

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

PRISCILA PEREIRA DE CAMARGO

**Sobre Cliques, Conjuntos Independentes e
2-Contaminação em Grafos Prismas Complementares**

NITERÓI

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

PRISCILA PEREIRA DE CAMARGO

Sobre Cliques, Conjuntos Independentes e 2-Contaminação em Grafos Prismas Complementares

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Computação. Área de concentração: ALGORITMOS E OTIMIZAÇÃO

Orientador:
Uéverton dos Santos Souza

NITERÓI

2018

Ficha catalográfica automática - SDC/BEE

C172s Camargo, Priscila Pereira de
Sobre Cliques, Conjuntos Independentes e 2-Contaminação em
Grafos Prismas Complementares / Priscila Pereira de Camargo ;
Uéverton dos Santos Souza, orientador. Niterói, 2018.
47 f.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Niterói, 2018.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PGC.2018.m.11157952798>

1. Grafo. 2. Complexidade Computacional. 3. Algoritmo em
grafos. 4. Otimização (Computação). 5. Produção
intelectual. I. Título II. Souza, Uéverton dos Santos,
orientador. III. Universidade Federal Fluminense. Escola de
Engenharia.

CDD -

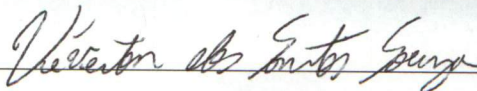
PRISCILA PEREIRA DE CAMARGO

Sobre Cliques, Conjuntos Independentes e 2-Contaminação em Grafos Prismas
Complementares

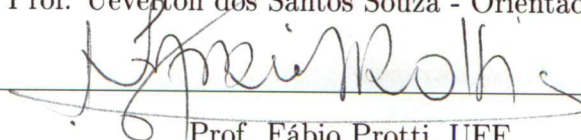
Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Computação da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Computação. Área de concentração: ALGORITMOS E OTIMIZAÇÃO.

Aprovada em agosto de 2018.

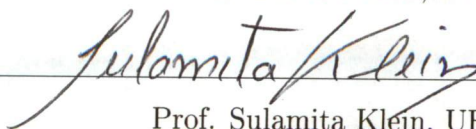
BANCA EXAMINADORA



Prof. Uéverton dos Santos Souza - Orientador, UFF



Prof. Fábio Protti, UFF



Prof. Sulamita Klein, UFRJ

Niterói

2018

Ao meu querido e amado pai Roberval (in memoriam), pela torcida e incentivo.

Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus por permitir que eu pudesse ter saúde, coragem, perseverança para concluir este trabalho.

À minha querida e amada mãe Carmem Lúcia, por todo apoio e por sempre estar disponível para me ajudar no que fosse preciso.

Ao meu pai Roberval (in memoriam), por sempre me incentivar e principalmente pela vibração e alegria que sentia a cada etapa de estudo vencida por mim desde o princípio.

Ao meu amado esposo Deyvid, companheiro de todas as horas, por sua compreensão, paciência e apoio incondicional.

À equipe COSEAC-UFF, especialmente aos meus colegas Rosely e Luiz Alberto, por acreditarem em mim e autorizarem minhas idas ao Instituto de Computação no horário de trabalho.

Aos colegas que fiz durante essa caminhada, em especial à Anne e Victor, pelos momentos de descontração, pelas conversas e pensamentos positivos.

Ao querido orientador Uéverton pela incomensurável ajuda, incentivo, força, compreensão e dedicação dispensada a mim para que eu pudesse concluir essa dissertação.

Resumo

Um grafo do tipo prisma complementar surge da união disjunta do grafo G , do seu complementar $\bar{G}$ e da adição de um emparelhamento entre os vértices correspondentes em G e $\bar{G}$. Essa classe de grafos foi introduzida recentemente e existem inúmeros problemas em aberto a seu respeito. Dois problemas clássicos da teoria dos grafos, determinar se em um dado grafo existe uma clique de ordem k e determinar se em um dado grafo existe um conjunto independente de ordem k , foram provados NP-completos quando o grafo de entrada é um prisma complementar. Nessa dissertação, estudamos as complexidades dos problemas da clique e do conjunto independente sob a ótica da complexidade parametrizada. Inicialmente provamos utilizando a teoria de Ramsey que estes problemas possuem um núcleo e, portanto, são Tratáveis por Parâmetro Fixo (FPT). Em seguida, mostramos através de PPT reduções que tanto determinar se o grafo possui uma clique de tamanho k quanto determinar se o grafo possui um conjunto independente de tamanho k em grafos prismas complementares, quando parametrizados pelo tamanho da solução k , não possuem núcleo polinomial. Além disso, abordamos o problema 2-contaminação no contexto dos prismas complementares. Esse problema consiste em infectar um determinado grafo por completo partindo de um conjunto de vértices infectados inicialmente. Para que um vértice seja contaminado, basta que pelo menos 2 de seus vizinhos estejam contaminados. A propagação da contaminação ocorrerá seguindo tal regra até que todos os vértices do grafo estejam contaminados. Sabe-se que o conjunto mínimo de vértices necessário para contaminar um grafo deste tipo é no máximo 5. Para esse problema, provamos que o conjunto mínimo necessário para contaminar todo o grafo é no máximo 3. Com isso, descobrimos uma estratégia algorítmica para encontrar tal conjunto.

Palavras-chave: Cliques, Conjuntos Independentes, 2-Contaminação, Prismas Complementares.

Abstract

The complementary prism graph arises from the disjoint union of the graph G and its complement $\bar{G}$ by adding the edges of a perfect matching joining pairs of corresponding vertices of G and $\bar{G}$. This class of graph was recently introduced and there are many open questions about it. Two classical problems of graph theory, to determine if in a given graph there is a clique of order k and to determine if in a given graph there exists an independent set of order k , were proved NP-complete when the input graph is a complementary prism. In this dissertation, we study the complexities of the problems of the clique and the independent set from the point of view of the parameterized complexity. First we prove using Ramsey's theory that these problems have a kernel and therefore are Fixed Parameter Treatable (FPT). Then we show through PPT reductions that both determine if the graph has a clique of size k and determine if the graph has an independent set of size k in complementary graphs prisms, when parameterized by the size of solution k , have no polynomial kernel. In addition, we address the 2-contamination problem in the context of complementary prisms. This problem consists in infecting a certain graph completely starting from a set of initially infected vertices. For a vertex to be contaminated, it is enough that at least 2 of its neighbors are contaminated. The propagation of the contamination will occur following this rule until all the vertices of the graph are contaminated. It is known that the minimum set of vertices necessary to contaminate a graph of this type is at most 5. For this problem, we proved that the minimum set necessary to contaminate the entire graph is at most 3. Thus, we discovered an algorithmic strategy to find such a set.

Keywords: Cliques, Independent Sets, Irreversible Set, Complementary Prisms.

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de prismas	1
1.2	O grafo G , o grafo complementar $\bar{G}$ e o prisma complementar $G\bar{G}$	2
1.3	Processo de contaminação do grafo G	7
2.1	Exemplo de um grafo H	13
2.2	Grafo Prisma Complementar $H\bar{H}$ obtido a partir de H e $\bar{H}$	13
3.1	Subgrafo $H\bar{H}$ de um prisma complementar $G\bar{G}$, onde $H = (C \cup I)$, C e C' são cliques, I e I' são conjuntos independentes.	18
3.2	Exemplo de uma instância para o problema k -SPLIT gerada a partir de um grafo G	20
3.3	PPT-reduções de k -RAMSEY ao Conjunto Independente em grafos prisma complementar.	22
4.1	Prisma $G\bar{G}$ e $c_{min}(G\bar{G}) = \{a, c, \bar{d}\}$	24
4.2	Grafo G e subgrafo H	25
4.3	Grafo G e subgrafo H	26
4.4	Grafo $G\bar{G}$	26
4.5	Grafo $G\bar{G}$ quando $ V(G) = 6$ e $ C_G(\{u, v\}) = 4$	28
4.6	Grafo $G\bar{G}$ quando $ V(G) = 6$ e $ C_G(\{u, v\}) = 3$	29
4.7	Grafo $G\bar{G}$ quando $ V(G) = 6$ e $ C_G(\{u, v\}) = 3$	29
4.8	Grafo $G\bar{G}$ quando $ V(G) = 6$ e $ C_G(\{u, v\}) = 3$	30
4.9	Grafo $G\bar{G}$ quando $ V(G) = 7$	31
4.10	Grafo $G\bar{G}$ quando $ V(G) = 7$	32

Lista de Tabelas

1.1	Limites superior e inferior para $r(k, l)$	5
-----	--	---

Lista de Abreviaturas e Siglas

- FPT : Fixed-Parameter Tractable;
PPT : Polynomial Parameter Transformation;

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Definições e Notações	3
1.1.1	Grafos	3
1.1.2	Problemas Abordados	4
1.1.2.1	Teoria de Ramsey	4
1.1.2.2	Conjunto 2-Contaminação	6
1.2	Complexidade Parametrizada	8
1.2.1	Kernelização	9
1.2.2	Inviabilidade de Kernel Polinomial	10
2	Revisão da Literatura	11
3	k-CLIQUE e k-CONJUNTO INDEPENDENTE	15
3.1	Tratabilidade Parametrizada	15
3.2	Limite Inferior de Redução a um Núcleo	16
4	2-Contaminação	23
5	Conclusões e Considerações Finais	33
	Referências	34

Capítulo 1

Introdução

Em geometria espacial, um prisma é um sólido geométrico caracterizado pela união de duas bases paralelas e congruentes (mesma forma e mesmo tamanho) através de segmentos de reta também paralelos e congruentes que resultam em faces laterais em forma de paralelogramo[22].

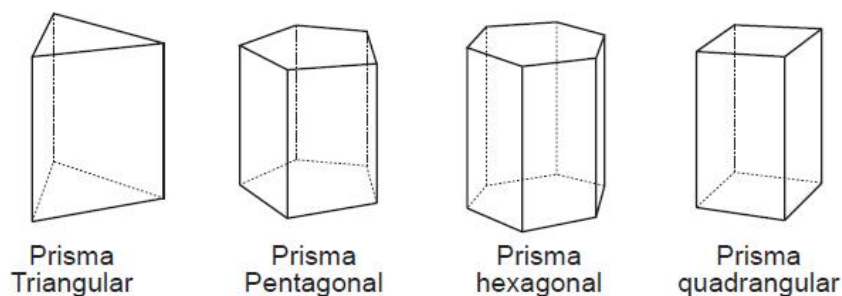


Figura 1.1: Exemplos de prismas

Um grafo do tipo prisma é um grafo resultante do produto cartesiano de um caminho P_2 por um ciclo C_n onde n representa o número de vértices. [33]

Fazendo uma alusão ao conhecido prisma, um **prisma complementar** é composto por duas bases: um grafo G e o seu complementar $\bar{G}$. A união destas bases é dada através de um emparelhamento perfeito entre os vértices correspondentes em G e $\bar{G}$.

A figura 1.2 ilustra um grafo G , o seu grafo complementar $\bar{G}$ e a composição $G\bar{G}$ formando um prisma complementar.

Os prismas complementares foram introduzidos na última década por Haynes, Henning, Slater e van der Merwe [21]. Em [21], foram apresentadas propriedades relacionadas

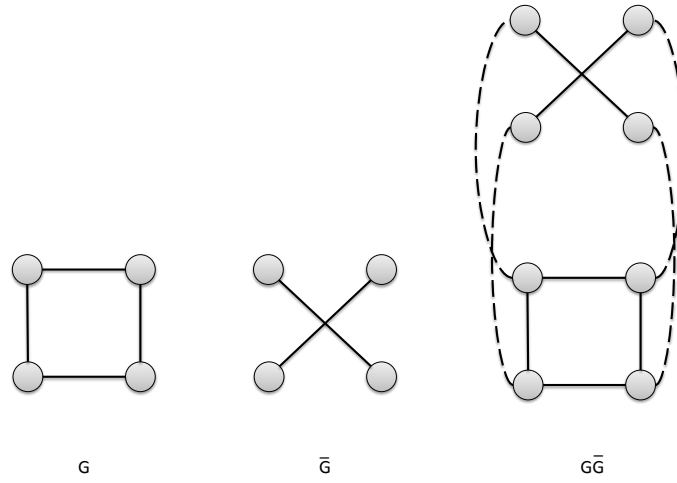


Figura 1.2: O grafo G , o grafo complementar $\bar{G}$ e o prisma complementar $G\bar{G}$

a prismas complementares, tais como graus, distâncias, independência e dominação, além de exibirem uma série de problemas em suas considerações finais. Por se tratar de uma classe de grafos apresentada recentemente, o seu estudo tem despertado interesse pois, existem diversos problemas ainda não investigados a seu respeito.

