as coordenadas da DMU_j associada

aos pesos (\bar{u}, \bar{v}) (solução ótima do *ModeloSRQS*). Então,

$$\tilde{a}_j = B_j \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i X_{ij} \quad e \quad \tilde{b}_j = B_j \sum_{r=1}^s \tilde{u}_r Y_{rj} \quad com \quad B_j = \left(\frac{1 + (E_j)^q}{(\phi_e)^q + (E_j)^q} \right)^{1/q} \quad (3.13)$$

representam as novas coordenadas da DMU_j na *Área Leque*, onde $\tilde{v}_i = (\phi_e/\phi_s) \bar{v}_i$ e $\tilde{u}_r = (1/\phi_s) \bar{u}_r$, $\forall i = 1, \dots, m$ e $r = 1, \dots, s$.

Prova: Para provar o nosso resultado, basta executar os movimentos de translação e rotação de cada DMU_j no Lema Fundamental substituindo $\tilde{e}_j = k_e E_j$, $k_s = 1/\phi_s$ e $k_e = 1/\phi_e$. \square

Para resumir todos os passos apresentados acima, considere agora o seguinte algoritmo:

Algoritmo 1: {Porte relativo e η -eficiência }

Entradas: Matrizes X, Y ; subconjunto de *inputs* $I' \subseteq I$ e *outputs* $O' \subseteq O$; inteiro q (para indicar a norma- ℓ_q).

Saída: η -eficiências $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$; vetor de *porte relativo* $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n)$ (restrito a M') e coordenadas $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ para $j = 1, \dots, n$.

Início.

01. Calcular o vetor de supereficiências DEA $E^* = (E_1^*, \dots, E_n^*)$;
02. $(\bar{u}, \bar{v}) \leftarrow$ Resolver *ModeloSRQS*(E^*);
03. Calcular: $a_j'' = \sum_{i \in I} \bar{v}_i X_{ij}$ e $b_j'' = \sum_{r \in O} \bar{u}_r Y_{rj}$, para $j = 1, \dots, n$;
 $a_j' = \sum_{i \in I'} \bar{v}_i X_{ij}$ e $b_j' = \sum_{r \in O'} \bar{u}_r Y_{rj}$, para $j = 1, \dots, n$;
04. Calcular: $K_j = \left(\frac{(a_j')^q + (b_j')^q}{(a_j'')^q + (b_j'')^q} \right)^{1/q}$, para $j = 1, \dots, n$;
05. Calcular: $\bar{a}_j = K_j \cdot a_j''$ e $\bar{b}_j = K_j \cdot b_j''$, para $j = 1, \dots, n$;
06. Determinar: $E_j = \bar{b}_j / \bar{a}_j$ e $D_j(q) = ((\bar{a}_j)^q + (\bar{b}_j)^q)^{1/q}$, para $j = 1, \dots, n$;
07. $\phi_s \leftarrow \max\{D_j(q), \forall j = 1, \dots, n\}$;
08. $\phi_e \leftarrow \max\{E_j, \forall j = 1, \dots, n\}$;
09. Determinar os pesos normalizados $\tilde{v} = \bar{v}(\phi_e/\phi_s)$ e $\tilde{u} = \bar{u}(1/\phi_s)$;
10. Calcular: $B_j = \left(\frac{1 + (E_j)^q}{(\phi_e)^q + (E_j)^q} \right)^{1/q}$, para $j = 1, \dots, n$;
11. Calcular: $\tilde{a}_j = B_j \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i X_{ij}$ e $\tilde{b}_j = B_j \sum_{r=1}^s \tilde{u}_r Y_{rj}$, para $j = 1, \dots, n$;
12. Calcular: $\tilde{e}_j = \tilde{b}_j / \tilde{a}_j$ e $\tilde{s}_j(q) = ((\tilde{a}_j)^q + (\tilde{b}_j)^q)^{1/q}$, para $j = 1, \dots, n$;
13. Retornar os vetores \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{e} e \tilde{s} restrito a $M' = I' \cup O'$.

fim.

No Passo 1 executamos um modelo de supereficiência (por exemplo, o *ModeloAP*) para calcular o vetor de supereficiências DEA E^* utilizado na determinação do conjunto

(01)	(02)	(03)	(04)	(05)	(06)	(07)	(08)	(09)	(10)
DMU_j	StHr	Supp	MCPD	PPPD	Supere- ficiências E_j^*	ℓ_2 -Eficiências E_j	$D_j(q)$	η -eficiências \tilde{e}_j	Porte relativo $\tilde{s}_j(q)$
1	150	0.2	14000	3500	2.00	1.89	0.0038	1.00	0.25
2	400	0.7	14000	21000	1.40	0.90	0.0065	0.47	0.43
3	320	1.2	42000	10500	1.41	1.36	0.0127	0.72	0.85
4	520	2.0	28000	42000	1.13	0.80	0.0150	0.43	1.00
5	350	1.2	19000	25000	0.98	0.84	0.0094	0.45	0.62
6	320	0.7	14000	15000	0.87	0.87	0.0060	0.46	0.40

Tabela 3.1: Exemplo com 6 $DMUs$ (veja Adler et al. (2002) [2] e Sexton et al. (1986) [36]), $M' = I' \cup O'$, com $I' = \{Supp\}$ e $O' = \{MCPD, PPPD\}$ e $q = 2$. Cálculo da η -eficiência e porte relativo restrito a $M' = \{Supp, MCPD, PPPD\}$. Neste caso, $\phi_e = 1.89$ e $\phi_s = 0.0150$.

de pesos comuns (\bar{u}, \bar{v}) no Passo 2. Nos passos 3, 4 e 5 determinamos as coordenadas (\bar{a}_j, \bar{b}_j) representativas de M' para $j = 1, \dots, n$. No Passo 6, calculamos as $\bar{\ell}_2$ -eficiências e as distâncias- ℓ_q (restritas a M') para todas $DMUs$. Nos passos 7 e 8, determinamos a maior distância- ℓ_q e a maior $\bar{\ell}_2$ -eficiência respectivamente. Nos Passos 9 e 10, baseado no Corolário 1, calculamos o vetor (\tilde{u}, \tilde{v}) de pesos normalizados, onde a constante B_j é utilizada na determinação da η -eficiência e do porte relativo (passos 11 e 12). Finalmente, no Passo 13 retornamos a solução obtida. A Figura 3.2 ilustra esquematicamente todas as etapas descritas no Algoritmo 1.

Exemplo 1: Para ilustrar todos os conceitos acima, considere um exemplo ilustrativo relativo a enfermarias de um hospital, retirado do artigo de Adler et al.(2002) [2] (veja também Sexton et al.(1986) [36]). Neste exemplo há 6 $DMUs$, cada uma com 2 *inputs*: hora de enfermaria trabalhadas por dia (StHr), suplementos gastos por dia (Supp) e 2 *outputs*: pacientes atendidos por planos de saúde (MCPD) e pacientes atendidos particularmente (PPPD), conforme mostrado na Tabela 3.1.

A Figura 3.3 mostra a representação destes dados na *Área Leque*, em um gráfico para $q = 1$ e $q = 2$ respectivamente. Uma outra maneira de representar estes dados na *Área Leque* é por meio de um gráfico de *eficiência* \times *porte* (veja Figura 3.4). Observe que para esta última representação, a diferença na posição das $DMUs$ para $q = 1$ e $q = 2$ é pequena.

Assumimos $M' = I' \cup O'$ com $I' = \{Supp\}$ e $O' = \{MCPD, PPPD\}$, isto é, *um input* e *dois outputs* são considerados na análise do *porte relativo*. Assim, após resolver o *ModeloSRQS* (utilizando o solver MINOS 5.51), obtemos os pesos (\bar{u}, \bar{v}) , onde $\bar{u}_1 = 0.000000238926$, $\bar{u}_2 = 0.0000001$, $\bar{v}_1 = 0.00000614861$ e $\bar{v}_2 = 0.00516852$ com $\bar{D} = 0.6265$, sendo que \bar{D} indica a distância euclidiana entre $E^* = (E_1^*, \dots, E_n^*)$ e as $\bar{\ell}_2$ -eficiências $E = (E_1, \dots, E_n)$. As supereficiências DEA E^* , $\bar{\ell}_2$ -eficiências e as distâncias- ℓ_q

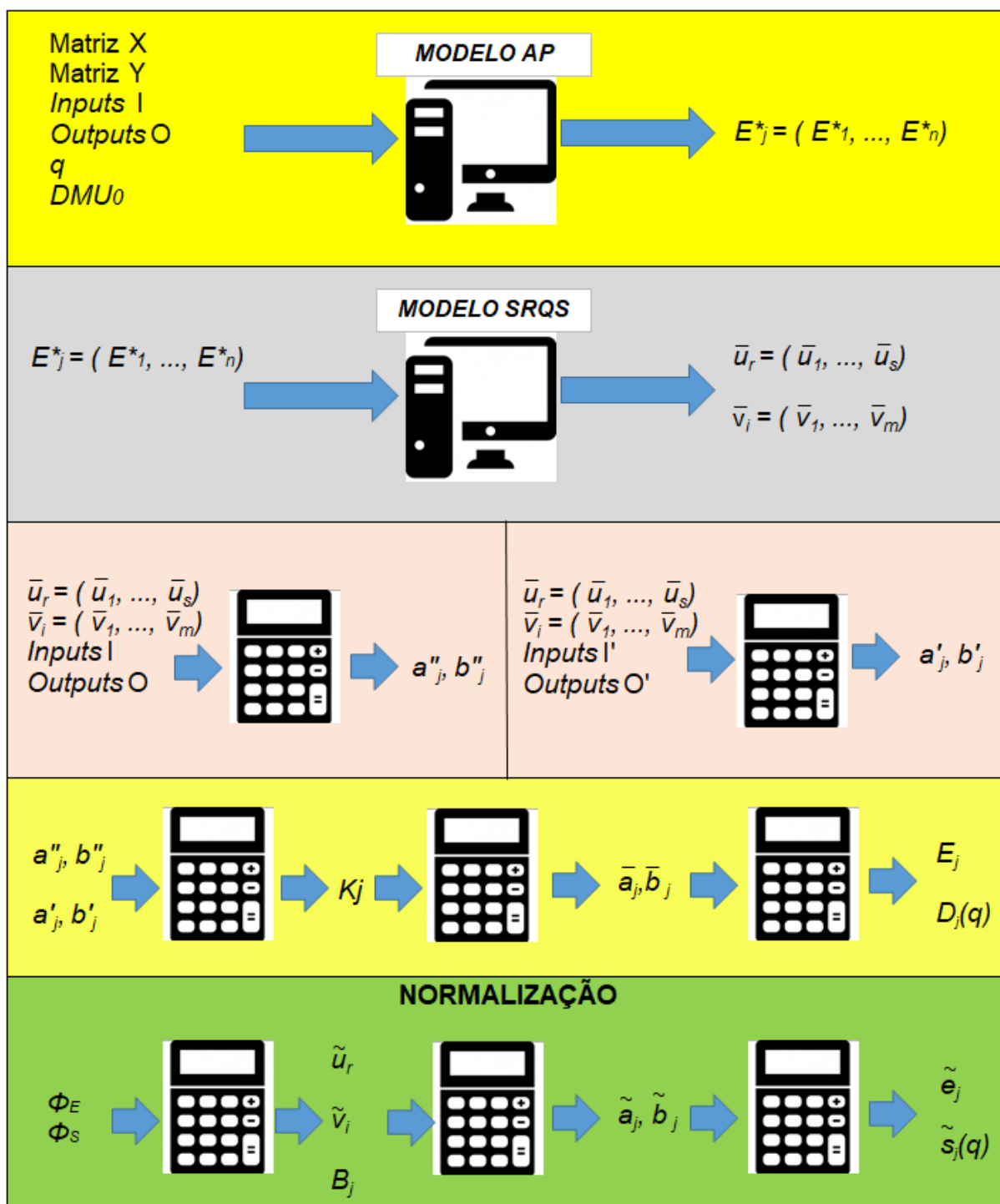


Figura 3.2: Ilustração da etapas de cálculos do Algoritmo 1

restritas a M' (para $q = 2$) são apresentadas nas Colunas 06, 07 e 08 da Tabela 3.1, respectivamente. Da Coluna 7 obtemos $\phi_e = 1.89$, e da Coluna 8, obtemos $\phi_s = 0.0150$. A partir daí, calculamos os *inputs* e *outputs* virtuais de cada DMU_j expresso pelas coordenadas normalizadas $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ para $j = 1, \dots, 6$. Nas Colunas 9 e 10, calculamos, respectivamente, as η -eficiências e os *porte relativos* para todas as $DMUs$. Veja a região destacada das

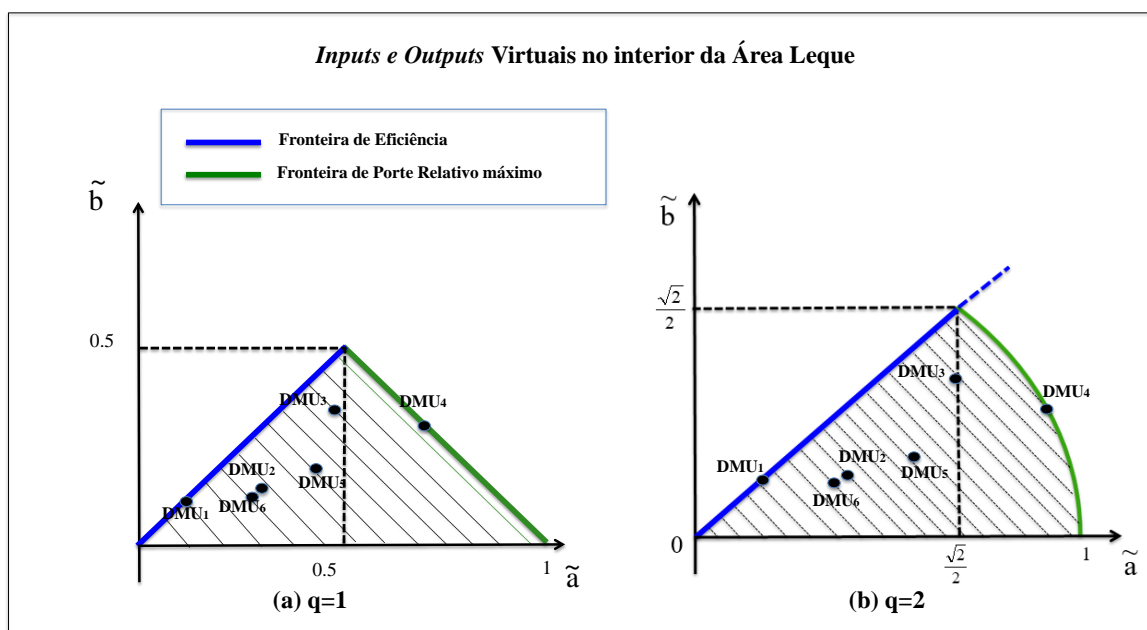


Figura 3.3: Possíveis representações da *área leque* contendo 6 *DMUs*: (a) *Área leque* para $q = 1$, representada por *inputs* e *outputs* virtuais; (b) *Área leque* para $q = 2$, representada por *inputs* e *outputs* virtuais.

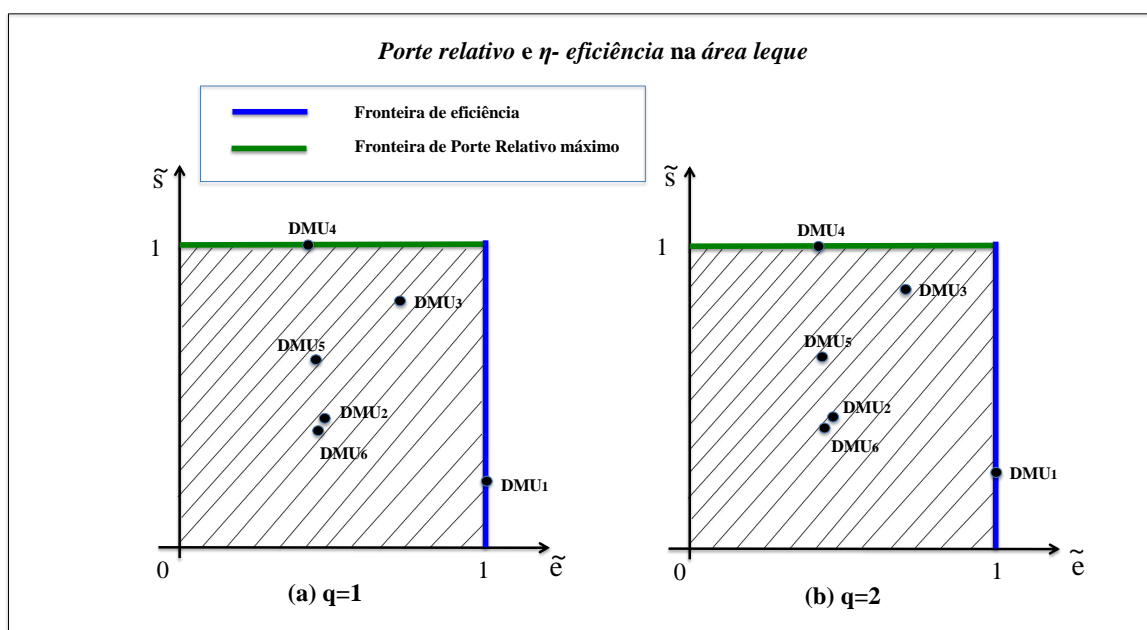


Figura 3.4: Possíveis representações da *área leque* contendo 6 *DMUs*: (a) *Área leque* para $q = 1$; (b) *Área leque* para $q = 2$.

Figuras (3.3.a) e (3.3.b), respectivamente. Neste exemplo, a DMU_1 é η -eficiente enquanto a DMU_4 tem o maior *porte relativo* restrito a M' .

No próximo capítulo, mostraremos que $\bar{D} = \phi_e \tilde{D}$, com \tilde{D} indicando a distância entre o

(01)	(02)	(03)	(04)	(05)	(06)	(07)	(08)	(09)	(10)	(11)	(12)
DMU_j	X_{1j}	X_{2j}	X_{3j}	Y_{1j}	Y_{2j}	Supere- ficiência E_j^*	ℓ_2 - Eficiências	Porte relativo $\tilde{s}_j(q)$	Eficiências DEA e_j^*	ℓ_2 - Eficiências	Porte relativo $\tilde{s}_j(q)$
1	5	3	10	38	96	34.83	7.44	1.00	1.00	1.00	0.29
2	24	17	60	6	42	0.09	0.47	0.83	0.09	0.09	1.00
3	23	22	57	8	40	0.09	0.47	0.83	0.09	0.09	0.96

Tabela 3.2: Comparação entre o *ModeloSRQ* e *ModeloSRQS* na definição do *porte relativo*. Consideramos a norma- ℓ_2 .

vetor de supereficiências normalizadas $E_\eta^* = (E_1^*/\phi_e, \dots, E_n^*/\phi_e)$ e o vetor $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ das η -eficiências. Assim, para este exemplo, $\tilde{D} = \bar{D}/\phi_e = 0.3316$. \square

Note que, para $q = 1$, uma *DMU* η -eficiente com *porte relativo* máximo deve ter coordenadas (0.5, 0.5) (veja Figura 3.3.a). Por outro lado, para $q = 2$, uma *DMU* η -eficiente com *porte relativo* máximo deve ter coordenadas $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ (Figura 3.3.b).

A escolha de q não é relevante na definição de *porte relativo* e depende da aplicação. Entretanto, a escolha da norma- ℓ_2 para o uso no *ModeloSRQS* é preferível, conforme já discutido na Seção 2.3.

Uma vez definidos os conceitos de η -eficiência e *porte relativo*, voltemos à discussão do vetor de supereficiências DEA como meta no *ModeloSRQS* ao invés das eficiências DEA na definição do *porte relativo*.

3.4 Considerações adicionais sobre o *ModeloSRQS*

Nesta seção, ilustramos a necessidade do uso das supereficiências DEA no *ModeloSRQS* para uma melhor representação do conceito de *porte relativo*. Como observado anteriormente, a ideia é se aproveitar da dependência reduzida entre os *inputs* e *outputs* virtuais $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$, presente nos modelos de supereficiência. Para isto, considere um conjunto de dados fictícios com 3 *DMUs*, um conjunto I com 3 *inputs* e um conjunto O com 2 *outputs* (veja Tabela 3.2). Note que todos os *inputs* da *DMU*₁ são pequenos se comparado aos *inputs* das *DMUs* 2 e 3 respectivamente. Contudo, os *outputs* da *DMU*₁ são grandes se comparado aos *outputs* das *DMUs* 2 e 3. Neste caso, mesmo considerando $M' = M$ na definição do *porte relativo*, é coerente supor que a *DMU*₁ seja mais eficiente e a de maior tamanho, ou pelo menos, esteja próxima à fronteira de *porte relativo*. Este cenário expressa a discussão sobre a necessidade dos modelos de supereficiência DEA ao invés da eficiência DEA como no *ModeloSRQ* de Kao & Hung [24].