Em [8] foi descrito um algoritmo polinomial capaz de reconhecer prismas complementares. Em [26] foram estudados ciclos e hamiltonicidade nesta classe de grafos. Em [16] foram analisadas as complexidade de cliques, conjuntos independentes, k -dominação e P_3 -convexidade em prismas complementares. Em [16] foi provado que tanto o problema da clique quanto o problema dos conjuntos independentes são NP-completos para esta classe de grafos. Duarte et. al. também provaram que o conjunto mínimo de vértices necessário para contaminar um grafo prisma complementar era no máximo 5, cuja regra para que um vértice fosse contaminado era que existisse pelo menos 2 de seus vizinhos contaminados.

Nesta dissertação, investigaremos os problemas das cliques e dos conjuntos independentes, sob a ótica da complexidade parametrizada. Provaremos que o tamanho do conjunto mínimo de vértices necessário para contaminar um grafo prisma complementar é no máximo 3. O restante desse trabalho é organizado da seguinte maneira: na seção 1.1 são dadas as principais notações utilizadas e as principais definições dos problemas que serão abordados; na seção 1.2 é apresentada uma breve introdução à Teoria da Complexidade Parametrizada. No capítulo 2 é feita uma revisão da literatura descrevendo as principais contribuições existentes a cerca dos problemas em questão. No capítulo 3 mostramos que

tanto determinar se existe uma clique de tamanho k ou um conjunto independente de tamanho k em um grafo prisma complementar $G\bar{G}$ quando parametrizados pelo tamanho da solução k são Tratáveis por Parâmetro Fixo (*Fixed Parameter Tractable* (FPT)) e que ambos os problemas não possuem núcleo polinomial. No capítulo 4 mostramos que o tamanho mínimo para o conjunto 2-contaminação é no máximo 3 para os grafos prismas complementares. No capítulo 5 concluimos apresentando as considerações finais.

1.1 Definições e Notações

Nesta seção serão apresentados os principais conceitos, notações e problemas abordados neste trabalho.

1.1.1 Grafos

Utilizamos as notações e conceitos padrão de teoria dos grafos e quaisquer notações ou conceitos não definidos podem ser encontrados em [6].

Um *grafo* G é um par ordenado $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto finito de vértices e $E(G)$ é um conjunto de arestas formadas por pares de vértices. Denotaremos a aresta que liga o vértice u ao vértice v por uv . Caso a aresta uv exista, dizemos que o vértice u é adjacente ao vértice v e que a aresta uv é incidente a u e a v . Chamaremos de *extremidades* ou *extremos* da aresta os pares de vértices que formam cada aresta. Para este estudo, consideramos apenas grafos não orientados, simples e finitos. Denotaremos por $\bar{G}$ o complemento de um grafo G . $\bar{G}$ é composto pelo mesmo conjunto de vértices de G e pelo conjunto de arestas complementares de G . Isto é, se a aresta uv existir em G , ela não existirá em $\bar{G}$, logo os vértices u e v não serão adjacentes em $\bar{G}$. Entretanto, se os vértices u e v não são adjacentes em G , existirá a aresta uv em $\bar{G}$. O número de vértices de um grafo G é dito ser a *ordem* ou *cardinalidade* de G . Um *subgrafo* de um grafo G é um grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$, denotado por $H \subseteq G$. Um subgrafo H é um subgrafo induzido de G por um subconjunto $X \subseteq V(G)$ (representado por $H = G[X]$) se, para qualquer par de vértices x e y de H , xy é uma aresta de H se e somente se xy é uma aresta de G .

1.1.2 Problemas Abordados

Um dos problemas combinatórios mais importantes é o de determinar se um dado grafo G possui uma clique de tamanho k . Nesta dissertação estamos interessados em investigar a complexidade deste problema quando o grafo G de entrada é um grafo do tipo prisma complementar. Denotaremos este problema por k -CLIQUE.

k -CLIQUE

Instância: Um grafo G e um inteiro k .

Questão: Existe uma clique de tamanho k em G ?

Um outro problema combinatório igualmente importante é o de determinar se um dado grafo G possui um conjunto independente de tamanho k . Aqui também nos interessa estudar a complexidade deste problema quando o grafo G de entrada é um grafo do tipo prisma complementar. Denotaremos este problema por k -CONJUNTO INDEPENDENTE.

k -CONJUNTO INDEPENDENTE

Instância: Um grafo G e um inteiro k .

Questão: Existe um conjunto independente de tamanho k em G ?

Para auxiliar os estudos da complexidade dos problemas citados anteriormente, utilizaremos o conceito de grafos split. Essa classe de grafos foi introduzida por Foldes S. e Hammer P. L. [19] e é uma classe de grafos bem conhecida [2, 25]. Os grafos split consistem em grafos cujo conjunto de vértices podem ser particionados em duas partes, onde uma parte induz uma clique e a outra induz um conjunto independente. Definiremos como k -SPLIT o problema de determinar se um grafo G possui um subgrafo split de tamanho k .

k -SPLIT

Instância: Um grafo G e um inteiro k .

Questão: Existe um conjunto de tamanho k que induz um subgrafo split G ?

1.1.2.1 Teoria de Ramsey

Em [29] foi apresentado o clássico Teorema de Ramsey. Neste trabalho, Ramsey provou que dado quaisquer inteiros positivos k e l , existe um número inteiro mínimo $r(k, l)$ no qual qualquer grafo que possua $r(k, l)$ vértices contém ou uma clique de tamanho k ou um conjunto independente de tamanho l . Na literatura $r(k, l)$ é conhecido como o **número de Ramsey**.

Problemas em Teoria de Ramsey têm sido bastante estudados e muitas técnicas têm

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40-42
4		18	25	36-41	49-61	58-84	73-115	92-149
5			43-49	58-87	80-143	101-216	126-316	144-442
6				102-165	113-298	132-495	169-780	179-1171
7					205-540	217-1031	241-1713	289-2828
8						282-1870	317-3583	331-6090
9							565-6588	581-12677
10								798-23556

Tabela 1.1: Limites superior e inferior para $r(k, l)$

sido desenvolvidas para estimar os números de Ramsey [11]. Entretanto, determinar estes números tem sido um grande desafio na teoria dos grafos. De fato, somente são conhecidos alguns valores exatos para o número de Ramsey: $r(2, 2) = 2$, $r(3, 3) = 6$, e $r(4, 4) = 18$, mas $r(5, 5)$ ainda é um problema em aberto. Dessa forma, algumas contribuições têm se concentrado em determinar limites superiores e inferiores para estes números, por exemplo, $43 \leq r(5, 5) \leq 49$ [31]. A tabela 1.1 apresenta valores atualizados destes limitantes de acordo com [28].

Em [17] foi estabelecido um limite superior para o número de Ramsey definido a seguir (Teorema 1).

Teorema 1. [17] *Para todos inteiros positivos k e l , vale que:*

$$r(k, l) \leq \binom{k + l - 2}{k - 1}$$

Neste trabalho, denotaremos por k -RAMSEY o problema de encontrar uma clique de tamanho k ou um conjunto independente de tamanho k em um grafo. Assim como o problema k -SPLIT, utilizaremos o problema k -RAMSEY como ferramenta para estudarmos a complexidade dos problemas k -CLIQUE e k -CONJUNTO INDEPENDENTE em grafos prismas complementares.

k -RAMSEY

Instância: Um grafo G e um inteiro k .

Questão: Existe uma clique ou um conjunto independente de tamanho k em G ?

1.1.2.2 Conjunto 2-Contaminação

Na literatura, grafos são utilizados para representar inúmeros problemas de diversas áreas. Uma modelagem em grafos que vem ganhando destaque é a representação de problemas relacionados à propagação de doença ou opinião através de redes sociais[30].

Um desses modelos, proposto em [30] consiste em um grafo $G = (V, E)$ onde V é o conjunto de vértices representando as pessoas e E é o conjunto de arestas conectando essas pessoas formando uma rede. Nesse modelo, cada vértice possui um determinado estado num determinado instante de tempo. O estado 1 corresponde a um vértice “infectado” por uma doença e o estado 0 corresponde a um vértice não “infectado”.

O processo de propagação da doença se inicia no tempo 0 quando k vértices estão infectados. No tempo 1, caso um vértice possua pelo menos k de seus vizinhos infectados, ele também será infectado e assim sucessivamente até que todos os vértices de G estejam infectados. Ao final do processo, chamamos este conjunto de conjunto k -contaminação, pois uma vez que o vértice foi infectado, a contaminação não pode ser desfeita. Nesta dissertação, trabalharemos apenas com $k = 2$.

Para exemplificar, considere o grafo G da figura 1.3. Inicialmente, apenas os vértices 10 e 14 estão infectados. No tempo $t = 1$, os vértices 4, 9 e 15 serão infectados pois, possuem pelo menos 2 de seus vizinhos infectados. O processo se repete ao longo do tempo até que todos os vértices de G estejam contaminados.

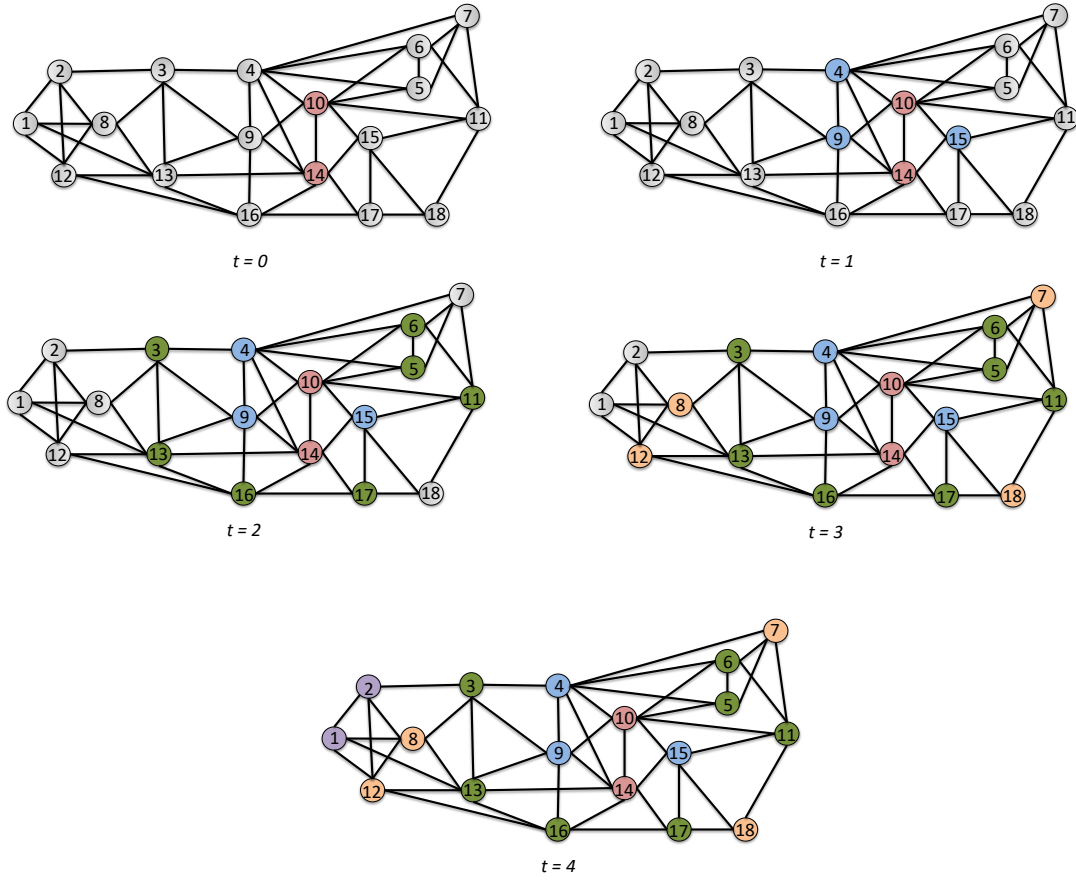


Figura 1.3: Processo de contaminação do grafo G

Uma pergunta natural a ser feita é qual o menor quantidade de vértices infectados inicialmente devemos ter para que no decorrer do tempo todo o grafo seja completamente infectado, ou seja, qual o tamanho mínimo de um conjunto 2-contaminação em um grafo G ?

Embora em [10] tenha sido provado que calcular o tamanho mínimo de um conjunto 2-contaminação em um grafo G era NP-completo, calcular esse conjunto para os grafos do tipo prisma complementar é um problema que pode ser resolvido em tempo polinomial. Em [16] foi provado que o tamanho mínimo de um conjunto 2-contaminação em um grafo prisma complementar era no máximo 5.

1.2 Complexidade Parametrizada

As definições e conceitos básicos de complexidade parametrizada podem ser encontrados em [12, 13, 18, 27].

A teoria da NP -completude foi desenvolvida para determinar que certos problemas difíceis são, de alguma maneira, equivalentes. Problemas ditos NP -difíceis são comumente chamados de intratáveis e a menos que $P = NP$, não podem ser resolvidos por algoritmos em tempo polinomial. Ao considerar que muitos desses problemas precisam ser resolvidos na prática e não são conhecidos algoritmos para resolvê-los em tempo polinomial, torna-se pertinente o seguinte questionamento: "Como solucioná-los da forma mais eficiente possível?" [32].

Uma boa alternativa para se trabalhar com problemas NP -difíceis é a Teoria da Complexidade Parametrizada. Nesta teoria, os problemas são descritos da seguinte forma: dado uma entrada de tamanho x e um inteiro não negativo k , " x tem alguma propriedade que depende de k ?". Neste contexto, k é chamado de parâmetro [9]. O interesse em tais parâmetros se deve ao fato de que, em muitos casos, somente uma pequena faixa de valores é realmente importante na prática. Logo, o parâmetro k pode ser considerado pequeno em comparação com o tamanho de x . Sendo assim, a intratabilidade (aparente) desses problemas no caso geral pode ser indevidamente pessimista [32].

Um problema parametrizado Π é chamado Tratável por Parâmetro Fixo (*Fixed Parameter Tractable* (FPT)) se existe um algoritmo A (chamado algoritmo FPT) que computa corretamente qualquer instância $I = (x, k)$ e decide se I é uma instância *sim* ou *não* em tempo $f(k) \cdot |x|^{O(1)}$ para alguma função computável f . Dessa maneira, se k é definido com um valor pequeno, o crescimento da função em relação a x é pequeno.

Ao longo do texto, utilizaremos o termo FPT para nos referirmos tanto à classe dos problemas tratáveis por parâmetro fixo quanto também aos algoritmos que possuem complexidade da forma $f(k) \cdot |x|^{O(1)}$. Assim, dizemos que um problema está na classe FPT se admitir um algoritmo FPT.

Nesta dissertação, mostramos que tanto o problema k -CLIQUE quanto o problema k -CONJUNTO INDEPENDENTE pertencem à classe FPT quando o grafo de entrada é um prisma complementar.

1.2.1 Kernelização

Uma das formas mais naturais de demonstrarmos que um problema Π é FPT, é exibindo um algoritmo que solucione Π em tempo $f(k) \cdot |x|^{O(1)}$. Entretanto, nem sempre a construção desse algoritmo é feita de forma imediata. Nesse caso, é necessário o uso de algumas técnicas que nos auxiliem em sua obtenção [32].

A **kernelização** ou **redução a um núcleo** é uma poderosa técnica comumente utilizada na obtenção de algoritmos FPT para problemas parametrizados. A técnica consiste em reduzir, em tempo polinomial, uma instância I do problema Π a uma instância I' , tal que o tamanho de I' seja limitado por alguma função do parâmetro k independente do tamanho de I . Essa nova instância constitui o núcleo do problema com tamanho limitado. Sendo assim, I' pode ser analisada exaustivamente e caso seja encontrada uma solução para I' , esta poderá ser apresentada como uma solução para I . [12] [32].

O núcleo de um problema parametrizado é formalmente definido a seguir:

Definição 1. [32] **Redução a um núcleo:** *Seja $\Pi(k)$ um problema parametrizado. $\Pi(k)$ possui um núcleo se para toda instância $I = (x, k)$ existe um algoritmo A executável em tempo polinomial que fornece como saída uma instância equivalente $I' = (x', k')$ tal que $|x'| \leq g(k)$ e $|k'| \leq g(k)$ para alguma função computável g .*

Existe uma forte relação entre redução a um núcleo e Tratabilidade por Parâmetro Fixo evidenciada no Teorema a seguir:

Teorema 2. [32] *Um problema $\Pi(k)$ admite um algoritmo tratável por parâmetro fixo se e somente se ele admite um núcleo.*

O ponto chave dessa técnica é o tamanho do núcleo em relação ao parâmetro onde busca-se encontrar o menor núcleo, o que possibilita o desenvolvimento de um algoritmo FPT mais eficiente.

Para demonstrar o limite inferior no tamanho do núcleo, usamos uma Transformação Polinomial Parametrizada (chamada PPT-redução). Tal redução é definida a seguir.

Definição 2. PPT-redução: *Seja $\Pi(k)$ e $\Pi'(k')$ dois problemas parametrizados onde $k' \leq g(k)$ para alguma função polinomial $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Uma PPT-redução de $\Pi(k)$ a $\Pi'(k')$ é uma redução R tal que:*

- (i) *Para toda instância $I = (x, k)$, temos que $I \in \Pi(k)$ se e somente se $R(I) \in \Pi'(k')$;*

(ii) R é computável em tempo polinomial (em relação a k).

Neste trabalho mostramos que tanto o problema k -CLIQUE quanto o problema k -CONJUNTO INDEPENDENTE admitem um núcleo.

1.2.2 Inviabilidade de Kernel Polinomial

Após aplicarmos a técnica de kernelização e obtermos um núcleo de um problema parametrizado, uma pergunta natural que surge é o quão pequeno esse núcleo pode ser. Evidentemente, gostaríamos que o núcleo produzido fosse o menor possível e preferencialmente que ele fosse polinomial, ou seja, que seu tamanho fosse polinomial em relação ao parâmetro original.

Entretanto, alguns problemas parametrizados provavelmente não admitem um núcleo de tamanho polinomial. Embora existam diversos resultados positivos sobre a existência de núcleos polinomiais [14, 7, 1] ou até mesmo lineares [4, 5], apenas recentemente é que têm aparecido os primeiros resultados a respeito da inviabilidade destes núcleos [32].

Em [3] e em [20] foi desenvolvido um framework utilizando a noção de composicionalidade para mostrar que um problema parametrizado não possui um núcleo polinomial a menos que $NP \subseteq coNP/poly$, ocasionando um colapso na hierarquia polinomial [32].

Em [24] provou-se que o problema k -RAMSEY não admite núcleo de tamanho polinomial a menos que $NP \subseteq coNP/poly$. Esta contribuição foi de extrema importância ao nosso estudo a respeito da existência ou não de um núcleo polinomial para os problemas k -CLIQUE e k -CONJUNTO INDEPENDENTE.

No capítulo 3 mostramos que os problemas k -CLIQUE e k -CONJUNTO INDEPENDENTE não admitem um núcleo de tamanho polinomial.

Capítulo 2

Revisão da Literatura

Em 2015, Duarte et al. [16] estudaram algumas questões relacionadas à complexidade de problemas combinatórios em prisma complementares, tais como clique, conjuntos independentes, k -dominação e convexidade P_3 .

Neste estudo, Duarte et al., mostraram que o problema de encontrar uma clique de ordem k (k -CLIQUE) em um grafo prisma complementar é NP-completo. Para isso, utilizaram uma redução de conjunto independente em grafos livres de triângulos ao problema da clique em prismas complementares. A seguir apresentaremos detalhadamente tal demonstração.

Teorema 3. [16] *Se G é um grafo livre de triângulos e $k \geq 4$, então G possui um conjunto independente de ordem k se e somente se $G\bar{G}$ possuir uma clique de ordem k .*

Demonstração. Considere G um grafo livre de triângulos e com conjunto independente de ordem k , $k \geq 4$. A partir de G definimos o seu grafo complementar $\bar{G}$. Com a união dos grafos G e $\bar{G}$ obtemos o prisma complementar de G ($G\bar{G}$).

Segundo a definição de prisma complementar, o prisma $G\bar{G}$ é composto pelo grafo G , pelo seu complementar $\bar{G}$ e também pelo emparelhamento entre os vértices correspondentes em G e $\bar{G}$. Logo, como consideramos G um grafo que possui um conjunto independente de ordem k , podemos afirmar que em $\bar{G}$ haverá uma clique de ordem k .

Considere um grafo $G\bar{G}$ que possui uma clique de ordem k , $k \geq 4$. Considere também que G é um grafo livre de triângulos. Neste caso, a clique pode ser formada apenas pelos vértices de $\bar{G}$ ou pode ser formada pela combinação de vértices de G com vértices de $\bar{G}$.

Assim, temos as seguintes hipóteses:

- i) a clique é formada integralmente por vértice de $\bar{G}$. Neste caso, como a clique está contida em $\bar{G}$, teremos em G um conjunto independente de ordem k pois, G é complementar a $\bar{G}$.
- ii) a clique é formada pela combinação dos vértices de G e de $\bar{G}$. Neste caso, analisaremos 3 possíveis combinações:
 - a) A clique possui 3 vértices em G e 1 vértice em $\bar{G}$. Como se trata de uma clique, os vértices são vizinhos dois a dois, o que não é possível pois, por definição, G é um grafo livre de triângulos.
 - b) A clique possui 2 vértices em G e 2 vértices em $\bar{G}$. Analogamente, isto também não é possível pois, pela definição de prisma complementar um vértice do lado G só pode ter 1 único vizinho do lado $\bar{G}$ ou vice-versa.
 - c) A clique possui 1 vértice em G e 3 em $\bar{G}$. Esta configuração também não é possível pois, pela definição de prisma um complementar um vértice do lado G só pode ter 1 único vizinho do lado $\bar{G}$ ou vice-versa.

Dessa forma, concluímos que não pode existir nenhum vértice em G que faça parte da clique. Logo, todos os vértices da clique devem estar contidos em $\bar{G}$. Como visto anteriormente, a clique estar contida em $\bar{G}$, implica em existir um conjunto independente em G de ordem k . Assim, mostramos que o problema k -CLIQUE é NP-completo no contexto dos prismas complementares.

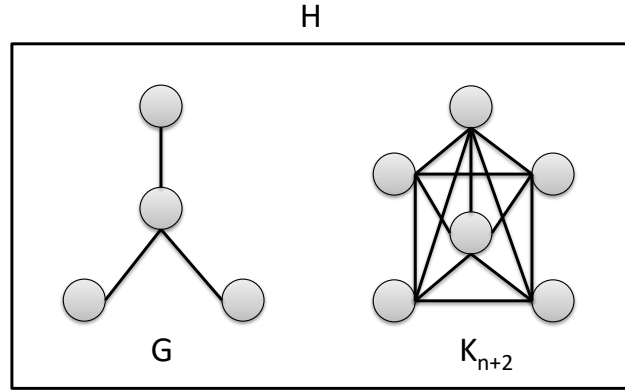
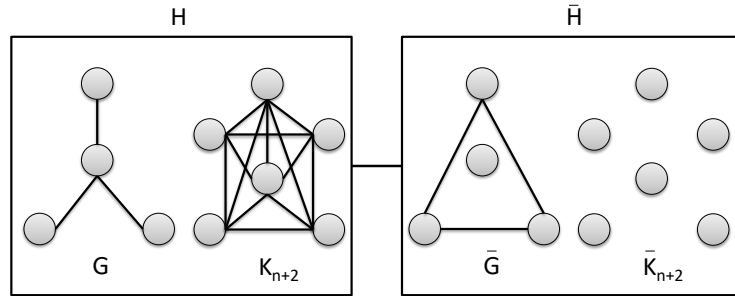
□

Neste mesmo estudo, Duarte et al., também mostraram que o problema k -CONJUNTO INDEPENDENTE em grafos prismas complementares é NP-completo. Para isso, utilizaram uma redução de conjunto independente em grafos quaisquer ao problema do conjunto independente em prismas complementares.