As colunas de 01 a 06 da Tabela 3.2 mostram todos os *inputs* e *outputs* de cada *DMU* _{j} . As colunas 07, 08 e 09 expressam os resultados do *ModeloSRQS*. As superefi-

ciências DEA E_j^* são representadas na Coluna 07. A Coluna 08 retrata as $\bar{\ell}_2$ -eficiências com pesos comuns. Os valores das *distâncias- ℓ_q* $D_j(q)$ (para $q = 2$) foram omitidos da tabela e valem $D_1(2) = 0.0000135204$, $D_2(2) = 0.0000111826$ e $D_3(2) = 0.000011273$, respectivamente. Na Coluna 09 apresentamos o *porte relativo* de todas as *DMUs*. Note que a DMU_1 é η -eficiente e possui o maior *porte relativo*, indo de acordo com nossas expectativas para $M' = M$. Finalmente, nas colunas 10, 11 e 12 apresentamos os resultados referente ao *ModeloSRQ* de Kao e Hung [24], onde as eficiências DEA são utilizadas como meta. As distâncias- ℓ_q $D_j(q)$ (para $q = 2$) foram omitidas da tabela são iguais a $D_1(2) = 113.87$, $D_2(2) = 388.09$ e $D_3(2) = 371.90$.² A Coluna 11 mostra que a DMU_1 permanece eficiente, confirmando nossa expectativa. Porém, na Coluna 12, observamos para a DMU_1 que $\tilde{s}_1(2) = 0.29$, resultando em um *porte relativo* da DMU_1 (restrito a $M = M'$) bastante pequeno se comparado às *DMUs* 2 e 3, respectivamente, contrariando assim nossas expectativas. É importante ressaltar que o conceito de *porte relativo* baseado na escolha de M' depende estritamente da aplicação considerada.

3.5 Definição de uma Tecnologia \bar{T} estendida

Nesta seção mostramos primeiramente que o conjunto viável associado ao *ModeloSRQS* define um conjunto de Tecnologia \bar{T} idealizado (estendido) contendo T . Posteriormente, em um segundo momento, mostramos que uma solução ótima do *ModeloSRQS*, seguida de movimentos de rotação e translação de *DMUs* (vide *ModeloSRQS₂*), pertence, de fato, ao conjunto de Tecnologia T^3 . Assim, mostramos como combinar modelos de super-eficiência e pesos comuns de forma a reduzir a dependência entre *inputs* e *outputs* virtuais. Como discutido anteriormente, isto nos permite uma avaliação mais justa de *porte relativo* bem como estabelece um *ranking* completo de eficiências. No próximo capítulo, baseado em decisões gerenciais, mostramos ainda como \bar{T} (normalizado) pode ser útil na definição de metas para *DMUs* eficientes e ineficientes.

Assim, considere inicialmente o vetor $E^* = (E_1^*, \dots, E_n^*)$ de supereficiências DEA calculado pelo *ModeloAP* (orientado a *inputs*). Lembre-se que, se $E_j^* \geq 1$, a DMU_j é *eficiente* ou *super eficiente*, caso contrário a DMU_j será *ineficiente*. Considere agora $\Delta_k = \max\{E_k^*, 1\}$, para $k = 1, \dots, n$. Agora, uma vez determinado E^* , construímos a

²Note a grande variação dos valores de $D_j(q)$. Com a normalização sugerida, através da *Área Leque*, conseguimos padronizar a representação das η -eficiências e *portes relativos*.

³Na verdade, os movimentos de translação são necessários apenas se estamos interessados também na construção da *Área Leque*, combinando η -eficiência e *porte relativo*.

seguinte formulação (estendida) com orientação a *inputs*:

$$FO_k^* = \max \left(\sum_{r=1}^s u_r^{(k)} Y_{rk} \right) \quad (3.14)$$

$$s.t. : \sum_{i=1}^m v_i^{(k)} X_{ik} = \Delta_k, \quad (3.15)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r^{(k)} Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i^{(k)} X_{ij} \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (3.16)$$

$$u_r^{(k)}, v_i^{(k)} \geq 0, \quad \forall r = 1, \dots, s \text{ e } i = 1, \dots, m. \quad (3.17)$$

Nesta formulação, temos representadas, simultaneamente, eficiência e supereficiência da DMU_k em análise. Note que a Função Objetivo (3.14), representa o valor da eficiência (ou supereficiência) associada à DMU_k . Além disso, de (3.16) constatamos que $e_k^* \leq 1, \forall k$. Se $FO_k^* = E_k^* > 1$ então $e_k^* = 1$. Ainda, se a DMU_k é ineficiente então $FO_k^* = E_k^* = e_k^* < 1$. Para tornar mais clara nossa notação, representamos por $(u_r^{(k)}, v_i^{(k)})$, os pesos ótimos associados à DMU_k para todo par i, r . Note finalmente que a fronteira de eficiência é determinada pelos vetores coluna (X_j, Y_j) , respectivamente.

Agora, se fizermos $X_{ij} = \Delta_j \bar{X}_{ij}$ para todo par i, j ; onde $\Delta_j = \max\{E_j^*, 1\}$, teremos um novo domínio (estendido) definido pelos pontos $(\bar{X}_j, Y_j) \equiv (X_j/\Delta_j, Y_j)$. Note que, se uma DMU_k é eficiente ou supereficiente, então $\bar{X}_{ik} \leq X_{ik}, \forall i$. Logo, podemos reescrever o modelo (3.14)-(3.17) como se segue:

$$FO_k^* = \max \left(\sum_{r=1}^s u_r^{(k)} Y_{rk} \right) \quad (3.18)$$

$$s.t. : \sum_{i=1}^m v_i^{(k)} \bar{X}_{ik} = 1, \quad (3.19)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r^{(k)} Y_{rj} - \Delta_j \sum_{i=1}^m v_i^{(k)} \bar{X}_{ij} \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (3.20)$$

$$u_r^{(k)}, v_i^{(k)} \geq 0, \quad \forall r = 1, \dots, s \text{ e } i = 1, \dots, m. \quad (3.21)$$

Neste caso, podemos assumir um novo conjunto de $DMUs$ virtuais sobre a fronteira de supereficiência, definida pelos pontos (\bar{X}_j, Y_j) . Assim, se $E_k^* > 1$ para algum k , representaremos por DMU'_k , a nova DMU virtual associada à DMU_k sobre a fronteira (virtual) de supereficiência. Da Restrição (3.20) podemos notar que todas as $DMUs$ (virtuais ou não) tem eficiência menor ou igual a Δ_j .

Calculando agora sua formulação dual associada obtemos:

$$\bar{\theta}_k^* = \min \bar{\theta}_k \quad (3.22)$$

$$s.t. : \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(k)} \Delta_j \bar{X}_{ij} \leq \bar{\theta}_k \bar{X}_{ik}, \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (3.23)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(k)} Y_{rj} \geq Y_{rk}, \quad \forall r = 1, \dots, s. \quad (3.24)$$

$$\lambda_j^{(k)} \geq 0, \quad \bar{\theta}_k \text{ irrestrito.} \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (3.25)$$

Equivalentemente, multiplicando a primeira parte da Desigualdade (3.24) por $\Delta_j \geq 1$ e fazendo $\bar{\lambda}_j = \Delta_j \lambda_j^{(k)}$, obtemos finalmente a seguinte formulação dual envelopada:

$$\bar{\theta}_k^* = \min \bar{\theta}_k \quad (3.26)$$

$$s.t. : \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^{(k)} \bar{X}_{ij} \leq \bar{\theta}_k \bar{X}_{ik}, \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (3.27)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j^{(k)} Y_{rj} \geq Y_{rk}, \quad \forall r = 1, \dots, s. \quad (3.28)$$

$$\bar{\lambda}_j^{(k)} \geq 0, \quad \bar{\theta}_k \text{ irrestrito.} \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (3.29)$$

Agora, observe que se uma DMU'_k (virtual) é supereficiente deveremos ter obrigatoriamente $FO_k^* = E_k^* = \bar{\theta}_k > 1$. Neste caso, fazendo $\bar{\lambda}_k = E_k^*$ e $\bar{\lambda}_j^{(k)} = 0$ para todo $j \neq k$, e simplificando (3.27) obtemos:

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j^{(k)} X_{ij} \leq X_{ik}, \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (3.30)$$

$$\sum_{j=1}^n E_j^* \lambda_j^{(k)} Y_{rj} \geq Y_{rk}, \quad \forall r = 1, \dots, s. \quad (3.31)$$

sendo $\lambda_k = 1$ e $\lambda_j = 0$ para todo $j \neq k$. Como $\bar{\theta}_k \leq E_k^*$ representa o valor ótimo de (3.26)-(3.29), podemos afirmar que uma igualdade ocorre em (3.27) para algum índice $i \in \{1, \dots, m\}$. Em outras palavras, se $\bar{\theta}_k > 1$, teremos uma DMU'_k (virtual) sobre a fronteira definida por (\bar{X}_j, Y_j) . Observe, neste caso, que $\bar{\theta}_k > 1$ representa a distância da DMU'_k (virtual) para a DMU_k sobre a fronteira de eficiência definida pelos *inputs* e *outputs* X_j, Y_j , respectivamente. Ainda, podemos notar que, se $\bar{\theta}_k < 1$, teremos uma DMU_k no interior do conjunto de Tecnologia T . Em outras palavras, mostramos que o conjunto de Tecnologia T , definido pelos pares (X_j, Y_j) , está contido no conjunto de Tecnologia \bar{T} estendido definido pelos pontos (\bar{X}_j, Y_j) .

A Figura 3.5(a) ilustra um exemplo com 5 *DMUs*, um único *input* e um único *output*, e a Figura 3.5(b) ilustra um exemplo onde temos 5 *DMUs* e 2 *inputs* (assumindo um número arbitrário de *outputs*).

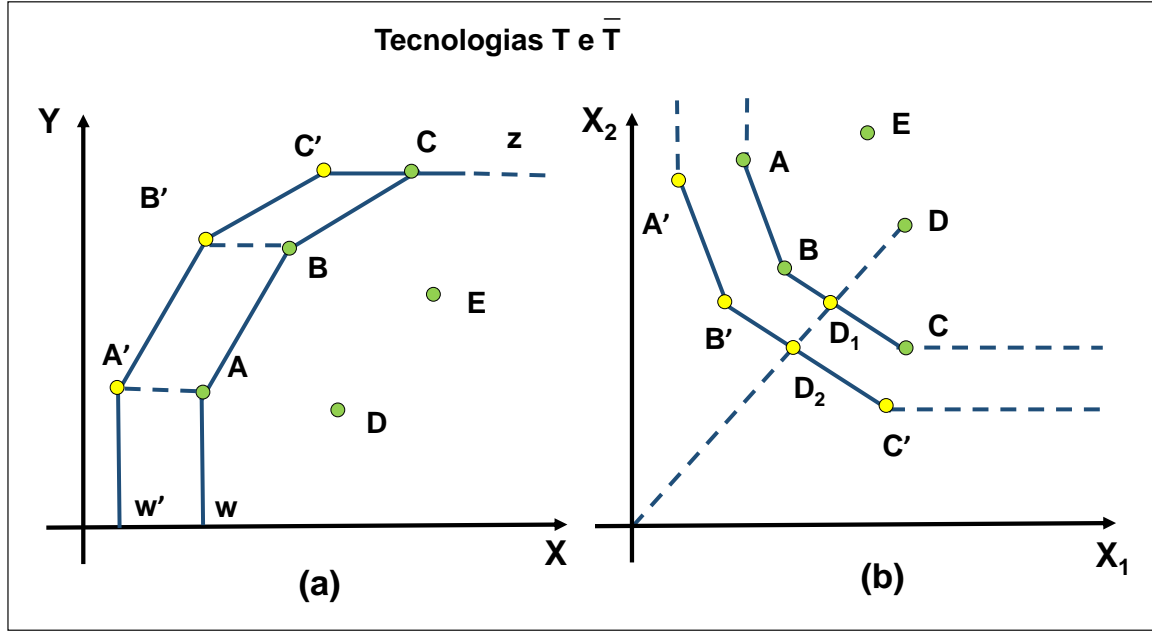


Figura 3.5: Conjuntos de Tecnologia T e \bar{T} . (a) Exemplo com 5 *DMUs*, um único *input* e um único *output* (b) Exemplo com 5 *DMUs* e 2 *inputs*. Os pontos em verde representam as *DMUs* associadas aos dados de entrada originais. Os pontos em amarelo representam as *DMUs* virtuais associadas às *DMUs* eficientes.

Note, em ambos os casos, que incluímos novos pontos (virtuais) A' , B' , C' , representando a fronteira de \bar{T} , associados aos pontos A , B e C , respectivamente. Obviamente, $T \subseteq \bar{T}$.

Formalmente, se assumimos $\bar{X}_j = X_j/\Delta_j$ para $\Delta_j \geq 1$ e $j = 1, \dots, n$, teremos o seguinte Conjunto de Tecnologia \bar{T} contendo T :

$$\bar{T} = \{(X_t, Y_t) | X_t \geq \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j \bar{X}_j, Y_t \leq \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j Y_j \text{ e } \bar{\lambda}_j \geq 0 \text{ p/ } j = 1, \dots, n\}. \quad (3.32)$$

Cabe notar aqui, que a metodologia empregada na determinação das supereficiências⁴, irá determinar o formato de \bar{T} , podendo afetar assim o *ranking* de eficiências bem como o *ranking* de porte relativo.

⁴Em nosso caso, o *ModeloAP* de Andersen e Petersen, com orientação a *inputs*.

3.5.1 Mais sobre o *ModeloSRQS*

Considere novamente a formulação primal como descrita em (3.18)-(3.21):

$$FO_k^* = \max \left(\sum_{r=1}^s u_r^{(k)} Y_{rk} \right) \quad (3.33)$$

$$s.t. : \sum_{i=1}^m v_i^{(k)} \bar{X}_{ik} = 1, \quad (3.34)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r^{(k)} Y_{rj} - \Delta_j \sum_{i=1}^m v_i^{(k)} \bar{X}_{ij} \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (3.35)$$

$$u_r^{(k)}, v_i^{(k)} \geq 0, \quad \forall r = 1, \dots, s \text{ e } i = 1, \dots, m. \quad (3.36)$$

Vimos que a inclusão de novas *DMU's* virtuais sobre a fronteira de supereficiência define um novo conjunto de Tecnologia \bar{T} estendido contendo T . Além disso, cada DMU_k (virtual ou não) possui um conjunto ótimo de pesos $(v_i^{(k)}, u_r^{(k)})$ associado a uma solução de (3.33)-(3.36). Portanto, ao resolvermos o *ModeloSRQS* (vide Seção 3.2), buscamos uma solução (\bar{u}, \bar{v}) de pesos comuns, próxima do vetor $E^* = (E_1^*, \dots, E_n^*)$ de supereficiências DEA. Entretanto, note que o conjunto viável associado ao modelo (3.33)-(3.36) é definido pelos pares (\bar{X}_j, Y_j) de *inputs* (modificados) e *outputs*, respectivamente, para $j = 1, \dots, n$. Assim, podemos reescrever o *ModeloSRQS* da seguinte forma:

$$\bar{D} = \min \left(\sum_{j=1}^n (E_j^* - E_j(u, v'))^2 \right)^{1/2} \quad (3.37)$$

$$s.t. : E_j(u, v') = \frac{\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i' \bar{X}_{ij}} \leq E_j^*, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (3.38)$$

$$u_r, v_i \geq \epsilon > 0, \quad \forall r = 1, \dots, s \text{ e } i = 1, \dots, m. \quad (3.39)$$

Acima, lembre-se que $\bar{X}_{ij} = X_{ij}/\Delta_j$ onde $\Delta_j = \max\{E_j^*, 1\}$. Portanto, se substituirmos \bar{X}_{ij} por X_{ij}/Δ_j em (3.38) e fazendo $v_i = v_i'/\Delta_j$, teremos exatamente a formulação do *ModeloSRQS* como descrita em (3.2)-(3.4). Logo, podemos representar o conjunto viável associado ao *ModeloSRQS*, apenas em função do vetor E^* (de supereficiências DEA), e dos pares (X_j, Y_j) , para $j = 1, \dots, n$.

Finalmente, considere novamente as coordenadas (\bar{a}_j, \bar{b}_j) com pesos comuns (\bar{u}, \bar{v}) (de *inputs* e *outputs* virtuais) associada a uma solução ótima do *ModeloSRQS*. Lembre-se que $E_j(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{b}_j/\bar{a}_j$, representam $\bar{\ell}_2$ -eficiências, possivelmente maiores que 1. Portanto,

de (3.3) temos que:

$$E_j(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{\sum_{r=1}^s \bar{u}_r Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \bar{v}_i X_{ij}} \leq E_j^*, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (3.40)$$

Note que as coordenadas (\bar{a}_j, \bar{b}_j) estão associadas ao conjunto de Tecnologia \bar{T} contendo T , expresso em termos de X, Y e E^* . Como buscamos a determinação de um *ranking* completo de *DMUs*, limitado pela unidade, podemos executar movimentos de rotação de *DMUs* (virtuais), como descrito no Corolário 1. Neste caso, a *DMU* (virtual) (\bar{a}_j, \bar{b}_j) com maior $\bar{\ell}_2$ -eficiência, determina o parâmetro ϕ_e de rotação, ou seja, $\phi_e = \max\{E_j, \forall j = 1, \dots, n\}$ (vide Definição 2 da Seção 3.2). Do Corolário 1, lembre-se que $\tilde{v}_i = (\phi_e/\phi_s) \bar{v}_i$ e $\tilde{u}_r = (1/\phi_s) \bar{u}_r$, $\forall i = 1, \dots, m$ e $r = 1, \dots, s$. Sem perda de generalidade, podemos fazer $\phi_s = 1$, parâmetro de translação. Dessa forma, concluímos que $\bar{v}_i = \tilde{v}_i/\phi_e$ e $\bar{u}_r = \tilde{u}_r$. Assim, substituindo \bar{v}_i e \bar{u}_r em (3.40), obtemos:

$$E_j(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{\sum_{r=1}^s \tilde{u}_r Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i X_{ij}} \leq \frac{E_j^*}{\phi_e}, \quad \forall j = 1, \dots, n. \quad (3.41)$$

Portanto, do Corolário 1, obtemos novas coordenadas $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ obtidas de (\bar{a}_j, \bar{b}_j) através de movimentos de rotação. Note que a constante B_j presente no Corolário 1, influencia apenas nos movimentos de translação de *DMUs*, sendo desnecessária neste caso.

Podemos mostrar agora que esse movimento de rotação de *DMUs* determina, a partir de \bar{T} , um novo conjunto de Tecnologia \tilde{T} reduzido contendo T . Em outras palavras, teremos $\bar{T} \supseteq \tilde{T} \supseteq T$. Inicialmente, lembre-se da definição de \bar{T} que:

$$\bar{T} = \{(X_t, Y_t) | X_t \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{X}_j, Y_t \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \text{ e } \lambda_j \geq 0 \text{ p/ } j = 1, \dots, n\}. \quad (3.42)$$

onde $\bar{X}_j = X_j/\Delta_j$ para $\Delta_j = \max\{E_j^*, 1\}$ e $j = 1, \dots, n$. Agora, como $\phi_e \geq 1$, ao substituírmos E_j^* por E_j^*/ϕ_e na definição de Δ_j , obtemos $\Delta'_j = \max\{E_j^*/\phi_e, 1\} \leq \Delta_j$. Assim, concluímos que:

$$X_t \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(\frac{X_j}{\Delta'_j} \right) \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(\frac{X_j}{\Delta_j} \right), \text{ p/ } j = 1, \dots, n. \quad (3.43)$$

Formalmente, podemos definir o seguinte conjunto de Tecnologia \tilde{T} normalizado:

$$\tilde{T} = \{(X_t, Y_t) | X_t \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{X}_j, Y_t \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \text{ e } \lambda_j \geq 0 \text{ p/ } j = 1, \dots, n\}. \quad (3.44)$$

onde $\tilde{X}_j = X_j/\Delta'_j$ para $\Delta'_j = \max\{E_j^*/\phi_e, 1\}$.

A Figura 3.6(a) ilustra um exemplo com 5 *DMUs*, um único *input* e um único *output*, e a Figura 3.6(b) ilustra um exemplo onde temos 5 *DMUs* e 2 *inputs* (assumindo um número arbitrário de *outputs*).

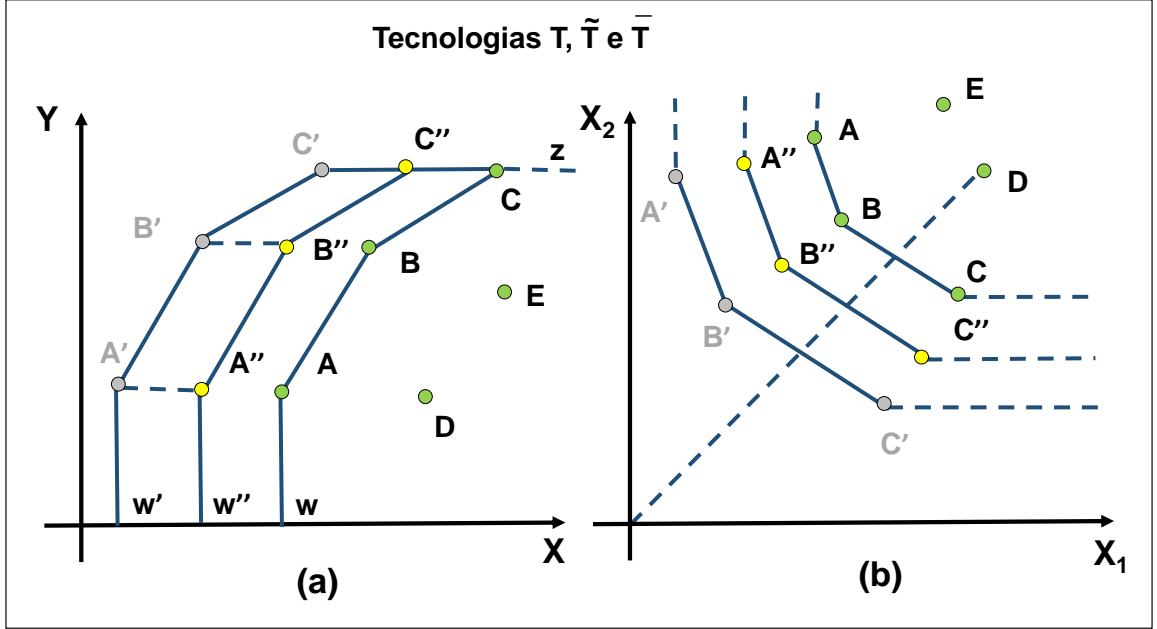


Figura 3.6: Conjuntos de Tecnologia T , \tilde{T} e \bar{T} . (a) Exemplo com 5 *DMUs*, um único *input* e um único *output* (b) Exemplo com 5 *DMUs* e 2 *inputs*. Os pontos em verde, A, B, C, D e E , representam as *DMUs* associadas aos dados de entrada originais. Os pontos em amarelo, A'', B'' e C'' , representam as novas *DMUs* virtuais obtidas a partir de A', B' e C' (em cinza), definindo a fronteira de \tilde{T} .

Note agora que, a partir das *DMUs* (virtuais) A', B', C' , representando a fronteira de \bar{T} , determinamos as *DMUs* A'', B'' e C'' representando a fronteira de \tilde{T} , todas associados às *DMUs* A, B e C , respectivamente. Em outras palavras, através da rotação de *DMUs* (normalização) determinamos uma nova fronteira \tilde{T} reduzida, contendo T . Obviamente, $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \bar{T}$.

3.6 Comparação com a definição porte relativo apresentada em Carvalho[16]

Nesta seção, fazemos uma análise comparativa de nossa definição de porte relativo utilizando normas- ℓ_q , com aquela apresentada em Carvalho [16]. Em seu trabalho, uma vez obtidos os *inputs* e *outputs* virtuais $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ (determinados após a normalização), define-se

eficiência e porte relativo como a seguir:

$$\tilde{e}_j = \frac{\tilde{b}_j}{\tilde{a}_j} \quad e \quad \tilde{s}_j = \frac{\tilde{a}_j \cdot \tilde{b}_j}{2} \quad \text{para } j = 1 \dots n. \quad (3.45)$$

Sua análise de eficiência é bastante semelhante à η -eficiência aqui apresentada⁵. Entretanto, sua definição de porte relativo se baseia na determinação de *áreas relativas*, já que estas representam analogamente à norma- ℓ_q uma correspondência direta entre \tilde{a}_j e \tilde{b}_j . Adicionalmente, mostramos que a Definição (3.45) de porte, representa na verdade uma pseudométrica, sendo, portanto, uma generalização do conceito de métrica. Em seguida, mostramos algumas das consequências negativas decorrentes da utilização da *área relativa* na definição do conceito de porte.

Vejamos inicialmente a seguinte definição. Dado um conjunto \mathbf{S} qualquer, uma *métrica* sobre \mathbf{S} é uma função $d : \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo às seguintes propriedades:

$$i) \ d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in S \quad (3.46)$$

$$ii) \ d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in S \quad (3.47)$$

$$iii) \ d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z), \quad \forall x, y \in S \quad (3.48)$$

$$iv) \ d(x, y) = 0, \text{ se e somente se, } x = y. \quad (3.49)$$

Dizemos que uma função $d(\cdot)$ define uma *pseudométrica* se as propriedades (i), (ii) e (iii) forem satisfeitas. Neste caso, se a propriedade (iv) não é satisfeita, podemos ter dois pontos distintos com distância nula entre si. Em outras palavras, podemos dizer que toda métrica representa uma pseudométrica. Entretanto, a recíproca não é verdadeira.

Para ilustrar essa situação, considere 3 pontos distintos associados às *DMUs* x, y e z , respectivamente, onde $x = (\tilde{a}_1, \tilde{b}_1)$, $y = (\tilde{a}_2, \tilde{b}_2)$ e $z = (\tilde{a}_3, \tilde{b}_3)$. Portanto, com base na Equação (3.45) representando a área definida pelos *inputs* e *outputs* virtuais $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$, pode-se definir a “distância” entre os pontos x e y , da seguinte forma:

$$d(x, y) = \frac{|\tilde{a}_2 \tilde{b}_2 - \tilde{a}_1 \tilde{b}_1|}{2}. \quad (3.50)$$

Note que a Definição (3.50) acima denota a diferença, em módulo, obtida entre as áreas definidas por x e y , respectivamente. Para provar que (3.50) define de fato uma pseudométrica, note inicialmente que as propriedades (i) e (ii) se verificam diretamente.

⁵A diferença reside essencialmente nas expressões de rotação e translação presentes no Lema Fundamental.

Para provar a propriedade (iii) (desigualdade triangular) temos:

$$d(x, y) + d(y, z) = \frac{|\tilde{a}_1\tilde{b}_1 - \tilde{a}_2\tilde{b}_2|}{2} + \frac{|\tilde{a}_2\tilde{b}_2 - \tilde{a}_3\tilde{b}_3|}{2}. \quad (3.51)$$

Sem perda de generalidade considere inicialmente $\tilde{s}_1 \geq \tilde{s}_2$ (a outra possibilidade onde $\tilde{s}_2 < \tilde{s}_1$ pode ser provada analogamente). Temos então duas possibilidades: ou (a) $\tilde{s}_2 \geq \tilde{s}_3$; ou (b) $\tilde{s}_2 < \tilde{s}_3$. Assim, se (a) $\tilde{s}_2 \geq \tilde{s}_3$ obtemos:

$$d(x, y) + d(y, z) = \frac{\tilde{a}_1\tilde{b}_1 - \tilde{a}_2\tilde{b}_2}{2} + \frac{\tilde{a}_2\tilde{b}_2 - \tilde{a}_3\tilde{b}_3}{2} = \frac{\tilde{a}_1\tilde{b}_1 - \tilde{a}_3\tilde{b}_3}{2} = d(x, z). \quad (3.52)$$

Note que $d(x, z) \geq 0$ pois $\tilde{s}_1 \geq \tilde{s}_3$. Entretanto, se (b) $\tilde{s}_2 < \tilde{s}_3$, segue então de (3.51) que:

$$d(x, y) + d(y, z) = \frac{\tilde{a}_1\tilde{b}_1 - \tilde{a}_2\tilde{b}_2}{2} + \frac{\tilde{a}_3\tilde{b}_3 - \tilde{a}_2\tilde{b}_2}{2} = \frac{\tilde{a}_1\tilde{b}_1 + \tilde{a}_3\tilde{b}_3}{2} - \tilde{a}_2\tilde{b}_2. \quad (3.53)$$

Como $\tilde{s}_2 < \tilde{s}_3$, temos $\tilde{a}_2\tilde{b}_2 < \tilde{a}_3\tilde{b}_3$. Assim, substituindo $\tilde{a}_2\tilde{b}_2$ por $\tilde{a}_3\tilde{b}_3$ em (3.53), obtemos:

$$d(x, y) + d(y, z) > \frac{\tilde{a}_1\tilde{b}_1 - \tilde{a}_3\tilde{b}_3}{2}. \quad (3.54)$$

Portanto, independentemente da relação entre \tilde{s}_1 e \tilde{s}_3 , temos das expressões (3.52) e (3.54) que:

$$d(x, y) + d(y, z) \geq \frac{|\tilde{a}_1\tilde{b}_1 - \tilde{a}_3\tilde{b}_3|}{2} = d(x, z), \quad (3.55)$$

o que conclui nossa prova.

A seguir, mostramos um exemplo onde a propriedade (iv) não se verifica. Para isso, considere a Figura 3.7, representando a *range area*⁶ como definida em Carvalho[16] (vide [16] para maiores detalhes).

Na figura, consideramos dois pontos com coordenadas $x = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $y = (2, 1)$, respectivamente. Note que, x e y estão sobre a fronteira de porte relativo (como definida por Carvalho[16]). Portanto, ambos os pontos são distintos e possuem distância *unitária* da origem $(0, 0)$ de *inputs* e *outputs* *virtuais*. Entretanto, da Equação (3.50), podemos concluir diretamente que $d(x, y) = 0$, não satisfazendo dessa forma à propriedade (iv). Na verdade, note que todos os pontos sobre a fronteira de porte relativo (vide linha verde da Figura (3.7)) possuem distância nula entre si, ao contrário dos pontos sobre a fronteira de eficiência (linha azul) onde pontos distintos possuem distâncias estritamente positivas. Portanto, de maneira geral, a utilização da norma- ℓ_q induzindo à distância- ℓ_q , como utilizada em nosso trabalho, e satisfazendo às propriedades (i) – (iv), é sem dúvida mais robusta que a pseudométrica definida pela área relativa. Para maiores detalhes sobre

⁶Em Carvalho[16], emprega-se *range area* em substituição ao termo *área leque*, aqui utilizado.

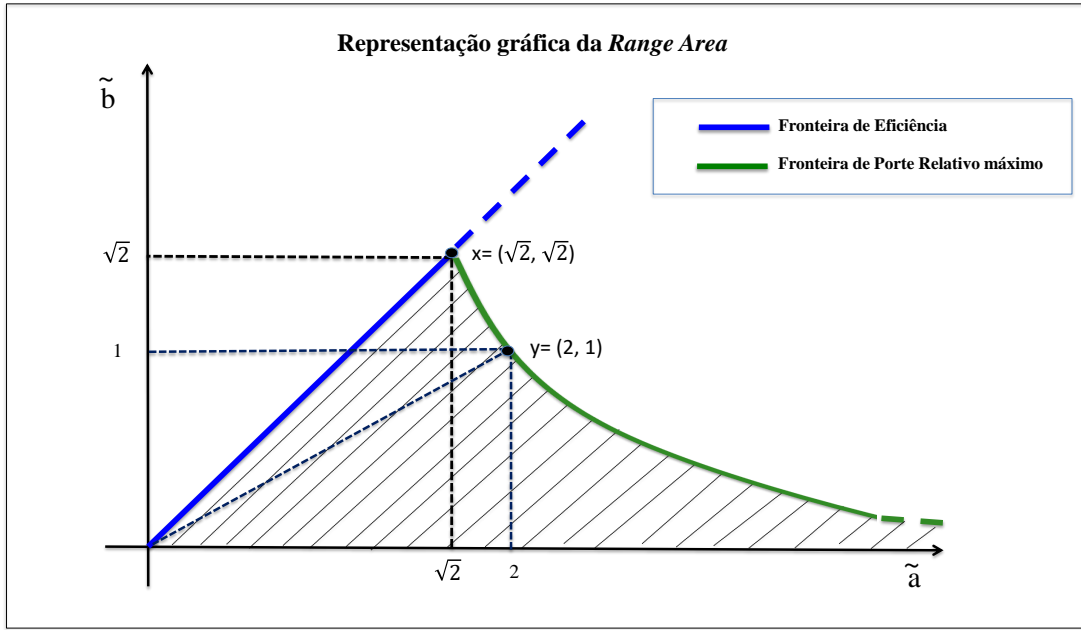


Figura 3.7: Representação da *Range Area* (Área Leque proposta em [16]).

a definição de espaços definindo métricas e pseudométricas vide Lima [29].

Outra diferença pode ser observada no conceito de norma. Em nosso trabalho utilizamos $\tilde{s}_j = ((\tilde{a}_j)^q + (\tilde{b}_j)^q)^{1/q}$ para algum inteiro positivo q , ou norma- ℓ_q . Formalmente, dizemos que uma função $|\cdot| : S \rightarrow \mathfrak{R}$, que associa a cada $x \in S$ um número real $|x|$, é chamada *norma* de x , se as seguintes propriedades forem satisfeitas:

$$a) \text{ Se } x \geq 0 \text{ entao } |x| \neq 0; \quad (3.56)$$

$$b) |k.x| = |k|.|x|; \quad (3.57)$$

$$c) |x + y| \leq |x| + |y|. \quad (3.58)$$

Podemos verificar facilmente que $\tilde{s}_j = ((\tilde{a}_j)^q + (\tilde{b}_j)^q)^{1/q}$ define de fato uma *norma* sobre **S** (vide Lima [29]), onde **S** neste caso representa nossa *Área Leque*. Entretanto, se utilizarmos $\tilde{s}_j = (\tilde{a}_j \tilde{b}_j)/2$, não obtemos uma norma. A propriedade (a) pode ser verificada diretamente já que $\tilde{a}_j, \tilde{b}_j > 0$. Entretanto, podemos constatar que a propriedade (b) não se verifica. De fato, temos:

$$|k.x| = |k.(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)| = |(k\tilde{a}_j, k\tilde{b}_j)| = \left| \left(\frac{k\tilde{a}_j \cdot k\tilde{b}_j}{2} \right) \right| = k^2 \left| \left(\frac{\tilde{a}_j \cdot \tilde{b}_j}{2} \right) \right| = k^2 |x|. \quad (3.59)$$

Em outras palavras, na multiplicação de $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ por k , o valor da área cresce em um de fator k^2 , ao passo que na norma- ℓ_q , utilizada neste trabalho, o acréscimo é da ordem

de k .

Apesar de $\tilde{s}_j = (\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)/2$ não definir uma norma em Carvalho [16], isso não representa um impedimento em suas operações com *áreas relativas*. Entretanto, a utilização da norma- ℓ_q na definição de *porte relativo* induz naturalmente uma métrica, e é sem dúvida, mais consistente que a pseudométrica utilizada em [16].

Capítulo 4

Definição de metas restritas a um conjunto Ψ de $DMUs$

Depois de calcularmos η -eficiência e *porte relativo* para todas as $DMUs$ na *Área Leque*, mostramos como atualizar seus *inputs* e/ou *outputs* visando a determinação de novas metas de performance. Baseada em decisões gerenciais, definimos novas restrições de eficiência e *porte relativo* restrito a um subconjunto Ψ de $DMUs$. Em outras palavras, trabalhamos com uma nova modelagem matemática (normalizada) no intuito de guiar o deslocamento de todas as $DMUs$ de Ψ em direção a uma “fronteira ideal” descrita por novas metas de eficiência e novas restrições de *porte relativo* restrito a M' .

4.1 Formulação auxiliar não-normalizada

Antes de introduzirmos formalmente nosso modelo, discutimos a formulação de um problema equivalente auxiliar, definido antes da normalização. Retornemos ao *ModeloSRQ* de Kao e Hung [24] para obtenção de pesos (\bar{u}, \bar{v}) e coordenadas (\bar{a}_j, \bar{b}_j) (*representativas* de M), necessários na minimização da distância euclidiana entre as $\bar{\ell}_2$ -eficiências $E = (E_1, \dots, E_n)$ e $E^* = (E_1^*, \dots, E_n^*)$, vetor de supereficiências DEA. Considere também a seguinte notação: Dada as matrizes X_{ij} e Y_{rj} (para $i = 1, \dots, m$, $r = 1, \dots, s$ e $j = 1, \dots, n$), a ideia em ambas formulações (normalizada e não-normalizada) é determinar matrizes \bar{X}_{ij} e \bar{Y}_{rj} , representando novos valores de *inputs* e *outputs*. Introduzimos variáveis δ_{ij} (resp., ϕ_{rj}) para representar a variação do *input* i (resp., *output* r) associada à DMU_j . Desta forma, as restrições $\bar{X}_{ij} = X_{ij} + \delta_{ij} > 0$ e $\bar{Y}_{rj} = Y_{rj} + \phi_{rj} > 0$, respectivamente, expressam os novos valores dos *inputs* e *outputs*. Para evitar a eliminação de itens essenciais durante o processo, podemos introduzir limites inferiores para \bar{X}_{ij} e \bar{Y}_{rj} . Assim,

baseado em aspectos específicos para cada problema, podemos assumir $X_{ij} + \delta_{ij} \geq L_{ij}^\delta$ e $Y_{rj} + \phi_{rj} \geq L_{rj}^\phi$ para $L_{ij}^\delta, L_{rj}^\phi \geq \epsilon > 0$.

Dessa forma, baseado em decisões gerenciais, descrevemos novas metas de eficiência e impomos novas restrições às distâncias- ℓ_q . Inicialmente, consideramos um vetor de metas $\bar{\Theta} = (\bar{\Theta}_1, \dots, \bar{\Theta}_n)$ de forma que $E_j \leq \bar{\Theta}_j \leq \bar{\Theta}_{max}$ com $\bar{\Theta}_{max} = \max\{E_j^*, j = 1, \dots, n\}$. Dizemos que $\bar{\Theta}$ é um *vetor de metas restrito a Ψ* , se e somente se, $\bar{\Theta}_j > E_j, \forall j \in \Psi$ e $\bar{\Theta}_j = E_j, \forall j \notin \Psi$. Além disso, dizemos que a DMU_k é uma *barreira* para todas as $DMUs$, se e somente se, $E_k^* = \bar{\Theta}_{max}$. Em outras palavras, a DMU_k possui a maior supereficiência DEA e define uma fronteira linear ideal para todas as $DMUs$ no conjunto. Para facilitar nossa discussão, denotamos por *área não-normalizada*, o conjunto de todas as coordenadas (\bar{a}_j, \bar{b}_j) com um $\bar{a}_j > 0$ e $\bar{b}_j > 0$, tal que $\bar{E}_j = \bar{b}_j/\bar{a}_j \leq \bar{\Theta}_{max}$. Finalmente, para definir as restrições das distâncias- ℓ_q *restritas a M'* , estabelecemos os parâmetros $0 < t'_j \leq t''_j$ denotando, respectivamente, os limites inferior e o superior para cada distância- ℓ_q associada a uma DMU_j de Ψ .

Portanto, a ideia na formulação não-normalizada é introduzir um problema intermediário (auxiliar) cujo objetivo é minimizar a distância entre os vetores E e $\bar{\Theta}$ por meio da atualização dos *inputs* e *outputs* das matrizes X e Y , respectivamente. Assim, depois de definido o subconjunto Ψ de $DMUs$ e $M' \subseteq M$, calculamos inicialmente pesos (\bar{u}, \bar{v}) pelo *ModeloSRQS* e determinamos $E = (E_1, \dots, E_n)$ e distâncias- ℓ_q $D_j(q) \equiv D_j^q(\bar{u}, \bar{v})$ *restritas a M'* . Dessa forma, propomos o seguinte modelo intermediário, denotado aqui por *ModeloSRQS₁*:

$$D' = \min \left(\sum_{j \in \Psi} \left(\bar{\Theta}_j - \frac{\sum_{r=1}^s \bar{u}_r (Y_{rj} + \phi_{rj})}{\sum_{i=1}^m \bar{v}_i (X_{ij} + \delta_{ij})} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (4.1)$$

$$s.t. : \sum_{r=1}^s \bar{u}_r (Y_{rj} + \phi_{rj}) - \bar{\Theta}_j \sum_{i=1}^m \bar{v}_i (X_{ij} + \delta_{ij}) \leq 0; \quad \forall j \in \Psi. \quad (4.2)$$

$$t'_j D_j(q) \leq \left[\left(\sum_{u \in O'} \bar{u}_r (Y_{rj} + \phi_{rj}) \right)^q + \left(\sum_{i \in I'} \bar{v}_i (X_{ij} + \delta_{ij}) \right)^q \right]^{1/q} \leq t''_j D_j(q); \quad \forall j \in \Psi. \quad (4.3)$$

$$\delta_{ij} \geq -X_{ij} + L_{ij}^\delta; \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ e } j \in \Psi. \quad (4.4)$$

$$\phi_{rj} \geq -Y_{rj} + L_{rj}^\phi; \quad \forall r = 1, \dots, s \text{ e } j \in \Psi. \quad (4.5)$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ e } \phi_{rj} = 0; \quad \forall i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s \text{ e } j \notin \Psi. \quad (4.6)$$

A Função Objetivo (4.1) mostra como atualizar as matrizes X e Y no cálculo das novas

$\bar{\ell}_2$ -eficiências de Ψ em direção às suas metas correspondentes definidas por $\bar{\Theta}$. A Restrição (4.2) garante que a nova eficiência associada à (\bar{X}, \bar{Y}) não exceda $\bar{\Theta}_j$. As Restrições (4.3) indicam que as novas distâncias- ℓ_q restritas a M' , devem variar entre $t'_j D_j(q)$ e $t''_j D_j(q)$ para cada DMU_j de Ψ . As Restrições (4.4) e (4.5) garantem que as novas matrizes \bar{X} e \bar{Y} tenham coeficientes maiores que o seu limite inferior correspondente $L_{ij}^\delta, L_{rj}^\phi \geq \epsilon$. Por último, a Restrição (4.1) nos garante que somente os *inputs* e *outputs* das *DMUs* de Ψ são atualizadas. Como consequência, as $\bar{\ell}_2$ -eficiências e distâncias- ℓ_q de todas as *DMUs* fora de Ψ permanecem inalteradas.