Teorema 4. [16] *Dado um grafo G de ordem n e um inteiro k , o grafo G possui um conjunto independente de ordem k se e somente se o prisma complementar $H\bar{H}$ do grafo $H = G \cup K_{n+2}$ tem um conjunto independente de ordem $n + 2 + k$.*

Demonstração. Considere um grafo G de ordem n e um conjunto independente de ordem k . Considere também $H = G \cup K_{n+2}$ (veja figura 2.1).

A partir do grafo H definimos o seu complementar $\bar{H}$ e com a união de H e $\bar{H}$ obtemos o prisma complementar $H\bar{H}$ (veja figura 2.2).

Figura 2.1: Exemplo de um grafo H Figura 2.2: Grafo Prisma Complementar $H\bar{H}$ obtido a partir de H e $\bar{H}$

Podemos afirmar que o prisma $H\bar{H}$ possui em G um conjunto independente de ordem k , pela hipótese. Como o grafo K_{n+2} é uma clique de ordem $n+2$ e como H é complementar a $\bar{H}$, podemos garantir que existirá um conjunto independente de ordem $n+2$ em $\bar{H}$. Portanto, o prisma $H\bar{H}$ possui um conjunto independente de ordem $n+2+k$. Logo, concluímos que dado um grafo G de ordem n com um conjunto independente de ordem k teremos um prisma complementar $H\bar{H}$ com um conjunto independente de ordem $n+2+k$.

Considere um prisma complementar $H\bar{H}$ com um conjunto independente de ordem $n+2+k$. Devemos verificar as possibilidades dos vértices que compõem o conjunto independente em $H\bar{H}$ estarem dispersos no prisma complementar.

- i) Suponha $K_{n+2} = 0$ e $\bar{K}_{n+2} = 0$. Neste caso, em $\bar{G}$ poderão existir no máximo $n-1$ vértices no conjunto independente e em G poderá existir no máximo 1 vértice. Sendo assim, o prisma complementar $H\bar{H}$ teria um conjunto independente de ordem n , contrariando a hipótese (absurdo).
- ii) Suponha $K_{n+2} = 0$ e $\bar{G} = 0$. Neste caso, K_{n+2} poderá ter no máximo $n+2$ vértices no conjunto independente. Como $H\bar{H}$ possui $n+2+k$, logo sobraram k vértices (ou mais) em G .

- iii) $K_{n+2} = 1$ e $K_{n+2}^- = 0$. Neste caso, em $\bar{G}$ poderão existir no máximo $n-1$ vértices no conjunto independente e em G poderá existir no máximo 1 vértice. Sendo assim, o prisma complementar $H\bar{H}$ teria um conjunto independente de ordem n , contrariando o enunciado (absurdo).
- iv) $K_{n+2} = 1$ e $K_{n+2}^- = n+1$. Neste caso, como $H\bar{H}$ possui um conjunto independente de ordem $n+2+k$, restaram k vértices no grafo G .

Dessa forma, podemos dizer que se um prisma complementar $H\bar{H}$ possuir um conjunto independente de ordem $n+2+k$ então teremos um grafo G com um conjunto independente de ordem k .

Assim, mostramos que o problema k -CONJUNTO INDEPENDENTE é NP-completo para os grafos do tipo prisma complementar. $\square$

Uma outra contribuição relevante abordada por Duarte et al. [16] foi a descoberta do conjunto mínimo para o problema do conjunto 2-contaminação para os prismas complementares. Mostraremos esta descoberta detalhadamente a seguir.

Teorema 5. [16] *Seja G um grafo. Se G e $\bar{G}$ são conexos, então $h_{p3}(G\bar{G}) \leq 5$.*

Na literatura, h_{p3} representa o número envoltório P_3 . Para não nos alongarmos neste assunto e tornar este trabalho muito extenso, todas as definições e conceitos referentes a este tema poderão ser encontrados em [15].

Demonstração. Sejam a, b , e c três vértices de G . Sejam $V_1 = \{a, b, c\}$ e $V_2 = V(G) \setminus V_1$. Seja $\bar{a}$ o complementar do vértice a em $\bar{G}$. Se $|V_2| \leq 1$, então a união de $V_1 \cup V_2$ com $\bar{a}$ é um conjunto envoltório P_3 de $G\bar{G}$, o que implica $h_{p3}(G\bar{G}) \leq 5$.

Assim podemos assumir que $|V_2| \geq 2$. Note que todos vértices em $\bar{V}_2$ são adjacentes a no máximo um vértice em $\bar{V}_1$. Seja $\bar{d}$ um vértice em $\bar{V}_2$. Seja $S = \{a, b, c, \bar{d}\}$. Como $\bar{d}$ tem pelo menos dois vizinhos em V_1 , o envoltório $P_3 H_{G\bar{G}}(S)$ de S contém dois vértices de $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ e assim $V_1 \cup \bar{V}_2$. Se $H_{G\bar{G}}(S)$ não contém $\bar{V}_1$, então nenhum vértice em $\bar{V}_1 \setminus H_{G\bar{G}}(S)$ é adjacente a um vértice em $\bar{V}_2$. Como $\bar{G}$ é conexo, algum vértice $\bar{x}$ em $\bar{V}_1 \setminus H_{G\bar{G}}(S)$ é adjacente a um $\bar{y}$ em $\bar{V}_1 \cap H_{G\bar{G}}(S)$. Como $x \in V_1 \subseteq H_{G\bar{G}}(S)$, isto implica uma contradição. Isto implica que $H_{G\bar{G}}(S)$ contém V_1 . Agora, uma vez que G é conexo, $H_{G\bar{G}}(S)$ contém V_1 . Agora, uma vez que G é conexo, S é um conjunto envoltório P_3 , o que implica $h_{p3}(G\bar{G}) \leq 4$ e completa a prova. $\square$

Capítulo 3

k -CLIQUE e k -CONJUNTO INDEPENDENTE

Em [16] provou-se que tanto o problema de determinar se existe uma clique de ordem k quanto o problema de determinar se existe um conjunto independente de ordem k são NP-completos quando o grafo de entrada é um prisma complementar. Dessa forma, este capítulo tem como principal objetivo mostrar que ambos os problemas são FPT's quando parametrizados por k , mas não admitem núcleo de tamanho polinomial.

3.1 Tratabilidade Parametrizada

Utilizando um limite superior conhecido para o número de Ramsey (ver Teorema 1) provamos que tanto o problema k -CLIQUE quanto k -CONJUNTO INDEPENDENTE pertencem à classe FPT quando o grafo de entrada é um prisma complementar e o parâmetro é o tamanho da solução k .

Teorema 6. *k -CLIQUE e k -CONJUNTO INDEPENDENTE são FPT quando o grafo de entrada é $G\bar{G}$ e o parâmetro é o tamanho da solução k .*

Demonstração. Primeiramente suponha que $|V(G)| \geq u(k, k)$. Sendo assim, através do número de Ramsey, podemos afirmar que ou haverá uma clique de ordem k em G ou haverá um conjunto independente de ordem k em G . Pela propriedade de prisma complementar é fácil ver que se existir uma clique de ordem k em G , consequentemente há um conjunto independente de ordem k em $\bar{G}$. Analogamente, se existir um conjunto independente de ordem k em G , consequentemente há uma clique de ordem k em $\bar{G}$.

Por outro lado suponha que $|V(G)| < u(k, k)$. Utilizaremos o limite superior do

número de Ramsey apresentado anteriormente:

$$u(r, l) = \binom{r + l - 2}{r - 1}$$

Já que o interesse é a busca por um subgrafo (clique ou conjunto independente) de ordem k , podemos reescrever a fórmula para limite superior do número de Ramsey em função de k :

$$u(k, k) = \binom{k + k - 2}{k - 1}$$

Dessa forma, observe que $|G| \leq f(k)$ para alguma função computável f . Isto é, a cardinalidade de G (e $\bar{G}$) é uma função limitada de k e portanto, G é um *núcleo*. $\square$

O Teorema 6, portanto, apresenta um núcleo para o problema k -CLIQUE ou k -CONJUNTO INDEPENDENTE quando o grafo de entrada é um prisma complementar. Dessa forma, ambos os problemas pelo Teorema 2 são solucionáveis em tempo $f(k).n^{O(1)}$ e pertencem à classe FPT.

3.2 Limite Inferior de Redução a um Núcleo

Como apontado anteriormente, um problema $\Pi(k)$ pertence a classe FPT se e somente se $\Pi(k)$ possui um núcleo. Em geral esses núcleos obtidos possuem tamanhos exponenciais em relação ao parâmetro. Dessa forma, é natural para qualquer problema FPT questionarmos quão bom é o núcleo, ou mesmo se é possível a obtenção de um núcleo menor (em geral busca-se um núcleo de tamanho polinomial em relação ao parâmetro).

Nesta seção, mostraremos que embora k -CLIQUE e k -CONJUNTO INDEPENDENTE pertençam à classe FPT quando parametrizados pelo tamanho da solução k , ambos os problemas *não* admitem núcleo polinomial. Primeiramente provaremos que k -CLIQUE não admite núcleo polinomial através de uma PPT-redução do problema k -RAMSEY.

Teorema 7. *k -CLIQUE não admite núcleo polinomial quando a entrada é $G\bar{G}$ e k é o parâmetro, a menos que $NP \subseteq coNP/poly$.*

Demonstração. Através de uma PPT-redução do problema k -RAMSEY para k -CLIQUE, demonstraremos que k -CLIQUE não admite núcleo polinomial quando o grafo de entrada

é $G\bar{G}$ e o parâmetro é o tamanho da solução k . No problema k -RAMSEY é dado como entrada um grafo G e um inteiro positivo k e deseja-se determinar se G possui ou um conjunto independente ou uma clique de tamanho k . O problema é conhecido por não possuir núcleo polinomial a menos que $NP \subseteq coNP/poly$ [17]. Seja (G, k) uma instância do problema k -RAMSEY, construímos um prisma complementar $G\bar{G}$ onde $G\bar{G}$ possui uma clique de tamanho k se e somente se G possui uma clique ou um conjunto independente de tamanho k .

Suponha que G possui uma clique de tamanho k . Assim, por construção, é fácil ver que o prisma complementar $G\bar{G}$ possui uma clique de tamanho k em G .

Por outro lado, suponha que G possui um conjunto independente de tamanho k . Assim, por construção, é fácil ver que o prisma complementar $G\bar{G}$ possui uma clique de tamanho k em $\bar{G}$.

Considere que $G\bar{G}$ possui uma clique de tamanho k . Pela definição de prisma complementar, sabemos que a clique está totalmente contida em G ou em $\bar{G}$. Suponha que a clique esteja em $\bar{G}$. Assim, por construção, é fácil ver que G possui um conjunto independente de tamanho k . $\square$

Neste ponto, mostraremos que o problema dos Conjuntos Independentes em grafos prismas complementares também não admite núcleo polinomial. Entretanto, diferentemente de cliques, os conjuntos independentes não são tão bem comportados nos prismas complementares. Sendo assim, dividiremos essa demonstração em duas etapas. Na primeira é demonstrada uma PPT-redução do problema k -SPLIT para o problema k -CONJUNTO INDEPENDENTE. Na segunda parte é demonstrada uma PPT-redução do problema k -RAMSEY para o problema k' -SPLIT onde $k' = 3k$.