Note que, se $\phi_{rj} = \delta_{ij} = 0, \forall i, j, r$; podemos nos deparar com solução inviável associada a (\bar{a}_j, \bar{b}_j) no caso da Restrição (4.3) ser violada. Assim, após resolvermos o *ModeloSRQS₁* na obtenção de uma solução ótima (ϕ^*, δ^*) , determinamos novos pontos viáveis $(\bar{\mathbf{a}}''_j, \bar{\mathbf{b}}''_j)$ de modo que: $\bar{\mathbf{a}}''_j = \sum_{i=1}^m \bar{v}_i (X_{ij} + \delta_{ij}^*)$ e $\bar{\mathbf{b}}''_j = \sum_{r=1}^s \bar{u}_r (Y_{rj} + \phi_{rj}^*)$ ¹. Representaremos as novas $\bar{\ell}_2$ -eficiências por $E'_j = \bar{\mathbf{b}}''_j / \bar{\mathbf{a}}''_j$ para $j = 1, \dots, n$. Observe que $(\bar{\mathbf{a}}''_j, \bar{\mathbf{b}}''_j)$ é o *representativo* de M (mas não M'). Denotamos por $\bar{\mathbf{a}}'_j = \sum_{i \in I'} \bar{v}_i (X_{ij} + \delta_{ij}^*)$ e $\bar{\mathbf{b}}'_j = \sum_{r \in O'} \bar{u}_r (Y_{rj} + \phi_{rj}^*)$, o vetor correspondente *restrito a M'* . Finalmente, da Equação (3.1) acima, determinamos o vetor $(\bar{\mathbf{a}}_j, \bar{\mathbf{b}}_j)$ *representativo* de M' (veja Capítulo 3). Dessa forma, determinamos a seguinte sequencia: $(\bar{a}_j, \bar{b}_j) \rightarrow (\bar{\mathbf{a}}''_j, \bar{\mathbf{b}}''_j) \rightarrow (\bar{\mathbf{a}}'_j, \bar{\mathbf{b}}'_j) \rightarrow (\bar{\mathbf{a}}_j, \bar{\mathbf{b}}_j)$ na área *não-normalizada*.

4.2 Formulação normalizada

Note agora que, depois da execução do Algoritmo 1, como todas as *DMUs* estão no interior da *Área Leque*, uma questão interessante é considerar o mesmo problema em uma *área normalizada*, expressa através de coordenadas normalizadas. A partir deste ponto, mostraremos como as novas matrizes \bar{X} e \bar{Y} , bem como os parâmetros t'_j e $t''_j, \forall j \in \Psi$, permanecem inalterados após a normalização, isto é, após a substituição de $\bar{u}_r = \phi_s \tilde{u}_r$ e $\bar{v}_i = (\phi_s / \phi_e) \tilde{v}_i$ na formulação do *ModeloSRQS₁*, para $r = 1, \dots, s$ e $i = 1, \dots, m$ (veja Corolário 1). Dessa forma, podemos reescrever esse modelo auxiliar intermediário como função dos novos pesos (\tilde{u}, \tilde{v}) e D'' , onde D'' denota a distância euclidiana entre o vetor $\tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n)$ de eficiências normalizadas e o vetor de metas normalizadas $\tilde{\Theta} = (\tilde{\Theta}_1, \dots, \tilde{\Theta}_n)$ com $\tilde{\Theta}_j = \bar{\Theta}_j / \phi_e$, para $j = 1, \dots, n$.

¹A partir de agora, denotaremos em negrito as novas coordenadas associada às atualizações de X e Y respectivamente.

Então, de (4.1) considere:

$$D' = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\bar{\Theta}_j - \frac{\sum_{r=1}^s \bar{u}_r(Y_{rj} + \phi_{rj})}{\sum_{i=1}^m \bar{v}_i(X_{ij} + \delta_{ij})} \right)^2}. \quad (4.7)$$

Após substituir (\bar{u}, \bar{v}) por (\tilde{u}, \tilde{v}) na equação acima, temos:

$$\phi_e D'' = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\bar{\Theta}_j - \frac{\sum_{r=1}^s \tilde{u}_r(Y_{rj} + \phi_{rj})}{\frac{1}{\phi_e} \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i(X_{ij} + \delta_{ij})} \right)^2} \Rightarrow D'' = \sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\bar{\Theta}_j}{\phi_e} - \frac{\sum_{r=1}^s \tilde{u}_r(Y_{rj} + \phi_{rj})}{\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i(X_{ij} + \delta_{ij})} \right)^2} \quad (4.8)$$

onde $D' = \phi_e D''$ (veja que no Exemplo 1 do Capítulo 3 que $D' = \bar{D}$ e $D'' = \tilde{D}$, respectivamente, para $\bar{\Theta}_j = E_j^*$, $\delta \equiv 0$ e $\phi \equiv 0$). Se lembrarmos que $\tilde{s}_j(q) = D_j(q)/\phi_s$ onde $\phi_s = \max\{D_j(q), \forall j = 1, \dots, n\}$ (veja Definição 2), após substituir (\bar{u}, \bar{v}) por (\tilde{u}, \tilde{v}) nas restrições (4.1), (4.2) e (4.3) respectivamente, obtemos o seguinte modelo associado à versão normalizada do *ModeloSRQS₁*, denotado aqui por *ModeloSRQS₂*:

$$D'' = \min \left(\sum_{j \in \Psi} \left(\frac{\bar{\Theta}_j}{\phi_e} - \frac{\sum_{r=1}^s \tilde{u}_r(Y_{rj} + \phi_{rj})}{\sum_{i=1}^m \tilde{v}_i(X_{ij} + \delta_{ij})} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

$$s.t. : \sum_{r=1}^s \tilde{u}_r(Y_{rj} + \phi_{rj}) - \left(\frac{\bar{\Theta}_j}{\phi_e} \right) \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i(X_{ij} + \delta_{ij}) \leq 0; \quad \forall j \in \Psi. \quad (4.10)$$

$$t'_j \tilde{s}_j(q) \leq \left[\left(\sum_{r \in O'} \tilde{u}_r(Y_{rj} + \phi_{rj}) \right)^q + \frac{1}{\phi_e^q} \left(\sum_{i \in I'} \tilde{v}_i(X_{ij} + \delta_{ij}) \right)^q \right]^{1/q} \leq t''_j \tilde{s}_j(q); \quad \forall j \in \Psi. \quad (4.11)$$

$$\delta_{ij} \geq -X_{ij} + L_{ij}^\delta; \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ e } j \in \Psi. \quad (4.12)$$

$$\phi_{rj} \geq -Y_{rj} + L_{rj}^\phi; \quad \forall r = 1, \dots, s \text{ e } j \in \Psi. \quad (4.13)$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ e } \phi_{rj} = 0; \quad \forall i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s \text{ e } j \notin \Psi. \quad (4.14)$$

No modelo acima, a Função Objetivo (4.9) minimiza a distância euclidiana entre o vetor $\tilde{\mathbf{e}} = (\tilde{\mathbf{e}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{e}}_n)$ das eficiências normalizadas e o vetor de metas normalizadas $\tilde{\Theta} = (\tilde{\Theta}_1, \dots, \tilde{\Theta}_n)$ onde $\tilde{\Theta}_j = \bar{\Theta}_j/\phi_e$. As Inequações (4.10) limitam os valores das novas eficiências às suas correspondentes metas normalizadas $\tilde{\Theta}_j$, para toda DMU_j de Ψ . As Restrições (4.11) determinam os novos *portes relativos restritos a M'* limitados por t'_j e t''_j respectivamente. Finalmente, as restrições (4.12), (4.13) e (4.14) definem os limites inferiores para os *inputs* e *outputs* restritos somente às *DMUs* de Ψ .

Analogamente à área não-normalizada, dizemos que uma DMU_k define uma *bar-*

reira (ou *barreira normalizada*) para todas as *DMUs* da *área leque*, se e somente se, $E_k^*/\phi_e = \tilde{\Theta}_{max} = \bar{\Theta}_{max}/\phi_e$ onde $\phi_e = \max\{E_j, \forall j = 1, \dots, n\}$, isto é, a DMU_k define uma fronteira linear ideal para todas as *DMUs* da *área leque*. Denotamos por *área normalizada*, ao conjunto de todas as coordenadas $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ onde $\tilde{a}_j, \tilde{b}_j > 0$ e $\tilde{e}_j = \tilde{b}_j/\tilde{a}_j \leq \tilde{\Theta}_{max}$. Obviamente, todos os pontos da *área leque* pertencem à *área normalizada* e todos os pontos da *área normalizada* pertencem à *área não-normalizada*.

Para melhor entendimento da formulação acima considere constantes arbitrárias $\kappa_j > 0$ para $j = 1, \dots, n$ e os vetores auxiliares $(\bar{\alpha}'', \bar{\beta}'')$ (*representativo de M*) e $(\bar{\alpha}', \bar{\beta}')$ (*restrito a M'*) de forma que $\bar{\alpha}'' = \kappa_j \alpha_j''$, $\bar{\beta}'' = \kappa_j \beta_j''$, $\bar{\alpha}' = \kappa_j \alpha_j'$ e $\bar{\beta}' = \kappa_j \beta_j'$ onde:

$$\alpha_j'' = \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i \bar{X}_{ij}, \quad \beta_j'' = \sum_{r=1}^s \tilde{u}_r \bar{Y}_{rj}, \quad \alpha_j' = \sum_{i \in I'} \tilde{v}_i \bar{X}_{ij} \quad e \quad \beta_j' = \sum_{r \in O'} \tilde{u}_r \bar{Y}_{rj}. \quad (4.15)$$

Por exemplo, podemos assumir $\kappa_j = B_j$ para $j = 1, \dots, n$, onde os valores B_j são definidos como no Corolário 1. Na verdade, podemos mostrar que os valores de κ_j para cada j , não afetam a solução do *ModeloSRQS₂*. De fato, observe a partir da Equação (3.1) acima que:

$$\bar{\alpha}_j = \bar{K}_j \cdot \bar{\alpha}_j'' \quad e \quad \bar{\beta}_j = \bar{K}_j \cdot \bar{\beta}_j'' \quad com \quad \bar{K}_j = \left(\frac{(\alpha_j')^q + (\beta_j')^q}{(\alpha_j'')^q + (\beta_j'')^q} \right)^{1/q}. \quad (4.16)$$

Assim sendo, o vetor $(\bar{\alpha}_j, \bar{\beta}_j)$ é *representativo* de M' (veja Figura 4.1). Assim, para algum valor $\bar{C}_j = C_j/\kappa_j$, podemos rescrever a Restrição (4.11) como:

$$t_j' \tilde{s}_j(q) \leq \left[(\beta_j')^q + \frac{1}{\phi_e^q} (\alpha_j')^q \right]^{1/q} = \bar{C}_j [(\bar{\beta}_j'')^q + (\bar{\alpha}_j'')^q]^{1/q} \leq t_j'' \tilde{s}_j(q); \quad \forall j \in \Psi \quad (4.17)$$

onde:

$$\bar{C}_j = \frac{1}{\kappa_j} \left(\frac{(\beta_j')^q + \frac{1}{\phi_e^q} (\alpha_j')^q}{(\beta_j'')^q + (\alpha_j'')^q} \right)^{1/q} \quad e \quad C_j = \left(\frac{(\beta_j')^q + \frac{1}{\phi_e^q} (\alpha_j')^q}{(\beta_j'')^q + (\alpha_j'')^q} \right)^{1/q} \quad (4.18)$$

Assim, dado uma solução ótima $(\phi_{rj}^*, \delta_{ij}^*)$ para o *ModeloSRQS₂*, podemos obter as coordenadas $(\tilde{\mathbf{a}}'', \tilde{\mathbf{b}}'')$ *representativas* de M , de modo que: $\tilde{\mathbf{a}}_j'' = \bar{C}_j \alpha_j'' = C_j \alpha_j''$ e $\tilde{\mathbf{b}}_j'' = \bar{C}_j \beta_j'' = C_j \beta_j''$. Portanto, sem perda de generalidade podemos supor $\kappa_j = 1$ para $j = 1, \dots, n$. Note que o vetor $(\tilde{\mathbf{a}}', \tilde{\mathbf{b}}')$ *restrito a M'* têm coordenadas: $\tilde{\mathbf{a}}_j' = C_j \alpha_j'$ e $\tilde{\mathbf{b}}_j' = C_j \beta_j'$ e satisfaz a Restrição (4.17) acima. Finalmente, das Equações (4.16) e (4.18), determinamos

Depois do deslocamento de todas as *DMUs* de Ψ em direção a sua meta correspondente, tratamos a possibilidade de supereficiência e/ou *porte relativo* que “escapam” da *Área Leque* (denotados aqui por *superdimensionamento relativo*). Mostraremos como restabelecer a η -eficiência e o *porte relativo* limitados pela unidade.

4.3 Supereficiência e Superdimensionamento

Nesta seção sintetizamos todos os passos desenvolvidos acima e mostramos como utilizar o *Lema Fundamental* para tratar de duas situações descritas anteriormente: *supereficiência* e/ou *superdimensionamento*. Inicialmente, considere \tilde{e}_j e $\tilde{s}_j(\mathbf{q})$ denotando, respectivamente, a nova eficiência e o novo *porte relativo* da DMU_j obtida após a solução do *ModeloSRQS₂*, isto é, depois da atualização das matrizes X e Y . Neste caso, uma DMU_j se torna *supereficiente* sempre que $\tilde{e}_j > 1$. Da mesma forma, a DMU_j estará *superdimensionada* sempre que $\tilde{s}_j(\mathbf{q}) > 1$. Assim, como todas as posições na área leque são relativas, suas eficiências correspondentes (η -eficiências) e/ou *portes relativos* devem ser atualizados. Na sequência, mostraremos como utilizar o *Lema Fundamental* para tratar da supereficiência e superdimensionamento relativo. Em outras palavras, mostraremos como atualizar os *inputs* e *outputs* virtuais na determinação de novas posições relativas para todas as *DMUs* na *área leque*.

Para sintetizar nossos resultados, considere o seguinte algoritmo utilizado na definição de metas gerenciais restritas a Ψ . Como mencionado anteriormente, fixamos os parâmetros $0 < t'_j \leq t''_j$, utilizados na determinação das restrições de *porte relativo* e as novas metas $\tilde{\Theta}_j$ onde $\tilde{e}_j \leq \tilde{\Theta}_j \leq \tilde{\Theta}_{max}$, $\forall j \in \Psi$.

Algoritmo 2: {supereficiência e superdimensionamento relativo}

Entradas: Matrizes X e Y , matrizes L^δ e L^ϕ (limites inferiores); vetor de pesos (\tilde{u}, \tilde{v}) , norma- ℓ_q , constante ϕ_e , parâmetros $0 < t'_j \leq t''_j$ e as metas de eficiência $\tilde{\Theta}_j$ para $j \in \Psi$.

Saídas: Matrizes \bar{X}, \bar{Y} , novas η -eficiências $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$; novo vetor de *porte relativo* $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_n)$ e coordenadas $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ para $j = 1, \dots, n$.

Incío.

01. $(\delta^*, \phi^*) \leftarrow$ Executar o *ModeloSRQS₂*($\tilde{\Theta}_j, t'_j, t''_j$);
02. $(\bar{X}, \bar{Y}) \leftarrow$ Atualizar $XY(\delta^*, \phi^*, X, Y)$;
03. Calcular: $\alpha''_j \leftarrow \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i \bar{X}_{ij}$ e $\beta''_j \leftarrow \sum_{r=1}^s \tilde{u}_r \bar{Y}_{rj}$, $\forall j \in \Psi$;
04. Calcular: $\alpha'_j \leftarrow \sum_{i \in I'} \tilde{v}_i \bar{X}_{ij}$ e $\beta'_j \leftarrow \sum_{r \in O'} \tilde{u}_r \bar{Y}_{rj}$, $\forall j \in \Psi$;

05. Calcular: $\tilde{\mathbf{K}}_j = \left(\frac{(\beta'_j)^q + \frac{1}{\phi'_e} (\alpha'_j)^q}{(\beta''_j)^q + (\alpha''_j)^q} \right)^{1/q}, \quad \forall j \in \Psi.$
06. Calcular: i) $\tilde{\mathbf{a}}_j \leftarrow \tilde{\mathbf{K}}_j \alpha''_j$ e $\tilde{\mathbf{b}}_j \leftarrow \tilde{\mathbf{K}}_j \beta''_j, \quad \forall j \in \Psi;$
 ii) $\tilde{\mathbf{a}}_j \leftarrow \tilde{a}_j$ e $\tilde{\mathbf{b}}_j \leftarrow \tilde{b}_j, \quad \forall j \notin \Psi;$
07. Calcular: $\tilde{\mathbf{e}}_j \leftarrow \tilde{\mathbf{b}}_j / \tilde{\mathbf{a}}_j$ e $\tilde{\mathbf{s}}_j(q) = ((\tilde{\mathbf{a}}_j)^q + (\tilde{\mathbf{b}}_j)^q)^{1/q}, \quad \forall j = 1, \dots, n;$
08. $\phi'_e \leftarrow \max\{\tilde{\mathbf{e}}_j, \forall j = 1, \dots, n\};$
09. $\phi'_s \leftarrow \max\{\tilde{\mathbf{s}}_j(q), \forall j = 1, \dots, n\};$
10. $k_1 \leftarrow 1/\phi'_e$ e $k_2 \leftarrow 1/\phi'_s;$
11. Calcular: $A_j = \left(\frac{1 + (\tilde{\mathbf{e}}_j)^q}{1 + (k_1 \tilde{\mathbf{e}}_j)^q} \right)^{1/q},$ para $j = 1, \dots, n;$
12. **Para** $j = 1, 2, \dots, n$ **faça** {atualizar η -eficiências e porte relativos}
 $\tilde{a}_j \leftarrow (k_2 A_j) \tilde{\mathbf{a}}_j;$
 $\tilde{b}_j \leftarrow (k_1 k_2 A_j) \tilde{\mathbf{b}}_j;$
 $\tilde{e}_j \leftarrow \tilde{b}_j / \tilde{a}_j;$
 $\tilde{s}_j(q) \leftarrow ((\tilde{a}_j)^q + (\tilde{b}_j)^q)^{1/q};$
- fim Para;**
13. Retorna $(\tilde{e}, \tilde{s}, \tilde{a}, \tilde{b}, \bar{X}, \bar{Y});$

Fim.

O algoritmo inicia no Passo 1 pela execução do *ModeloSRQS₂*. Dadas as metas de eficiência $\tilde{\Theta}_j$ e os parâmetros de tamanho t'_j e t''_j , retornamos com a atualização dos *inputs* e *outputs* através das matrizes δ^* e ϕ^* , respectivamente. No Passo 02, utilizamos δ^* e ϕ^* no cálculo das novas matrizes \bar{X} e \bar{Y} e no Passo 03 calculamos os *inputs* e *outputs* virtuais (α''_j, β''_j) *representativos* de M , para todo $j \in \Psi$. No Passo 04, calculamos os *inputs* e *outputs* virtuais (α'_j, β'_j) *restritos* a M' , $\forall j \in \Psi$. Nos passos 05 e 06, calculamos a constante $\tilde{\mathbf{K}}_j$ utilizada na determinação de $(\tilde{\mathbf{a}}_j, \tilde{\mathbf{b}}_j)$, *representativo* de M' , $\forall j \in \Psi$. Note que $(\tilde{\mathbf{a}}_j, \tilde{\mathbf{b}}_j) \equiv (\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$, $\forall j \notin \Psi$. No Passo 07, determinamos as novas eficiências e os novos *portes relativos* para todas *DMUs* no conjunto. Note que temos $\tilde{\mathbf{e}}_j = \tilde{e}_j$ e $\tilde{\mathbf{s}}_j(q) = \tilde{s}_j(q)$ para todo $j \notin \Psi$. Entretanto, podemos obter supereficiência e/ou superdimensionamento das *DMUs* de Ψ , respectivamente, se $\tilde{\mathbf{e}}_j > 1$ e/ou $\tilde{\mathbf{s}}_j(q) > 1$. Nos passos 08, 09 e 10, calculamos os parâmetros k_1 e k_2 , necessários para se restabelecer os valores de eficiência e porte relativo na área leque. No Passo 11, utilizamos o *Lema Fundamental* para cálculo dos valores auxiliares A_j para $j = 1, \dots, n$ (veja Equação 3.5). É importante observar no que lema substituímos E_j por $\tilde{\mathbf{e}}_j$ e \tilde{e}_j por $(k_1 \tilde{\mathbf{e}}_j)$, respectivamente. No passo 12, se $\phi'_e \neq 1$ e/ou $\phi'_s \neq 1$ então os parâmetros k_1 e k_2 são utilizados para se determinar as novas coordenadas $(\tilde{e}_j, \tilde{s}_j(q))$ no interior da área leque de modo que pelo menos uma *DMU* fique sobre a fronteira de eficiência e pelo menos uma *DMU* fique sobre a fronteira de *porte*

relativo. No caso de $\phi'_e = \phi'_s = 1$, as *DMUs* de Ψ serão atualizadas apenas no interior da *área leque* e não haverá supereficiência ou superdimensionamento. Finalmente, no Passo 13 retornamos com as novas eficiências normalizadas \tilde{e} , *porte relativo* \tilde{s} , e as matrizes \bar{X} e \bar{Y} atualizadas. A Figura 4.2 ilustra todas as etapas exibidas no Algoritmo 2.

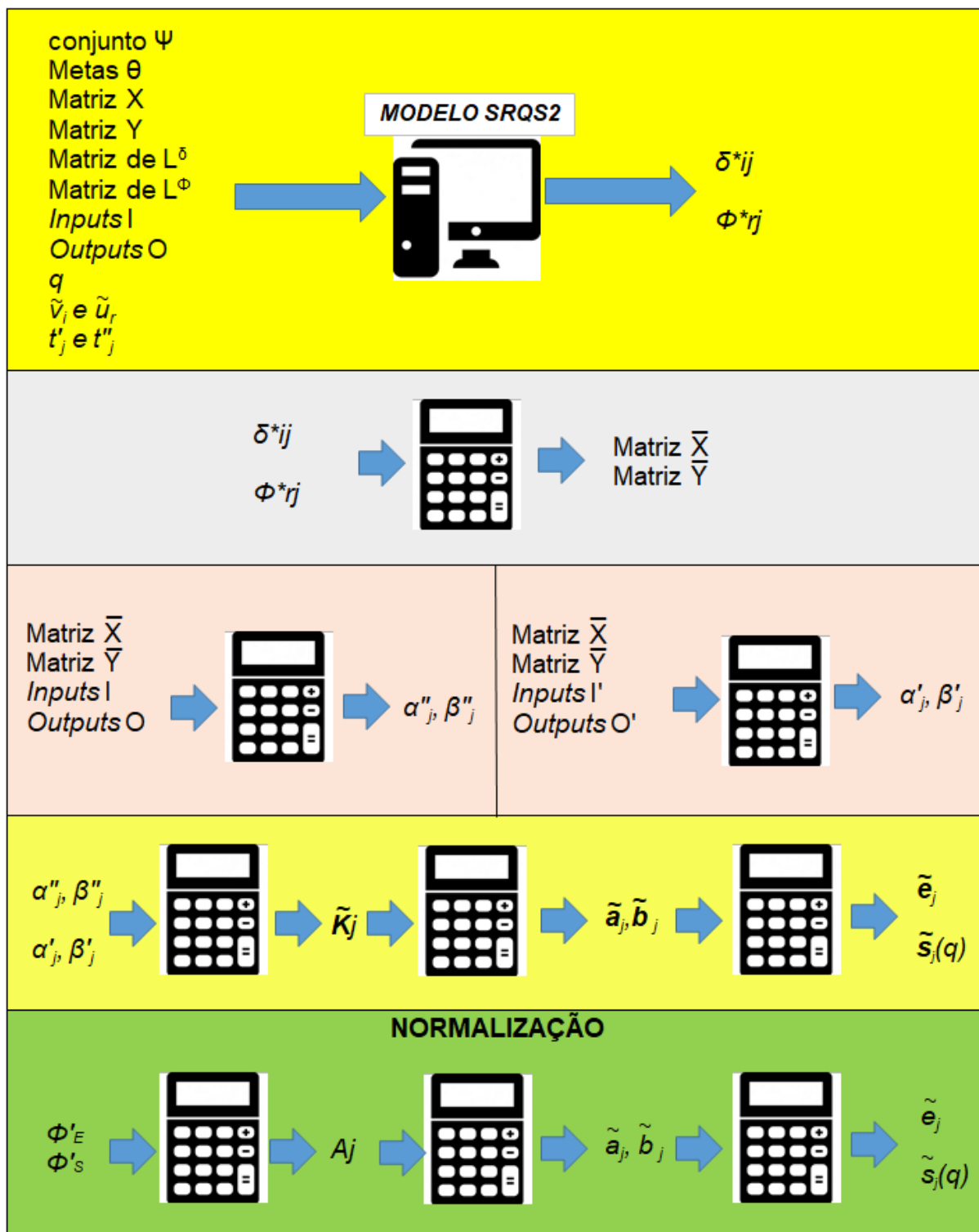


Figura 4.2: Ilustração das etapas de cálculos do Algoritmo 2

Observe que com a atualização de \bar{X}_{ij} e \bar{Y}_{rj} , podemos nos deparar com uma situação em que uma DMU_j de Ψ , inicialmente com o maior *porte relativo*, e portanto $\tilde{s}_j(q) = 1$, possuía $\tilde{s}_j(q) < 1$, resultando em um decréscimo de seu *porte relativo*. Da mesma forma, podemos obter $\tilde{e}_j = 1$ com $\tilde{\mathbf{e}}_j < 1$, resultando na redução de eficiência da DMU_j . Neste caso, podemos ter uma situação indesejada em que não temos $DMUs$ sobre a fronteira de eficiência e/ou fronteira de *porte relativo*. Apesar disso, note que o *Lema Fundamental* sempre nos auxilia em restabelecer as posições relativas de todas as $DMUs$ no interior da *área leque*, de forma que pelo menos uma DMU pertença à fronteira de η -eficiência e uma DMU pertença à fronteira de *porte relativo*.

Exemplo 2: Para ilustrar o modelo de decisão gerencial apresentado por meio do *ModeloSRQS₂*, retornemos ao exemplo da Tabela 3.1 com 6 $DMUs$, onde todos os valores de η -eficiência e porte relativos já foram previamente calculados (veja Colunas 02 e 03). Consideramos também $M' = I' \cup O'$ com $I' = \{Supp\}$ e $O' = \{MCPD, PPPD\}$ (veja Exemplo 1). Além disso, consideramos no *ModeloSRQS₂* os limites inferiores dos *inputs* e *outputs* iguais a $L_{ij}^\delta = 0.8X_{ij}$ e $L_{ij}^\phi = 0.8Y_{rj}$, respectivamente.

Lembre que para se definir um vetor de metas $\tilde{\Theta} = \{\tilde{\Theta}_1, \dots, \tilde{\Theta}_n\}$ restritas a Ψ , devemos ter $\tilde{e}_j < \tilde{\Theta}_j \leq \tilde{\Theta}_{max}$ para todo $j \in \Psi$ com $\tilde{\Theta}_{max} = \max\{E_1^*/\phi_e, \dots, E_n^*/\phi_e\}$. O vetor de supereficiências DEA, E^* é mostrado na Coluna 06 da Tabela 3.1. Assim, como $\phi_e = \max\{E_j, j = 1, \dots, n\} = 1.89$ (veja Coluna 07 da Tabela 3.1), obtemos $\tilde{\Theta}_{max} = E_1^*/\phi_e = 2/1.89 = 1.058$. Portanto, a DMU_1 define a *barreira normalizada* para todas as $DMUs$ na *área leque* (veja a linha vermelha pontilhada da Figura 4.3). Definimos arbitrariamente as metas $\tilde{\Theta}$ atribuídas a $\Psi = \{DMU_2, DMU_3, DMU_4\}$ como detalhado na Coluna 04 da Tabela 4.1. Note que $\tilde{\Theta}_j > \tilde{e}_j$ para todo $j \in \Psi$ e $\tilde{\Theta}_j = \tilde{e}_j$ para todo $j \notin \Psi$, significando que nenhum incremento de eficiência é esperado para as $DMUs$ fora de Ψ . Nas Colunas 05 e 06, descrevemos as restrições de porte relativo. Para a DMU_2 esperamos a variação entre -5% e $+5\%$. Para a DMU_3 a expectativa é um crescimento de no máximo $+10\%$ e a DMU_4 , uma variação entre $+5\%$ e $+15\%$. Como $t'_j = t''_j = 1$ para $j \notin \Psi$, não temos nenhuma atualização do porte relativo para as $DMUs$ 1, 5 e 6.

Depois de resolver o *ModeloSRQS₂*, obtemos as coordenadas $(\tilde{\mathbf{a}}_j, \tilde{\mathbf{b}}_j)$ representativas de M' com eficiência $\tilde{\mathbf{e}}_j$ e *porte relativo* $\tilde{s}_j(q)$, para todo $j \in \Psi$ (veja as Colunas 07 e 08). Observe na Coluna 07, que a DMU_3 se tornou supereficiente atingindo sua meta, ao contrário das DMU_2 e DMU_4 . Na Coluna 08, vemos um aumento do porte relativo em quase 5% da DMU_2 , 9.41% da DMU_3 e 15.00% da DMU_4 , significando que a DMU_4 se tornou superdimensionada. A distância euclidiana entre $\tilde{\Theta}$ e $\tilde{\mathbf{e}}$ é igual a $D_{\tilde{\Theta}} = 0.1357$ com

(01)	(02)	(03)	(04)	(05)	(06)	(07)	(08)	(09)	(10)	(11)
DMU_j	\tilde{e}_j	$\tilde{s}_j(q)$	$\tilde{\Theta}_j$	t'_j	t''_j	\tilde{e}_j	$\tilde{s}_j(q)$	Diferenças Δ_j	nova η -eficiência \tilde{e}_j	novo porte $\tilde{s}_j(q)$
1	1.00	0.25	1.00	1.00	1.00	1.00	0.25	0.00	0.97	0.22
2	0.47	0.43	0.80	0.95	1.05	0.68	0.45	0.12	0.66	0.40
3	0.72	0.85	1.03	1.00	1.10	1.03	0.93	0.00	1.00	0.81
4	0.43	1.00	0.80	1.05	1.15	0.74	1.15	0.06	0.72	1.00
5	0.45	0.62	0.45	1.00	1.00	0.45	0.62	0.00	0.43	0.54
6	0.46	0.40	0.46	1.00	1.00	0.46	0.40	0.00	0.45	0.35

Tabela 4.1: Execução do $ModeloSRQS_2$ com $\psi = \{DMU_2, DMU_3, DMU_4\}$ e metas de supereficiência normalizada $\tilde{\Theta}_j$, para $j \in \Psi$. No exemplo, a DMU_3 é η -eficiente e a DMU_1 define uma *barreira normalizada* com $\tilde{\Theta}_{max} = E_1^*/\phi_e = 2.00/1.89 = 1.058$. A DMU_4 tem o maior *porte relativo* do conjunto.

$\Delta_j = \tilde{\Theta}_j - \tilde{e}_j$, $\forall j = 1, \dots, n$ (veja Coluna 09). Finalmente, depois de se restabelecer os portes relativos de todas as n $DMUs$ (por meio dos movimentos de rotação e translação) obtemos novos valores de eficiência e porte relativo no interior da *área leque* como descrito nas Colunas 10 e 11, respectivamente.

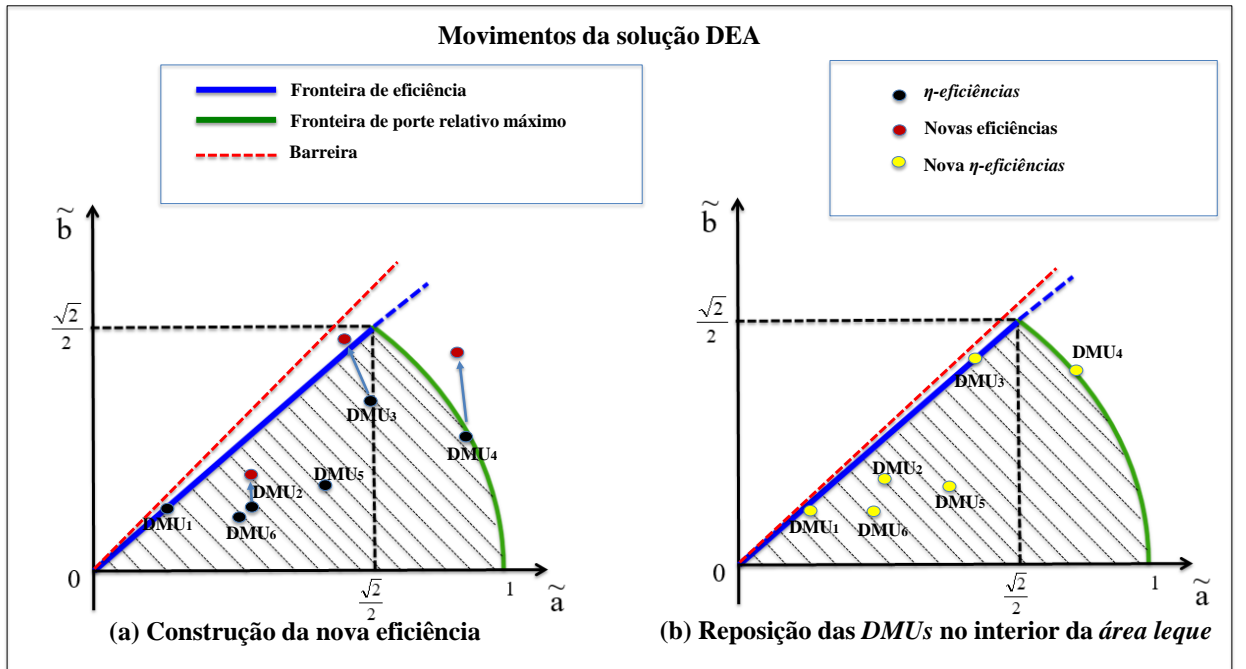


Figura 4.3: Subconjunto $\Psi = \{DMU_2, DMU_3, DMU_4\}$ com metas $\tilde{\Theta}_j$ para $j \in \Psi$. Todos os pontos são *representativos* de M' . (a) Cálculo das novas eficiências e *porte relativos* (pontos *vermelhos*) com pontos pretos simbolizando η -eficiências e *portes relativos* atualizados. (b) Reposicionamento de todas as $DMUs$ no interior da *área leque* (pontos *amarelos*). Cálculo das novas η -eficiências e *porte relativos*.

A Figura 4.3 ilustra o exemplo da Tabela 4.1. Os pontos pretos na Figura 4.3.a denotam as coordenadas $(\tilde{a}_j, \tilde{b}_j)$ obtidas após a normalização (vide Algoritmo 1). Depois

de se resolver o $ModeloSRQS_2$ com o vetor de metas $\tilde{\Theta}$ e restrições de porte relativo t' e t'' , obtemos novas coordenadas (pontos vermelhos), que podem estar fora da área leque. No exemplo, a DMU_3 se torna supereficiente e a DMU_4 superdimensionada, provocando, dessa forma, o deslocamento de todas as $DMUs$ na *área leque*. Os pontos amarelos da Figura 4.3.b, representam as novas η -eficiências e/ou os novos porte relativos obtidos após a normalização do Algoritmo 2. Cabe notar também que obtivemos uma nova *barreira normalizada*, calculada pela divisão de $\tilde{\Theta}_{max}$ por ϕ'_e com $\phi'_e = \max\{\tilde{e}_j, \forall j = 1, \dots, n\}$, ou seja, $\tilde{\Theta}'_{max} = 1.058/1.03 = 1.027$. No exemplo, a sua rotação em torno do vetor $(0, 0)$ é pequena e quase imperceptível. \square

É importante notar que a abordagem gerencial descrito no Algoritmo 2 pode ser repetida por várias vezes com os mesmos pesos (\tilde{u}, \tilde{v}) . Porém, após executar a primeira vez o Algoritmo 2, com as novas matrizes \bar{X} e \bar{Y} atualizadas, seria interessante repetir o novamente todo o processo, executando-se novamente os Algoritmos 1 e 2 em uma segunda etapa com as matrizes (\bar{X}, \bar{Y}) . Isto pode evitar o “enfraquecimento” dos pesos (\tilde{u}, \tilde{v}) .

Capítulo 5

Ilustração dos modelos: Uma aplicação em companhias aéreas

Neste capítulo consideramos o conjunto de dados de companhias aéreas internacionais, detalhados em Ray [31] para ilustração e demonstração da aplicabilidade de nossa abordagem (veja também Coelli et al. [14]). Nesta aplicação, avaliamos 28 companhias, durante o ano de 1990, da América do Norte, Europa e Ásia-Austrália. As 8 primeiras companhias mostradas na Tabela 5.1 são da Ásia e Austrália. As companhias européias são descritas das linhas 9 à 16 e as companhias norte-americanas, das linhas 17 à 28. Os *inputs* considerados são: (i) número de empregados (LAB), (ii) combustível, medido em milhões de galões ($FUEL$), (iii) outros *inputs*, consistindo gastos operacionais e manutenção, excluindo as despesas laborais e com combustível ($MATERIAL$) e (iv) capital (soma do peso de decolagem de todas as aeronaves multiplicada pelo número de dias voados) (CAP); concluindo o conjunto I dos *inputs*. Os *outputs* produzidos são: (a) passageiro-quilômetro voado ($PASS$) e (b) toneladas de frete-quilômetro voado ($CARGO$); definindo o conjunto O de *outputs* (veja Tabela 5.1).

Consideramos dois cenários possíveis. Inicialmente, (i) assumimos $M' = I' \cup O'$ com $I' = I$ e $O' = O$; o que significa que consideramos todos os *inputs* e *outputs* na avaliação do *porte relativo*. No segundo caso, (ii) assumimos M' com $I' = \emptyset$ e $O' = O$; o que significa que somente os *outputs* são considerados. Em ambos casos, assumimos hipoteticamente que as companhias européias esperam alcançar melhorias em suas η -*eficiências* e trabalhar dentro de novos limites de porte. Na Tabela 5.2, as companhias européias estão em negrito e pertencem ao subconjunto $\Psi = \{DMU_9, \dots, DMU_{16}\}$. Fixamos, de maneira arbitrária, limites inferiores para os *inputs* e *outputs* iguais a $L_{ij}^\delta = 0,8X_{ij}$ e $L_{ij}^\phi = 0,8Y_{rj}$, respectivamente.

DMU_j	<i>Companhia</i>	<i>PASS</i>	<i>CARGO</i>	<i>LAB</i>	<i>FUEL</i>	<i>MATL</i>	<i>CAP</i>
01	NIPPON	35261	614	12222	860	2008	6074
02	CATHAY	23388	1580	12214	456	1492	4174
03	GARUDA	14074	539	10428	304	3171	3305
04	JAL	57290	3781	21430	1351	2536	17932
05	MALAYSIA	12891	599	15156	279	1246	2258
06	QANTAS	28991	1330	17997	393	1474	4784
07	SAUDIA	18969	760	24708	235	806	6819
08	SINGAPORE	32404	1902	10864	523	1512	4479
09	AUSTRIA	2943	65	4067	62	241	587
10	BRITISH	67364	2618	51802	1294	4276	12161
11	FINNAIR	9925	157	8630	185	303	1482
12	IBERIA	23312	845	30140	499	1238	3771
13	LUFTHANSA	50989	5346	45514	1078	3314	9004
14	SAS	20799	619	22180	377	1234	3119
15	SWISSAIR	20092	1375	19985	392	964	2929
16	PORTUGAL	8961	234	10520	121	831	1117
17	AIR CANADA	27676	998	22766	626	1197	4829
18	AM. WEST	18378	169	11914	309	611	2124
19	AMERICAN	133796	1838	80627	2381	5149	18624
20	CANADIAN	24372	625	16613	513	1051	3358
21	CONTINENTAL	69050	1090	35661	1285	2835	9960
22	DELTA	96540	1300	61675	1997	3972	14063
23	EASTERN	29050	245	21350	580	1498	4459
24	NORTHWEST	85744	2513	42989	1762	3678	13698
25	PANAM	54054	1382	28638	991	2193	7131
26	TWA	62345	1119	35783	1118	2389	8704
27	UNITED	131905	2326	73902	2246	5678	18204
28	USAIR	59001	392	53557	1252	3030	8952

Tabela 5.1: *Input e output* de 28 companhias aéreas durante o ano de 1990. (*Fonte*: Ray [31] e Coelli et al. [14]).

Após a execução do Algoritmo 1, obtemos $E_8^* = 1.41$, isto é, SINGAPURE possui a maior supereficiência do conjunto (veja Coluna 03). Além disso, SINGAPURE e SAUDIA possuem a maior $\bar{\ell}_2$ -eficiência igual a $E_j = 1.10$, como mostrada na Coluna 04. Segue então que, $\phi_e = 1.10$ e $\tilde{\Theta}_{max} = \max\{E_j^*/\phi_e, \forall j = 1, \dots, 28\} = 1.28$, o que significa que SINGAPURE define uma *barreira normalizada* para todas as 28 *DMUs* da *área leque*. Assim sendo, na definição do vetor de metas $\tilde{\Theta}$ escolhemos coordenadas $\tilde{\Theta}_j$ variando entre seus respectivos valores de \tilde{e}_j e $1.28, \forall j \in \Psi$. Em nosso exemplo, assumimos um aumento das η -eficiências de até 20% para todas as *DMUs* de Ψ , não ultrapassando portanto sua *barreira normalizada*. Além disso, consideramos $t'_j = 1.0$ e $t''_j = 1.1 \forall j \in \Psi$, buscando um aumento de porte em até 10%.