Lema 1. *k -SPLIT quando parametrizado pelo tamanho da solução k é PPT-redutível ao problema k' -CONJUNTO INDEPENDENTE tendo como grafo de entrada um prisma complementar $G\bar{G}$ e parametrizado pelo tamanho da solução $k' = k$.*

Demonstração. Provaremos que k -SPLIT se reduz em tempo polinomial ao problema k -CONJUNTO INDEPENDENTE em um prisma complementar. No problema k -SPLIT é dado um grafo G e um inteiro positivo k e deseja-se determinar se G possui um subgrafo H de cardinalidade pelo menos k tal que H seja subdividido em um conjunto independente e uma clique. A partir de um grafo G , instância do k -SPLIT criamos um grafo $G\bar{G}$ tal que G possui um subgrafo split de tamanho k se e somente se o seu prisma complementar possui um conjunto independente de tamanho k .

Suponha que G possui um subgrafo split H de tamanho k . Como H pode ser particionado em dois subgrafos $H = \{I \cup C\}$, onde I é um conjunto independente e C é uma clique, temos as seguintes possibilidades:

- i) $H = C$, portanto G possui uma clique de tamanho k . Por construção, $\bar{G}$ possui um conjunto independente de tamanho k . Logo, o prisma complementar $G\bar{G}$ possui um conjunto independente de tamanho k .
- ii) $H = I$, portanto G possui um conjunto independente de tamanho k . Logo, o prisma complementar $G\bar{G}$ possui um conjunto independente de tamanho k .
- iii) $I \neq \emptyset$ and $C \neq \emptyset$. Sem perda de generalidade, seja I um conjunto independente de cardinalidade p . Dessa forma C possui cardinalidade $k - p$. Note que assim como o conjunto independente I em G induz uma clique C' de tamanho q em $\bar{G}$, a clique C induz um conjunto independente I' de tamanho $k - q$ em $\bar{G}$ (veja figura 3.1). Portanto, $G\bar{G}$ possui uma combinação $I \cup I'$ que forma um conjunto independente de tamanho k .

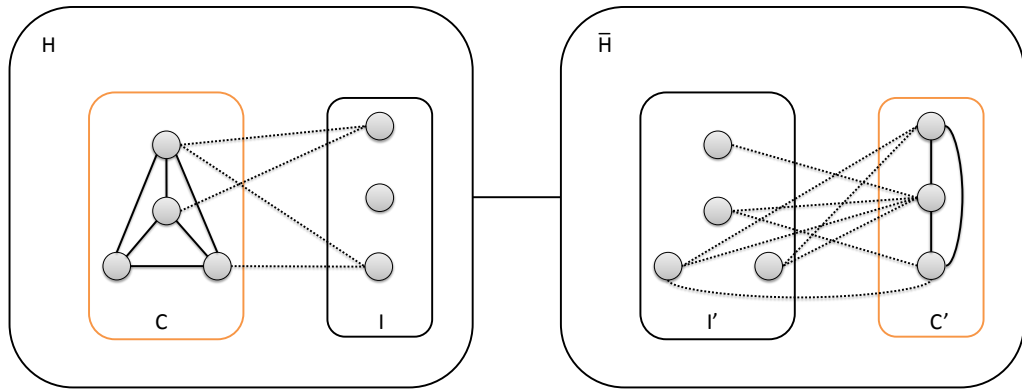


Figura 3.1: Subgrafo $H\bar{H}$ de um prisma complementar $G\bar{G}$, onde $H = (C \cup I)$, C e C' são cliques, I e I' são conjuntos independentes.

Por outro lado, suponha que um prisma complementar $G\bar{G}$ possui um conjunto independente I_p de tamanho k . Podemos então observar I' em termos de G e $\bar{G}$, portanto, temos as seguintes possibilidades:

- i) O conjunto independente $I_p \cap \bar{G} = \emptyset$, i.e., I_p está totalmente contido em G . Como todo conjunto independente é um grafo split, então G possui um grafo split de tamanho k .

- ii) O conjunto independente $I_p \cap G = \emptyset$, i.e., I_p está totalmente contido em $\bar{G}$. Pela definição de prisma complementar, G possui uma clique de tamanho k e portanto G possui um subgrafo split de tamanho k .
- iii) O conjunto independente $I_p \cap G \neq \emptyset$ e $I_p \cap \bar{G} \neq \emptyset$. Pelas propriedades de prisma complementar, e ainda, como I_p é um conjunto independente, I' não possui vértices correspondentes v_i e $\bar{v}_i$. Já que I_p possui cardinalidade k , existe um subconjunto $I' \subset I_p$ tal que $I' \cap \bar{G}$ não é vazio e I' possui cardinalidade p . Como I' é um conjunto independente, I' induz uma clique C de tamanho p em G . Portanto, é fácil ver que G possui um subgrafo split de $H = (I_p \setminus I') \cap C$ de tamanho k .

□

A redução do problema k -RAMSEY para o problema do subgrafo k -SPLIT($3k$) é formalmente apresentada a seguir:

Teorema 8. *k -RAMSEY parametrizado pelo tamanho da solução k é PPT-redutível ao k' -SPLIT parametrizado pelo tamanho da solução $k' = 3k$.*

Demonstração. Provaremos que o problema k -RAMSEY parametrizado pelo tamanho da solução k é PPT-redutível ao k' -SPLIT parametrizado pelo tamanho da solução $k' = 3k$. Considere um grafo G instância do problema k -RAMSEY, i.e., G ou possui uma clique de tamanho k ou um conjunto independente de tamanho k . Construimos uma instância H para o problema k' -SPLIT tal que $k' = 3k$ da seguinte forma (figura 3.2):

1. Faça inicialmente $G' = G \cup \bar{G}$, i.e., crie em G' uma cópia de G e insira o grafo complementar $\bar{G}$ também em G' .
2. Crie $2k$ vértices em G' e os separe em dois subgrafos (S_1 e S_2) de tamanho k .
3. Crie arestas entre todos os vértices de:
 - (a) $G'[V(G)]$ e S_1 ;
 - (b) S_1 e S_2 ;
 - (c) S_2 e $G'[V(\bar{G})]$.
4. Faça $k' = 3k$.

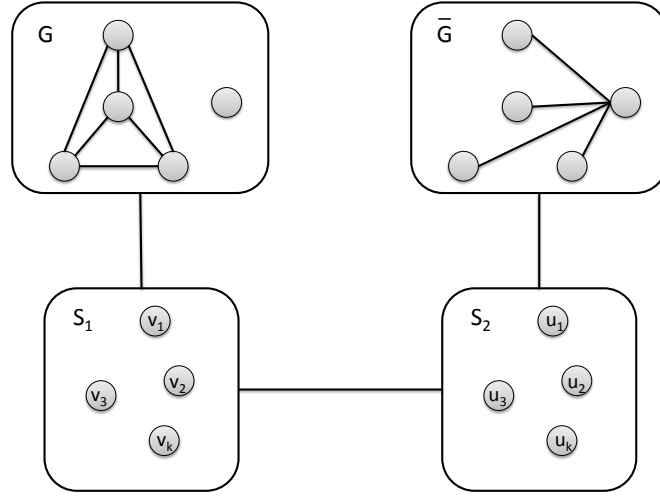


Figura 3.2: Exemplo de uma instância para o problema k -SPLIT gerada a partir de um grafo G .

Mostraremos a seguir que G possui uma clique de tamanho k ou um conjunto independente de tamanho k se, e somente se H possui um subgrafo split de tamanho k' . Suponha, sem perda de generalidade que G possui uma clique C de cardinalidade k . Construiremos um subgrafo split $H = (I' \cup C')$ onde $H \subseteq G'$ incluindo em I' (conjunto independente) os vértices em G' equivalentes a C em $\bar{G}$ e S_1 . Em C' (clique) incluir os vértices em G' equivalentes a C em G . Suponha, sem perda de generalidade que G possui um conjunto independente I de cardinalidade k . Construiremos um subgrafo split $H = (I' \cup C')$ onde $H \subseteq G'$ incluindo em I' (conjunto independente) os vértices em G' equivalentes a I em G e S_2 . Em C' (clique) incluir os vértices em G' equivalentes a C em $\bar{G}$.

Por outro lado suponha que G' possui um subgrafo split H de tamanho k' . Como H é uma partição IUC , e G' é dividido em quatro subgrafos, temos as seguintes possibilidades:

- i) O conjunto independente I possui cardinalidade menor que $2k$. Sem perda de generalidade suponha $k > 2$. Dessa forma, a clique C deve ter cardinalidade pelo menos $k + 1$. Já que vértices de G não são adjacentes a $\bar{G}$, S_1 e S_2 são conjuntos independentes e $G'[S_1 \cup S_2]$ é um $K_{k,k}$, a clique C contém no máximo um vértice de $G'[S_1 \cup S_2]$. Portanto, uma clique em G' deve possuir pelo menos $|C| - 1$ vértices ou em $G'[V(G)]$ ou em $G'[V(\bar{G})]$ e portanto C induz ou uma clique ou um conjunto independente de tamanho pelo menos k em G .
- ii) O conjunto independente I possui cardinalidade pelo menos $2k$.

- (a) Supondo que $I \cap (S_1 \cup S_2) = \emptyset$, i.e., não existem vértices do conjunto independente I em S_1 ou S_2 . Assim, é fácil ver que os vértices de I em G' ; ou induzem um conjunto independente de tamanho $|I|$ se I está em $G'[V(G)]$; ou uma clique de tamanho $|I|$ se I está em $G'[V(\bar{G})]$; ou um subgrafo split de tamanho $|I|$ com uma clique de tamanho q se os vértices de I estão em $G'[V(G)]$; ou um conjunto independente de tamanho $|I| - q$ se os vértices de I estiverem em $G'[V(\bar{G})]$.
- (b) Supondo que $I \cap (S_1 \cup S_2) \neq \emptyset$, i.e. existem vértices do conjunto independente I em S_1 ou S_2 . Como $G'[S_1 \cup S_2]$ é um $K_{k,k}$, se existe vértice de S_1 em I não existe de S_2 e vice versa. Ainda, note que S_1 e S_2 tem cada um cardinalidade k . Além disso, existe um subconjunto $I_1 = (I \cap G'[G \cup \bar{G}])$ tal que é fácil obter um subgrafo split em G de cardinalidade pelo menos k analogamente a $i.(a)$.

□

Corolário 1. k -CONJUNTO INDEPENDENTE quando o grafo de entrada é $G\bar{G}$ e o parâmetro é o tamanho da solução k não admite núcleo polinomial, a menos que $NP \subseteq coNP/poly$.

Demonstração. Através do Lema 1 e Teorema 8, temos que k -RAMSEY é PPT redutível ao problema k' -CONJUNTO INDEPENDENTE quando o grafo de entrada é um prisma complementar e o parâmetro é o tamanho da solução $k' = 3k$, portanto, não admite um núcleo polinomial. □

Mostramos que o problema de determinar se um grafo prisma complementar $G\bar{G}$ possui um conjunto independente de tamanho k não possui um núcleo polinomial pelas propriedades transitivas das PPT-reduções (figura 3.3).

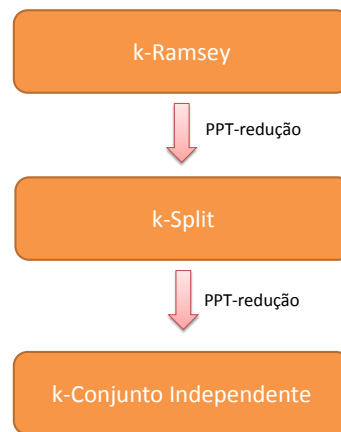


Figura 3.3: PPT-reduções de k -RAMSEY ao Conjunto Independente em grafos prisma complementar.

Capítulo 4

2-Contaminação

O problema de 2-contaminação consiste em determinar o menor número de vértices a serem infectados inicialmente para garantir que um dado grafo G tenha todos os seus vértices infectados em algum instante de tempo, onde um determinado vértice torna-se infectado caso pelo menos 2 dos seus vizinhos estejam previamente infectados. A contaminação é irreversível e ocorre ao longo do tempo. Além disso, o processo encerra-se quando o conjunto de vértices infectados não puder ser incrementado.