(01)	(02)	(03)	(04)	(05)	(06)	(07)	(08)	(09)	(10)	(11)	(12)	(13)
DMU_j	<i>Companhias areas</i>	E_j^*	E_j	\tilde{e}_j	$\tilde{\mathbf{e}}_j$	<i>novo \tilde{e}_j</i>	$\tilde{s}_j(q)$ $I' = I$	$\tilde{\mathbf{s}}_j(\mathbf{q})$ $I' = I$	<i>novo $\tilde{s}_j(q)$</i> $I' = I$	$\tilde{s}_j(q)$ $I' = \emptyset$	$\tilde{\mathbf{s}}_j(\mathbf{q})$ $I' = \emptyset$	<i>novo $\tilde{s}_j(q)$</i> $I' = \emptyset$
01	NIPPON	0.97	0.70	0.63	—	0.58	0.320	—	0.320	0.267	—	0.267
02	CATHAY	0.87	0.87	0.79	—	0.73	0.223	—	0.223	0.215	—	0.215
03	GARUDA	0.68	0.32	0.29	—	0.27	0.259	—	0.259	0.116	—	0.116
04	JAL	1.12	0.94	0.86	—	0.78	0.522	—	0.522	0.524	—	0.524
05	MALAYSIA	0.76	0.60	0.54	—	0.49	0.147	—	0.147	0.110	—	0.110
06	QANTAS	1.10	1.05	0.96	—	0.87	0.232	—	0.232	0.246	—	0.246
07	SAUDIA	1.13	1.10	1.00	—	0.91	0.146	—	0.146	0.158	—	0.158
08	SINGAPURE	1.41	1.10	1.00	—	0.91	0.267	—	0.267	0.289	—	0.289
09	AUSTRIA	0.69	0.60	0.54	0.65	0.59	0.030	0.033	0.033	0.023	0.024	0.024
10	BRITISH	0.78	0.78	0.71	0.85	0.78	0.618	0.618	0.618	0.557	0.613	0.613
11	FINNAIR	1.13	1.01	0.91	1.09	1.00	0.072	0.075	0.075	0.075	0.081	0.081
12	IBERIA	0.79	0.79	0.72	0.86	0.79	0.210	0.231	0.231	0.191	0.197	0.197
13	LUFTHANSA	1.37	0.93	0.84	1.01	0.93	0.532	0.548	0.548	0.530	0.574	0.574
14	SAS	0.86	0.79	0.72	0.86	0.79	0.183	0.201	0.201	0.166	0.167	0.167
15	SWISSAIR	1.05	0.99	0.90	1.08	0.99	0.180	0.182	0.182	0.185	0.185	0.185
16	PORTUGAL	1.12	0.65	0.59	0.71	0.65	0.088	0.091	0.091	0.070	0.077	0.077
17	AIR CANADA	0.87	0.86	0.78	—	0.71	0.238	—	0.238	0.226	—	0.226
18	AM. WEST	1.17	1.02	0.92	—	0.84	0.129	—	0.129	0.134	—	0.134
19	AMERICAN	0.95	0.95	0.86	—	0.79	0.992	—	0.992	0.997	—	0.997
20	CANADIAN	0.89	0.87	0.79	—	0.72	0.200	—	0.200	0.191	—	0.191
21	CONTINENTAL	0.96	0.91	0.83	—	0.76	0.527	—	0.527	0.519	—	0.519
22	DELTA	0.89	0.85	0.77	—	0.70	0.760	—	0.760	0.719	—	0.719
23	EASTERN	0.81	0.76	0.69	—	0.63	0.240	—	0.240	0.212	—	0.212
24	NORTHWEST	0.95	0.90	0.82	—	0.75	0.698	—	0.698	0.682	—	0.682
25	PANAM	0.96	0.96	0.88	—	0.80	0.418	—	0.418	0.424	—	0.424
26	TWA	0.97	0.96	0.88	—	0.80	0.466	—	0.466	0.473	—	0.473
27	UNITED	0.95	0.94	0.85	—	0.78	1.000	—	1.000	1.000	—	1.000
28	USAIR	0.77	0.73	0.66	—	0.60	0.497	—	0.497	0.426	—	0.426

Tabela 5.2: Resultados computacionais para os dados da Tabela 5.1. Assumimos as metas $\tilde{\Theta}_j \leq 1.28, \forall j \in \Psi$ com $\Psi = \{DMU_9, \dots, DMU_{16}\}$. No exemplo, fixamos: $\tilde{\Theta}_{09} = 0.65$; $\tilde{\Theta}_{10} = 0.85$; $\tilde{\Theta}_{11} = 1.09$; $\tilde{\Theta}_{12} = 0.86$; $\tilde{\Theta}_{13} = 1.01$; $\tilde{\Theta}_{14} = 0.86$; $\tilde{\Theta}_{15} = 1.08$ e $\tilde{\Theta}_{16} = 0.71$ (aumento de 20% na eficiência). Para a avaliação do *porte relativo* consideramos: (i) $M' = I' \cup O'$ com $I' = I$ e $O' = O$, e (ii) $M' = I' \cup O'$ com $I' = \emptyset$ e $O' = O$.

Na Coluna 05, calculamos as η -eficiências \tilde{e}_j , obtidas depois da normalização no Algoritmo 1. Nas colunas 06 e 07, respectivamente, são mostradas as eficiências atualizadas $\tilde{\mathbf{e}}_j$ (na direção de $\tilde{\Theta}$) e as novas η -eficiências após a segunda normalização, como apresentada no Algoritmo 2. Como era de se esperar, observe que os valores das η -eficiências são os

mesmos para ambos cenários descritos em (i) e (ii). No exemplo, note que SINGAPURE e SAUDIA são η -eficientes (Coluna 05). Depois da solução do *ModeloSRQS₂* no Algoritmo 2, todas as companhias de Ψ movem em direção a $\tilde{\Theta}$ e atingem as suas respectivas metas, representando um aumento de 20% na eficiência, como mostrado na Coluna 06. Neste caso, obtemos uma solução ótima global para o *ModeloSRQS₂* com $D'' = 0$ (veja Equação (4.8) acima). Note também que FINNAIR, LUFTHANSA e SWISSAIR se deslocam para fora da *área leque* obtendo η -eficiências maiores que *um*. Após a normalização como descrita no Algoritmo 2, FINNAIR se torna η -eficiente afetando a posição relativa (pelo movimento de rotação) de todas as 28 *DMUs*, conforme observado na Coluna 07. É importante destacar que o aumento de 20% na eficiência, descrita na Coluna 06, expressa os esforços individuais de cada companhia sem refletir o comportamento coletivo. Por exemplo, a companhia AUSTRIA tem a sua eficiência melhorada de 0.54 para 0.59, um aumento de 9% (veja Colunas 05 e 07).

Nas Colunas 08, 09 e 10 apresentamos o porte relativo resultado do primeiro cenário (item (i)), ou seja, assumimos que as companhias querem avaliar o seu tamanho incluindo, além de passageiros e carga, todos os gastos e recursos presentes nos *inputs* necessários para a análise de porte. A Coluna 08 expressa o porte relativo após a primeira normalização no Algoritmo 1, e a Coluna 09 exhibe o novo tamanho, com crescimento de até 10% após a execução do *ModeloSRQS₂*. Note que quase todas as companhias de Ψ aumentaram o seu tamanho, porém não houve superdimensionamento. Por exemplo, LUFTHANSA teve expansão de 0.532 para 0.548 (igual a 3%), FINNAIR de 0.072 para 0.075 (igual a 4.17%), SWISSAIR de 0.180 para 0.182 (igual a 1.11%) enquanto BRITISH manteve o mesmo porte relativo. Como resultado, não tivemos modificações das companhias fora de Ψ (veja Colunas 8 e 10). No exemplo, note que UNITED, com o maior porte relativo, permanece sobre a fronteira de porte relativo após a normalização. Neste caso, o deslocamento das *DMUs* de Ψ não afetaram os portes relativos das companhias que não são européias.

Nas Colunas 11, 12 e 13 apresentamos os resultados de porte relativo com respeito ao segundo cenário descrito em (ii). Neste caso, somente passageiro-quilômetro voado (*PASS*) e toneladas de frete-quilômetro voado (*CARGO*) são considerados na análise de porte relativo. Por exemplo, suponha que agências reguladoras de tráfego aéreo da Ásia-Austrália, Europa e América do Norte queiram avaliar a capacidade de suas companhias no atendimento à demanda de cargas e passageiros. Neste caso, de forma análoga ao primeiro cenário, não observamos superdimensionamento para as companhias européias e a companhia UNITED permanece sobre a fronteira de porte relativo. Além disso,

observamos grande similaridade entre os *inputs* e *outputs* das companhias UNITED e AMERICAN, as duas “maiores” companhias aéreas (veja Tabelas 5.1 e 5.2), o que significa que a pequena diferença de tamanho entre as companhias é definida pelas variações de peso atribuídas a seus *inputs* e *outputs*. As Figuras 5.1 e 5.2 ilustram as posições relativas de cada uma das 28 *DMUs* no interior da *área leque* nos dois cenários avaliados.

Para finalizar, observamos na Tabela 5.2 a variação do porte relativo em ambos cenários juntamente com suas eficiências relativas. Por exemplo, GARUDA teve uma redução em seu *porte relativo* de 0.259 para 0.116 (um decréscimo de 55.2%), isto é, GARUDA é maior quando todos os *inputs* e *outputs* são considerados (cenário descrito em (i)). Além disso, a baixa eficiência da companhia GARUDA deixa claro que os seus recursos estão sendo mal utilizados (o que é observado mais claramente no segundo cenário). De forma similar, MALASYA que possui baixa η -eficiência (igual a 0.49) tem redução no porte relativo de 0.147 para 0.110 (um decréscimo de 25.2%). Ao contrário das companhias SINGAPURE e SAUDIA que expressam aumento do porte relativo quando somente *outputs* são considerados, consequência da alta eficiência de ambas companhias.

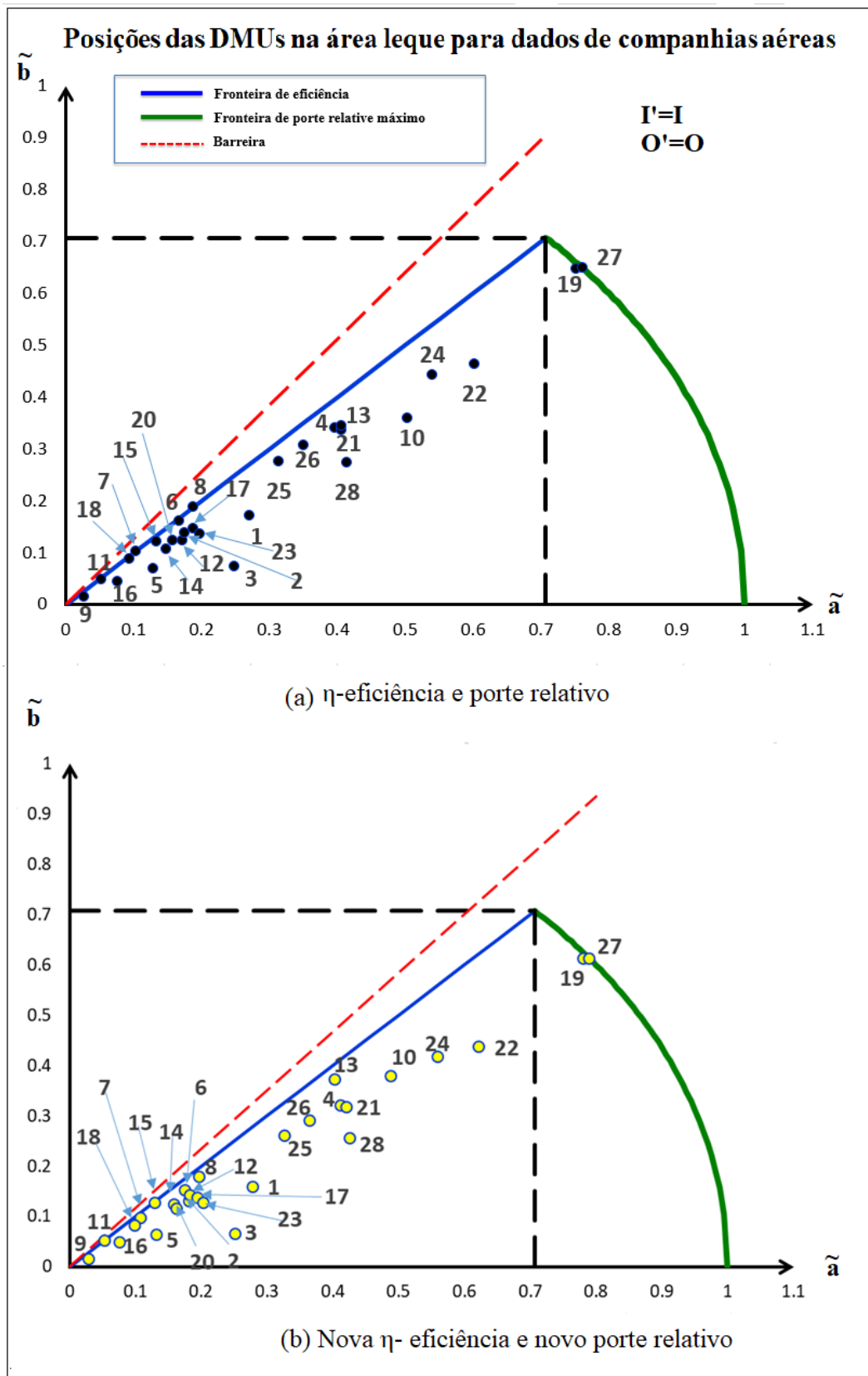


Figura 5.1: Posições relativas das 28 *DMUs* da Tabela 5.1. *Área leque* para o caso de todos *inputs* e *outputs* na avaliação do porte (cenário (i)). (a) η -eficiências e portes relativos (resultados do Algoritmo 1). (b) Novas η -eficiências e portes relativos (Resultados do Algoritmo 2).

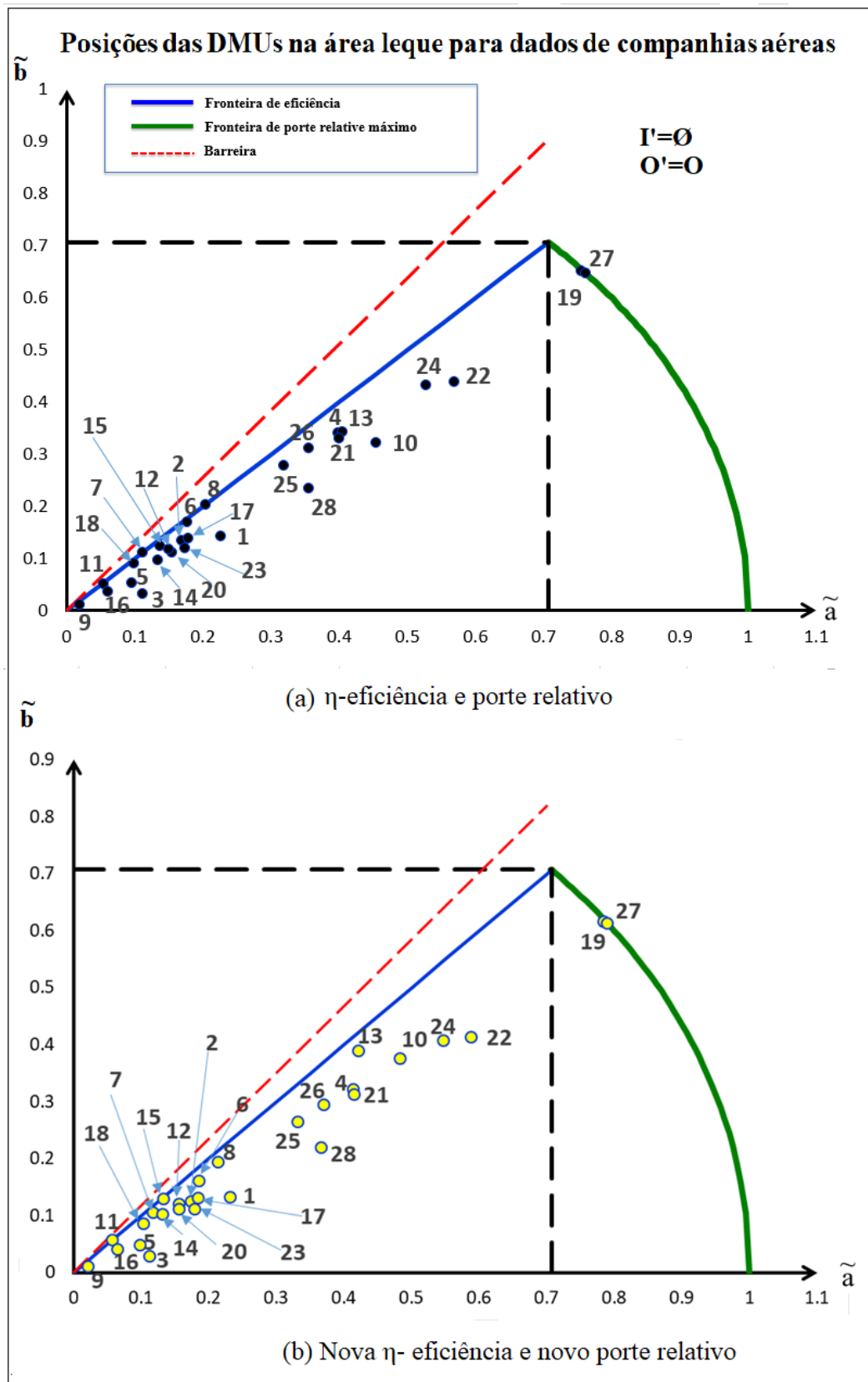


Figura 5.2: Posições relativas das 28 *DMUs* da Tabela 5.1. *Área leque* para o caso de apenas *outputs* na avaliação de porte (cenário (ii)). (a) η -eficiências e portes relativos (resultados do Algoritmo 1). (b) Novas η -eficiências e portes relativos (Resultados do Algoritmo 2).

Capítulo 6

Conclusão e considerações finais

Neste trabalho, introduzimos a definição de dois conceitos principais, aqui denominados: *η -eficiência* e *porte relativo*. Essencialmente, o conceito de *η -eficiência* constitui um *rank* completo de decisões baseado em supereficiências e pesos comuns, definido sobre uma Tecnologia \bar{T} estendida, enquanto o conceito de *porte relativo* explora distâncias (por meio de alguma norma- ℓ_q) no interior de uma representação bidimensional de *inputs* e *outputs* virtuais. Definimos *Área Leque*, onde aspectos de eficiência e *porte relativo* podem ser considerados conjuntamente. Além disso, dado um subconjunto $M' \subseteq M$ de *inputs* e *outputs*, introduzimos uma medida de *porte relativo* baseada apenas nos *inputs* e *outputs* virtuais *restritos a M'* , o que nos dá a avaliação não-paramétrica de porte mais precisa. Dessa forma, coordenadas *representativas* de M' com grande (resp., pequena) *distância- ℓ_q* do vetor nulo $(0, 0)$ de *inputs* e *outputs* virtuais, podem ser associadas a um grande (resp., pequeno) *porte relativo* e vice-versa. Note que podemos ter uma grande variação das distâncias- ℓ_q (representadas por $D_j(q)$). Assim, a normalização proposta e a definição da *Área Leque* nos dá uma visão padronizada do conceito de *porte relativo*.

No trabalho de Costa *et al.* [18], os autores argumentam que *inputs* e *outputs* virtuais, bem como seus *inputs* e *outputs* virtuais modificados dependem dos pesos atribuídos a cada *DMU* na maximização de eficiência e o seu uso em medidas de porte é bastante discutível. Em nosso trabalho, reforçamos essa prática e assumimos que o conceito de porte relativo pode ser derivado da medida de eficiência sem maiores prejuízos. Em nosso caso, o *ModeloSRQS* foi utilizado para minimizar a distância entre as $\bar{\ell}_2$ -eficiências e as supereficiências DEA sem considerar conjuntamente o porte relativo, ou seja, o conceito de porte foi obtido como um subproduto da definição de *η -eficiência*. Apesar dos autores em Costa *et al.* [18] apresentarem uma representação bidimensional envolvendo *inputs* e *outputs* virtuais, a abordagem apresentada não se mostrou adequada para avaliação

de porte relativo, como pontuado pelos próprios autores. Finalmente, nosso trabalho representou um avanço significativo em relação ao trabalho desenvolvido em Carvalho [16], onde uma pseudométrica baseada no cálculo de áreas envolvendo *inputs* e *outputs* virtuais era utilizada na definição do conceito de porte relativo. A introdução de métricas induzidas por normas- ℓ_q se mostrou sem dúvida muito mais precisa e consistente.

Apesar dos resultados satisfatórios aqui apresentados combinando supereficiência com pesos comuns, como trabalhos futuros, uma questão interessante é buscar uma melhor compreensão dos reais impactos causados pelas diferentes técnicas de supereficiência e/ou pesos comuns sobre o método proposto. Ainda, nossa definição de porte relativo introduz funções que produzem modelos não-convexos. Apesar disso, obtivemos bons resultados computacionais por meio do uso de diferentes *solvers* de programação não-linear com diferentes técnicas de resolução (mais particularmente o MINOS 5.51 e SNOPT 7.2-1.2). Embora bons *solvers* de otimização global sejam suficientes, uma questão interessante para novas pesquisas é a investigação de outras definições de porte relativo utilizando modelos convexos e/ou lineares também baseados em *inputs* e *outputs* virtuais. Próximo ao término deste trabalho, descobrimos o artigo de Zohrehbandian *et.al.*[46]. Nele, os autores rediscutem o modelo original de Kao e Hung [24] (também denominado “*Compromise Solution Approach*”) e propõem uma formulação não-linear aparentemente um pouco mais simples (“bem comportada”) que o *ModeloSRQ* de Kao e Hung [24].

Na segunda parte do trabalho, motivados por decisões gerenciais e na “mesma linha” dos trabalhos desenvolvidos em Sowlati e Paradi[38] e Suzuki e Nijkamp [41]¹, avaliamos as modificações na eficiência e porte relativo de uma ou mais *DMUs* em direção a um conjunto de metas distintas de eficiência e porte relativo. Os objetivos foram definidos coletivamente para um subconjunto Ψ de *DMUs*, eficientes ou não. Em todos os casos, um gerente poderia investigar alternativas e selecionar a melhor estratégia a ser adotada. Todos os modelos considerados parecem funcionar adequadamente, apresentando resultados consistentes que nos encorajam a reconhecê-los como ferramentas promissoras no apoio à decisão estratégica.

Como trabalhos futuros, e seguindo a mesma linha de raciocínio apresentada em Carvalho[16], uma alternativa interessante é a introdução de custos associados aos *inputs*. Neste caso, além da definição de metas de eficiência e porte relativo, estaríamos interessados na minimização dos custos envolvidos. Outro segmento natural de pesquisa é a extensão dos resultados aqui apresentados aos modelos BCC, onde temos retornos

¹Nossa abordagem é distinta já que se baseia na definição de uma Tecnologia \bar{T} estendida. Além disso, definimos metas para um subconjunto Ψ de *DMUs*, ao invés de uma única *DMU* como em [38] e [41].

variáveis de escala. Finalmente, técnicas de agrupamento (*clustering techniques*) podem ser exploradas visando uma melhor classificação de *DMUs* de acordo com características específicas, incluindo aí eficiência e porte relativo. Poderíamos determinar, por exemplo, uma avaliação de performance, combinando eficiência e porte relativo definindo assim uma medida \tilde{p}_j para cada DMU_j com $\tilde{p}_j = c'\tilde{e}_j + c''\tilde{s}_j$ com $c' + c'' = 1$ e $c', c'' > 0$ representando, respectivamente, a importância ponderada da *η -eficiência* e *porte relativo* na *performance* \tilde{p}_j .

Referências

- [1] ACS, Z. J.; AUDRETSCH, D. B. Innovation in large and small firms: an empirical analysis. *The American Economic Review* 78, 4 (1988), 678 – 690.
- [2] ADLER, N.; FRIEDMAN, L.; SINUANY-STERN, Z. Review of ranking methods in the data envelopment analysis context. *European Journal of Operation Research* 140 (2002), 249 – 265.
- [3] ALVAREZ, R.; CRESPI, G. Determinants of technical efficiency in small firms. *Small Business Economics* 20 20 (2003), 233 – 244.
- [4] ANDERSEN, P.; PETERSEN, N. C. A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Management Science* 39 (10) (1993), 1261–1264.
- [5] APARICIO, J.; PASTOR, J. T.; VIDAL, F. The directional distance function and the translation invariance property. *Omega* 58 (2016), 1–3.
- [6] AUDRETSCH, D. B. The dynamic role of small firms: Evidence from the u.s. *Small Business Economics* 18 (2002), 13 – 40.
- [7] BANKER, R. D.; CHARNES, A.; COOPER, W. W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science* 30(9) (1984), 1078–1092.
- [8] BENSON, H. P. Global optimization of nonlinear sums of ratios. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 263 (2001), 301–315.
- [9] BRIEC, W.; CAVAGNAC, L.; KERSTENS, K. Directional measurement of technical efficiency of production: An axiomatic approach. *Economic Modelling* 28 (2011), 775–781.
- [10] CHARNES, A. *Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions*. Research Report (Univ. of Texas at Austin. Center for Cybernetic Studies). Center for Cybernetic Studies, Univ. of Texas at Austin, 1985.
- [11] CHARNES, A.; COOPER, W.; RHODES, E. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research* 2, 6 (Nov. 1978), 429–444.
- [12] CHEN, J.-X.; DENG, M.; GINGRAS, S. A modified super-efficiency measure based on simultaneous input-output projection in data envelopment analysis. *Computers and Operations Research* 38 (2011), 496–504.
- [13] CHEN, Y.; DU, J.; HUO, J. Super-efficiency based on a modified directional distance function. *Omega* 41 (2013), 621–625.

- [14] COELLI, T. E.; GRIFELL-TATJÉ, E.; PERELMAN, S. Capacity utilization and profitability: A decomposition of short-run profit envelopment analysis. *International Journal of Production Economy* 79 (2002), 261–278.
- [15] COOPER, W. W.; SEIFORD, L. M.; TONE, K. *Introduction to data envelopment analysis and its uses: with DEA-solver software and references*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [16] DE CARVALHO, N. P. *Relative size and CSW-efficiency: two new concepts based on DEA to guide management of capital*. Tese de Doutorado, Instituto de Computação, Universidade Federal Fluminense, Niterói, RJ, Brasil, Março 2016.
- [17] DOYLE, J. Multiattribute choice for the lazy decision maker: let the alternatives decide. *Organizational Behav. Hum. Decision Process* 62 (1995), 87–100.
- [18] E COSTA, C. A. B.; DE MELLO, J. C. S.; MEZA, L. A. A new approach to the bi-directional representation of the dea efficiency frontier with multiple inputs and outputs. *European Journal of Operational Research* 255 (2016), 175–186.
- [19] FARREL, M. J. The measurement of productive efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society* 120 (1957), 253–290.
- [20] FOURER, R.; GAY, D. M.; KERNIGHAN, B. W. *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*. Second edition. Thomson, 2003.
- [21] FRIEDMAN, L.; SINUANY-STERN, Z. Scaling units via the canonical correlation analysis in the dea context. *European Journal of Operational Research* 100 (1997), 629–637.
- [22] JAHANSHALOO, G.; LOTFI, F. H.; SHOJA, N.; TOHIDI, G.; RAZAVYAN, S. Ranking using ℓ_1 -norm in data envelopment analysis. *Applied Mathematics and Computation* 153 (2004), 215–224.
- [23] KANEMATSU, S.; DE CARVALHO, N. P.; MARTINHON, C. A.; DE ALMEIDA, M. R. Ranking using η -efficiency and relative sizes measures based on dea. *Submitted* (2018).
- [24] KAO, C.; HUNG, H.-T. Data envelopment analysis with common weights: the compromise solution approach. *Journal of Operational Research Society* 56 (2005), 1196–1203.
- [25] KEHM, B. M. The future of the bologna process âthe bologna process of the future. *European Journal of Education* 45, 4 (2010), 529–534.
- [26] KHALILI, M.; CAMANHO, A.; PORTELA, M.; ALIREZAEI, M. The measurement of relative efficiency using data envelopment analysis with assurance regions that link inputs and outputs. *European Journal of Operational Research* 203 (2010), 761–770.
- [27] LAUKKANEN, S.; SARPOLA, S.; HALLIKAINEN, P. Enterprise size matters: Objectives and constraints of erp adoption. *Journal of Enterprise Information Management* 20, 3 (2007), 319–334.

- [28] LI, S.; JAHANSHAHLOO, G. R.; KHODABAKHSHI, M. A super-efficiency model for ranking efficient units in data envelopment analysis. *Applied Mathematics and Computation* 184 (2007), 638–648.
- [29] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1983.
- [30] MEHRABIAN, S.; ALIREZAEI, A.; JAHANSHAHLOO, G. A complete efficiency ranking of decision making units in dea. *Computational Optimization and Application* 14 (1999), 261–266.
- [31] RAY, S. C. The directional distance function and measurement of super-efficiency: An application to airlines data. *The Journal of the Operational Research Society* 59 (2008), 788–797.
- [32] ROLL, Y.; GOLANY, B. Alternate methods of treating factor weights in dea. *Omega* 21 (1993), 99–109.
- [33] SCHAIBLE, S. A note on the sum of a linear and linear-fractional function. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 24 (1977), 691–693.
- [34] SCHUBERT, T.; YANG, G. Institutional change and the optimal size of universities. *Scientometrics: An International Journal for all Quantitative Aspects of the Science of Science, Communication in Science and Science Policy* 180, 3 (2016), 1129–1153.
- [35] SEIFORD, L. M.; THRALL, R. M. Recent developments in dea: The mathematical programming approach to frontier analysis. *Journal of Econometrics* 46, 1–2 (1990), 7–38.
- [36] SEXTON, T. R.; SILKMAN, R. H.; HOGAN, A. J. Data envelopment analysis: Critique and extension. *Jossey-Bass* (1986), 73 – 105.
- [37] SHUBERT, T. Empirical observations on new public management to increase efficiency in public research â boon or bane? *Research Policy* 38 (2009), 1225–1234.
- [38] SOWLATI, T.; PARADI, J. C. Establishing the “practical frontier” in data envelopment analysis. *Omega: The International Journal of Management Science* 32 (2004), 261–272.
- [39] SUBRAHMANYA, M. H. B. Pattern of technological innovations in small enterprises: a comparative perspective of bangalore (india) and northeast england (uk). *Technovation* 25 (2005), 269 – 280.
- [40] SUEYOSHI, T. Data envelopment analysis non-parametric ranking test and index measurement: Slack-adjusted dea and an application to japanese agriculture cooperatives. *Omega International Journal of Management Science* 27 (1999), 315–326.
- [41] SUZUKI, S.; NIJKAMP, P. An evaluation of energy-environment-economic efficiency for eu, apec and asean countries: Design of a target-oriented dfm model with fixed factors in data envelopment analysis. *Energy Policy* 88 (2016), 100–112.
- [42] THRALL, R. Duality, classification and slacks in data envelopment analysis. *The Annals of Operations Research* 66 (1996), 109–138.

-
- [43] TONE, K. A slacks-based measure of super-efficiency in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research* (1) 143 (2002), 32–41.
 - [44] YU, P. A class of solutions for group decision problems. *Management Science* 19 (1973), 936–946.
 - [45] ZHU, J. Robustness of the efficient decision making units in data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research* 90 (1996), 451–460.
 - [46] ZOHREHBANDIAN, M.; MAKUI, A.; ALINEZHAD, A. A compromise solution approach for finding common weights in dea: an improvement to kao and hung’s approach. *Journal of the Operational Research Society* 61 (2010), 604 –610.

APÊNDICE A – Modelagens em AMPL (*A Mathematical Programming Language*)

Nesta seção, apresentamos os modelos utilizados em nosso trabalho implementados em linguagem AMPL. Maiores informações sobre os comandos e a sintaxe utilizada podem ser obtidas Fourer *et al.* [20].

Testes aplicados a modelos de pequeno porte podem ser realizados em <https://ampl.com/try-ampl/start/> (acesso em 04/06/2018). Deve-se efetuar inicialmente o *upload* do arquivos “modelagem.mod” e “arquivo de dados.dat”, respectivamente.

A.1 Modelagens

A.1.1 *ModeloAP*

```
set DMU;
set input;
set output;
param numI;
param numO;
param num;
param o symbolic;
param lx;
param ly;
param X {DMU,input};
param Y {DMU,output};
param E {DMU};
param e:=0.0000001;
```

```

param t1{DMU};
param t2{DMU};
var u {r in output} >= e;
var v {i in input} >= e;
maximize h: sum {r in output} u[r] * Y[o,r];
subject to equals: sum {i in input} v[i] * X[o,i] = 1;
subject to lessOrEquals {j in DMU}: if j < > o then sum {r in output}
u[r] * Y[j,r] - sum {i in input} v[i] * X[j, i] <= 0;

```

A.1.2 *ModeloSQRS*

```

set DMU;
set input;
set output;
param numI;
param numO;
param num;
param o symbolic;
param lx;
param ly;
param X {DMU,input};
param Y {DMU,output};
param E {DMU};
param e:=0.0000001;
param t1{DMU};
param t2{DMU};
var u {r in output} >= e;
var v {i in input} >= e;
minimize D2: sqrt(sum {j in DMU} (E[j] - (sum r in output Y[j,r] * u[r]) / (sum {i in input}
(X[j, i] * v[i])) ^ 2);
subject to restrict1{j in DMU}: (sum r in output Y[j,r] * u[r]) - E[j] * (sum {i in input}
X[j,i] * v[i]) <= 0;

```

A.1.3 *ModeloSQRS₂*

```

set DMU;
set input;
set output;
param X {DMU,input};
param Y {DMU,output};
param teta {DMU};
param q;
param e:=0.0000001;
param U {r in output};
param V {i in input};
param t1{DMU};
param t2{DMU};
param s {DMU};
param numI;
param numO;
param num;
param lx;
param ly;
param rI {i in input};
param rO {r in output};
param o symbolic;
var fi{DMU, output};
var delta{DMU, input};
minimize dist:sqrt(sum{j in DMU}(((teta[j])-((sum{r in output} (U[r]*(Y[j,r]+fi[j,r])))/(sum{i
in input} (V[i]*(X[j,i]+delta[j,i]))))))^2);
subject to eficiencia {j in DMU}:(sum{r in output} (U[r]*(Y[j,r]+fi[j,r])))-(teta[j])*(sum{i
in input} (V[i]*(X[j,i]+delta[j,i]))))<=0;
subject to limSup{j in DMU}:(t1[j]*s[j])^q<=((sum{r in output} if rO[r]=1 then
(U[r]*(Y[j,r]+fi[j,r]))^q+((1/fiE)^q)*(sum{i in input} if rI[i]=1 then
(V[i]*(X[j,i]+delta[j,i]))^q)<=(t2[j]*s[j])^q;
subject to limX {j in DMU, i in input}: X[j,i]+delta[j,i]>=X[j,i]*lx;
subject to limY {j in DMU, r in output}: Y[j,r]+fi[j,r]>=Y[j,r]*ly;

```

A.2 Dados: Enfermarias

1) Dados coletados da Tabela 3.1 relativos à enfermaria de um hospital - (vide Adler *et al.* (2002) [2] e Sexton *et al.* (1986) [36]).

```

data ;
set DMU:= DMU01 DMU02 DMU03 DMU04 DMU05 DMU06;
set input:= x1 x2 ;
set output:= y1 y2 ;
param numI:=2; #quantidade de outputs
param numO:=2; #quantidade de inputs
param num:=6; #quantidade de DMUs
param o:="DMU01";
param lx:=0.8;
param ly:=0.8;
param X: x1 x2:=
DMU01 150 0.2
DMU02 400 0.7
DMU03 320 1.2
DMU04 520 2
DMU05 350 1.2
DMU06 320 0.7;
param Y: y1 y2:=
DMU01 14000 3500
DMU02 14000 21000
DMU03 42000 10500
DMU04 28000 42000
DMU05 19000 25000
DMU06 14000 15000;
param: E t1 t2:=
DMU01 1 1 1.1
DMU02 1 1 1.1
DMU03 1 1 1.1
DMU04 1 1 1.1
DMU05 1 1 1.1
DMU06 1 1 1.1;

```

A.3 Dados: Companhia Aéreas

Dados da Tabela 5.1 relativos aos *inputs* e *outputs* de 28 companhias aéreas durante o ano de 1990 (vide Ray (2008) [31] e Coelli *et al.* (2002) [14]) .

data;

set DMU:= DMU01 DMU02 DMU03 DMU04 DMU05 DMU06 DMU07 DMU08 DMU09
DMU10 DMU11 DMU12 DMU13 DMU14 DMU15 DMU16 DMU17 DMU18 DMU19
DMU20 DMU21 DMU22 DMU23 DMU24 DMU25 DMU26 DMU27 DMU28 ;

set input:= x1 x2 x3 x4;

set output:= y1 y2;

param numI:=4; #quantidade de inputs

param numO:=2; #quantidade de outputs

param num:=28; #quantidade de DMUs

param o:="DMU01";

param lx:=0.8;

param ly:=0.8;

param X : x1 x2 x3 x4 :=

DMU01 12222 860 2008 6074

DMU02 12214 456 1492 4174

DMU03 10428 304 3171 3305

DMU04 21430 1351 2536 17932

DMU05 15156 279 1246 2258

DMU06 17997 393 1474 4784

DMU07 24708 235 806 6819

DMU08 10864 523 1512 4479

DMU09 4067 62 241 587

DMU10 51802 1294 4276 12161

DMU11 8630 185 303 1482

DMU12 30140 499 1238 3771

DMU13 45514 1078 3314 9004

DMU14 22180 377 1234 3119

DMU15 19985 392 964 2929

DMU16 10520 121 831 1117

DMU17 22766 626 1197 4829
DMU18 11914 309 611 2124
DMU19 80627 2381 5149 18624
DMU20 16613 513 1051 3358
DMU21 35661 1285 2835 9960
DMU22 61675 1997 3972 14063
DMU23 21350 580 1498 4459
DMU24 42989 1762 3678 13698
DMU25 28638 991 2193 7131
DMU26 35783 1118 2389 8704
DMU27 73902 2246 5678 18204
DMU28 53557 1252 3030 8952;
param Y : y1 y2 :=
DMU01 35261 614
DMU02 23388 1580
DMU03 14074 539
DMU04 57290 3781
DMU05 12891 599
DMU06 28991 1330
DMU07 18969 760
DMU08 32404 1902
DMU09 2943 65
DMU10 67364 2618
DMU11 9925 157
DMU12 23312 845
DMU13 50989 5346
DMU14 20799 619
DMU15 20092 1375
DMU16 8961 234
DMU17 27676 998
DMU18 18378 169
DMU19 133796 1838
DMU20 24372 625
DMU21 69050 1090
DMU22 96540 1300

DMU23 29050 245

DMU24 85744 2513

DMU25 54054 1382

DMU26 62345 1119

DMU27 131905 2326

DMU28 59001 392;

param : E t1 t2 :=

DMU01 1 1 1.1

DMU02 1 1 1.1

DMU03 1 1 1.1

DMU04 1 1 1.1

DMU05 1 1 1.1

DMU06 1 1 1.1

DMU07 1 1 1.1

DMU08 1 1 1.1

DMU09 1 1 1.1

DMU10 1 1 1.1

DMU11 1 1 1.1

DMU12 1 1 1.1

DMU13 1 1 1.1

DMU14 1 1 1.1

DMU15 1 1 1.1

DMU16 1 1 1.1

DMU17 1 1 1.1

DMU18 1 1 1.1

DMU19 1 1 1.1

DMU20 1 1 1.1

DMU21 1 1 1.1

DMU22 1 1 1.1

DMU23 1 1 1.1

DMU24 1 1 1.1

DMU25 1 1 1.1

DMU26 1 1 1.1

DMU27 1 1 1.1

DMU28 1 1 1.1;

APÊNDICE B - Algoritmo em linguagem C/C++

```

#include "ampl/ampl.h"
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <string>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include <cstdlib>
using namespace std;

//Função
double*pegaDFvetor(int espacos) {

    double *vetorfuncao=(double *)malloc(sizeof(double *)*espacos);
    int i;
    char textoLinha[1000];
    FILE *arquivo;
    arquivo = fopen("auxiliar.txt", "r");
    int cont=0;
    i=0;
    while (!feof(arquivo)) {
        fgets(textoLinha,1000, arquivo);
        char * pch;
        pch = strtok(textoLinha, " ");
        while (pch != NULL ){
            if(cont>0 && i<espacos){
                vetorfuncao[i]=(double)atof(pch);

```

```

        }
        pch = strtok(NULL, );
    }
    i++;
    if(cont==0) i=0;
    cont ++;
}
fclose (arquivo);

return vetorfuncao;
} //fim de pegaDFvetor


//Começa a main
int main(int argc, char **argv) {
try{
    ampl::AMPL ampl;
    if (argc > 1) ampl.setOption("solver", argv[1]);
    ampl.read("/home/usuario/Documentos/amplide.linux64/amplapi/examples/cpp/Models/
    dea.mod");
    ampl.readData("/home/usuario/Documentos/amplide.linux64/amplapi/examples/cpp/Models/
    dados.dat");
    //Buscando os parametros de quantidades do arquivo
    int n,ni,no;
    ampl::Parameter num = ampl.getParameter("num");
    n=ampl.getValue("num").dbl();
    ampl::Parameter numI = ampl.getParameter("numI");
    ni=ampl.getValue("numI").dbl();
    ampl::Parameter numO = ampl.getParameter("numO");
    no=ampl.getValue("numO").dbl();
    //Começa a resolução do Modelo AP
    int i,j,ji,jo;
    int dig1=48,dig2=48;
    char d[]="DMU00";
    double Easterisco[n];