Um conjunto 2-contaminação também é conhecido na literatura como um conjunto P_3 -envoltório ou conjunto de 2-conversão irreversível. [16] [10] [30].

Em [16] foi provado que o tamanho mínimo de um conjunto 2-contaminação em um grafo prisma complementar era $k + 1$ quando G é composto por k componentes conexas. Neste mesmo estudo, Duarte et al. mostraram que o tamanho mínimo de um conjunto 2-contaminação em um grafo prisma complementar era ≤ 5 quando G e $\bar{G}$ são conexos.

No presente capítulo, extendendo o resultado obtido em [16], mostraremos que o tamanho mínimo deste conjunto é ≤ 3 quando G e $\bar{G}$ são conexos.

Seja G um grafo e $S \subseteq V(G)$. Denotaremos por $C_G(S)$ o conjunto de vértices que serão infectados a partir de uma infecção inicializada pelos vértices em S . Denotaremos por $c_{min}(G\bar{G})$ o conjunto mínimo de vértices que devem ser infectados inicialmente a fim de infectar todo o prisma $G\bar{G}$ em um determinado instante de tempo.

Inicialmente, mostraremos através do Lema 2 que se G e $\bar{G}$ são conexos e existem 2 vértices em G que estão infectados e $|C_G(S)| \geq |V(G)| - 1$ então o conjunto mínimo para infectar o prisma $G\bar{G}$ é no máximo 3.

Lema 2. *Se G e $\bar{G}$ são conexos e existe $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| = 2$ e $|C_G(S)| \geq |V(G)| - 1$*

então $c_{min}(G\bar{G}) \leq 3$.

Demonstração. Sejam G e $\bar{G}$ conexos. Se existe $S \subseteq V(G)$ tal que $|S| = 2$ e $|C_G(S)| \geq |V(G)| - 1$ então temos dois casos:

- (i) $V(G) \setminus C_G(S) = \{w\}$;
- (ii) $V(G) \setminus C_G(S) = \emptyset$.

Se $V(G) \setminus C_G(S) = \{w\}$ basta observar que $C_{G\bar{G}}(S \cup \{\bar{w}\}) = V(G\bar{G})$. Primeiramente observe que w é vizinho de $\bar{w}$ e de algum vértice em $C_G(S)$, uma vez que G é conexo, portanto $w \in C_{G\bar{G}}(S \cup \{\bar{w}\})$. Logo $V(G) \subset C_{G\bar{G}}(S \cup \{\bar{w}\})$. Como todo vértice em $V(\bar{G})$ possui um vizinho em $V(G)$ no prisma complementar $G\bar{G}$, $V(G) \subset C_{G\bar{G}}(S \cup \{\bar{w}\})$, então basta termos um vértice de $\bar{G}$ infectado que, por conectividade, teremos todos os vértices de $\bar{G}$ infectados em algum momento. Como $\bar{w}$ é um vértice de $\bar{G}$ temos que $C_{G\bar{G}}(S \cup \{\bar{w}\}) = V(G\bar{G})$.

Se $V(G) \setminus C_G(S) = \emptyset$ então $C_{G\bar{G}}(S \cup \{\bar{w}\}) = V(G\bar{G})$, onde $\bar{w}$ é um vértice qualquer de $\bar{G}$. A prova é similar ao caso anterior. $\square$

Corolário 2. Se G e $\bar{G}$ são conexos e $|V(G)| \leq 4$ então $c_{min}(G\bar{G}) \leq 3$.

Demonstração. Se G e $\bar{G}$ são grafos conexos e $|V(G)| \leq 4$ então $|V(G)| = 1$ ou $|V(G)| = 4$. Se $|V(G)| = 1$ é fácil ver que temos o desejado. Se $|V(G)| = 4$ sabemos que G possui pelo menos um vértice com grau ≥ 2 pois, caso contrário, ou G seria isomorfo a um $2K_2$ ou possuiria um vértice com grau 0. Assuma que a, b e c são vértices de G , onde a e c são vizinhos de b (veja figura 4.1). Sendo $S = \{a, c\}$ temos que $|C_G(S)| \geq |V(G)| - 1$ pois $\{a, b, c\} \subseteq C_G(S)$ e $|V(G)| = 4$. Logo pelo Lema 2 temos que $c_{min}(G\bar{G}) \leq 3$. $\square$

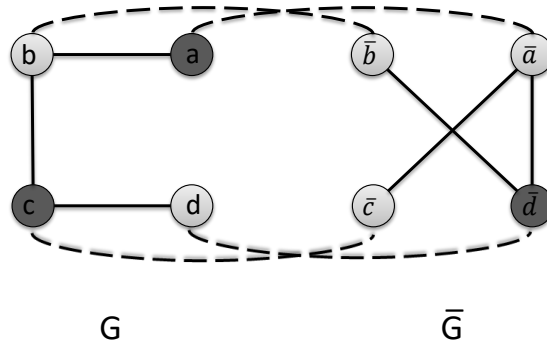


Figura 4.1: Prisma $G\bar{G}$ e $c_{min}(G\bar{G}) = \{a, c, \bar{d}\}$

Agora mostraremos que $c_{min}(G\bar{G})$ é no máximo 3 quando $|V(G)| = 5$.

Lema 3. *Se G e $\bar{G}$ são conexos e $|V(G)| = 5$ então $c_{min}(G\bar{G}) \leq 3$.*

Demonstração. Sejam G e $\bar{G}$ grafos conexos, onde $|V(G)| = 5$. Dividiremos esse prova em dois casos:

(i) G possui ciclo;

(ii) G e $\bar{G}$ são acíclicos. Note que o caso em que G é acíclico e $\bar{G}$ possui ciclo não precisa ser analisado, pois recai no caso (i).

(i) Supondo que G é conexo e possui ciclo temos três subcasos:

G possui C_3 - Se G possui C_3 , como G é conexo e $|V(G)| = 5$ então G possui uma pata como subgrafo. Seja H um subgrafo de G isomorfo a uma pata. Como podemos ver na Figura 4.2, $c_{min}(H) = 2$. Dado $c_{min}(H) = 2$ e $|V(H)| = 4$ e $|V(G)| = 5$ então existe $S \subseteq V(H)$ tal que $|S| = 2$ e $|C_G(S)| \geq |V(G)| - 1$. Pelo Lema 2 temos que $c_{min}(G\bar{G}) \leq 3$ se G é conexo e possui C_3 .

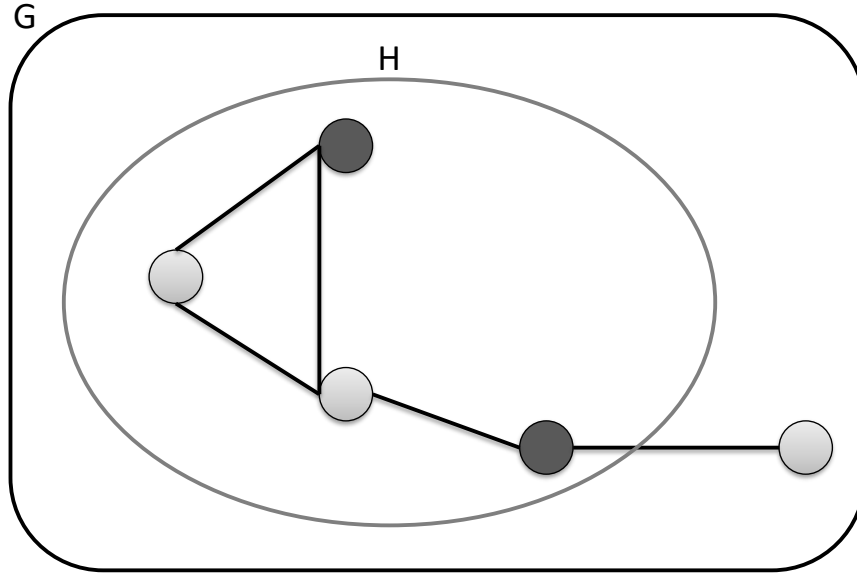
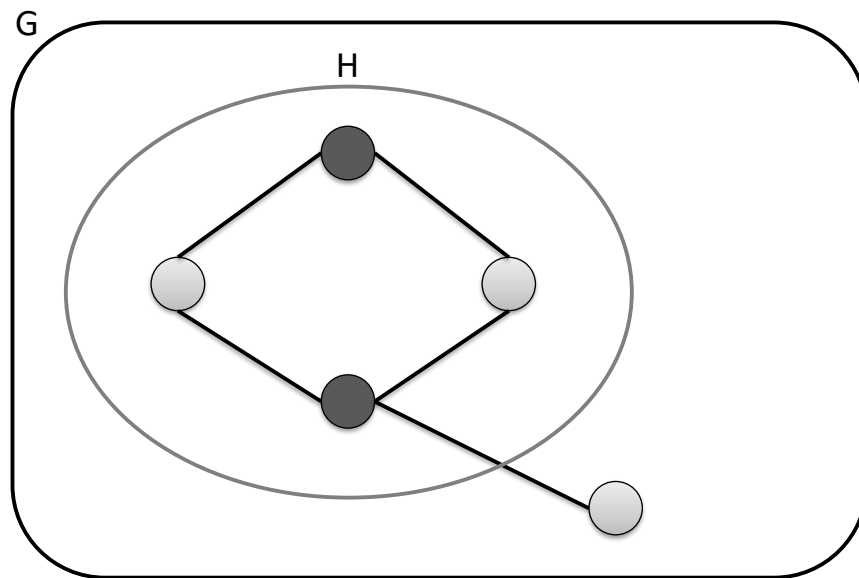
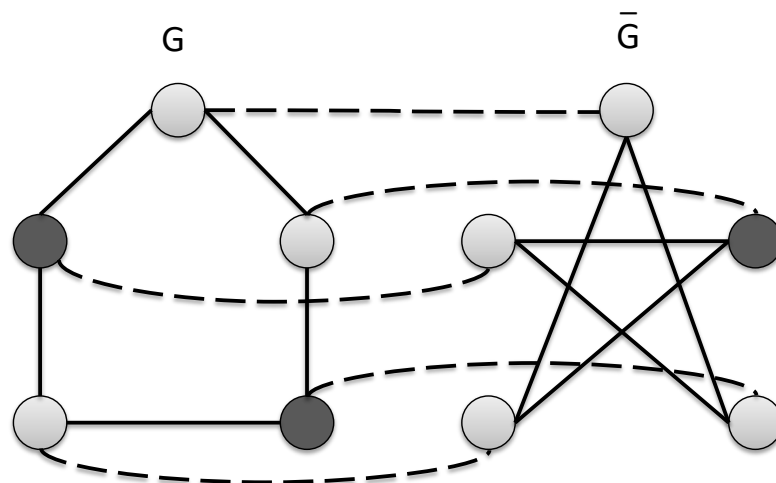


Figura 4.2: Grafo G e subgrafo H

G possui C_4 Seja H um subgrafo de G isomorfo a um C_4 . Como podemos ver na Figura 4.3, $c_{min}(H) = 2$. Dado $c_{min}(H) = 2$ e $|V(H)| = 4$ e $|V(G)| = 5$ então existe $S \subseteq V(H)$ tal que $|S| = 2$ e $|C_G(S)| \geq |V(G)| - 1$. Pelo Lema 2 temos que $c_{min}(G\bar{G}) \leq 3$ se G é conexo e possui C_4 .

Figura 4.3: Grafo G e subgrafo H

G possui C_5 Podemos assumir que G é isomorfo a um C_5 , caso contrário G possui C_4 e C_3 . Neste caso, $c_{\min}(G\bar{G}) \leq 3$ como pode ser verificado na Figura 4.4.

Figura 4.4: Grafo $G\bar{G}$

(ii) Se G e $\bar{G}$ são conexos e acíclicos então G e $\bar{G}$ são árvores. Toda árvore possui pelo menos duas folhas. Logo G possui pelo menos dois vértices de grau 1 e pelo menos dois vértices de grau $|V(G)| - 1$ (as folhas no complemento). Sejam a e b dois vértices de

grau um em G , e sejam $\bar{a}$ e $\bar{b}$ dois vértices de grau $|V(G)| - 1$ em G . Sabemos que $\bar{a}$ e $\bar{b}$ devem ser adjacentes, caso contrário G seria desconexo. Além disso, $\bar{a}$ e $\bar{b}$ possuem um vizinho em comum, caso contrário G possui apenas 4 vértices. Logo, G possui um C_3 , contradizendo a hipótese de G ser acíclico. Portanto, o caso onde G e $\bar{G}$ são conexos e acíclicos não ocorre. $\square$

Mostraremos agora que $c_{min}(G\bar{G})$ é no máximo 3 quando $|V(G)| = 6$.

Lema 4. *Se G e $\bar{G}$ são conexos e $|V(G)| = 6$ então $c_{min}(G\bar{G}) \leq 3$.*

Demonstração. Sejam G e $\bar{G}$ grafos conexos, onde $|V(G)| = 6$. Sejam $u, v \in V(G)$. Dividiremos esse prova em três casos:

- (i) Quando $|C_G(\{u, v\})| \geq 5$;
- (ii) Quando $|C_G(\{u, v\})| = 4$;
- (iii) Quando $|C_G(\{u, v\})| = 3$;

- (i) Se existe $u, v \in V(G)$ tal que $|C_G(\{u, v\})| \geq 5$, então pelo Lema 2 temos o desejado.
- (ii) Supondo que existe $u, v \in V(G)$ tal que $|C_G(\{u, v\})| = 4$ e o caso (i) não se aplica, então existe $a, b \in V(G)$, onde $a, b \notin C_G(\{u, v\})$ (Figura 4.5). Portanto, tanto a quanto b possuem no máximo um vizinho em $C_G(\{u, v\})$. Sendo assim, $\bar{a}$ e $\bar{b}$ possuem pelo menos 3 vizinhos em $\overline{C_G(\{u, v\})}$. Como $|\overline{C_G(\{u, v\})}| = 4$ então $\bar{a}$ e $\bar{b}$ possuem pelo menos 2 vizinhos em comum. Logo, $C_{G\bar{G}}(\{u, v, \bar{a}\}) \supseteq V(G\bar{G})$, pois $\{a, b\} \subseteq C_{G\bar{G}}(\{u, v, \bar{a}\})$.

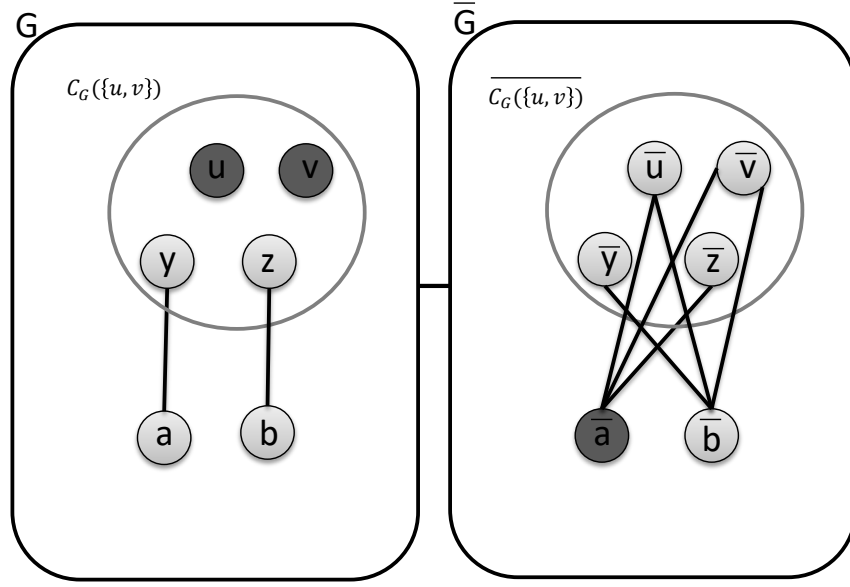


Figura 4.5: Grafo $G\bar{G}$ quando $|V(G)| = 6$ e $|C_G(\{u, v\})| = 4$

(iii) Suponha que (i) e (ii) não se aplicam. Sabendo que G é conexo, temos que existem u, v tal que $|C_G(\{u, v\})| = 3$. Logo existem $a, b, c \in V(G)$ que não pertencem a $C_G(\{u, v\})$. Portanto, a, b, c possuem, cada um, no máximo 1 vizinho em $C_G(\{u, v\})$. Sendo assim, temos 3 subcasos:

- a) a não possui vizinhos em $C_G(\{u, v\})$ (Figura 4.6). Neste caso, $C_{G\bar{G}}(\{u, v, \bar{a}\}) = V(G\bar{G})$.

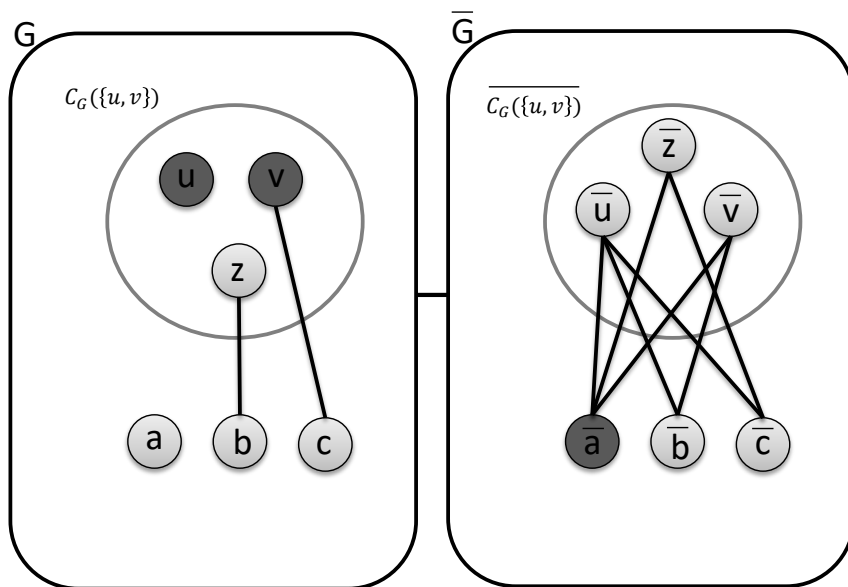


Figura 4.6: Grafo $G\bar{G}$ quando $|V(G)| = 6$ e $|C_G(\{u, v\})| = 3$

- b) a, b, c possuem vizinhos distintos em $C_G(\{u, v\})$. Se a, b, c induzem um triângulo, então $C_{G\bar{G}}(\{u, v, \bar{a}\}) = V(G\bar{G})$, pois $V(G) \subseteq C_{G\bar{G}}(\{u, v, \bar{a}\})$. Caso contrário, sem perda de generalidade, $\bar{a}$ e $\bar{b}$ são adjacentes e possuem vizinho em comum em $\overline{C_G(\{u, v\})}$. Logo, $C_{G\bar{G}}(\{u, v, \bar{a}\}) = V(G\bar{G})$. (Veja figura 4.7).

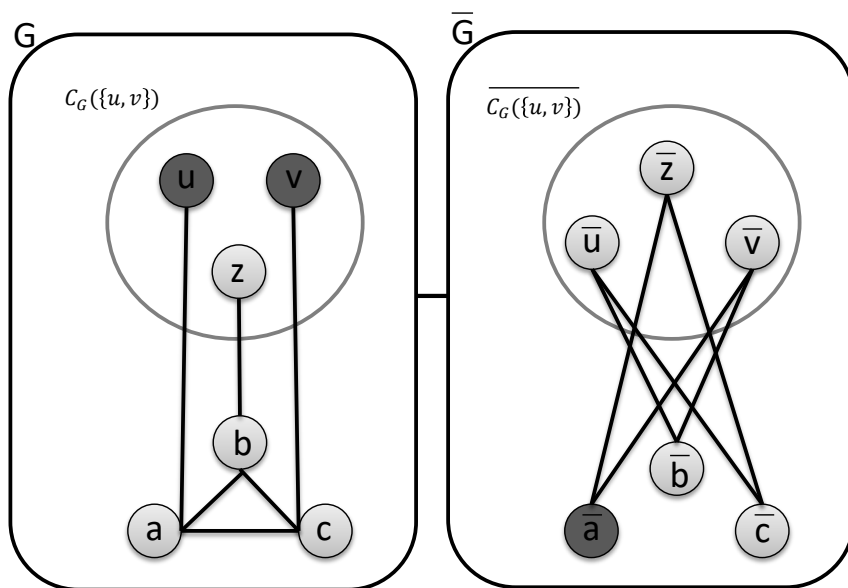


Figura 4.7: Grafo $G\bar{G}$ quando $|V(G)| = 6$ e $|C_G(\{u, v\})| = 3$

- c) cada vértice em a, b, c possui exatamente 1 vizinho em $C_G(\{u, v\})$, sendo o

vizinho de a e b o mesmo vértice, então $|C_{\bar{G}}(\{\bar{a}, \bar{b}\})| \geq 4$. Logo, caso (i) ou (ii) se aplicam. (Veja figura 4.8).

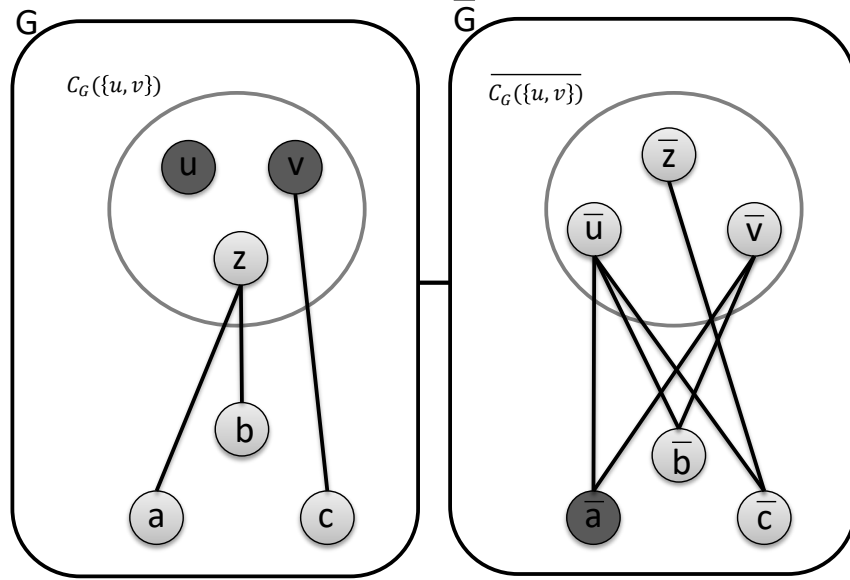


Figura 4.8: Grafo $G\bar{G}$ quando $|V(G)| = 6$ e $|C_G(\{u, v\})| = 3$

□

Lema 5. Se G e $\bar{G}$ são conexos e $|V(G)| \geq 7$ então ou G possui um par (a, b) tal que $|C_G(\{a, b\})| \geq 4$ ou $\bar{G}$ possui um par $(\bar{a}, \bar{b})$ tal que $|C_{\bar{G}}(\{\bar{a}, \bar{b}\})| \geq 4$.

Demonstração. Seja G um grafo conexo e $|V(G)| \geq 7$. Como G é conexo, existe em G pelo menos um par de vértices que possui um vizinho em comum. Sejam a e b estes dois vértices. Se $|C_G(\{a, b\})| \geq 4$ temos o desejado. Se $|C_G(\{a, b\})| = 3$ então $C_G(\{a, b\}) = \{a, b, c\}$ onde c é o vizinho em comum entre a e b (Figura 4.9). Como $|C_G(\{a, b\})| = 3$ todos os demais vértices de G possuem no máximo um vizinho em $C_G(\{a, b\})$. Logo, todo vértice em $V(\bar{G}) \setminus \overline{C_G(\{a, b\})}$ possui pelo menos dois vizinhos em $\overline{C_G(\{a, b\})}$. Como $|V(G)| \geq 7$ então pelo menos dois vértices em $V(\bar{G}) \setminus \overline{C_G(\{a, b\})}$ possuem dois vizinhos em comum em $\overline{C_G(\{a, b\})}$. Portanto, $\bar{G}$ possui um par de vértices cuja envoltória é pelo menos 4.