```

```
ampl::Parameter o = ampl.getParameter("o");
for(i=0;i<n;i++){
    if(dig2<57){
        dig2++;
    }
    else {
        dig1++;
        dig2=48;
    }
    o.set(d);
    ampl.solve();
    ampl::Objective h =ampl.getObjective("h");
    Easterisco[i]=h.value();
}
//Resolução do Modelo QPS
ampl.reset();
ampl.read("/home/usuario/Documentos/amplide.linux64/amplapi/examples/cpp/Models/
KAO.mod");
ampl.readData("/home/usuario/Documentos/amplide.linux64/amplapi/examples/cpp/Models/
dados.dat");
ampl::Parameter E = ampl.getParameter("E");
E.setValues(Easterisco, n);
ampl.solve();
//Preenchimento do vetor pesos u e v.
ampl::Variable Vv = ampl.getVariable("v");
ampl::DataFrame df1 = Vv.getValues();
ofstream myfile ("auxiliar.txt");
if (myfile.is_open()){
    myfile << df1.toString();
    myfile.close();
}
else cout << "Erro ao tentar abrir o arquivo";
double *v;
v=pegaDFvetor(ni);
ampl::Variable Uu = ampl.getVariable("u");
```

```
ampl::DataFrame df2 = Uu.getValues();
ofstream myfile2 ("auxiliar.txt");
if (myfile2.is_open()){
    myfile2 << df2.toString();
    myfile2.close();
}
else cout << "Erro ao tentar abrir o arquivo";
double *u;
u=pegaDFvetor(no);
//Cálculo das l2-eficiência
//pegando o valor de x do arquivo.dat
ampl::Parameter xx = ampl.getParameter("X");
ampl::DataFrame df3 = xx.getValues();
ofstream myfile3 ("auxiliar.txt");
if (myfile3.is_open()){    myfile3 << df3.toString();
    myfile3.close();
}
else cout << "Erro ao tentar abrir o arquivo";
double X[n][ni];
double *aux;
int N;
N=n*ni;
aux=pegaDFvetor(N);
int cont=0;
for(i=0;i<n;i++){
    for(j=0;j<ni;j++){
        X[i][j]=aux[cont];
        cont++;
    }
}
free(aux);
//De forma similar, pegando o valor de Y
ampl::Parameter yy = ampl.getParameter("Y");
ampl::DataFrame df4 = yy.getValues();
ofstream myfile4 ("auxiliar.txt");
```

```
if (myfile4.is_open()){
    myfile4 << df4.toString();
    myfile4.close();
} else cout << "Erro ao tentar abrir o arquivo";

double Y[n][no];
N=n*no;
aux=pegaDFvetor(N);
cont=0;
for(i=0;i<n;i++){
    for(j=0;j<no;j++){
        Y[i][j]=aux[cont];
        cont++;
    }
}
free(aux);
//Seleciona a norma-lq para o porte relativo que vamos trabalhar
int q;
double qs;
printf("Digite se a norma-q eh igual a 1 ou 2.");
scanf("%d",&q);
if(q!=1 && q!=2){printf("Digite 1 ou 2. Execute novamente");
exit(1);
}
if(q==2) qs=0.5;
else qs=1;
//Seleciona os inputs e outputs
int inputs[ni],outputs[no];
for(i=0;i<ni;i++){
    printf("Digite 1 se x%d faz parte ou -1 se ela nao faz parte dos inputs",i+1);
    scanf("%d",&inputs[i]);
    if(inputs[i]!=1 && inputs[i]!=-1){
        printf("Numero invalido. Execute novamente");
        exit(1);
    }
}
```

```
}
for(i=0;i<no;i++){
    printf("Digite 1 se y%d faz parte ou -1 se ela nao faz parte dos outputs",i+1);
    scanf("%d",&outputs[i]);
    if(outputs[i]!=1 && outputs[i]!=-1){
        printf("Numero invalido. Execute novamente");
        exit(1);
    }
}

double a_barra[n],b_barra[n],E_barra[n],s_barra[n];
double a_1linha[n],b_1linha[n],a_2linha[n],b_2linha[n];
for(i=0;i<n;i++){
    a_barra[i]=0;
    b_barra[i]=0;
    a_1linha[i]=0;
    b_1linha[i]=0;
    a_2linha[i]=0;
    b_2linha[i]=0;
}

for(i=0;i<n;i++){
    for(ji=0;ji<ni;ji++){
        a_2linha[i]=a_2linha[i]+X[i][ji]*v[ji];
        if(inputs[ji]==1){
            a_1linha[i]=a_1linha[i]+X[i][ji]*v[ji];
        }
    }
}

for(jo=0;jo<no;jo++){
    b_2linha[i]=b_2linha[i]+Y[i][jo]*u[jo];
    if(outputs[jo]==1){
        b_1linha[i]=b_1linha[i]+Y[i][jo]*u[jo];
    }
}

}

double K[n];
for(i=0;i<n;i++){
```

```

    K[i]=pow(((pow(a_1linha[i],q)+pow(b_1linha[i],q))/
(pow(a_2linha[i],q)+pow(b_2linha[i],q))),qs);
    a_barra[i]=K[i]*a_2linha[i];
    b_barra[i]=K[i]*b_2linha[i];
}
for(i=0;i<n;i++){
    E_barra[i]=b_barra[i]/a_barra[i];
    s_barra[i]=pow(pow(a_barra[i],q)+pow(b_barra[i],q),qs);
}
//Normalização double fiE=0,fiS=0;
for(i=0;i<n;i++){
    if(E_barra[i]>fiE) fiE=E_barra[i];
    if(s_barra[i]>fiS) fiS=s_barra[i];
}
double a_til[n],b_til[n],e_til[n],s_til[n],Bj[n];
for(i=0;i<n;i++){
    Bj[i]=pow((1+pow(E_barra[i],q))/(pow(fiE,q)+pow(E_barra[i],q)),qs);
    a_til[i]=a_barra[i]*(fiE/fiS)*Bj[i];
    b_til[i]=b_barra[i]*Bj[i]/fiS;
    e_til[i]=b_til[i]/a_til[i];
    s_til[i]=pow((pow(a_til[i],q)+pow(b_til[i],q)),qs);
}
double v_til[ni],u_til[no];
for(i=0;i<ni;i++) v_til[i]=v[i]*fiE/fiS;
for(i=0;i<no;i++) u_til[i]=u[i]/fiS;
//selecionar as DMUs que fazem parte de psi
int controle[n];
for(i=0;i<n;i++){
    printf("Digite 1 se a DMU%d faz parte ou -1 se ela nao faz parte do conjunto Psi",i+1);
    scanf("%d",&controle[i]);
    if(controle[i]!=1 && controle[i]!=-1) {
        printf("Numero invalido. Execute novamente");
        exit(1);
    }
}
}

```



```

int qtd_DMU=0; //guarda a quantidade de DMU em Psi
for(i=0;i<n;i++){
    if(controle[i]==1) qtd_DMU++;
}
double teta[n]; //metas de cada DMU.
int parameta;
printf("Digite o (%) de crescimento da eficiencia desejada ou Digite 1 para digitar manu-
almente o valor da meta de cada eficiencia");
scanf("%d",&parameta);
if(parameta==1){
    for(i=0;i<n;i++){
        if(controle[i]==1){
            printf("Digite a meta da DMU%d",i+1);
            scanf("%G",&teta[i]);
        }
        else teta[i]=e_til[i];
    }
}
else{
    for(i=0;i<n;i++){
        if(controle[i]==1){
            teta[i]=e_til[i]+e_til[i]*parameta/100;
        }
        else teta[i]=e_til[i];
    }
}
//Pegando o valor de t1 no arquivo.dat
ampl::Parameter T1 = ampl.getParameter("t1");
ampl::DataFrame df20 = T1.getValues();
if (myfile20.is_open()){
    myfile20 << df20.toString();
    myfile20.close();
}
else cout << "Erro ao tentar abrir o arquivo";
double *t1;

```

```

t1=pegaDFvetor(n);
//Pegando o valor de t2 no arquivo.dat
ampl::Parameter T2 = ampl.getParameter("t2");
ampl::DataFrame df21 = T2.getValues();
ofstream myfile21 ("auxiliar.txt");
if (myfile21.is_open()){
    myfile21 << df21.toString();
    myfile21.close();
}
else cout << "Erro ao tentar abrir o arquivo";
double *t2;
t2=pegaDFvetor(n);
double lx,ly;
ampl::Parameter Lx = ampl.getParameter("lx");
lx=ampl.getValue("lx").dbl();
ampl::Parameter Ly = ampl.getParameter("ly");
ly=ampl.getValue("ly").dbl();

//Construção do arquivo para a resolução do Modelo QPS2
ofstream myfile14 ("dados2.dat");
if (myfile14.is_open()){
    myfile14<< "data; "<<"\ n";
    myfile14<<"set DMU:="<<"\t";
    for(i=0;i<n;i++){
        if(controle[i]==1){
            if(i+1<10) myfile14<<"DMU0"<<i+1<<"^";
            else myfile14<<"DMU"<<i+1<<"^";
        }
    }
    myfile14<<" "<<"\n";
    myfile14<<"set input:="<<"\t";
    for(i=0;i<ni;i++) myfile14<<"x"<<i+1<<"\t";
    myfile14<<" "<<"\n";
    myfile14<<"set output:="<<"\t";
    for(i=0;i<no;i++) myfile14<<"y"<<i+1<<"\t";

```

```

myfile14<<"<<"\n";
myfile14<<"param lx="<<"\t"<<lx<<"<<"\n"<<"param ly="<<"\t"<<ly
<<"<<"\n"<<"param fiE="<<"\t"<<fiE<<"<<"\n"<<"param q:= "<<"\t"<<q
<<"<<"\n\n";
myfile14<<"param X: ";
for(i=0;i<ni;i++) myfile14<<"x"<<i+1<<"\t";
myfile14<<":="<<"\n";
for(i=0;i<n;i++){
    if(controle[i]==1){
        if(i+1<10) myfile14<<"DMU0"<<i+1<<"\t";
        else myfile14<<"DMU"<<i+1<<"\t";
        for(j=0;j<ni;j++) myfile14<<X[i][j]<<"\t";
    }
    myfile14<<"\n";
}
myfile14<<"<<"\n\n";
myfile14<<"param Y: ";
for(i=0;i<no;i++) myfile14<<"y"<<i+1<<"\t";
myfile14<<":="<<"\n";
for(i=0;i<n;i++){
    if(controle[i]==1){
        if(i+1<10) myfile14<<"DMU0"<<i+1<<"\t";
        else myfile14<<"DMU"<<i+1<<"\t";
        for(j=0;j<no;j++) myfile14<<Y[i][j]<<"\t";
    }
    myfile14<<"\n";
}
myfile14<<"<<"\n\n";
myfile14<<"param: V rI="<<"\n";
for(i=0;i<ni;i++) myfile14<<"x"<<i+1<<"\t"<<v_til[i]<<"\t"<<inputs[i]<<"\n";
myfile14<<"<<"\n";
myfile14<<"param: U rO="<<"\n";
for(i=0;i<no;i++) myfile14<<"y"<<i+1<<"\t"<<u_til[i]<<"\t"<<outputs[i]<<"\n";
myfile14<<"<<"\n";
myfile14<<"param: t1 t2 teta s="<<"\n";

```

```

    for(i=0;i<n;i++){
        if(controle[i]==1){
            if(i+1<10)
                else myfile14<<"DMU"<<i+1<<"\t";
            myfile14<<t1[i]<<"\t"<<t2[i]<<"\t"<<teta[i]<<"\t"<<s_til[i]<<"\n";
        }
    }
myfile14<<"<<"\n"<<"option solver snopt;";
myfile14.close();
}
else cout << "Erro ao tentar abrir o arquivo";
printf("Arquivo gerado com Sucesso!\n");
//Resolução do Modelo QPS2
ampl.reset();
ampl.read("/home/usuario/Documentos/amplide.linux64/amplapi/examples/cpp/Models/
modelagem.mod");
ampl.readData("/home/usuario/Documentos/amplide.linux64/amplapi/examples/cpp/
dados2.dat");
ampl.solve();
ampl::Variable Delta = ampl.getVariable("delta");
ampl::DataFrame df5 = Delta.getValues();
ofstream myfile5 ("auxiliar.txt");
if (myfile5.is_open()){
    myfile5 << df5.toString();
    myfile5.close();
}
else cout << "Erro ao tentar abrir o arquivo";
double delta[n][ni];
N=n*ni;
aux=pegaDFvetor(N);
cont=0;
for(i=0;i<n;i++){
    if(controle[i]==1){
        for(j=0;j<ni;j++){
            delta[i][j]=aux[cont];

```

```

        cont++;
    }
}
else{
    for(j=0;j<ni;j++) delta[i][j]=0;
}
}
free(aux);
ampl::Variable Fi = ampl.getVariable("fi");
ampl::DataFrame df6 = Fi.getValues();
ofstream myfile6 ("auxiliar.txt");
if (myfile6.is_open()){
    myfile6 << df6.toString();
    myfile6.close();
}
else cout << "Erro ao tentar abrir o arquivo";
double fi[n][no];
N=n*no;
aux=pegaDFvetor(N);
cont=0;
for(i=0;i<n;i++){
    if(controle[i]==1){
        for(j=0;j<no;j++){
            fi[i][j]=aux[cont];
            cont++;
        }
    }
    else{
        for(j=0;j<no;j++) fi[i][j]=0;
    }
}
free(aux);
//Atualização da matriz X e Y
double X_barra[n][ni],Y_barra[n][no];
for(i=0;i<n;i++){

```

```

    for(ji=0;ji<ni;ji++) X_barra[i][ji]=X[i][ji]+delta[i][ji];
    for(jo=0;jo<no;jo++) Y_barra[i][jo]=Y[i][jo]+fi[i][jo];
}
//Atualização das novas eficiências e porte
double a_2linha_til[n],b_2linha_til[n],a_1linha_til[n],b_1linha_til[n],K_linha[n];
double aj_til_negrito[n],bj_til_negrito[n],ej_til_negrito[n],sj_til_negrito[n];
for(i=0;i<n;i++){
    a_2linha_til[i]=0;
    b_2linha_til[i]=0;
    a_1linha_til[i]=0;
    b_1linha_til[i]=0;
    K_linha[i]=0;
    aj_til_negrito[i]=0;
    bj_til_negrito[i]=0;
    ej_til_negrito[i]=0;
    sj_til_negrito[i]=0;
}
for(i=0;i<n;i++){
    if(controle[i]==1){
        for(ji=0;ji<ni;ji++){
            a_2linha_til[i]=a_2linha_til[i]+v_til[ji]*X_barra[i][ji];
        }
        for(jo=0;jo<no;jo++){
            b_2linha_til[i]=b_2linha_til[i]+u_til[jo]*Y_barra[i][jo];
        }
    }
    else{
        a_2linha_til[i]=a_til[i];
        b_2linha_til[i]=b_til[i];
    }
}
for(i=0;i<n;i++){
    if(controle[i]==1){
        for(ji=0;ji<ni;ji++){
            if(inputs[ji]==1) a_1linha_til[i]=a_1linha_til[i]+v_til[ji]*X_barra[i][ji];

```

```

    }
    for(jo=0;jo<no;jo++){
        if(outputs[jo]==1) b_1linha_til[i]=b_1linha_til[i]+u_til[jo]*Y_barra[i][jo];
    }
}
else{
    a_1linha_til[i]=a_til[i];
    b_1linha_til[i]=b_til[i];
}
}
for(i=0;i<n;i++){
    if(controle[i]==1) K_linha[i]=pow(((pow((a_1linha_til[i]/fiE),q)+pow(b_1linha_til[i],q))/
(pow(a_2linha_til[i],q)+pow(b_2linha_til[i],q))),qs);
    else K_linha[i]=1;
    aj_til_negrito[i]=K_linha[i]*a_2linha_til[i];
    bj_til_negrito[i]=K_linha[i]*b_2linha_til[i];
    ej_til_negrito[i]=bj_til_negrito[i]/aj_til_negrito[i];
    sj_til_negrito[i]=pow(pow(aj_til_negrito[i],q)+pow(bj_til_negrito[i],q),qs);
}
//Começa a última normalização
double alfa=0, beta=0,k1,k2;
for(i=0;i<n;i++){
    if(ej_til_negrito[i]>alfa) alfa=ej_til_negrito[i];
    if(sj_til_negrito[i]>beta) beta=sj_til_negrito[i];
}
k1=1/alfa;
k2=1/beta;
double Cj[n],aj_til[n],bj_til[n],ej_til[n],sj_til[n];
for(i=0;i<n;i++){
    aj_til[i]=0;
    bj_til[i]=0;
}
for(i=0;i<n;i++){
    Cj[i]=pow((1+pow(ej_til_negrito[i],q))/(1+pow(k1*ej_til_negrito[i],q)),qs);
    aj_til[i]=aj_til_negrito[i]*k2*Cj[i];

```

```

    bj_til[i]=bj_til_negrito[i]*k1*k2*Cj[i];
    ej_til[i]=bj_til[i]/aj_til[i];
    sj_til[i]=pow(pow(aj_til[i],q)+pow(bj_til[i],q),qs);
}
//Joga todos os dados no excel para melhor visualização
ofstream myfile13 ("table.xlsx");
if (myfile13.is_open()){
myfile13 <<"DMU"<<"\t"<<"E*"<<"\t"<<"a_1linha"<<"\t"<<"b_1linha"
<<"\t"<<"a_2linha"<<"\t"<<"b_2linha"<<"\t"<<"K"<<"\t"<<"a_barra"
<<"\t"<<"b_barra"<<"\t"<<"e_barra"<<"\t"<<"s_barra"<<"\t"<<"Bj"
<<"\t"<<"a_til"<<"\t"<<"b_til"<<"\t"<<"e_til"<<"\t"<<"s_til"<<"\n";
for(i=0;i<n;i++){
myfile13 <<i+1<<"\t"<< E_asterisco[i]<<"\t"<<a_1linha[i]<<"\t"<<b_1linha[i]
<<"\t"<<a_2linha[i]<<"\t"<<b_2linha[i]<<"\t"<<K[i]<<"\t"<<a_barra[i]<<"\t"
<<b_barra[i]<<"\t"<<E_barra[i]<<"\t"<<s_barra[i]<<"\t"<<Bj[i]<<"\t"<<a_til[i]
<<"\t"<<b_til[i]<<"\t"<<e_til[i]<<"\t"<<s_til[i]<<"\n";
myfile13<<"\n\n";
for(i=0;i<ni;i++){
myfile13 << "v"<<i+1<<"\t"<< v[i]<<"\t"<<<<"v_til"<<i+1<< "\t"<<v_til[i]<<"\n";
}
for(i=0;i<no;i++){
myfile13 << "u"<<i+1<<"\t"<< u[i]<<"\t"<<<<"u_til"<<i+1<<"\t"<<u_til[i]<<"\n";
}
myfile13<<"max E"<<"\t"<<fiE<<"\n";
myfile13<<"max d"<<"\t"<<fiS<<"\n";
myfile13 <<"DMU"<<"\t";
for(i=0;i<ni;i++){
myfile13<<"X"<<i+1<<"\t"<<"delta"<< i+1<<"\t"<<"X_barra"<<i+1<<"\t";
for(i=0;i<no;i++){
myfile13 <<"Y"<<i+1<<"\t"<<"fi"<< i+1<<"\t"<<"Y_barra"<<i+1<<"\t";
myfile13<<"meta"<<"\t"<<"a_1linha_til"<<"\t"<<"b_1linha_til"<<"\t"
<<"a_linha_til"<<"\t"<<"b_2linha_til"<<"\t"<<"K_linha"<<"\t"<<"aj_til_negrito"
<<"\t"<<"bj_til_negrito"<<"\t"<<"ej_til_negrito"<<"\t"<<"sj_til_negrito"<<"\t"
<<"Cj"<<"\t"<<"aj_til"<<"\t"<<"bj_til"<<"\t"<<"ej_til"<<"\t"<<"sj_til"<<"\n";
}
}
}

```



```

    for(i=0;i<n;i++){
        myfile13<<i+1<<"\t";
        for(ji=0;ji<ni;ji++)
myfile13<<X[i][ji]<<"\t"<<delta[i][ji]<<"\t"<<X_barra[i][ji]<<"\t";
        for(jo=0;jo<no;jo++)
myfile13<<Y[i][jo]<<"\t"<<fi[i][jo]<<"\t"<<Y_barra[i][jo]<<"\t";
        myfile13<<teta[i]<<"\t"<<a_1linha_til[i]<<"\t"<<b_1linha_til[i]<<
"\t"<<a_2linha_til[i]<<"\t"<<b_2linha_til[i]<<"\t"<<K_linha[i]<<"\t"<<
aj_til_negrito[i]<<"\t"<<bj_til_negrito[i]<<"\t"<<ej_til_negrito[i]<<"\t"<<
sj_til_negrito[i]<<"\t"<<Cj[i]<<"\t"<<aj_til[i]<<"\t"<<bj_til[i]<<"\t"<<ej_til[i]<<"
\t"<<sj_til[i]<<"\n";
    }
myfile13.close();
}
else cout << "Erro ao tentar abrir o arquivo";
free(v);free(u);free(t1);free(t2);
} // fecha o try
catch (const std::exception &e){
    printf("Algum erro ocorreu!!\n");
    std::cout << e.what() << "\n";
}
}

```