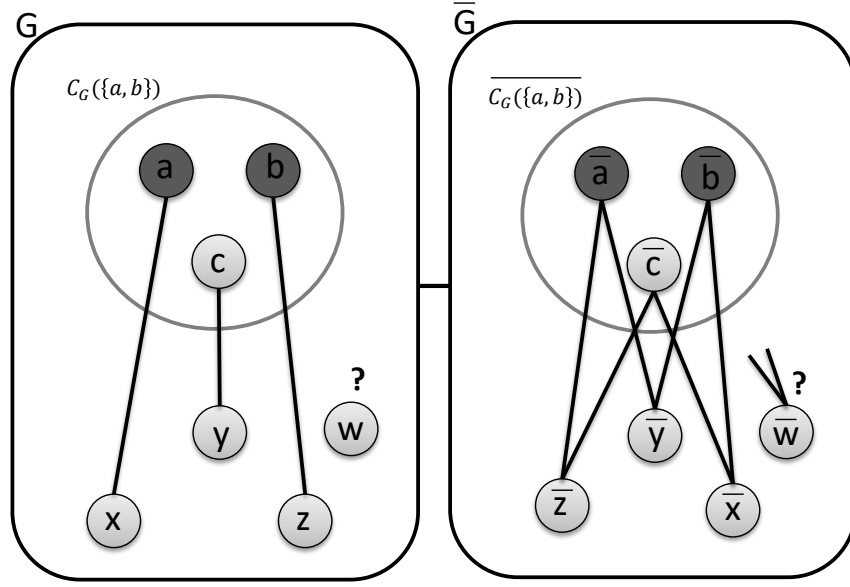


Figura 4.9: Grafo $G\bar{G}$ quando $|V(G)| = 7$

□

Teorema 9. Se G e $\bar{G}$ são conexos e $|V(G)| \geq 4$, então $c_{\min}(G\bar{G}) = 3$.

Demonstração. Sejam G e $\bar{G}$ grafos conexos. Para $|V(G)| = 1$ temos que $c_{\min}(G\bar{G}) = 2$ pois, para que um vértice seja infectado é necessário que pelo menos dois vizinhos seus estejam infectados e como cada vértice só possui um vizinho, cada um deles deve ser infectado para atingir todo o grafo $G\bar{G}$. Para $|V(G)| = 2$ e $|V(G)| = 3$ não há como analisar pois, em ambos os casos, quando G é conexo implica em $\bar{G}$ ser desconexo, contradizendo a hipótese. Para $4 \leq |V(G)| \leq 6$ temos o Corolário 2, o Lema 3 e o Lema 4 mostrando que $c_{\min}(G\bar{G}) = 3$ nestes casos. Para $|V(G)| \geq 7$ suponha que a e b sejam dois vértices de G tal que $|C_G(\{a, b\})| \geq 4$. Logo, para todo vértice $c \notin C_G(\{a, b\})$ temos que $\bar{c}$ possui no máximo um não vizinho em $\overline{C_G(\{a, b\})}$. Portanto, $\overline{C_{G\bar{G}}(\{a, b, \bar{c}\})} \supseteq V(G\bar{G})$. (Veja Figura 4.10)

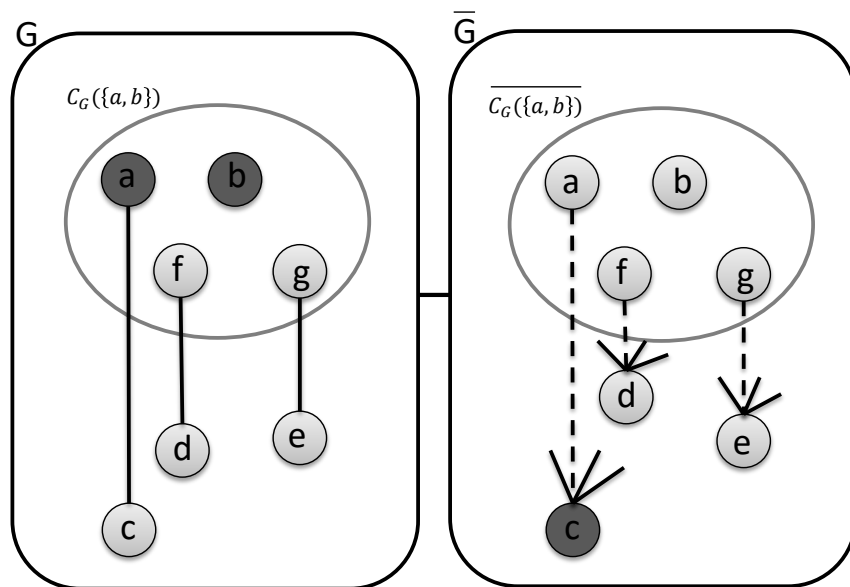


Figura 4.10: Grafo $G\bar{G}$ quando $|V(G)| = 7$

Dessa forma, através das demonstrações apresentadas mostramos que o tamanho mínimo do conjunto 2-conversão irreversível para que um grafo prisma complementar seja totalmente contaminado é no máximo 3.

□

Capítulo 5

Conclusões e Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos o problema de k -CLIQUE e k -CONJUNTO INDEPENDENTE tendo como entrada a classe de grafos prisma complementar. Tais problemas foram provados NP-completos por [23] para grafos gerais. Em [16] foi provado que ambos os problemas são NP-completos em grafos prismas complementares.

Ao estudarmos, sob a ótica da complexidade parametrizada, utilizando como ferramenta a Teoria de Ramsey, mostramos que tanto o problema k -CLIQUE quanto o problema k -CONJUNTO INDEPENDENTE em grafos prismas complementares pertencem à classe FPT quando parametrizados pelo tamanho da solução k , ou seja, são Tratáveis por Parâmetro Fixo.

Além disso, através de PPT-reduções mostramos que ambos os problemas não admitem um núcleo polinomial. É interessante evidenciar que a inviabilidade de núcleo polinomial para o problema k -CONJUNTO INDEPENDENTE quando parametrizado pelo tamanho da solução k foi obtida de forma transitiva a partir do problema intermediário k -SPLIT. Sendo assim, o problema de determinar se um grafo possui um subgrafo split de cardinalidade k é FPT a menos que $NP \subseteq coNP/poly$ e também não possui núcleo polinomial.

Além dos problemas k -CLIQUE e k -CONJUNTO INDEPENDENTE para grafos prismas complementares, também estudamos o problema do conjunto 2-conversão irreversível para esta classe de grafos. Mostramos que o tamanho mínimo do conjunto 2-conversão irreversível para que um grafo prisma complementar seja totalmente contaminado é ≤ 3 .

Referências

- [1] ALBER, J., FELLOWS, M. R., NIEDERMEIER, R. Polynomial-time data reduction for dominating set. *Journal of the ACM (JACM)* 51, 3 (2004), 363–384.
- [2] BERTOSSI, A. A. Dominating sets for split and bipartite graphs. *Information processing letters* 19, 1 (1984), 37–40.
- [3] BODLAENDER, H. L., DOWNEY, R. G., FELLOWS, M. R., HERMELIN, D. On problems without polynomial kernels. *Journal of Computer and System Sciences* 75, 8 (2009), 423–434.
- [4] BODLAENDER, H. L., PENNINKX, E. A linear kernel for planar feedback vertex set. In *International Workshop on Parameterized and Exact Computation* (2008), Springer, p. 160–171.
- [5] BODLAENDER, H. L., PENNINKX, E., TAN, R. B. A linear kernel for the k-disjoint cycle problem on planar graphs. In *International Symposium on Algorithms and Computation* (2008), Springer, p. 306–317.
- [6] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. *Graph theory with applications*, vol. 290. Macmillan, 1976.
- [7] BONSMÀ, P. S., BRUEGGEMANN, T., WOEGINGER, G. J. A faster fpt algorithm for finding spanning trees with many leaves. In *International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science* (2003), Springer, p. 259–268.
- [8] CAPPELLE, M. R., PENSO, L., RAUTENBACH, D. Recognizing some complementary products. *Theoretical Computer Science* 521 (2014), 1–7.
- [9] CARNEIRO, A. D. A., PROTTI, F., SOUZA, U. D. S. Resolução de deadlocks: Complexidade e tratabilidade parametrizada.
- [10] CENTENO, C. C., DOURADO, M. C., PENSO, L. D., RAUTENBACH, D., SZWARCFITER, J. L. Irreversible conversion of graphs. *Theoretical Computer Science* 412, 29 (2011), 3693–3700.
- [11] CLEMENS, D., JENSSEN, M., KOHAYAKAWA, Y., MORRISON, N., MOTA, G. O., REDING, D., ROBERTS, B. Numero de ramsey relativo a arestas de potências de caminhos.
- [12] CYGAN, M., FOMIN, F. V., KOWALIK, Ł., LOKSHTANOV, D., MARX, D., PILIPCZUK, M., PILIPCZUK, M., SAURABH, S. *Parameterized algorithms*, vol. 3. Springer, 2015.

- [13] DOWNEY, R. G., FELLOWS, M. R. Parameterized complexity. *Monogr. Comput. Sci. Springer, New York* 87 (1999).
- [14] DOWNEY, R. G., FELLOWS, M. R. *Parameterized complexity*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [15] DUARTE, M. A., OTHERS. Sobre convexidade em prismas complementares.
- [16] DUARTE, M. A., PENSO, L., RAUTENBACH, D., DOS SANTOS SOUZA, U. Complexity properties of complementary prisms. *Journal of Combinatorial Optimization* 33, 2 (2017), 365–372.
- [17] ERDÖS, P., SZEKERES, G. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematica* 2 (1935), 463–470.
- [18] FLUM, J., GROHE, M. *Parameterized complexity theory*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [19] FOLDES, S., HAMMER, P. L. Split graphs having dilworth number two. *Canad. J. Math* 29, 3 (1977), 666–672.
- [20] FORTNOW, L., SANTHANAM, R. Infeasibility of instance compression and succinct pcps for np. *Journal of Computer and System Sciences* 77, 1 (2011), 91–106.
- [21] HAYNES, T. W., HENNING, M. A., SLATER, P. J., VAN DER MERWE, L. C. The complementary product of two graphs. *Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications* 51 (2007), 21–30.
- [22] ITACARAMBI, R. R., BERTON, I. D. C. B. *Geometria, brincadeira e jogos*. Editora Livraria da Física, 2008.
- [23] KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of computer computations*. Springer, 1972, p. 85–103.
- [24] KRATSCH, S. Co-nondeterminism in compositions: a kernelization lower bound for a ramsey-type problem. *ACM Transactions on Algorithms (TALG)* 10, 4 (2014), 19.
- [25] LI, W., CHEN, J. Endomorphism-regularity of split graphs. *European Journal of Combinatorics* 22, 2 (2001), 207–216.
- [26] MEIERLING, D., PROTTI, F., RAUTENBACH, D., DE ALMEIDA, A. R. Cycles in complementary prisms. *Discrete Applied Mathematics* 193 (2015), 180–186.
- [27] NIEDERMEIER, R. Invitation to fixed-parameter algorithms.
- [28] RADZISZOWSKI, S. P., OTHERS. Small ramsey numbers. *Electron. J. Combin* 1, 7 (1994).
- [29] RAMSEY, F. On a problem of formal logic. p* oc london math. *Sc, 2rid Set* 30 (1930).
- [30] ROBERTS, F. S. Irreversible-threshold processes: Graph-theoretical threshold models of the spread of disease and of opinion paul a. dreyer, jr. the rand corporation santa monica, ca.

-
- [31] SANCHES, J., CARMELO, E. L. Número de ramsey multicolorido em grafos multipartidos. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics* 3, 1 (2015).
 - [32] SANTOS, V. F. D., SOUZA, U. D. S. Uma introdução à complexidade parametrizada.
 - [33] SIQUEIRA, A. S. *Coloração total equilibrada em subfamílias de grafos regulares*. Tese de Doutorado, Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, 2011.